43. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie C

In: Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Pavel Leischner (editor); Jozef Moravčík (editor); Jaromír Šimša (editor); Pavel Töpfer (editor): 43. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1993/1994. 35. mezinárodní matematická olympiáda. 6. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2016. pp. 21–33.

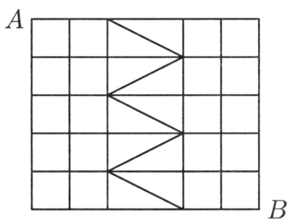
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405235

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

Pavouk Hubert usoukal pavučinu, jejíž tvar je vyznačen na obr. 1. Po práci se oddal zaslouženému odpočinku v jednom rohu pavučiny (A),



Obr. 1

když tu se najednou v protějším rohu (B) chytla moucha. Kolik cest nejkratší délky spojujících tyto dva rohy má Hubert k dispozici?

(*P. Leischner*)

C – I – 2

Najděte všechny dvojice přirozených čísel m a n, pro které platí

$$m!n! = (mn)^2.$$

(Číslo $m!$ je součin všech přirozených čísel i, $1 \leqq i \leqq m$, $1! = 1$.)

(*J. Šimša*)

C – I – 3

Šachového turnaje hraného systémem každý s každým se zúčastnili pouze prváci a druháci. Ačkoliv druháků bylo třikrát víc než prváků, získali dohromady pouze o 3 body víc než prváci. Kolik žáků se zúčastnilo turnaje?

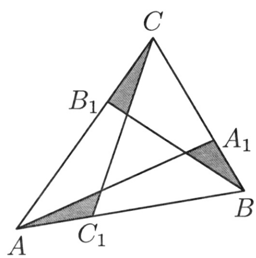
(*P. Černek*)

C – I – 4

V městě Little York je 10 severojižních ulic a 10 východozápadních ulic, které se protínají ve sto křižovatkách. Autobus má po uzavřeném okruhu projet všechny křižovatky. Navrhněte jeho trasu tak, aby počet změn směru jízdy byl co nejmenší. *(M. Čadek)*

C – I – 5

Na stranách BC, CA, AB trojúhelníku ABC jsou sestrojeny body A_1, B_1, C_1 tak, že $|AC_1| = \frac{1}{3}|AB|$, $|BA_1| = \frac{1}{3}|BC|$, $|CB_1| = \frac{1}{3}|AC|$. Nechť P, Q, R jsou vzájemné průsečíky přímek AA_1, BB_1 a CC_1. Porovnejte obsah trojúhelníku PQR se součtem obsahů trojúhelníků vyznačených na obr. 2. *(J. Dula)*



Obr. 2

C – I – 6

Uvažujme trojúhelník ABC, pro jehož průsečík výšek M platí $|AB| = |CM|$. Vypočtěte velikost úhlu při vrcholu C trojúhelníku ABC.

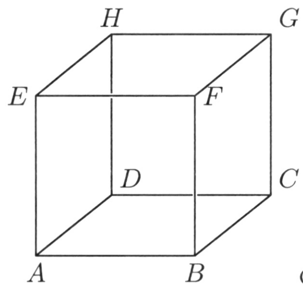
C – S – 1

Najděte všechny dvojice přirozených čísel x a y, pro které platí

$$24x^2 = y! - x!.$$

C – S – 2

Na zimu se pavouk Hubert uchýlil do kabinetu matematiky. V něm objevil drátěný model krychle (obr. 3) s délkou hrany 20 cm. Na tomto modelu nejprve napjal vlákna do všech stěnových úhlopříček a pak vlákny pospojoval navzájem všechny středy stěn. Jednou se chtěl rychle dostat z vrcholu B do vrcholu H. Zvolil si cestu po drátu BF a vláknu FH. Poraďte mu v této prolézačce z drátů a vláken kratší cestu zpět z H do B. Určete rovněž počet nejkratších cest z H do B.



Obr. 3

C – S – 3

Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ o obsahu $100\,\mathrm{cm}^2$. Označme středy stran AB, BC, CD a DA po řadě písmeny E, F, G a H. Vypočtěte součet obsahů trojúhelníků ABF, BCG, CDH a ADE.

