57. ročník matematické olympiády na středních školách

---

49. mezinárodní matematická olympiáda

In: Karel Horák (editor); Daniel Král' (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 57. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2007/2008. 49. mezinárodní matematická olympiáda. 20. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2010. pp. 148–164.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405160

49. mezinárodní matematická olympiáda

Hlavními organizátory 49. mezinárodní matematické olympiády, která se konala od 10. do 22. července v hlavním městě Španělska Madridu, bylo španělské Ministerstvo školství a sociální politiky a Královská matematická společnost Španělska.

Organizátoři připravili pro práci mezinárodní jury, jejímž hlavním úkolem je vybrat z připravených návrhů šestici soutěžních úloh, vynikající podmínky v kouzelném městečku San Ildefonso-La Granja v srdci Kastílie nedaleko Segovii (asi 80 km severozápadně od Madridu). Příjemnou nadmořskou výšku v blízkosti královského paláce a nádherných zahrad jsme dvojnásob ocenili po přesunu do rozpálených ulic Madridu, kam se mezitím sjel rekordní počet 535 soutěžících z 97 zemí celého světa (spolu s pozorovateli z Beninu a Sýrie a zástupci Pákistánu, jejichž studenti zůstali letos bohužel doma, když jim španělská ambasáda neposkytla včas víza, dosáhl počet formálně zúčastněných zemí stovky).

Letošní olympiádu zahájila cirkusová show za zvuků Fučíkova *Vjezdu gladiátorů*. Úvodní hrozba moderátora, že „dnes se spojí cirkusový svět se světem matematiky“ snad našla naplnění jen během úvodního defilé s národními vlajkami.

České družstvo, které bylo vybráno na základě výsledků ústředního kola 57. ročníku MO v Českých Budějovicích a následné týdenní přípravy v Kostelci nad Černými lesy, tvořili *Tomáš Hřebejk* z 8. ročníku Gymnázia v Praze 4, *Miroslav Klimoš* z 3. ročníku Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci, *Jan Matějka* ze 7. ročníku Gymnázia v Českých Budějovicích v Jírovcově ulici, *Samuel Říha* ze 3. ročníku Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Josef Tkadlec* a *Jakub Töpfer*, oba ze 7. ročníku Gymnázia Jana Keplera v Praze 6. Vedoucím družstva byl RNDr. *Karel Horák*, CSc., z Matematického ústavu Akademie věd v Praze a studenty doprovázel Mgr. *Martin Panák*, Ph.D., z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně.

Vlastní soutěž se odehrála v jedné obrovské aule 16. a 17. července, kdy soutěžící jako obvykle řešili vždy po trojici soutěžních úloh. Na to měli pokaždé vyhrazeno přesně 4,5 hodiny; za každou ze šesti úloh mohli získat nejvýše 7 bodů.

Naši reprezentanti podali standardní výkon (až na jednoho vyřešili všichni nejlehčí první úlohu a skoro stejně dobře se vypořádali i s druhou z lehčích úloh — úlohou čtvrtou). Jediný, kdo si v každém soutěžním dnu poradil se dvěma úlohami, byl *Miroslav Klimoš*, který tak po bronzu ze 48. MMO rozšířil svou sbírku o stříbrnou medaili. Další medaili pro náš tým získal *Josef Tkadlec*, od něhož jsme však po vítězství v ústředním kole čekali trochu víc. Výsledky našich jsou shrnuty v následující tabulce:

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
424.–447.	Tomáš Hřebejk	1	0	0	4	0	0	5	
64.–70.	Miroslav Klimoš	7	7	0	7	7	0	28	II.
268.–283.	Jan Matějka	7	2	0	4	1	0	14	HM
368.–391.	Samuel Říha	7	0	0	1	0	0	8	HM
212.–237.	Josef Tkadlec	7	1	0	6	1	1	16	III.
268.–283.	Jakub Töpfer	7	0	0	7	0	0	14	HM
	Celkem	36	10	0	29	9	1	85	

Další tři naši studenti se museli spokojit pouze se základním oceněním, kterým je tzv. *Honorary mention* a které se uděluje studentům bez medaile za úplné vyřešení alespoň jedné z nelehké šestice soutěžních úloh; jejich obtížnost si konečně můžete ověřit sami. Pro srovnání uveďme i výsledky slovenských reprezentantů, kteří získali jen o pár bodů méně:

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
407.–423.	Miroslav Baláž	2	0	0	4	0	0	6	
346.–367.	Albert Herencsár	5	0	0	4	0	0	9	
284.–296.	Tomáš Kocák	7	1	0	4	1	0	13	HM
238.–267.	Filip Sládek	7	1	0	7	0	0	15	III.
199.–211.	Michal Spišiak	7	2	0	7	1	0	17	III.
212.–237.	Vladislav Ujházi	5	4	0	7	0	0	16	III.
	Celkem	33	8	0	33	2	0	76	

Počet získaných cen a celkový bodový zisk jednotlivých zemí vyčtete z připojené tabulky (čísla v závorce označují nižší počet reprezentantů):

	I	II	III	body
ČLR	5	1	0	217
Rusko	6	0	0	199
USA	4	2	0	190
Korea	4	2	0	188
Írán	1	5	0	181
Thajsko	2	3	1	175
KLDR	2	4	0	173
Turecko	3	1	2	170
Tchaj-wan	2	4	0	168
Maďarsko	2	3	1	165
Japonsko	2	3	1	163
Vietnam	2	2	2	159
Polsko	2	3	1	157
Bulharsko	2	1	3	154
Ukrajina	2	2	2	153
Brazílie	0	5	1	152
Peru	1	3	2	141
Rumunsko	0	4	2	141
Austrálie	0	5	1	140
Německo	1	2	3	139
Srbsko	1	3	0	139
Kanada	0	2	4	135
Velká Británie	0	4	2	133
Itálie	0	3	3	132
Kazachstán	1	2	3	128
Bělorusko	0	3	2	125
Izrael	1	1	2	120
Hongkong	0	3	1	107
Mongolsko	0	2	1	106
Francie	0	1	4	104
Indie	0	0	5	103
Singapur	0	1	3	98
Nizozemsko	0	2	2	94
Uzbekistán	0	0	4	94
Litva	0	1	2	92
Indonézie	0	1	2	88
Mexiko	0	1	1	87
Chorvatsko	0	0	3	86
Argentina	0	1	3	85
Česká republika	0	1	1	85
Řecko	0	0	2	85
Gruzie	0	0	5	84
Španělsko	0	0	3	82
JAR	0	1	0	79
Kolumbie	0	2	0	77
Slovensko	0	0	3	76
Turkmenistán	0	0	4	76
Ázerbájdžán	0	0	3	74
Moldavsko	0	1	0	74

