

57. ročník matematické olympiády na středních školách

Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

In: Karel Horák (editor); Daniel Král' (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 57. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2007/2008. 49. mezinárodní matematická olympiáda. 20. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2010. pp. 134–147.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405159>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

V rámci závěrečné přípravy před MMO se uskutečnilo již osmé mezinárodní střetnutí mezi týmy České republiky, Polska a Slovenska. Jednotlivé země reprezentovala šestice účastníků, kteří si vybojovali ve svých zemích postup na 49. MMO v Madridu.

Soutěž se uskutečnila 23.–25. 6. 2008 v polské Zwardoni. Všechna tři reprezentační družstva přicestovala na místo konání již v neděli večer 22. 6. 2008. Organizace a průběh soutěže zůstal zachován z předešlých ročníků — je přizpůsoben stylu III. kola naší MO a podmínkám na MMO. Soutěžícím byly ve dvou dnech předloženy dvě trojice soutěžních úloh, přitom za každou z úloh mohli získat nejvýše 7 bodů, tj. celkově (stejně jako na MMO) 42 body. Na každou trojici úloh měli soutěžící vyhrazeno 4,5 hodiny.

Pořadí	Jméno	Země	body	Součet
1.	Jakub Oćwieja	POL	777776	41
2.	Karol Żebrowski	POL	777775	40
3.	Szymon Majewski	POL	277777	37
4.	Jakub Konieczny	POL	706717	28
5.	Jacek Jendrej	POL	077715	27
6.	Radosław Burny	POL	407770	25
7.	Josef Tkadlec	CZE	700771	22
8.	Michal Spišiak	SVK	007704	18
9.	Vladislav Ujházi	SVK	073700	17
10.	Miroslav Klimoš	CZE	070702	16
11.–13.	Miroslav Baláž	SVK	007503	15
	Jan Matějka	CZE	070701	15
	Samuel Říha	CZE	070710	15
14.	Tomáš Kocák	SVK	201710	11
15.	Filip Sládek	SVK	002710	10
16.–18.	Albert Herencsár	SVK	000700	7
	Tomáš Hřebejk	CZE	000700	7
	Jakub Töpfer	CZE	000700	7

Návrh všech šesti úloh (a jejich vzorová řešení) připravili kolegové z Polské republiky, řešení úloh koordinovala mezinárodní komise ve složení *Jaromír Šimša*, *Jaroslav Švrček* a *Karel Horák* za Českou republiku, *Pavol Novotný*, *Peter Novotný* a *Erika Trojáková* za Slovensko a *Waldemar Pompe*, *Jerzy Bednarczyk* a *Andrzej Grzesik* za Polsko.

Texty soutěžních úloh

1. Určete všechny trojice (x, y, z) kladných reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$2x^3 = 2y(x^2 + 1) - 1(z^2 + 1),$$

$$2y^4 = 3z(y^2 + 1) - 2(x^2 + 1),$$

$$2z^5 = 4x(z^2 + 1) - 3(y^2 + 1).$$

(*Adam Osekowski*)

2. Je dán konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ se shodnými vnitřními úhly při vrcholech A , C a E , v němž platí $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$ a $|EF| = |FA|$. Dokažte, že se přímky AD , BE a CF protínají ve společném bodě.

(*Waldemar Pompe*)

3. Určete všechna prvočísla p , pro něž je součet

$$\binom{p}{1}^2 + \binom{p}{2}^2 + \dots + \binom{p}{p-1}^2$$

dělitelný číslem p^3 .

(*Jarostaw Wróblewski*)

4. Dokažte, že existuje přirozené číslo n takové, že pro libovolné celé číslo k nemá číslo $k^2 + k + n$ žádného prvočíselného dělitele menšího než 2008.

(*Jarostaw Wróblewski*)

5. V rovině je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Určete nejmenší hodnotu výrazu

$$\frac{|PA| + |PB|}{|PC| + |PD| + |PE|},$$

kde P je libovolný bod roviny daného pětiúhelníku.

(*Waldemar Pompe*)

6. Najděte všechny trojice (k, m, n) přirozených čísel s následující vlastností: Čtverec se stranou délky m je možno rozřezat na několik pravoúhelníků o rozměrech $1 \times k$ a právě jeden čtverec se stranou délky n .

