2. středoevropská matematická olympiáda

Druhý ročník Středoevropské matematické olympiády se uskutečnil 4.–10. září 2008 v Olomouci pod záštitou rektora Univerzity Palackého prof. RNDr. *Lubomíra Dvořáka*, CSc. Soutěž probíhala v prostorách Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého a zúčastnili se jí 52 studenti středních škol z devíti zemí. Každá země mohla vyslat nejvýše šest soutěžících, kteří se nezúčastnili uplynulé MMO ve Španělsku a v počínajícím školním roce 2008/09 ještě zůstávali studenty středních škol.

Organizací tohoto ročníku Středoevropské olympiády byl Ústřední komisí MO pověřen RNDr. *Jaroslav Švrček*, CSc., z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci, který celou soutěž jako předseda organizačního výboru řídil. Přípravu a užší výběr úloh z došlých návrhů vzal na svá bedra doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., přičemž definitivní výběr dvou čtveřic úloh pro soutěže jednotlivců i družstev odsouhlasila mezinárodní jury (složená z vedoucích zúčastněných zemí) ještě před zahájením olympiády elektronickou cestou. Jednání mezinárodní jury během soutěže pak řídil a moderoval RNDr. *Karel Horák*, CSc. Mezi vybranými soutěžními úlohami byla také jedna česká úloha, jejímž autorem byl bývalý úspěšný olympionik *Marek Pechal.*

Ústřední komise MO vybrala pro Středoevropskou matematickou olympiádu šestici středoškoláků sestavenou z úspěšných řešitelů ústředního kola 57. ročníku MO kategorie A, kteří splňovali podmínky soutěže. České reprezentační družstvo tak v abecedním pořadí tvořili: *David Klaška* (G Brno, tř. Kpt. Jaroše), *Jiří Marek* (G Brno, tř. Kpt. Jaroše), *Van Nhan Nguyen* (G Praha 6, Nad Alejí) *Tomáš Pavlík* (G Jana Keplera, Praha), *Hana Šormová* (G Brno, tř. Kpt. Jaroše) a *Jan Vaňhara* (G L. Jaroše v Holešově). Vedoucím české delegace a jejím zástupcem v jury byl Mgr. *Martin Panák*, Ph.D., z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně.

Vlastní soutěž se konala ve dvou soutěžních dnech, a to v sobotu 6. září (soutěž jednotlivců) a v neděli 7. září (soutěž družstev). Po oba soutěžní dny řešili jednotlivci, resp. reprezentační družstva po 4 úlohách, na jejichž vypracování byl vždy vyhrazen čas 5 hodin. Každá úloha byla přitom hodnocena (podle předem schváleného systému hodnocení) celočíselným počtem bodů v rozpětí od 0 do 8.

Koordinace žákovských řešení probíhala stejným způsobem jako na MMO. Na závěrečném jednání jury 8. září byly stanoveny hranice pro udělení zlatých, stříbrných a bronzových medaili a dále bylo potvrzeno oficiální pořadí v soutěži družstev. Vzhledem k tomu, že pět soutěžících *Bertram Arnold* z Německa, *András Éles*, *Dániel Nagy* a *Gergely Szűcs* z Maďarska a *Jakub Oćwieja* z Polska získalo v soutěži jednotlivců plný počet bodů, bylo o osudu připravených zlatých medailí rozhodnuto. Stříbrné medaile se pak udělovaly za 11–24 bodů a bronzové za 16–23 bodů.

Zisk jedné stříbrné a jedné bronzové našimi účastníky sice nevypadá zle, ale jejich celkové výsledky a zejména pak výsledek v soutěži družstev nás příliš nepotěšily. Jako jednotlivci naši soutěžící dopadli takto:

		Body za úlohu				**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4		
11.–16.	David Klaška	8	8	0	8	24	stříbro
37.–38.	Jiří Marek	5	8	0	0	13	HM
45.–47.	Van Nhan Nguyen	4	1	0	0	5	
24.	Tomáš Pavlík	3	1	8	7	19	bronz
45.–47.	Hana Šormová	5	0	0	0	5	
44.	Jan Vaňhara	0	7	0	0	7	
	Celkem	25	23	8	15	71	

Přehled výsledků všech zemí v soutěži jednotlivců je v druhé tabulce. Země jsou v ní seřazeny podle součtu bodů celého družstva podobně jako při neoficiálním pořadí zemí na MMO (číslo v závorce označuje menší počet účastníků).

	I	II	III	body		I	II	III	body
Maďarsko	3	3	0	171	Rakousko	0	0	3	86
Polsko	1	4	1	170	*Česká republika*	0	1	1	73
Německo	1	3	1	134	Chorvatsko	0	0	3	69
Slovensko	0	0	2	105	Slovinsko (4)	0	0	0	25
Švýcarsko	0	0	3	89					

V soutěži družstev získaly prvenství současně týmy Maďarska, Polska a Německa s plným bodovým ziskem. Tato tři družstva byla o třídu lepší než ostatní. Vzhledem k tomu, že tak byly rozděleny tři zlaté medaile, stříbrná ani bronzová se už neudělovaly. Český tým skončil se ziskem 22 bodů na 7. místě, což představuje ve srovnání s minulým ročníkem, kdy naše družstvo skončilo na 3. místě, výrazné zhoršení (na první olympiádě ovšem chyběli Němci i Maďaři). Celkové výsledky soutěže družstev jsou uvedeny v následující tabulce.