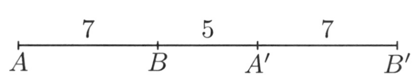
C – II – 1

Určete všechny trojice přirozených čísel x, y a z, pro které platí

$$x! - y! = 5 \cdot z! + 96.$$

C – II – 2

Na zemi leží těžká kovová tyč o délce 7 metrů. Jeden člověk s ní může pohnout jedině tak, že zvedne jeden konec tyče a otáčí tyč kolem druhého konce ležícího na zemi. Kolikrát nejméně musí zvednout a otáčet tyč, aby ji z polohy AB posunul o 12 metrů ve směru polopřímky AB do polohy $A'B'$? (Konec A přejde v A', konec B v B'.) Popište postup s nejmenším počtem otáčení a ukažte, že menší počet otáčení nestačí. Vzájemná poloha a vzdálenosti bodů A, B, A', B' jsou uvedeny na obr. 4.



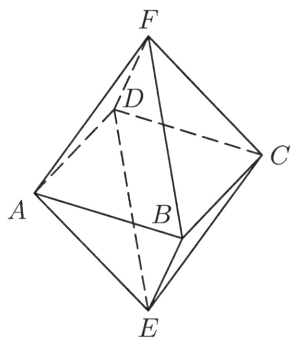
Obr. 4

C – II – 3

Uvnitř obdélníku $ABCD$ leží body X a Y tak, že celý obdélník je rozdělen na dva trojúhelníky ADX, BCY o stejném obsahu a dva konvexní čtyřúhelníky $ABYX$ a $CDXY$ rovněž o stejném obsahu. Dokažte, že potom úsečka XY prochází středem obdélníku.

C – II – 4

Tentokrát si náš starý známý pavouk Hubert vybral ke svým hrám v kabinetě matematiky drátěný model pravidelného osmistěnu. Jeho stěny tvoří 8 rovnostranných trojúhelníků (obr. 5). V každé stěně pospojoval

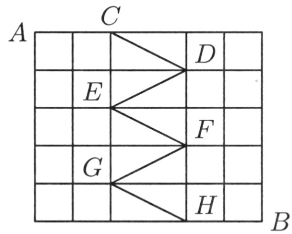


Obr. 5

Hubert vlákny středy příslušných hran. Z kolika cest nejkratší délky si může Hubert vybrat, aby se v takto vzniklé síti pavučin a drátů dostal z vrcholu E do vrcholu F? *(M. Čadek)*

C – I – 1

Cesty nejkratší délky vedoucí z bodu A do bodu B jsou trojího druhu: **1.** ty, které vedou po úsečce CD, **2.** ty, které vedou po úsečce EF, a **3.** ty, které vedou po úsečce GH (obr. 6). Jestliže počet nejkratších cest mezi



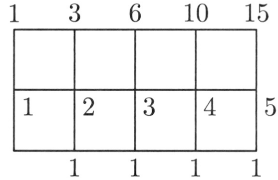
Obr. 6

dvěma body X a Y Hubertovy pavučiny označíme $p(X, Y)$, potom počet cest nejkratší délky mezi A a B je

$$p(A, B) = p(A, C) \cdot p(D, B) + p(A, E) \cdot p(F, B) + p(A, G) \cdot p(H, B).$$

Zbývá nám tak spočítat počet cest nejkratší délky mezi dvěma vrcholy čtvercové sítě. Po chvíli experimentování zjistíme, že každá cesta nejkratší délky z bodu o souřadnicích $[0, 0]$ do bodu o souřadnicích $[m, n]$, $m > 0$, $n > 0$, vede buď přes bod $[m-1, n]$, nebo přes bod $[m, n-1]$. Proto jejich počet je dán součtem $p([0, 0], [m-1, n]) + p([0, 0], [m, n-1])$.

Uplatňujeme-li toto pravidlo postupně na levé třetině pavučiny, dostáváme počty nejkratších cest tak, jak je uvedeno na obr. 7. Proto $p(A, C) = p(H, B) = 1$, $p(A, E) = p(F, B) = 6$, $p(A, G) = p(D, B) = 15$. Celkový počet cest je tedy $1 \cdot 15 + 6 \cdot 6 + 15 \cdot 1 = 66$.