	I	II	III	body
Bosna a Hercegovina	0	0	3	68
Slovinsko	0	0	2	68
Švýcarsko	0	1	1	68
Švédsko	0	1	0	67
Dánsko	0	2	0	66
Kostarika	0	0	2	65
Malajsie	0	1	0	65
Rakousko	0	0	1	63
Norsko	1	0	0	62
Belgie	0	1	1	61
Makedonie	0	0	2	61
Lucembursko (5)	0	0	2	60
Tádžikistán	0	0	1	60
Lotyšsko	0	1	0	58
Macao	0	0	2	58
Maroko	0	0	1	58
Arménie	0	0	0	56
Portugalsko	0	0	2	55
Albánie	0	0	1	53
Chile (3)	0	1	1	49
Irsko	0	0	0	45
Kypr	0	0	1	42
Nový Zéland	0	0	0	42
Estonsko	0	0	1	41
Finsko	0	0	1	40
Bangladéš (4)	0	0	0	33
Island (5)	0	0	1	31
Salvador (4)	0	0	0	31
Srí Lanka	0	0	0	29
Kirgizie (5)	0	0	0	28
Trinidad a Tobago	0	0	1	28
Kuba (1)	0	1	0	27
Ekvádor	0	0	0	26
Kambodža	0	0	0	25
Černá hora (3)	0	0	0	24
Paraguay (4)	0	0	1	24
Filipíny (3)	0	0	1	23
Uruguay (5)	0	0	0	22
Tunisko (4)	0	0	0	20
Honduras (2)	0	0	0	17
Guatemala (4)	0	0	1	16
Lichtenštejnsko (2)	0	0	0	16
Venezuela (2)	0	0	0	16
Portoriko (3)	0	0	0	9
Saudská Arábie	0	0	0	8
Bolívie (5)	0	0	0	5
SAE (4)	0	0	0	5
Kuvajt (5)	0	0	0	3

V neoficiálním pořadí všech zúčastněných zemí jsme jen taktak obhájili pozici v první čtyřicítce (spolu s Argentinou a Řeckem jsme se podělili o 39.–41. příčku).

Vynikající organizace se projevila i v bohaté náplni volného času jak studentů, tak jejich vedoucích. O tom svědčí zejména výlety do Segovii (která se kromě jiného může pochlubit i zbytky nádherného římského akvaduktu), El Escorialu a Toleda, v Aranjuez návštěva kulturního večera s vynikající představitelkou tradičního flamenca Mercedes Ruiz, pro studenty pak navíc možnost navštívit v Madridu světoznámou galerii Prado a dlouhá řada soutěží a aktivit.

Slavnostního zakončení olympiády v aule Univerzity Carlose III. se mimo jiné zúčastnilo i Jeho královské veličenstvo princ Felipe de Asturias se svou chotí princeznou Letiziou. Spolu s dalšími představiteli rozdali celkem 267 medailí všem, kteří v nelehkém klání získali alespoň 15 bodů. Mezi nimi bylo 100 studentů, kteří za 22–30 bodů získali stříbrnou medaili, a 47 nejúspěšnějších, kteří za zisk alespoň 31 bodu byli oceněni medailí zlatou. Mezi nimi vynikli tři Číňani Xiaosheng Mu, Dongyi Wei (oba ČLR) a Alex Zhai (USA), kteří bezchybně vyřešili všech šest úloh.

O maximální počet 42 bodů banální chybou v řešení druhé úlohy přišel Maďar László Miklós Lovász, který tak s 39 body skončil až na 4. místě. Úloha měla dvě části a chyba byla, že se mladý Lovász v té druhé části věnoval úplně jiným problémům, než bylo třeba; přitom stačilo poznamenat, že požadovanou vlastnost už vlastně dokázal v první části. Dodejme, že jeho otec László Lovász, který je dnes prezidentem Mezinárodní matematické unie (IMU), získal v letech 1963–1966 na MMO nejprve stříbrnou a poté ještě tři zlaté medaile.

Hostitelskými zeměmi příštích olympiád budou Německo (jubilejní 50. ročník), Kazachstán a Holandsko.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme H průsečík výšek. Kružnice se středem ve středu strany BC procházející bodem H protíná přímku BC v bodech A_1 a A_2. Podobně kružnice se středem ve středu strany CA procházející bodem H protíná přímku CA v bodech B_1 a B_2 a kružnice se středem ve středu strany AB procházející bodem H protíná přímku AB v bodech C_1 a C_2. Ukažte, že body A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 leží na jedné kružnici. (*Rusko*)

2. (a) Dokažte, že

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geqq 1$$

pro všechna reálná čísla x, y, z různá od 1 a splňující rovnost $xyz=1$.

(b) Dokažte, že v uvedené nerovnosti platí rovnost pro nekonečně mnoho trojic racionálních čísel x, y, z různých od 1 a splňujících rovnost $xyz=1$. *(Rakousko)*

3. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho kladných celých čísel n, pro něž má číslo n^2+1 prvočinitel větší než $2n+\sqrt{2n}$. *(Litevsko)*

4. Najděte všechny funkce $f\colon (0,\infty)\to(0,\infty)$ takové, že

$$\frac{\bigl(f(w)\bigr)^2+\bigl(f(x)\bigr)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

pro všechna kladná reálná čísla w, x, y, z splňující rovnost $wx=yz$. *(Jižní Korea)*

5. Nechť n a k jsou kladná celá čísla, pro něž je $k-n$ nezáporné sudé číslo. Je dáno $2n$ lamp označených čísly $1,2,\ldots,2n$, přičemž každá z nich může být *zapnutá* či *vypnutá*. Na počátku jsou všechny lampy vypnuté. Uvažujme posloupnosti *kroků*: v každém kroku jednu z lamp přepneme (vypnutou zapneme či zapnutou vypneme).