		Body za úlohu				**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4		
1.–3.	Maďarsko	8	8	8	8	32	zlato
	Německo	8	8	8	8	32	zlato
	Polsko	8	8	8	8	32	zlato
4.	Rakousko	8	2	8	8	26	
5.	Slovensko	6	3	8	8	25	
6.	Švýcarsko	5	3	8	8	24	
7.	*Česká republika*	8	6	0	8	22	
8.	Chorvatsko	3	2	8	8	21	
9.	Slovinsko	3	2	4	0	9	

Organizátoři připravili bohatý průvodní program. Během svého pobytu se soutěžící seznámili s pamětihodnostmi Olomouce a blízkého okolí (v pátek navštívili Svatý Kopeček, v pondělí byl pro všechny výlet s prohlídkou zámku a zahrad v Kroměříži a v úterý si mohli účastníci prohlédnout Javoříčské jeskyně a hrad Bouzov).

Slavnostní zakončení soutěže spojené s oceněním nejlepších jednotlivců a družstev se uskutečnilo v reprezentativních prostorách Konviktu Univerzity Palackého v Olomouci za přítomnosti rektora prof. RNDr. Lubomíra Dvořáka, CSc., pověřených zástupců Ministerstva školství a dalších významných představitelů Univerzity Palackého.

Třetí ročník MEMO se bude konat v Polsku v září 2009.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

Soutěž jednotlivců

1. Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost přirozených čísel taková, že $a_n < a_{n+1}$ pro všechna $n \geqq 1$. Předpokládejme, že pro libovolnou čtveřici indexů (i, j, k, l), kde $1 \leqq i < j \leqq k < l$ a $i + l = j + k$, platí ostrá nerovnost $a_i + a_l > a_j + a_k$. Určete nejmenší možnou hodnotu členu a_{2008}.

(Rakousko)

2. Uvažujme šachovnici $n \times n$, kde $n > 1$ je přirozené číslo. Kolika způsoby na ni můžeme rozmístit $2n-2$ identických kamenů (každý kámen leží na jiném poli) tak, že žádné dva kameny neleží na stejné diagonále? (Dva kameny leží na stejné diagonále, jestliže přímka spojující středy odpovídajících polí je rovnoběžná s některou z úhlopříček šachovnice.)
(*Švýcarsko*)

3. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC s rameny BC a AC. Kružnice mu vepsaná se dotýká stran AB a BC po řadě v bodech D a E. Přímka různá od AE a procházející bodem A protíná kružnici vepsanou v bodech F a G. Přímka AB pak protíná přímky EF a EG po řadě v bodech K a L. Dokažte, že $|DK| = |DL|$. (*Maďarsko*)

4. Najděte všechna celá čísla k taková, že čísla $4n+1$ a $kn+1$ jsou nesoudělná pro libovolné celé n. (*Maďarsko*)

Soutěž družstev

5. Nechť $\mathbb{R}$ značí množinu všech reálných čísel. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že

$$xf(x+xy) = xf(x) + f(x^2)f(y)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. (*Švýcarsko*)

6. Buď $n \geqq 2$ přirozené číslo. Na tabuli je napsáno n čísel. V každém kroku vybereme na tabuli dvě čísla a každé z nich nahradíme jejich součtem. Určete všechna n, pro která vždy můžeme po konečném počtu kroků dostat n stejných čísel. (*Slovensko*)

7. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC a body E, D tak, že body B a E leží v opačných polorovinách určených přímkou AC a bod D leží uvnitř úsečky AE. Dále nechť $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle CDE|$, $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ECD|$ a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle EBA|$. Dokažte, že body B, C a E leží v přímce.
(*Slovinsko*)

8. Jestliže je součet kladných dělitelů kladného celého čísla n mocninou čísla 2 s celočíselným mocnitelem, pak je i jejich počet mocninou čísla 2 s celočíselným mocnitelem. Dokažte. (*Česká republika*)

Řešení úloh

1. (Podle *Jaromíra Šimši.*) Podle zadání pro každé $n \geqq 1$ a čtveřici indexů $(n, n+1, n+1, n+2)$ platí

$$a_{n+2} - a_{n+1} \geqq (a_{n+1} - a_n) + 1.$$

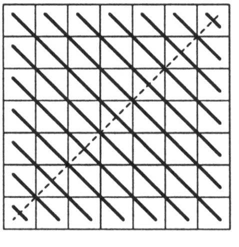
Protože $a_2 - a_1 \geqq 1$, jednoduchým použitím matematické indukce dostáváme $a_{n+1} - a_n \geqq n$ pro $n \geqq 1$. Je tedy $a_{n+1} \geqq n + a_n$. Odtud s využitím nerovnosti $a_1 \geqq 1$ opět triviální matematickou indukcí odvodíme nerovnost

$$a_n \geqq \tfrac{1}{2}(n^2 - n + 2).$$

Přitom posloupnost $a_n = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ podmínky zadání splňuje. Nerovnost $a_i + a_l > a_j + a_k$ je totiž pro ni (při rovnosti $i + l = j + k$) ekvivalentní s nerovností $i^2 + l^2 > j^2 + k^2$, která po substituci $i = d - y$, $l = d + y$, $j = d - x$, $k = d + x$ (kde $0 \leqq x < y$) přejde ve zřejmou nerovnost $2d^2 + 2y^2 > 2d^2 + 2x^2$.