Obr. 7

C – I – 2

Rovnici po dělení mn upravíme na tvar

$$(m-1)!\,(n-1)! = mn \tag{1}$$

(klademe $0! = 1$). Všimněme si, že pro každé celé $k \geqq 4$ platí $(k-1)! > k$, neboť

$$(k-1)! = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1) \geqq 2(k-1) = k + (k-2) > k.$$

Proto nemohou být obě čísla m, n větší než 3: vynásobením nerovností $(m-1)! > m$ a $(n-1)! > n$ bychom dostali spor s rovnicí (1). S ohledem na symetrii můžeme předpokládat, že např. $m \leqq 3$. Pro $m = 1$ dostáváme $(n-1)! = n$, což podle předchozího znamená, že $n \leqq 3$; probráním možností $n = 1, 2, 3$ zjistíme, že rovnici vyhovuje pouze $n = 1$. Pro $m = 2$ dostáváme $(n-1)! = 2n$, což pro $n \leqq 4$ zřejmě nenastane; pro $n \geqq 5$ ale platí

$$(n-1)! \geqq 2 \cdot 3 \cdot (n-1) = 6(n-1) = 2n + (4n-6) > 2n. \tag{2}$$

Konečně pro $m = 3$ dostáváme $2(n-1)! = 3n$, což v případě $n < 5$ platí pouze pro $n = 4$; pro $n \geqq 5$ ale podle (2) platí $2(n-1)! > 4n > 3n$. Hledané dvojice (m,n) jsou $(1,1)$, $(3,4)$ a $(4,3)$.

C – I – 3

Označme n počet prváků, kteří se zúčastnili turnaje. Druháků pak bylo $3n$ a celkový počet žáků byl $4n$. Ti mezi sebou sehráli celkem $\frac{1}{2} \cdot 4n(4n-1)$ zápasů. Protože za vítězství je jeden bod, za remízu půl bodu a za prohru žádný bod, celkový počet rozdaných bodů je roven počtu zápasů. Jestliže tedy prváci získali p bodů a druháci d bodů, pak

$$p + d = 2n(4n-1).$$

Druháci získali jen o tři body více než prváci, tedy

$$p = d - 3.$$

Dosazením z druhé rovnice do první dostaneme

$$d = n(4n-1) + \frac{3}{2}.$$

Počet bodů, které získali druháci, je roven aspoň počtu bodů, které získali ve vzájemných zápasech mezi sebou. Tedy

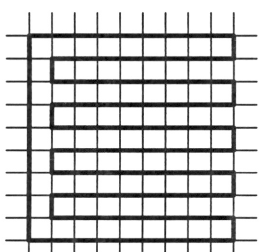
$$n(4n-1)+\frac{3}{2} \geqq \frac{3n(3n-1)}{2}.$$

Úpravou získáme nerovnost $n+3 \geqq n^2$. V oboru přirozených čísel ji splňují pouze čísla $n=1$, $n=2$, neboť pro $n \geqq 3$ je $n+3 \leqq 2n < n \cdot n$.

Turnaje se tedy mohli zúčastnit buď 3 druháci a jeden prvák, nebo 6 druháků a 2 prváci. V obou případech se musíme přesvědčit, že turnaj mohl proběhnout tak, aby byly splněny podmínky zadání. V případě čtyř účastníků získal prvák v zápasech s druháky 1,5 bodu. Ti pak získali zbývajícího 4,5 bodu. V případě 8 účastníků ve všech zápasech mezi prvákem a druhákem s výjimkou jednoho, který skončil remízou, zvítězil prvák. Prváci tak získali 12,5 bodu a druháci 15,5 bodu.

C – I – 4

Po chvíli experimentování přijdeme na to, že nejmenší možný počet změn směru na okruhu je 20. Jeden z více možných návrhů takového okruhu je znázorněn na obr. 8. Podstatnou částí řešení je však důkaz toho, že na každém okruhu procházejícím přes všechny křižovatky je aspoň 20 změn směru.



Obr. 8

Předpokládejme prvně, že okruh je takový, že autobus jede po každé z deseti severojižních ulic. Vždy, když na nějakou severojižní ulici přijíždí, a vždy, když z ní odbočuje, musí změnit směr. Těchto změn je tedy aspoň $2 \cdot 10 = 20$.