Označme N počet všech takových posloupností k kroků, jež vedou do stavu, kdy všechny lampy 1 až n jsou zapnuté a všechny lampy $n+1$ až $2n$ vypnuté.

Označme M počet všech takových posloupností k kroků, jež vedou do stavu, kdy všechny lampy 1 až n jsou zapnuté a všechny lampy $n+1$ až $2n$ vypnuté, přičemž žádná z lamp $n+1$ až $2n$ nebyla nikdy zapnutá.

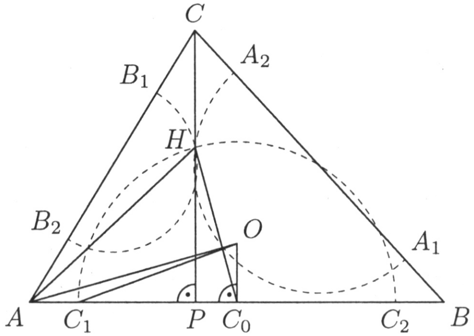
Určete podíl N/M. *(Francie)*

6. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, v němž $|BA|\neq|BC|$. Označme ω_1 a ω_2 kružnice vepsané trojúhelníkům ABC a ADC. Předpokládejme, že existuje kružnice ω, jež se dotýká polopřímky BA za bodem A, polopřímky BC za bodem C a zároveň i obou přímek AD a CD. Dokažte, že společné vnější tečny kružnic ω_1 a ω_2 se protínají v bodě kružnice ω. *(Rusko)*

Řešení úloh

1. Osy úseček A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 jsou zároveň osami stran BC, CA, AB, takže se protínají v bodě O, jenž je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC. Proto je O jediný bod, jenž může být středem požadované kružnice.

Označme strany a úhly v trojúhelníku standardním způsobem. Dále nechť $r = |OA|$ značí velikost poloměru opsané kružnice, C_0 střed strany AB a P patu výšky z vrcholu C (obr. 51). Dokážeme, že všech šest bodů ze zadání má od bodu O stejnou vzdálenost. Použitím Pythagorovy věty ve vícero trojúhelnících nejprve vyjádříme délku úsečky OC_1 pomocí jiných délek v trojúhelníku.



Obr. 51

Z pravoúhlých trojúhelníků OC_1C_0, C_0HP,[1] OAC_0, HAP máme

$$|OC_1|^2 = |C_1C_0|^2 + |OC_0|^2, \tag{1}$$

$$|HC_0|^2 = |HP|^2 + |PC_0|^2, \tag{2}$$

$$|OC_0|^2 = r^2 - (\tfrac{1}{2}c)^2, \tag{3}$$

$$|HP|^2 = |AH|^2 - |AP|^2. \tag{4}$$

Protože podle zadání $|C_1C_0| = |HC_0|$, dosazením (2) a (3) do (1) a následným dosazením ze (4) dostáváme

$$|OC_1|^2 = |HP|^2+|PC_0|^2+r^2-(\tfrac{1}{2}c)^2 = |AH|^2-|AP|^2+|PC_0|^2+r^2-\tfrac{1}{4}c^2.$$

Bez ohledu na to, zda bod P leží na úsečce AC_0 či na úsečce C_0B, platí

$$|PC_0|^2 = \left|\tfrac{1}{2}c - |AP|\right|^2 = \left(\tfrac{1}{2}c - |AP|\right)^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - c|AP| + |AP|^2.$$

[1] Jestliže $P = C_0$, není C_0HP trojúhelník, ale rovnost (2) i tak triviálně platí.

Dosazením do předchozí rovnosti tak dostaneme

$$|OC_1|^2 = |AH|^2 - |AP|^2 + \left(\tfrac{1}{4}c^2 - c|AP| + |AP|^2\right) + r^2 - \tfrac{1}{4}c^2 = \\ = |AH|^2 + r^2 - c|AP|.$$

Konečně pro délku výšky máme (z pravoúhlého trojúhelníku CAP) $|AP| = b\cos\alpha$, takže

$$|OC_1|^2 = |AH|^2 + r^2 - cb\cos\alpha.$$

Analogicky (jen vyměníme úlohu vrcholů B a C) dostaneme

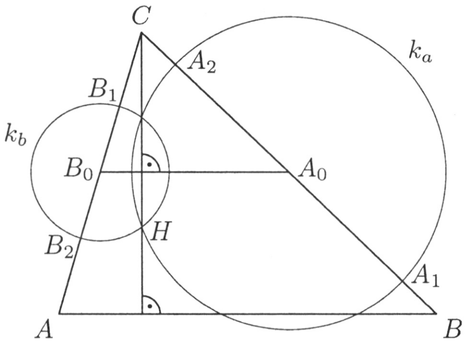
$$|OB_2|^2 = |AH|^2 + r^2 - bc\cos\alpha,$$

takže $|OC_1| = |OB_2|$. Analogicky odvodíme i rovnosti $|OA_1| = |OC_2|$ a $|OB_1| = |OA_2|$. Dohromady s triviálními rovnostmi $|OA_1| = |OA_2|$, $|OB_1| = |OB_2|$, $|OC_1| = |OC_2|$ dostáváme

$$|OA_1| = |OA_2| = |OB_1| = |OB_2| = |OC_1| = |OC_2|,$$

tedy body A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 leží na jedné kružnici se středem O.

Jiné řešení. Označme středy stran BC, CA, AB postupně A_0, B_0, C_0 a kružnice zmíněné v zadání se středy v těchto bodech označme postupně k_a, k_b, k_c. Úsečka A_0B_0, střední příčka trojúhelníku ABC, je spojnicí středů kružnic k_a, k_b. Protože je rovnoběžná se stranou AB, je kolmá k výšce na stranu AB. A protože bod H je průsečíkem obou kružnic, je přímka CH jejich chordálou[2] (obr. 52).