Závěr. Nejmenší možná hodnota čísla a_{2008} je $\frac{1}{2}(2\,008^2 - 2\,008 + 2) = 2\,015\,029$.

2. Množinu k políček umístěných od jednoho okraje šachovnice po druhý ve směru některé úhlopříčky (přičemž $1 \leqq k \leqq n$) nazývejme k-diagonála. Počet disjunktních diagonál v jednom směru je $2n - 1$ (obr. 55), mezi $2n - 2$ zvolenými políčky však nemohou být najednou obě políčka na 1-diagonálách (protože ty jsou obě součástí n-diagonály ve druhém směru). Proto na každé k-diagonále pro $k > 1$ musí být zvoleno právě jedno políčko a právě dvě políčka musejí být zvolena v rozích (ne však v těch protilehlých).



Obr. 55

Uvažujme množinu P všech takových dvojic (z, v), že z je zvolené políčko a v je *volné* (tedy nezvolené) políčko na téže diagonále jako z.

Na šachovnici je právě $n^2 - 2n + 2$ volných políček, přičemž dvě z nich jsou rohová. Každé ze zbylých $n^2 - 2n$ volných políček v leží na dvou k-diagonálách pro $k > 1$, existují k němu proto právě dvě políčka z taková, že $(z, v) \in \mathsf{P}$. Celkový počet p dvojic v množině P je tedy

$$p = 2(n^2 - 2n) + 2 = 2n^2 - 4n + 2, \tag{1}$$

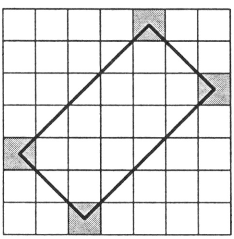
přičemž $+2$ je příspěvek dvou volných rohových políček (každé z nich má jediné příslušné zvolené políčko v protilehlém rohu).

Jestliže zvolené políčko z leží na průniku k_1-diagonály a k_2-diagonály pro $k_1, k_2 > 1$, je počet volných políček v takových, že $(z, v) \in \mathsf{P}$, roven $k_1 + k_2 - 2$. Totéž platí i pro rohová políčka, pro která $\{k_1, k_2\} = \{1, n\}$. Zřejmě pro každé zvolené políčko z platí $k_1 + k_2 \geqq n + 1$, přičemž rovnost nastane, právě když se políčko nalézá na kraji šachovnice. Počet takových volných políček v, že $(z, v) \in \mathsf{P}$, je tedy aspoň $n - 1$. Odtud

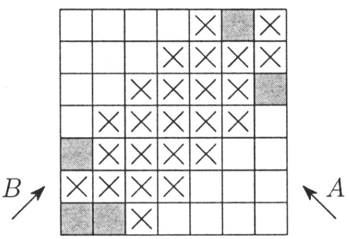
$$p \geqq (2n - 2)(n - 1) = 2n^2 - 4n + 2.$$

Podle (1) víme, že v předešlé nerovnosti platí rovnost, proto všechna zvolená políčka musejí ležet na kraji šachovnice.

Jestliže zvolíme libovolná políčka (třeba i žádné) z první řady šachovnice, zbylá okrajová políčka (ležící mimo první řadu), která musíme zvolit, jsou jednoznačně určena. Pro rohová políčka je to zřejmé, pro zbylá políčka stačí pro každé $k = 2, 3, \ldots, n-1$ uvažovat obdélník tvořený dvěma k-diagonálami v jednom směru a $(n+1-k)$-diagonálami v druhém směru (v každém takovém obdélníku musejí být mezi zvolenými políčky dva protilehlé rohy, obr. 56). Celkový počet různých výběrů políček je tedy stejný jako počet různých podmnožin n-prvkové množiny (tvořené políčky první řady), tedy 2^n.



Obr. 56



Obr. 57

Jiné řešení. (Podle *Bernda Mulanského*, Německo.) Dva různé směry diagonál označme A a B. Z úvodu prvého řešení víme, že na každé k-diagonále pro $k > 1$ je zvoleno právě jedno políčko a právě dvě políčka jsou zvolena v neprotilehlých rozích. Každý vyhovující výběr políček můžeme vytvořit následujícím postupem sestávajícím z n kroků:

- ▷ Krok 1: Zvolíme políčko na jedné ze dvou 1-diagonál směru A.
- ▷ Krok k ($2 \leqq k \leqq n-1$): Zvolíme dvě políčka, každé na jedné ze dvou k-diagonál směru A.
- ▷ Krok n: Zvolíme políčko na n-diagonále směru A.

