Otakar Borůvka

Sur les surfaces représentées par les fonctions sphériques de première espèce

C. R. Acad. Sci. Paris t. 190, 1930, 1336-1338

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500020

GÉOMÉTRIE. — *Sur les surfaces représentées par les fonctions sphériques de première espèce.* Note [1] de M. O. Borůvka.

1. Les surfaces plongées dans un espace à $2r$ dimensions ($r \geq 2$) dont la représentation paramétrique est fournie par $2r+1$ fonctions sphériques de première espèce d'ordre r, dans la géométrie projective, font partie d'une classe plus étendue de surfaces qui ont été rencontrées, par leur construction géométrique, en relation avec la théorie des réseaux à invariants égaux [2]; dans la géométrie métrique, elles se sont présentées récemment dans les recherches de M. E. Cartan, sur les espaces de Riemann symétriques clos, comme les surfaces représentatives de l'espace sphérique à deux dimensions [3]. Ayant étudié les propriétés géométriques des surfaces en question, je me permets de résumer les résultats que j'ai obtenus à ce sujet.

2. Considérons l'espace projectif réel S_{2r} à $2r$ dimensions ($r>2$). La surface réelle (M) plongée dans S_{2r}, dont la représentation paramétrique est fournie par $2r+1$ fonctions sphériques de première espèce, linéairement indépendantes, d'ordre r, peut être définie par la construction géométrique suivante : On prend, dans S_{2r}, une courbe rationnelle normale de degré $2r$, imaginaire (c'est-à-dire dont les points sont imaginaires conjugués deux à deux et la courbe n'a pas des points réels) quelconque (courbe génératrice); on construit, en chaque couple de points imaginaires conjugués de cette courbe, les deux espaces osculateurs à r dimensions; il existe un point d'intersection (réel) de ces deux espaces et il dépend de deux paramètres réels; la surface (M) est le lieu de ce point d'intersection. Cette construction géométrique montre que la surface en question est douée d'un réseau conjugué (imaginaire) à invariants égaux et ce réseau se termine, dans les deux sens, après r transformations successives de Laplace,

---

[1] Séance du 2 avril 1930.

[2] Voir par exemple G. Tzitzéica, *Géom. proj. diff. des reseaux* (Bucarest, 1924), p. 161.

[3] E. Cartan, *Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos* (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, 53, 1929, p. 217).

précisément sur la courbe génératrice. Par la construction géométrique se trouve liée, à la surface (M), d'une manière intrinsèque, une quadrique non dégénérée imaginaire (la quadrique associée) à savoir la quadrique par rapport à laquelle la courbe génératrice est autoconjuguée. Si l'on fait correspondre aux valeurs du paramètre sur la courbe génératrice les points de la sphère, la construction géométrique de la surface donne naissance à une correspondance biunivoque $\mathcal{R}$ entre couples de points-antipodes de la sphère et les points de la surface; cette correspondance est telle que chaque rotation de la sphère autour du centre, accompagnée ou non par symétrie, se manifeste sur la surface par un déplacement de l'espace S_{2r} qui conserve la quadrique associée et, inversement, chaque déplacement de l'espace S_{2r} qui conserve la surface (et par suite aussi la quadrique associée) se manifeste sur la sphère par une rotation de la sphère autour du centre accompagnée ou non par symétrie. Dans la correspondance $\mathcal{R}$, à chaque cercle de la sphère correspond sur la surface une courbe rationnelle fermée. Aux grands cercles correspondent des courbes rationnelles normales de degré r; aux petits cercles correspondent en général des courbes rationnelles normales de degré $2r$, mais il y a des exceptions. Toutes les propriétés locales, de nature projective, de la surface (d'une courbe rationnelle sur la surface, image d'un cercle sur la sphère dans la correspondance $\mathcal{R}$) qui se conservent par le groupe de déplacements de l'espace S_{2r}, ou bien seulement par son sous-groupe qui conserve la quadrique associée, sont les mêmes en tous points de la surface (courbe). Dans la correspondance $\mathcal{R}$, prolongée dans le domaine complexe, en particulier, au cercle à l'infini sur la sphère correspond la courbe génératrice sur la surface. Il n'y a sur la surface qu'une seule courbe génératrice.

3. Introduisons dans l'espace S_{2r} une métrique non euclidienne en prenant comme absolu la quadrique associée à la surface (M). Nous avons un espace sphérique ou elliptique à $2r$ dimensions et nous nous trouvons en relation avec les recherches de M. E. Cartan : La surface (M) représente l'espace sphérique (ou elliptique) à deux dimensions, de manière qu'il y a une correspondance biunivoque $\mathcal{R}^*$ entre les points de cet espace, les points de la surface et les déplacements de l'espace sphérique (ou elliptique) à deux dimensions se manifestent sur la surface par les déplacements de l'espace ambiant. Dans la correspondance $\mathcal{R}^*$, aux droites et circonférences du centre m de l'espace sphérique (ou elliptique) à deux dimensions correspondent sur la surface géodésique et trajectoires orthogonales aux géodésiques passant par le point M correspondant. Les résultats relatifs à ces courbes sont analogues à ceux qui ont été mentionnés au sujet des courbes

rationnelles, images des cercles sur la sphère dans la correspondance $\mathcal{R}$. Quant aux propriétés locales caractéristiques, elles sont fournies par le théorème suivant : Pour qu'une surface plongée dans un espace non euclidien à $2r$ ($r \geqq 2$) dimensions soit la surface (M) considérée, il faut et il suffit que, pour chaque point M : 1° le vecteur de courbure moyenne soit nul (la surface soit minima); 2° pour $k = 1, \ldots, r$, l'espace osculateur à la surface d'ordre k ait précisément $2k$ dimensions; 3° pour $k = 1, \ldots, r-1$, le cône des vecteurs issus du point M et associés aux différentes courbes tracées sur la surface et passant par M, de manière à porter, au point M, dans la direction de la $k^{\text{ième}}$ normale de chaque courbe, le produit de ses premières k courbures scalaires successives, se projette dans le plan qui est normal à l'espace osculateur (de la surface) d'ordre k et contenu dans l'espace osculateur d'ordre $k+1$, suivant une circonférence et que le rayon de cette circonférence soit le même pour toute la surface.

4. Les surfaces minima plongées dans l'espace non euclidien à quatre et six dimensions et appartenant à cet espace qui jouissent de la propriété que toutes leurs courbes ont la même courbure normale constante sont toutes et seules les surfaces représentées par les fonctions sphériques de première espèce, de deuxième et troisième ordre.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 190, p. 1336, séance du 11 juin 1930.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
89509-30 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.