Obr. 52

[2] Chordála dvou nesoustředných kružnic je množina bodů, které mají k oběma kružnicím stejnou mocnost. Je to vždy přímka kolmá na střednou (spojnici jejich středů) a obsahuje jejich případné průsečíky.

Protože bod C leží na chordále kružnic k_a, k_b, má k oběma kružnicím stejnou mocnost, takže $|CA_1| \cdot |CA_2| = |CB_1| \cdot |CB_2|$. Navíc bod C leží zároveň vně či uvnitř obou kružnic. To znamená, že uvedené čtyři body A_1, A_2, B_1, B_2 leží na jedné kružnici. Střed této kružnice přitom musí být průsečíkem os úseček A_1A_2, B_1B_2, což je zřejmě střed O kružnice opsané danému trojúhelníku ABC. Odtud máme $|OA_1| = |OA_2| = |OB_1| = |OB_2|$. Úplně stejně dokážeme (BH je chordálou kružnic k_a, k_c) rovnosti $|OA_1| = |OA_2| = |OC_1| = |OC_2|$, odkud plyne, že body $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ leží na jedné kružnici se středem O.

Jiné řešení. Jak už víme, jediným kandidátem na střed hledané kružnice je střed O kružnice opsané trojúhelníku ABC. Stačí tedy pro libovolný z bodů A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 ukázat, že jeho vzdálenost od průsečíku výšek na volbě bodu nezávisí.

Označme středy stran BC, CA, AB postupně A_0, B_0, C_0. Podobně jako v prvním řešení vyjdeme z rovností

$$|OC_1|^2 = |C_1C_0|^2 + |OC_0|^2 = |HC_0|^2 + |OC_0|^2.$$

Označíme-li N střed úsečky OH, platí dále

$$|HC_0|^2 + |OC_0|^2 = \tfrac{1}{2}|OH|^2 + 2|NC_0|^2.$$

To jsme jen zapsali známý vztah délek stran trojúhelníku HC_0O a jeho těžnice C_0N.[3] Nyní si stačí uvědomit, že střed N úsečky OH je středem kružnice opsané trojúhelníku $A_0B_0C_0$ (je to tzv. kružnice devíti bodů), která má poloměr rovný polovině poloměru r kružnice opsané trojúhelníku ABC, jak snadno plyne ze stejnolehlosti obou trojúhelníků podle jejich společného těžiště. Spojením uvedených rovností tak dostáváme $|OC_1|^2 = \frac{1}{2}(|OH|^2 + r^2)$. Odtud je už zřejmé, že všech šest uvažovaných bodů leží na kružnici se středem O a poloměrem $\frac{1}{2}(|OH|^2 + r^2)$.

Jiné řešení. Zvolíme-li střed O kružnice opsané trojúhelníku ABC za počátek souřadnicového systému a označíme jedním písmenem $\boldsymbol{X}$ odpovídající vektor $\boldsymbol{OX}$, platí $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$ (ve stejnolehlosti se středem v těžišti T daného trojúhelníku, která převádí ABC na $A_0B_0C_0$, odpovídá totiž ortocentru H bod O, takže je $\boldsymbol{H} - \boldsymbol{T} = 2(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{O})$ neboli

[3] Rovnost snadno plyne z kosinové věty a je ekvivalentní s jinou známou rovností $2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$, která platí pro rovnoběžník se stranami a, b a úhlopříčkami e, f.

$\boldsymbol{H} = 3\boldsymbol{T} - 2\boldsymbol{O} = 3\boldsymbol{T}$). Zároveň také je $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{C} = r^2$, kde r označuje poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC. Pro bod C_0 tak máme

$$\begin{aligned}
&|C_0C_1|^2 + |OC_0|^2 = |HC_0|^2 + |OC_0|^2 = \\
&= \Big(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} - \frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}{2}\Big) \cdot \Big(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} - \frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}{2}\Big) + \\
&\quad + \Big(\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}{2}\Big) \cdot \Big(\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}{2}\Big) = \\
&= \frac{1}{4}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) + \frac{1}{4}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \\
&= \frac{1}{4}(2\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B} + 4\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{C} + 4\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + 4\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} + 4\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A}) = \\
&= 2r^2 + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A},
\end{aligned}$$

přičemž součinem $\cdot$ zde přirozeně rozumíme skalární součin příslušných vektorů. Ze symetrie posledního výrazu vidíme, že všechny body A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 mají od bodu O stejnou vzdálenost, takže leží na jedné kružnici.

2. a) Zaveďme substituci

$$\frac{x}{x-1} = a, \qquad \frac{y}{y-1} = b, \qquad \frac{z}{z-1} = c,$$

tj.

$$x = \frac{a}{a-1}, \qquad y = \frac{b}{b-1}, \qquad z = \frac{c}{c-1}.$$

Chceme dokázat nerovnost $a^2 + b^2 + c^2 \geqq 1$ pro libovolná reálná čísla $a, b, c \neq 1$ splňující rovnost

$$\frac{a}{a-1} \cdot \frac{b}{b-1} \cdot \frac{c}{c-1} = 1, \tag{1}$$

která je přepsáním podmínky $xyz = 1$. Ekvivalentními úpravami z (1) postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
abc &= (a-1)(b-1)(c-1), \\
ab + bc + ca &= a + b + c - 1, \\
(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) &= 2(a+b+c-1), \\
(a+b+c)^2 - 2(a+b+c) &= a^2+b^2+c^2-2, \\
(a+b+c-1)^2 &= a^2+b^2+c^2-1. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Levá strana poslední rovnosti je vždy nezáporná, proto opravdu platí $a^2 + b^2 + c^2 \geqq 1$.