Zřejmě pro každé $m = 1, 2, \dots, n-1$ po m krocích (takových, že žádná dvě zvolená políčka nejsou na téže diagonále směru B) se na každé mezi $2m - 1$ nejdelšími k-diagonálami směru B (tj. $k \geqq n + 1 - m$) nalézá zvolené políčko (obr. 57). Jestliže $m < n - 1$, v následujícím kroku $m+1$ musejí být obě políčka zvolena na kraji obou $(m + 1)$-diagonál směru A (zbylá políčka těchto dvou diagonál leží na už „obsazených" diagonálách směru B), což se dá udělat právě dvěma způsoby. Podobně je to v případě $m+1 = n$. Máme tedy dvě možnosti v každém z n kroků a celkový počet různých vyhovujících výběrů je 2^n.

Jiné řešení. (Podle *Pavla Novotného*, Slovensko.) Obarvěme políčka šachovnice jako obyčejně, přičemž levý horní roh bude černý. Z podobné úvahy jako v úvodu prvého řešení plyne, že musíme zvolit $n-1$ bílých a $n-1$ černých políček. Počet p_n všech vyhovujících výběrů $2n-2$ políček na šachovnici $n \times n$ se rovná součinu $b_n \cdot c_n$, přičemž b_n a c_n jsou počty vyhovujících výběrů $n-1$ bílých, resp. černých políček. Zřejmě $b_2 = b_3 = 2$, $c_2 = 2$ a $c_3 = 4$. Snadno ukážeme, že pro každé $n \geqq 4$ platí $b_n = 2b_{n-2}$,[1] $c_n = 2b_{n-1}$,[2] takže $p_n = b_n c_n = 4b_{n-2}b_{n-1} = 2c_{n-1}b_{n-1} = 2p_{n-1}$, odkud už triviálně plyne $p_n = 2^n$.

3. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $|AF| < |AG|$. Rozeberme nejprve situaci, kdy je G na kratším oblouku DE.

Označme J dotykový bod vepsané kružnice se stranou AC. Z vlastností souhlasných, úsekového a obvodových úhlů máme $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CJE| = |\sphericalangle JDE| = |\sphericalangle JFE|$ (obr. 58), takže $AJFK$ je tětivový čtyřúhelník. Proto z obvodových, vrcholových a úsekového úhlu dostá-

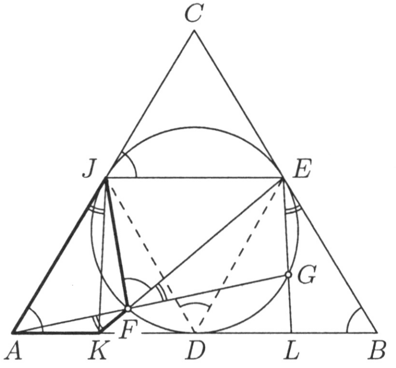
---

[1] Odstraníme dvě bílé 2-diagonály v jednom směru a dvě bílé $(n-1)$-diagonály v druhém směru; zbylá bílá políčka vytvářejí stejné diagonály jako bílá políčka šachovnice $(n-2) \times (n-2)$.

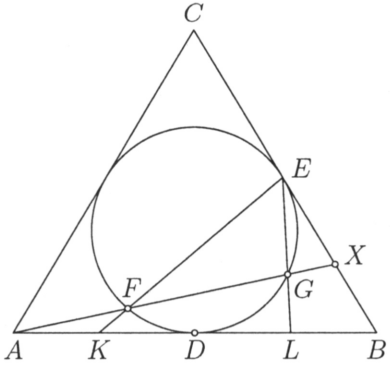
[2] Odstraníme jednu černou n-diagonálu; zbylá černá políčka vytvářejí stejné diagonály jako bílá políčka šachovnice $(n-1) \times (n-1)$.

váme $|\sphericalangle AJK| = |\sphericalangle AFK| = |\sphericalangle EFG| = |\sphericalangle GEB| = |\sphericalangle LEB|$, trojúhelníky AJK a BEL jsou tedy shodné. Protože K a L jsou vnitřní body úsečky AB, z rovnosti $|AK| = |BL|$ plyne $|DK| = |DL|$.

Jestliže bod G leží na delším oblouku DE (mezi body E a J), leží body K, A, B, L na přímce v tomto pořadí a tětivovým čtyřúhelníkem je $AKJF$. Zbylé argumenty jsou stejné jako v předchozím případě.