Pokud autobus nejede po některé ze severojižních ulic, musí přes ni projíždět na deseti křižovatkách. Jede tedy po všech deseti východozápadních ulicích. Stejnou úvahou, jakou jsme provedli už dříve, dostáváme, že počet změn směru je aspoň 20.

C – I – 5

Trojúhelník ABC je rozdělen na tři tmavě vyznačené trojúhelníky, tři čtyřúhelníky a trojúhelník PQR. Součet obsahů všech těchto trojúhelníků a čtyřúhelníků je roven obsahu trojúhelníku ABC. Obsahy trojúhelníků ABA_1, BCB_1 a CAC_1 jsou rovny jedné třetině obsahu trojúhelníku ABC. Proto platí

$$S(ABA_1) + S(BCB_1) + S(CAC_1) = S(ABC).$$

V součtu na levé straně je plocha každého z tmavě vyznačených trojúhelníků započítána dvakrát, plocha čtyřúhelníků je započítána jednou, zatímco plocha trojúhelníku PQR není započítána ani jednou. Odtud plyne, že součet obsahů vyznačených trojúhelníků je roven obsahu trojúhelníku PQR.

Lze ukázat, že obsah trojúhelníku PQR je roven jedné sedmině obsahu trojúhelníku ABC.

C – I – 6

Označme O patu výšky z vrcholu A, P patu výšky z vrcholu B a Q patu výšky z vrcholu C. Trojúhelníky ABP a MCP mají pravé úhly u vrcholu P. V případě, že úhel u vrcholu C je ostrý, shodují se rovněž v úhlech při vrcholech B a C. Pro ostroúhlý trojúhelník (obr. 9) to dokážeme takto:

$$|\sphericalangle ABP| = 90^\circ - |\sphericalangle QMB| = 90^\circ - |\sphericalangle PMC| = |\sphericalangle PCM|.$$

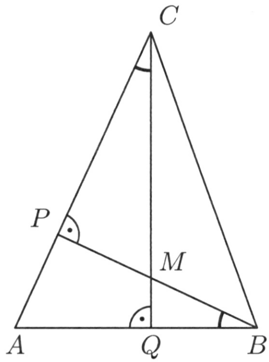
(Důkaz pro trojúhelník s neostrým úhlem při vrcholu A nebo B proveďte sami!) Protože $|AB| = |CM|$, jsou oba trojúhelníky shodné. Speciálně $|CP| = |BP|$, pravoúhlý trojúhelník BCP je rovnoramenný a úhel při vrcholu C je tedy roven 45°.

V případě, že úhel u vrcholu C je tupý (může být pravý?), dokážeme analogicky, že $\triangle ABP \cong \triangle CMP$. (Proveďte podrobně!) Odtud plyne, že $|MP| = |PB|$, a tedy v trojúhelníku BMP je úhel při vrcholu M roven 45°. Úhel při vrcholu C je proto roven 135°, jak se přesvědčíme výpočtem v čtyřúhelníku $COMP$ (obr. 10).

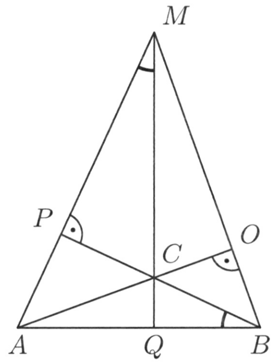
C – S – 1

Levá strana rovnice je kladné číslo, proto $y \geqq x + 1$. Odtud plyne, že

$$24x^2 = y! - x! \geqq (x+1)! - x! = x!(x+1-1) = x!\,x.$$



Obr. 9



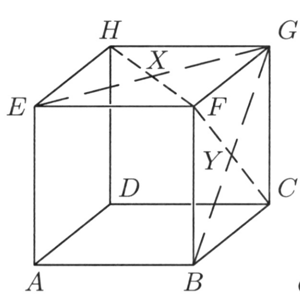
Obr. 10

Po vydělení kladným číslem x^2 dostáváme $24 \geqq (x-1)!$. (Zde klademe $0! = 1$.) Tedy $x \leqq 5$ a současně má být $y! = 24x^2 + x!$. Dosadíme-li za x čísla 1, 2, 3, 4, 5, zjistíme, že předchozí rovnice má řešení pouze pro $x = 5$, a to $y = 6$.