b) Abychom našli *dokonce všechny* trojice racionálních čísel x, y, z různých od 1, jež splňují vztah $xyz = 1$ a pro něž v zadané nerovnosti platí rovnost, stačí najít trojice racionálních čísel $a, b, c \neq 1$, jež splňují jak (1) (což navíc znamená, že jsou nenulová), tak i rovnost $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, a použít uvedenou substituci (zachovávající racionálnost) na výpočet x, y, z. Přitom první z rovností jsme ekvivalentně upravili na tvar (2). V oboru racionálních čísel různých od 0 a 1 tedy řešíme soustavu

$$\begin{aligned}(a + b + c - 1)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 - 1,\\ a^2 + b^2 + c^2 &= 1,\end{aligned}$$

která je zřejmě ekvivalentní se soustavou

$$a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c = 1.$$

Vyjádřením $c = 1 - a - b$ a dosazením do rovnice $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ tak dostáváme jedinou rovnici

$$a^2 + b^2 + ab - a - b = 0.$$

Jsou-li nyní $a, b \notin \{0, 1\}$ racionální čísla, je racionální i $\lambda = b/a$. Dosazením $b = \lambda a$ do poslední rovnice dostáváme

$$a^2(1 + \lambda^2 + \lambda) - a(1 + \lambda) = 0,$$

a protože $a \neq 0$ a $\lambda^2 + \lambda + 1 > 0$ pro každé λ, vychází

$$a = \frac{1 + \lambda}{1 + \lambda + \lambda^2}, \quad b = \frac{\lambda + \lambda^2}{1 + \lambda + \lambda^2}, \quad c = -\frac{\lambda}{1 + \lambda + \lambda^2}.$$

Našli jsme tak všechna racionální řešení uvažované soustavy, kterých je nekonečně mnoho, neboť žádná ze tří nalezených racionálních funkcí λ nenabývá jen konečně mnoha hodnot. Vyloučit musíme jediné dvě hodnoty $\lambda \in \{-1, 0\}$, jež vedou k nežádoucím hodnotám 0, 1 čísel a, b, c.

Jestliže se vrátíme k původním proměnným x, y, z, dostaneme po jednoduché úpravě trojice

$$x = -\frac{1 + \lambda}{\lambda^2}, \qquad y = -\lambda(1 + \lambda), \qquad z = \frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2},$$

důkaz je však úplný i bez tohoto vyjádření, neboť různým trojicím (a, b, c) zřejmě odpovídají různé trojice (x, y, z), takže i jich je nekonečně mnoho.

Jiné řešení. Protože čísla x, y, z jsou různá od 1, můžeme položit $x = a+1$, $y = b+1$, $z = c+1$ ($abc \neq 0$). Je tedy

$$V = \frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{(a+1)^2}{a^2} + \frac{(b+1)^2}{b^2} + \frac{(c+1)^2}{c^2} =$$
$$= 3 + 2\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big) + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} =$$
$$= 3 + \frac{2(ab+bc+ca)}{abc} + \frac{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)}{(abc)^2}.$$

Označíme-li $a+b+c = p$, $ab+bc+ca = q$, $abc = r \neq 0$, máme $xyz = 1$, právě když $p+q+r = 0$. Protože $r \neq 0$, můžeme pokračovat

$$V = 3 + \frac{2q}{r} + \frac{q^2 - 2rp}{r^2} = 3 + \frac{2q}{r} + \Big(\frac{q}{r}\Big)^2 - 2\frac{p}{r} =$$
$$= 3 + \frac{2q}{r} + \Big(\frac{q}{r}\Big)^2 + 2\frac{q+r}{r} = \Big(\frac{q}{r}\Big)^2 + 4\frac{q}{r} + 5 = \Big(\frac{q}{r} + 2\Big)^2 + 1 \geqq 1.$$

Tím je požadovaná nerovnost dokázána. Zároveň vidíme, že rovnost nastává, právě když $q = -2r$ a $p+q+r = 0$.

Najděme (podobně jako v prvním řešení) *všechny* trojice nenulových racionálních čísel a, b, c, které vyhovují soustavě posledních dvou rovnic, jež můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -2, \qquad \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1.$$

Vytkneme-li ze dvou zlomků druhé rovnice činitel $1/c$, dostaneme v závorce součet $1/a + 1/b$, za který dosadíme jeho vyjádření z první rovnice. Dostaneme tak

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{c}\cdot\Big(-2 - \frac{1}{c}\Big) = 1 \quad \text{neboli} \quad \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b} = \Big(1 + \frac{1}{c}\Big)^2.$$

Pomocí neznámé c tak máme vyjádřen jak součet, tak i součin zlomků $1/a$ a $1/b$, tato dvě racionální čísla jsou tudíž kořeny $t_{1,2}$ kvadratické rovnice

$$t^2 + \Big(2 + \frac{1}{c}\Big)t + \Big(1 + \frac{1}{c}\Big)^2 = 0.$$

Její diskriminant

$$\Big(2 + \frac{1}{c}\Big)^2 - 4\Big(1 + \frac{1}{c}\Big)^2 = -\frac{4c+3}{c^2}$$

proto musí být druhou mocninou racionálního čísla, takže pro vhodné racionální μ musí platit

$$4c + 3 = -\mu^2, \quad \text{odkud} \quad c = -\frac{\mu^2 + 3}{4}.$$

Po dosazení takového parametru c do odvozené kvadratické rovnice určíme oba její racionální kořeny $t_{1,2}$ (rutinní výpočet podle známého vzorce přeskočíme) a rovnou zapíšeme příslušné hodnoty a a b (v jednom z pořadí, na kterém ostatně díky symetrii úlohy tolik nezáleží):

$$a = \frac{1}{t_1} = -\frac{\mu^2 + 3}{(\mu - 1)^2} \quad \text{a} \quad b = \frac{1}{t_2} = -\frac{\mu^2 + 3}{(\mu + 1)^2}.$$

Racionální číslo μ jako parametr nalezeného popisu všech vyhovujících trojic (a, b, c) zřejmě může nabývat jakékoliv hodnoty s výjimkou $\mu = \pm 1$. Vrátíme-li se k původním proměnným $x = a + 1$, $y = b + 1$, $z = c + 1$, obdržíme kýžené vzorce pro všechny hledané trojice (až na možnou záměnu x a y) ve tvaru

$$x = -\frac{2(\mu + 1)}{(\mu - 1)^2}, \quad y = \frac{2(\mu - 1)}{(\mu + 1)^2}, \quad z = \frac{1 - \mu^2}{4}.$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že parametry λ a μ z obou podaných řešení popisují stejnou vyhovující trojici, platí-li $\lambda = -2/(\mu + 1)$ (podmínka $\mu \neq 1$ odpovídá podmínce $\lambda \neq -1$).