Obr. 58



Obr. 59

Jiné řešení. (Podle *Tomáše Pavlíka*.) Označme X průsečík přímky AF se stranou BC (obr. 59). Z mocnosti bodu X k vepsané kružnici plyne $|XE|^2 = |XF| \cdot |XG|$, tedy

$$\frac{|XG|}{|XE|} = \frac{|XE|}{|XF|}. \tag{1}$$

Podle Menelaovy věty pro trojúhelník ABX a přímky EG a EF máme

$$\frac{|AL|}{|LB|} \cdot \frac{|BE|}{|EX|} \cdot \frac{|XG|}{|GA|} = 1 \quad \text{a} \quad \frac{|AK|}{|KB|} \cdot \frac{|BE|}{|EX|} \cdot \frac{|XF|}{|FA|} = 1,$$

což můžeme přepsat (použitím (1) v případě první rovnosti) na

$$\frac{|XE|}{|XF|} \cdot \frac{|AL| \cdot |BE|}{|LB| \cdot |GA|} = 1 \quad \text{a} \quad \frac{|XE|}{|XF|} \cdot \frac{|KB| \cdot |FA|}{|AK| \cdot |BE|} = 1.$$

Odtud postupně

$$\frac{|AL| \cdot |BE|}{|LB| \cdot |GA|} = \frac{|KB| \cdot |FA|}{|AK| \cdot |BE|},$$

$$\frac{|AK| \cdot |AL| \cdot |BE|^2}{|KB| \cdot |LB| \cdot |FA| \cdot |GA|} = 1. \tag{2}$$

Z mocnosti bodu A k vepsané kružnici (ta je díky symetrii stejná jako mocnost bodu B) plyne $|AF| \cdot |AG| = |AD|^2$, odkud dohromady se zřejmými rovnostmi $|AD| = |BD| = |BE|$ máme $|AF| \cdot |AG| = |BE|^2$. Spojením s (2) dostáváme

$$|AK| \cdot |AL| = |KB| \cdot |LB|.$$

V závislosti na poloze bodu G leží body K a L buď oba uvnitř, anebo vně úsečky AB. Podle toho pro některé znaménko plus nebo mínus platí

$$|AK| \cdot (|AB| \pm |BL|) = |AK| \cdot |AL| = |KB| \cdot |LB| = (|AB| \pm |AK|) \cdot |BL|.$$

V obou případech vyjde po úpravě $|AK| = |BL|$, což je ekvivalentní s rovností $|DK| = |DL|$.

4. Protože číslo $4n+1$ je liché, z rovnosti $k-4 = k(4n+1) - 4(kn+1)$ vidíme, že $4n+1$ a $kn+1$ jsou nesoudělná, jestliže $k-4$ nemá žádného lichého dělitele $p > 1$, tj. jestliže $k-4 = \pm 2^m$ pro nějaké nezáporné celé číslo m.

Na druhé straně jestliže $k-4$ má lichého dělitele $p > 1$, snadno najdeme násobek p tvaru $4n+1$ (je jím například číslo p^2 anebo jednoduše jedno z dvojice čísel p, $3p$). Pro každé číslo $4n+1$, které je násobkem p, z rovnosti uvedené na začátku řešení plyne $p \mid kn+1$, tedy $4n+1$ a $kn+1$ nejsou nesoudělná.

Odpověď. Hledanými čísly jsou $k = 4 \pm 2^m$, přičemž $m = 0, 1, 2, \ldots$

5. Dosazením $x = y = 0$ do dané rovnosti

$$xf(x+xy) = xf(x) + f(x^2)f(y) \tag{1}$$

dostaneme $f(0) = 0$. Po dosazení $y = -1$ do (1) tak máme

$$xf(x) + f(x^2)f(-1) = 0. \tag{2}$$

Rozeberme postupně případy $f(-1) = 0$ a $f(-1) \neq 0$.

Nechť $f(-1) = 0$. Z (2) potom plyne $f(x) = 0$ pro všechna $x \neq 0$. Protože už víme, že i $f(0) = 0$, dostáváme konstantní nulovou funkci $f(x) = 0$, která zřejmě vyhovuje.

Nechť $f(-1) \neq 0$. Dosazením $x = -1$ do (2) dostáváme $f(1) = 1$. Díky tomu po dosazení $x = 1$ do (2) máme $f(-1) = -1$, takže (2) můžeme přepsat na

$$xf(x) = f(x^2). \tag{3}$$

Dosaďme nyní do dané rovnosti (1) $y = x - 1$. Dostaneme

$$xf(x^2) = xf(x) + f(x^2)f(x-1)$$

a po dosazení z (3) získáme po úpravě rovnost

$$f(x^2)(f(x-1) - (x-1)) = 0. \tag{4}$$

Předpokládejme, že $f(a) = 0$ pro nějaké $a \neq 0$. Potom podle (3) máme $f(a^2) = 0$, takže po dosazení $x = a$ do dané rovnosti (1) dostaneme $af(a + ay) = 0$, tedy $f(a + ay) = 0$. Protože y může být libovolné, nutně i $f(-1) = 0$, což odporuje případu, který právě rozebíráme. Proto pro každé $x \neq 0$ platí $f(x) \neq 0$ a zároveň i $f(x^2) \neq 0$. Ze (4) pak vychází $f(x-1) = x - 1$ pro každé $x \neq 0$, takže $f(x) = x$ pro každé $x \neq -1$. Protože z předchozího víme, že i $f(-1) = -1$, dostáváme funkci $f(x) = x$, která zřejmě rovněž vyhovuje.

Závěr. Hledanými funkcemi jsou $f(x) = 0$ a $f(x) = x$.