Řešením rovnice je jediná dvojice $(x, y) = (5, 6)$.

C – S – 2

Cesta z B do H po drátu BF a úhlopříčce FH má délku $20(1+\sqrt{2})$. Označme X střed stěny $EFGH$ a Y střed stěny $BCGF$ (obr. 11). Každá z úseček HX, XY a YB má délku poloviny úhlopříčky ve stěně krychle, tj. $20 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Proto cesta z H do B po vláknech HX, XY a YB má délku $20 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} < 20(1+\sqrt{2})$. Dokážeme, že tato cesta je i cestou nejkratší délky.



Obr. 11

Každá cesta z H do B, která vede přes nějaký vrchol krychle, má délku aspoň $20(1+\sqrt{2})$. Proto cesty nejkratší délky musí nutně vést přes středy stěn. Nechť tedy cesta z H vede po půlce úhlopříčky do středu stěny s vrcholem H. Dále mohou nastat tyto možnosti:

1. Cesta vede dále do stěny, jejímž vrcholem není bod B. Potom je její délka větší než $20\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}+1\right)$.
2. Cesta pokračuje do středu protější stěny a její délka je aspoň $20\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.
3. Cesta vede do středu stěny s vrcholem B. Vede-li z tohoto středu přímo do B, má délku $20\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

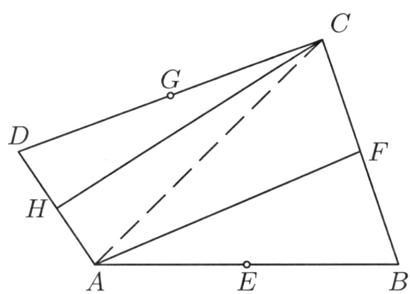
Třetí případ dává popis všech cest z H do B nejkratší délky. Jejich počet je $3\cdot 2=6$. Z bodu H má pro výběr prvního úseku cesty nejkratší délky Hubert 3 možnosti, pro výběr druhého úseku cesty má 2 možnosti a pro výběr posledního úseku pouze jedinou možnost.

C – S – 3

Obsah trojúhelníku XYZ budeme označovat S_{XYZ}, obsah čtyřúhelníku $ABCD$ označíme S. Protože F je středem BC a H je středem AD, platí (obr. 12)

$$S_{ABF}=\frac{1}{2}\,S_{ABC},\qquad S_{CDH}=\frac{1}{2}\,S_{ACD}.$$

Tedy



Obr. 12

$$S_{ABF}+S_{CDH}=\frac{1}{2}\,(S_{ABC}+S_{ACD})=\frac{1}{2}\,S.$$

Zcela stejně dokážeme

$$S_{BCG}+S_{ADE}=\frac{1}{2}\,(S_{BCD}+S_{ABD})=\frac{1}{2}\,S.$$

Součet obsahů trojúhelníků ABF, BCG, CDH a ADE je tedy roven obsahu daného čtyřúhelníku, tj. $100\,\mathrm{cm}^2$.

C – II – 1

Především $x! > 96$, a proto $x \geqq 5$. Tedy $x!$ je dělitelné 5 a pravá strana dává při dělení 5 zbytek 1. Proto $y!$ musí dávat po dělení 5 zbytek 4, což je možné pouze pro $y = 4$. Řešme tedy rovnici

$$x! = 5 \cdot z! + 120. \tag{1}$$

Můžeme postupovat dvěma různými způsoby.

1. Z rovnice plyne, že $x \geqq z + 1$, tedy $(z + 1)! \leqq 5 \cdot z! + 120$ a odtud

$$120 \geqq (z + 1)! - 5 \cdot z! = (z - 4) \cdot z!.$$

Proto $z \leqq 5$. Prověřením všech pěti možností $z = 1, 2, 3, 4, 5$ zjistíme, že rovnici (1) vyhovuje pouze jediné z, a to $z = 5$. Přitom $x = 6$.