3. Nechť N je libovolné sudé přirozené číslo a p některý prvočinitel čísla $N^2 + 1$. Označme z zbytek čísla N při dělení prvočíslem p (zřejmě $0 < z < p$). Potom máme

$$z^2 \equiv N^2 \equiv -1 \pmod{p} \qquad \text{a též} \qquad (p - z)^2 \equiv z^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Vezměme za n menší z dvojice čísel z, $p - z$. Platí tedy $0 < n < p/2$ (p je liché prvočíslo) a zároveň $p \mid n^2 + 1$. Navíc

$$(p - 2n)^2 \equiv 4n^2 \equiv -4 \pmod{p},$$

a protože $(p - 2n)^2 > 0$, dostáváme $(p - 2n)^2 \geqq p - 4$. Pro prvočísla $p \geqq 5$ tak po odmocnění a úpravě máme

$$\begin{aligned} p - 2n &\geqq \sqrt{p - 4}, \\ p &\geqq 2n + \sqrt{p - 4}. \end{aligned} \tag{1}$$

Je-li dokonce $p > 20$, je $\sqrt{p - 4} > 4$ a z (1) plyne $p > 2n + 4$ neboli $p - 4 > 2n$. Je tedy $\sqrt{p - 4} > \sqrt{2n}$ a dosazením do (1) dostáváme požadovanou nerovnost $p > 2n + \sqrt{2n}$.

Ukázali jsme, že pro každé prvočíslo $p > 20$, k němuž existuje takové číslo N, že $p \mid N^2 + 1$ (tedy pro každé prvočíslo, mezi jehož kvadratické zbytky patří -1) existuje číslo n s požadovanou vlastností. Kdyby bylo takových n jen konečně mnoho, muselo by existovat jen konečně mnoho popsaných prvočísel, z $p \mid n^2 + 1$ totiž plyne $p \leqq n^2 + 1$. Avšak prvočísel s kvadratickým zbytkem -1 je nekonečně mnoho. Důkazem tohoto známého tvrzení zakončíme řešení úlohy.

Nechť M je libovolné přirozené číslo. Potom libovolné prvočíslo p, které je dělitelem čísla $(M!)^2 + 1$, má mezi svými kvadratickými zbytky číslo -1. Zároveň $p > M$, neboť zřejmě žádné z čísel $2, 3, \ldots, M$ není dělitelem čísla $(M!)^2 + 1$. Ke každému M tedy existuje prvočíslo $p > M$ s požadovanou vlastností. Takových prvočísel je proto nekonečně mnoho.

Poznámky. Každé prvočíslo tvaru $4k + 1$ má mezi svými kvadratickými zbytky číslo -1. Naopak -1 není kvadratickým zbytkem žádného prvočísla tvaru $4k + 3$. Prvočísel tvaru $4k + 1$ je nekonečně mnoho.

První tvrzení plyne z Wilsonovy věty: pro každé (liché) prvočíslo p platí $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. A protože $i(p-i) \equiv -i^2 \pmod{p}$, máme

$$(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \equiv -1 \pmod{p},$$

což ukazuje, že pro $p = 4k + 1$ je -1 kvadratickým zbytkem. Kdyby naopak pro $p = 4k + 3$ existovalo x, že $x^2 \equiv -1$, dostali bychom $x^{p-1} = (x^2)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} = -1$, což odporuje malé Fermatově větě. A konečně jsou-li $p_1, p_2, \ldots, p_n$ prvočísla dávající zbytek 1 (mod 4), je prvočinitel p čísla $(p_1 p_2 \ldots p_n)^2 + 1$ od prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_n$ různý, a protože má mezi kvadratickými zbytky -1, musí být podle předchozího jedině tvaru $4k + 1$.

4. Předpokládejme, že funkce f vyhovuje zadání. Budeme za w, x, y, z dosazovat různé čtveřice kladných čísel splňující $wx = yz$ a stanovovat tak podmínky, které musí f splňovat a jež budeme dále používat.

Po dosazení $w = x = y = z = 1$ máme $f(1)^2/f(1) = 1$, tedy $f(1) = 1$. Vezměme libovolné $t > 0$ a dosaďme $w = t$, $x = 1$ a $y = z = \sqrt{t}$. S využitím $f(1) = 1$ postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{f(t)^2 + 1}{2f(t)} &= \frac{t^2 + 1}{2t}, \\
tf(t)^2 + t &= t^2 f(t) + f(t), \\
tf(t)\big(f(t) - t\big) &= f(t) - t, \\
\big(f(t) - t\big)\big(tf(t) - 1\big) &= 0.
\end{aligned}$$

Pro každé $t > 0$ proto platí buď $f(t) = t$, anebo $f(t) = 1/t$. Přímým dosazením do zadání snadno ověříme, že obě funkce

$$f(t) = t \quad \text{pro všechna } t > 0 \quad \text{a} \quad f(t) = \frac{1}{t} \quad \text{pro všechna } t > 0 \tag{1}$$

vyhovují (první funkce zřejmě vyhovuje, v případě druhé stačí provést triviální úpravu a použít podmínku $wx = yz$). Ukážeme, že žádná jiná funkce podmínky zadání nesplňuje, tj. že f nemůže pro některé $t \neq 1$ nabývat hodnotu t a pro nějaké jiné t hodnotu $1/t$.