6. Jestliže začneme s n-ticí $(2, 2, 1, 1, \ldots, 1)$, přičemž $n \geqq 3$, v každé n-tici, kterou z ní po libovolném počtu kroků dostaneme, bude počet členů nabývajících maximální hodnotu *sudý*. Proto nevyhovuje žádná lichá hodnota $n \geqq 3$.

Matematickou indukcí dokážeme, že každé sudé $n \geqq 2$ vyhovuje. Pro $n = 2$ je to zřejmé. Jestliže je $n \geqq 4$ sudé, podle indukčního předpokladu umíme libovolnou n-tici po konečném počtu kroků změnit na $(a, a, \ldots, a, b, b)$. Jestliže $a \neq b$, opakovaně uděláme některou z následujících sérií kroků, které vždy vedou na n-tici tvaru

$$(\underbrace{a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{b, \ldots, b}_{n-k})$$

(v ní může mít k i jinou hodnotu než počáteční $k = n - 2$, stále však bude *sudé*):

$$\begin{aligned}
\text{série } \alpha\text{:} \quad & (\underbrace{a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{b, \ldots, b}_{n-k}) \to (\underbrace{2a, \ldots, 2a}_{k}, \underbrace{b, \ldots, b}_{n-k}),\\
\text{série } \beta\text{:} \quad & (\underbrace{a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{b, \ldots, b}_{n-k}) \to (\underbrace{a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{2b, \ldots, 2b}_{n-k}),\\
\text{série } \gamma_1 \ (k \leqq n-k)\text{:} \quad & (\underbrace{a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{b, \ldots, b}_{n-k}) \to (\underbrace{a+b, \ldots, a+b}_{2k}, \underbrace{b, \ldots, b}_{n-2k}),\\
\text{série } \gamma_2 \ (k \geqq n-k)\text{:} \quad & (\underbrace{a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{b, \ldots, b}_{n-k}) \to (\underbrace{a, \ldots, a}_{2k-n}, \underbrace{a+b, \ldots, a+b}_{2(n-k)}).
\end{aligned}$$

Kvůli dalším úvahám zaveďme pro libovolné přirozené číslo c označení $c = 2^{P(c)}N(c)$, přičemž $P(c) \geqq 0$ a $N(c)$ je liché. Na n-tici

$$(\underbrace{a, \dots, a}_{k}, \underbrace{b, \dots, b}_{n-k}), \qquad a \neq b,$$

použijeme

▷ sérii α, jestliže $P(a) < P(b)$,

▷ sérii β, jestliže $P(a) > P(b)$,

▷ sérii γ_1 nebo γ_2, jestliže $P(a) = P(b)$ (a tedy $N(a) \neq N(b)$).

Při použití sérií α a β se čísla $N(a)$, $N(b)$ nemění, zatímco při použití γ_1 a γ_2 se změní právě jedno z nich, konkrétně

$$N(b) \to \frac{N(a) + N(b)}{2^m}, \quad \text{anebo} \quad N(b) \to \frac{N(a) + N(b)}{2^m},$$

přičemž $m = P(N(a) + N(b)) \geqq 1$, a tedy

$$\frac{N(a) + N(b)}{2^m} \leqq \frac{N(a) + N(b)}{2} < \max(N(a), N(b))$$

(připomínáme, že $N(a) \neq N(b)$). Z uvedených úvah plyne, že hodnota $\max(N(a), N(b))$ nikdy neroste, takže po konečném počtu kroků začne být konstantní. Od toho okamžiku musíme mít stále buď $N(a) \geqq N(b)$, anebo $N(a) \leqq N(b)$. To vylučuje z dalšího použití buď sérii γ_1, anebo sérii γ_2. Všechny další změny parametru k jsou potom buď $k \to 2k$, anebo $(n-k) \to 2(n-k)$. Protože toto můžeme zopakovat jen r-krát, kde $2^r \leqq n$, musíme nakonec dostat n-tici $(a, \dots, a, b, \dots, b)$, kterou (pokud $a \neq b$) můžeme měnit už jen sériemi α a β. Použitím série α nebo β právě $|P(a) - P(b)|$-krát dostaneme n-tici $(a', \dots, a', b', \dots, b')$, v níž $P(a') = P(b')$. Protože použití γ_1, γ_2 jsme už vyloučili, nutně $a' = b'$, čímž je indukční krok ukončen.