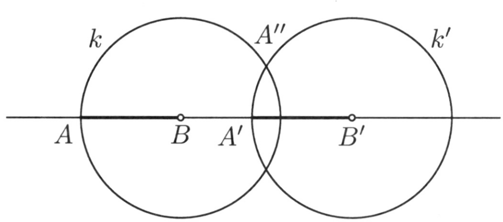
2. Z rovnice (1) plyne, že $x! > 120$, tedy $x \geqq 6$. Číslo $x!$ je proto dělitelné 16. Číslo 120 dává po dělení 16 zbytek 8, proto $z!$ nemůže být dělitelné 16, a tedy $z \leqq 5$. Dále postupujeme stejně jako v (1).

Úloha má jediné řešení $(x, y, z) = (6, 4, 5)$.

C – II – 2

Při každém otáčení tyče zůstává jeden její konec na místě. Proto k přemístění tyče z polohy AB do polohy $A'B'$ nám jedno otáčení nestačí. Nestačí ani dvě otáčení, protože prvním otáčením nepřemístíme konec A nebo B do bodů A' nebo B'. Ukážeme, jak přemístění provést pomocí tří otáčení.

Uvažujme kružnici k se středem B a kružnici k' se středem B', obě s poloměrem 7 m (obr. 13). Tyto kružnice se protnou ve dvou bodech.

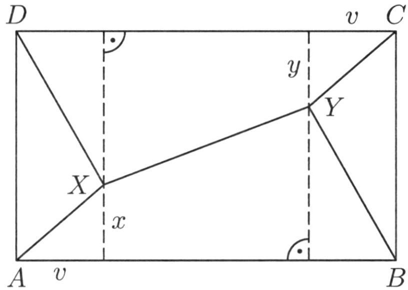


Obr. 13

Libovolný z nich označme A''. Prvně tyč otočíme kolem bodu B tak, aby konec A padl do bodu A''. Podruhé otočíme tyč kolem bodu A'' tak, aby se konec B přemístil do bodu B'. Nakonec otočíme tyč kolem bodu B' tak, aby se druhý konec tyče dostal do bodu A'.

C – II – 3

Nechť $|AB| = a$, $|BC| = b$. Trojúhelníky ADX a BCY mají stejný obsah, a proto vzdálenost bodu X od AD je rovna vzdálenosti bodu Y od BC. Označme tuto vzdálenost v. Dále označme x vzdálenost X od AB a y vzdálenost Y od CD.



Obr. 14

Obsah čtyřúhelníku $ABYX$ je roven součtu obsahů dvou pravoúhlých trojúhelníků a lichoběžníku (obr. 14) a rovná se

$$\frac{1}{2}\,vx + \frac{1}{2}\,(b-y)v + \frac{1}{2}\,(x+b-y)(a-2v) = \frac{1}{2}\,(a-v)(b+x-y).$$

Stejně spočítáme obsah čtyřúhelníku $CDXY$:

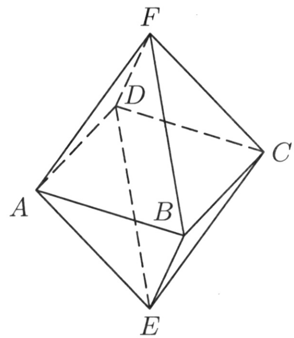
$$\frac{1}{2}\,vy + \frac{1}{2}\,(b-x)v + \frac{1}{2}\,(b-x+y)(a-2v) = \frac{1}{2}\,(a-v)(b+y-x).$$

Protože $a > v$, plyne z rovnosti obsahů obou čtyřúhelníků rovnost $b + x - y = b + y - x$ neboli $x = y$. Bod Y je tedy obrazem bodu X při středové souměrnosti podle středu obdélníku. Tím je dokázáno, že úsečka XY prochází středem obdélníku.

C – II – 4

Předpokládejme, že hrany osmistěnu mají délku 1. Každá cesta z E do F musí zřejmě vést buď některým z vrcholů A, B, C, D, anebo středem některé z hran AB, BC, CD, DA (obr. 15). Přitom nejkratší cesta z bodu E

do každého z těchto bodů má délku 1. Počet nejkratších cest z bodu E



Obr. 15

do každého z vrcholů A, B, C, D je roven 1 a do každého ze středů hran AB, BC, CD, DA je roven 2. Stejné jsou i počty nejkratších cest z těchto osmi bodů roviny $ABCD$ do bodu F. Proto je počet nejkratších cest z E do F roven

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 20.$$