Předpokládejme, že f není ani jedna z funkcí (1). Tedy pro nějaká $a > 0$, $b > 0$ platí $f(a) \neq a$ a $f(b) \neq 1/b$. Podle odvozených podmínek potom nutně $f(a) = 1/a$, $f(b) = b$. Dosazením $w = a$, $x = b$ a $y = z = \sqrt{ab}$ do dané rovnosti po úpravě dostáváme

$$\frac{a^{-2} + b^2}{2f(ab)} = \frac{a^2 + b^2}{2ab},$$

$$f(ab) = \frac{ab(a^{-2} + b^2)}{a^2 + b^2}. \tag{2}$$

Víme, že $f(ab) = ab$ nebo $f(ab) = 1/ab$. Jestliže $f(ab) = ab$, je podle (2) $a^{-2} + b^2 = a^2 + b^2$, odkud $a = 1$. Avšak $f(1) = 1$, což odporuje předpokladu $f(a) \neq a$. Podobně jestliže $f(ab) = 1/ab$, z (2) máme

$$a^2b^2(a^{-2} + b^2) = a^2 + b^2, \qquad \text{tedy} \qquad b^2 + a^2b^4 = a^2 + b^2,$$

odkud $b^4 = 1$, tj. $b = 1$, což odporuje předpokladu $f(b) \neq 1/b$.

Dvě funkce (1) jsou tedy jediné funkce, jež vyhovují zadání.

Jiné řešení. Předpokládejme, že funkce f vyhovuje zadání, a položme $w = s$, $x = t$, $y = z = \sqrt{st}$. Pro libovolná kladná čísla s, t tak dostaneme

$$f(s)^2 + f(t)^2 = f(st)\frac{s^2 + t^2}{st}. \tag{3}$$

Pro $s = t = 1$ odtud snadno plyne $f(1) = 1$ a pro $s = 1/t$ pak vyjde

$$f(t)^2 + f\Big(\frac{1}{t}\Big)^2 = t^2 + \frac{1}{t^2}. \tag{4}$$

Konečně dosazením $s = 1$ do (3) dostaneme

$$f(t)^2 - \frac{t^2 + 1}{t}f(t) + 1 = 0,$$

což je stejná kvadratická rovnice pro $f(t)$, jakou jsme dostali v předchozím řešení. Vidíme tedy, že pro každé $t > 0$ platí buď $f(t) = t$, anebo $f(t) = 1/t$.

Označme $\mathsf{A} = \{a\colon f(a) = a\}$ a $\mathsf{B} = \{b\colon f(b) = 1/b\}$. Zřejmě $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \{1\}$ a $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = (0, \infty)$. Ze vztahů (3) a (4) však navíc plyne, že obě množiny A i B jsou uzavřeny vzhledem k operacím násobení a převrácené hodnoty. Jsou-li nyní $a \in \mathsf{A}$, $b \in \mathsf{B}$ taková, že $a \neq 1$, $b \neq 1$, nemůže být ani $ab \in \mathsf{A}$ (jinak by bylo $b = a^{-1} \cdot ab \in \mathsf{A}$), ani $ab \in \mathsf{B}$ (bylo by $a = ab \cdot b^{-1} \in \mathsf{B}$). Odtud plyne, že jedna z množin A, B je nutně triviální (rovna $\{1\}$), zatímco druhá je rovna $(0, \infty)$.

Jediné dvě funkce, jež vyhovují zadání, jsou funkce (1).

5. Posloupnosti k kroků, které vedou do stavu popsaného v zadání (lampy od 1 po n zapnuté, lampy od $n+1$ po $2n$ vypnuté), nazvěme *vyhovující*. Vyhovující posloupnosti, v nichž navíc ani jednou nezapneme žádnou z lamp od $n + 1$ po $2n$, nazvěme *speciální*. Máme tedy N vyhovujících posloupností, z nichž M je speciálních.

V každé vyhovující posloupnosti je každá z lamp $1, \ldots, n$ na konci zapnutá, takže celkový počet jejích přepnutí je lichý. Naopak každá z lamp $n + 1, \ldots, 2n$ je na konci vypnutá, takže počet jejích přepnutí je sudý.

Zřejmě $M > 0$, tj. existuje aspoň jedna speciální posloupnost (stačí jednou zapnout každou z lamp od 1 po n a potom zvolit jednu z nich a přepnout ji $(k - n)$-krát, což je podle zadání sudé číslo).

Nechť $\mathcal{P}$ je libovolná speciální posloupnost. Zvolme kteroukoli lampu l, kde $1 \leqq l \leqq n$. Označme k_l celkový počet přepnutí lampy l (jak už jsme zmínili, je k_l liché). Vyberme mezi nimi libovolnou podmnožinu obsahující *sudý* počet přepnutí a nahraďme každé z nich přepnutím lampy $n + l$. To můžeme udělat $2^{k_l - 1}$ způsoby, protože každá k_l-prvková množina má $\frac{1}{2}2^{k_l} = 2^{k_l - 1}$ podmnožin se sudou mohutností (zřejmě má každá množina stejný počet podmnožin se sudou i s lichou mohutností).

Uvedené změny přepnutí můžeme udělat nezávisle s každou lampou pro $l \in \{1, \ldots, n\}$. Protože $k_1 + \ldots + k_n = k$, je celkový počet různých posloupností, které dostaneme,

$$2^{k_1 - 1} \cdot 2^{k_2 - 1} \cdot \ldots \cdot 2^{k_n - 1} = 2^{k-n}.$$

V každé vytvořené posloupnosti je počet přepnutí každé z lamp od $n + 1$ do $2n$ sudý a počet přepnutí každé z lamp od 1 do n lichý, jedná se proto o vyhovující posloupnost. Z každé speciální posloupnosti $\mathcal{P}$ umíme tudíž takto vytvořit 2^{k-n} vyhovujících posloupností.