Jiné řešení. (Upravené řešení německého družstva.) Dokážeme *bez* matematické indukce, že vyhovuje každé sudé $n = 2k$. Nejdříve v počáteční $2k$-tici $(a_1, \dots, a_{2k})$ nahradíme každou dvojici (a_{2i-1}, a_{2i}) (pro $i = 1, \dots, k$) dvojicí $(a_{2i-1} + a_{2i}, a_{2i-1} + a_{2i})$. Odteď budeme mít na $(2i-1)$-té a $2i$-té pozici vždy stejná čísla. Proto kvůli přehlednosti budeme dále pracovat jen s k-ticemi $(x, y, z, \dots)$ místo $2k$-tic $(x, x, y, y, z, z, \dots)$. S k-ticemi můžeme dělat následující změny:

▷ zvolíme dvě čísla x, y a nahradíme každé z nich jejich součtem (to odpovídá dvěma krokům $(\dots, x, x, \dots, y, y, \dots) \to (\dots, x + y, x, \dots,$

$x+y, y, \dots) \to (\dots, x+y, x+y, \dots, x+y, x+y, \dots)$ provedeným na původní $2k$-tici);

▷ zvolíme jedno číslo x a vynásobíme ho dvěma (to odpovídá jednomu kroku $(\dots, x, x, \dots) \to (\dots, x+x, x+x, \dots)$);

▷ vydělíme všechna čísla dvěma (to samozřejmě nemá na výsledek vliv; formálně si můžeme pamatovat, kolikrát jsme dělení dvěma provedli a na konci můžeme všechna čísla vynásobit příslušnou mocninou dvou).

Naším cílem je dostat k stejných čísel. Získáme je opakováním následujícího algoritmu:

1. Dokud existují aspoň dvě různá lichá čísla, najdeme nejmenší a největší liché číslo a nahradíme každé z nich jejich (sudým) součtem.
2. Jestliže po skončení prvního kroku zůstane v k-tici jedno liché číslo, vynásobíme ho dvěma.
3. Vydělíme všechna čísla dvěma.

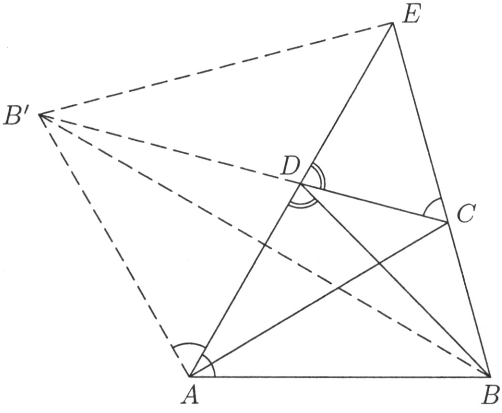
Zřejmě po každém provedení celého algoritmu se největší číslo mezi všemi k čísly buď zmenší, anebo zůstane stejné. Protože tímto maximem je stále přirozené číslo, přestane se po konečném počtu opakování algoritmu měnit. Jeho hodnotu označme M a dále označme N počet čísel M v naší k-tici.

Číslo M je zřejmě liché (jinak by se v třetím kroku algoritmu zmenšilo). Kdyby bylo $N < k$, našli bychom v k-tici aspoň jedno číslo m menší než M. Je-li m liché, po provedení algoritmu se N zmenší. Protože N se nemůže nikdy zvětšit, po konečném počtu kroků už musí zůstat konstantní a všechna čísla v k-tici menší než M musejí být sudá. Ale každé sudé m se po provedení algoritmu zmenší na polovinu a po několika provedeních algoritmu by se nutně objevilo liché číslo menší než M. Proto v k-tici nemohou existovat čísla menší než M, což jsme chtěli dokázat.

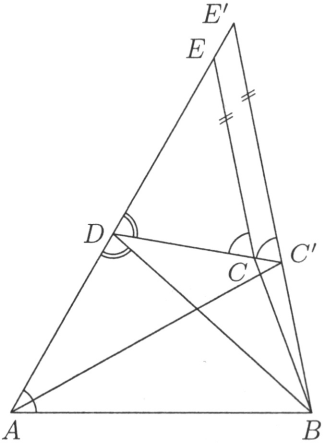
7. Podmínka $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle CDE|$ nabádá zobrazit bod B v osové souměrnosti podle přímky AE do bodu B' (obr. 60). Potom leží body C, D a B' v přímce a $|\sphericalangle EAB'| = |\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle ECB'|$, takže $B'ACE$ je tětivový čtyřúhelník. Odtud $|\sphericalangle ECA| = 180° - |\sphericalangle EB'A| = 180° - |\sphericalangle EBA| = 180° - |\sphericalangle ACB|$, tedy $|\sphericalangle ECA| + |\sphericalangle ACB| = 180°$, a tudíž body B, C, E leží v přímce.

Poznámky. Stejně dobře můžeme zobrazit bod C v osové souměrnosti podle AE do C' ležícího na jedné přímce s B, D. Tětivový je potom čtyřúhelník $ABEC'$ a dále $|\sphericalangle ECA| = |\sphericalangle EC'A| = 180° - |\sphericalangle EBA| = 180° - |\sphericalangle ACB|$, tj. opět $|\sphericalangle ECA| + |\sphericalangle ACB| = 180°$.

Díky dokázané kolineárnosti bodů B, C, E z podmínky $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle EBA|$ plyne $|AB| = |AC|$, zatímco z podmínky $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ECD|$ plyne, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový. To naznačuje, jak úlohu řešit jiným způsobem. Předtím ještě poznamenejme, že rozmístění bodů popsané v zadání *může* nastat a všechna taková rozmístění jsou tohoto typu: ABC je rovnoramenný trojúhelník, přičemž $|AB| = |AC|$, body B, C, E leží v přímce (C mezi B a E) a AE protíná kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě D.



Obr. 60



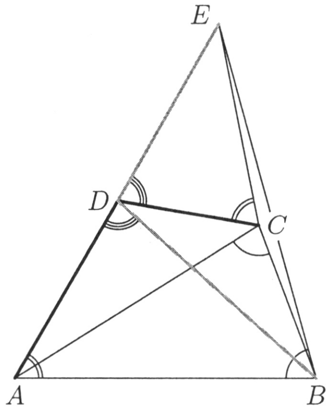
Obr. 61

Jiné řešení. Předpokládejme, že B, C, E nejsou kolineární. Přímka vedená bodem B rovnoběžně s CE protíná přímky CD a AD postupně v bodech C' a E'. Protože $|\sphericalangle E'C'D| = |\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle BAD|$, čtyřúhelník $ABC'D$ je tětivový (obr. 61). Označme k opsanou mu kružnici. Máme $|\sphericalangle AC'B| = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle C'DE| = |\sphericalangle ABC'|$, tj. $|\sphericalangle AC'B| = |\sphericalangle ABC'|$ (ABC' je tedy rovnoramenný trojúhelník).

Předpokládejme, že bod C leží uvnitř úsečky $C'D$. Potom C leží ve vnitřní oblasti kružnice k (v téže polorovině určené přímkou AB jako bod C'), proto $|\sphericalangle ACB| > |\sphericalangle AC'B| = |\sphericalangle ABC'| = |\sphericalangle ABE'| > |\sphericalangle ABE|$ (neboť bod E leží mezi A a E'), což odporuje rovnosti $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle EBA|$.

Podobně pokud bod C neleží na úsečce $C'D$, leží ve vnější oblasti kružnice k (v téže polorovině určené přímkou AB jako bod C'), proto $|\sphericalangle ACB| < |\sphericalangle AC'B| = |\sphericalangle ABC'| = |\sphericalangle ABE'| < |\sphericalangle ABE|$ (neboť bod E' leží mezi A a E), což opět odporuje rovnosti $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle EBA|$.

Jiné řešení. (Podle *Karla Horáka.*) Z daných rovností velikostí úhlů plyne, že trojúhelníky ABD a CED jsou podobné (obr. 62). Z toho oka-



Obr. 62

mžitě dostáváme, že i trojúhelníky ACD a BED jsou podobné (podle *sus*; stejně velký úhel při společném vrcholu D a úměrné strany). Z rovnosti úhlů BED a ACD potom plyne, že součet velikostí tří sousedních úhlů BCA, ACD a DCE je roven součtu velikostí úhlů v trojúhelníku ABE, body E, C a B jsou tedy kolineární.

8. Nechť prvočíselný rozklad čísla n je $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k}$, přičemž $p_1, \dots, p_k$ jsou různá prvočísla a $s_i \geqq 1$ pro každé i. Předpokládejme, že součet všech kladných dělitelů čísla n, který se dá vypočítat jako

$$(1+p_1+p_1^2+\dots+p_1^{s_1})(1+p_2+p_2^2+\dots+p_2^{s_2})\dots(1+p_k+p_k^2+\dots+p_k^{s_k}),$$

je mocninou dvou. Potom každý z činitelů

$$f_i = 1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{s_i}$$

musí být též netriviální mocninou dvou, což znamená, že p_i i s_i jsou lichá. Je-li $s_i > 1$, je

$$f_i = (1 + p_i)(1 + p_i^2 + p_i^4 + \dots + p_i^{s_i-1}).$$

Protože f_i nemá žádného lichého dělitele většího než 1, sudé celé číslo $s_i - 1$ (o němž předpokládáme, že je kladné) musí být tvaru $4k+2$, a proto můžeme provést další rozklad

$$f_i = (1 + p_i)(1 + p_i^2)(1 + p_i^4 + p_i^8 + \dots + p_i^{s_i-3}).$$

Obě čísla $1 + p_i$ a $1 + p_i^2$ jsou mocniny dvou, takže $1 + p_i \mid 1 + p_i^2$. To však není možné, např. proto, že by pak muselo být číslo $1+p_i$ dělitelem i čísla $2 = 1+p_i^2+(1+p_i)(1-p_i)$. Proto pro každé i platí $s_i = 1$ a počet dělitelů čísla n je roven 2^k.

Poznámka. Uvedené řešení lze ukončit i bez pozorování, že $1 + p_i$ a $1+p_i^2$ nemohou být současně mocninami dvou. Opakováním postupných rozkladů na součin totiž dostaneme

$$f_i = (1 + p_i)\bigl(1 + p_i^2\bigr)\bigl(1 + p_i^4\bigr) \dots \bigl(1 + p_i^{2^{t_i}}\bigr),$$

takže pro každé i je $s_i = 2^{t_i+1} - 1$ pro nějaké vhodné $t_i \geqq 0$, proto počet dělitelů čísla n je roven $2^{k+t_1+t_2+\dots+t_k}$. (Z uvedeného řešení však víme, že $t_i = 0$ pro každé i.)