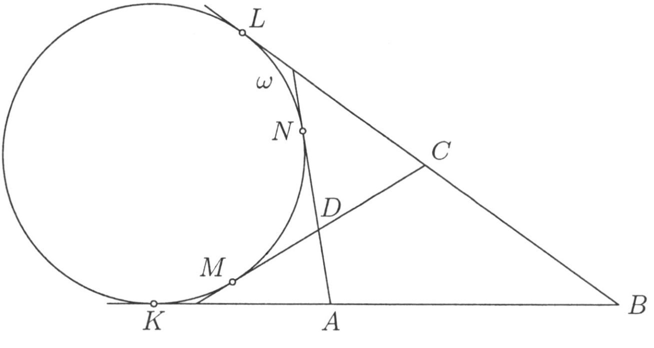
Zřejmě každou vyhovující posloupnost $\mathcal{Q}$ můžeme vytvořit popsaným způsobem. Stačí každé přepnutí lampy l ($l > n$) nacházející se v $\mathcal{Q}$ nahradit přepnutím lampy $l - n$. Ve výsledné posloupnosti $\mathcal{P}$ nebudou lampy od $n + 1$ do $2n$ přepnuty ani jednou. Protože v $\mathcal{Q}$ byl počet přepnutí každé lampy l ($l > n$) sudý, bude počet přepnutí každé lampy l ($l \leqq n$) v $\mathcal{P}$ lichý, tj. posloupnost $\mathcal{P}$ bude speciální. Jestliže nyní postup obrátíme a vrátíme příslušná přepnutí zpět k lampám od $n + 1$ do $2n$, dostaneme posloupnost $\mathcal{Q}$. Přitom obrácený postup změny $\mathcal{P}$ na $\mathcal{Q}$ probíhá přesně tak, jak jsme popsali výše.

Našli jsme zobrazení z množiny vyhovujících posloupností do množiny speciálních posloupností, přičemž vzor každé speciální posloupnosti při tomto zobrazení obsahuje 2^{k-n} vyhovujících posloupností. Proto $N/M = 2^{k-n}$.

6. Označme dotykové body kružnice ω a přímek BA, BC, CD, AD postupně K, L, M, N (obr. 53). Pro strany daného čtyřúhelníku platí

$$|AB| + |AD| = (|BK| - |AK|) + (|AN| - |DN|),$$
$$|CB| + |CD| = (|BL| - |CL|) + (|CM| - |DM|).$$

Přitom z rovnosti úseků příslušných tečen ke kružnici ω plyne $|BK| = |BL|$, $|DN| = |DM|$, $|AK| = |AN|$ a $|CL| = |CM|$, což po dosazení do předchozích dvou rovností dává $|AB| + |AD| = |CB| + |CD|$.



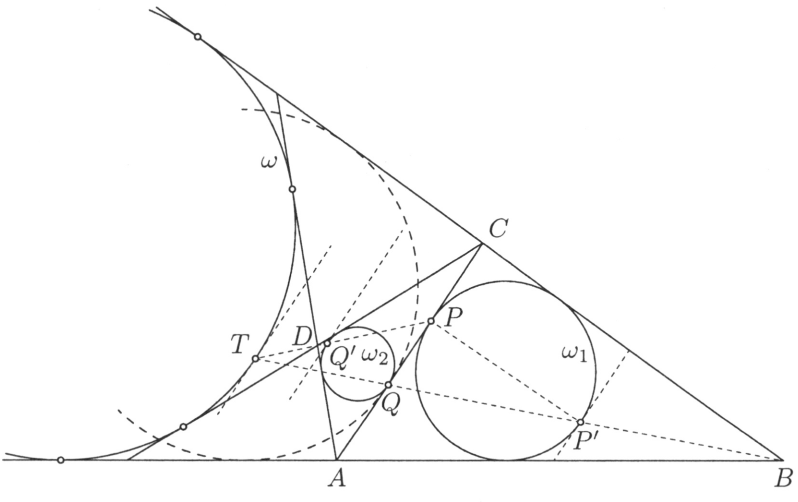
Obr. 53

Označme P a Q odpovídající body, v nichž se vepsané kružnice ω_1, ω_2 dotýkají strany AC. Podle známých vzorců pro délky úseků mezi vrcholy trojúhelníku a dotykovými body stran a vepsané kružnice vychází

$$|AP| = \tfrac{1}{2}(|AC| + |AB| - |BC|), \quad |CQ| = \tfrac{1}{2}(|AC| + |CD| - |AD|).$$

což vzhledem k dokázané rovnosti $|AB| + |AD| = |CB| + |CD|$ dává rovnost $|AP| = |CQ|$.

Jak známo, body dotyku vepsané a připsané kružnice jsou souměrně sdruženy podle středu odpovídající strany. Proto je bod Q zároveň i bodem dotyku kružnice připsané ke straně AC trojúhelníku ABC (obr. 54). Přitom ve stejnolehlosti se středem B, v níž se tato připsaná kružnice zobrazí na kružnici ω_1, je obrazem bodu Q bod P', v němž má kružnice ω_1 další tečnu rovnoběžnou s tečnou AC. Zřejmě je PP' průměrem kružnice ω_1 kolmým na AC a body B, P', Q leží v přímce.



Obr. 54

Analogicky je bod P bodem dotyku kružnice připsané ke straně AC trojúhelníku ADC. Navíc $P \neq Q$, neboť $|AB| \neq |BC|$. Je-li QQ' průměr kružnice ω_2 (kolmý na úhlopříčku AC), leží body D, Q', P rovněž v přímce.

Uvažujme průměr kružnice ω, jenž je kolmý na AC, a označme T ten z jeho krajních bodů, který je blíže přímce AC. Ve stejnolehlosti se středem B, která zobrazuje ω_1 na ω, se bod P' zobrazí do bodu T. Podobně ve stejnolehlosti se středem D, která zobrazuje ω_2 na ω, se zas bod Q' zobrazí do bodu T. To znamená, že bod T je průsečíkem přímek $P'Q$ a PQ'. Protože $PP' \parallel QQ'$, kružnice ω_1, ω_2 s průměry PP', QQ' jsou stejnolehlé se středem T. Protože bod T neleží na společné vnitřní tečně AC obou kružnic, je T jejich vnějším středem stejnolehlosti, takže je zároveň průsečíkem vnějších tečen kružnic ω_1, ω_2, což jsme chtěli dokázat.