(*Jarostaw Wróblewski*)

Řešení úloh

1. Předpokládejme, že trojice (x, y, z) kladných reálných čísel je řešením dané soustavy. Rozebereme tři případy podle toho, které z čísel x, y, z je nejmenší. Ukáže se, že v každém z těchto případů stačí uvažovat jen jednu rovnici soustavy. Vícekrát použijeme známou nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem n -tice kladných reálných čísel (v našem případě bude $n \in \{2, 3, 4\}$), v níž platí rovnost, právě když je všech n čísel stejných.

Je-li $x \geq y, z \geq y$, platí zřejmě nerovnosti

$$2x^3 + (z^2 + 1) \geq 2yx^2 + (z^2 + 1) \geq 2yx^2 + 2z \geq 2yx^2 + 2y = 2y(x^2 + 1),$$

tedy $2x^3 \geq 2y(x^2 + 1) - (z^2 + 1)$. Přitom rovnost nastává jen v případě, kdy $2x^3 = 2yx^2, z^2 + 1 = 2z$ a $2z = 2y$, tedy $x = y, z = 1$ a $z = y$. Těmto podmínkám, a tedy i první rovnici soustavy vyhovuje jediné trojice $x = y = z = 1$. Snadno ověříme, že tato trojice splňuje i zbylé dvě rovnice.

Je-li $x \geq z, y \geq z$, dostáváme

$$\begin{aligned} 2y^4 + 2(x^2 + 1) &\geq 2y^4 + 2 \cdot 2x = (y^4 + y^4 + x) + 3x \geq \\ &\geq (y^4 + y^2 z^2 + z) + 3z \geq 3\sqrt[3]{y^6 z^3} + 3z = 3z(y^2 + 1), \end{aligned}$$

tedy $2y^4 \geq 3z(y^2 + 1) - 2(x^2 + 1)$. Rovnost nastává jediné v případě, kdy jsou splněny podmínky $x = 1, y^4 = y^2 z^2, x = z$ a $y^4 = y^2 z^2 = z$. Tomu, a tedy i druhé rovnici soustavy vyhovuje jediné trojice $x = y = z = 1$.

Je-li $y \geq x, z \geq x$, máme podobně jako v předešlém případě

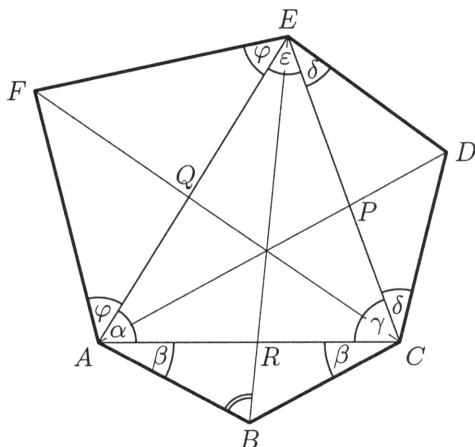
$$\begin{aligned} 2z^5 + 3(y^2 + 1) &\geq 2z^5 + 3 \cdot 2y = (z^5 + z^5 + y + y) + 4y \geq \\ &\geq (z^5 + z^3 x^2 + x + x) + 4x \geq \\ &\geq 4\sqrt[4]{z^8 x^4} + 4x = 4x(z^2 + 1), \end{aligned}$$

tedy $2z^5 \geq 4x(z^2 + 1) - 3(y^2 + 1)$. Rovnost dostaneme jen při dodržení podmínek $y = 1, z^5 = z^3 x^2, y = x$ a $z^5 = z^3 x^2 = x$. Třetí rovnice soustavy je tedy splněna jediné pro trojici $x = y = z = 1$.

Jediným řešením soustavy je trojice $(1, 1, 1)$.

2. Označme v trojúhelníku ACE velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A, C, E postupně $\alpha, \gamma, \varepsilon$. Trojúhelníky ACB, CED, EAF jsou podle zadání rovnoramenné. Označme velikosti jejich vnitřních úhlů při základnách postupně β, δ, φ (obr. 41). Tvrzení dokážeme použitím Cèvy vèty.

Proto ještě označme P, Q, R průsečíky přímk AD, CF, EB postupně se stranami CE, EA, AC trojúhelníku ACE .



Obr. 41

Ze sinové věty v trojúhelníku ABR máme

$$\frac{|AR|}{\sin |\sphericalangle ABE|} = \frac{|BR|}{\sin \beta}, \quad \text{tedy} \quad |AR| = \frac{|BR| \cdot \sin |\sphericalangle ABE|}{\sin \beta}. \quad (1)$$

Ze sinové věty v trojúhelníku ABE máme

$$\frac{|AE|}{\sin |\sphericalangle ABE|} = \frac{|BE|}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad \text{tedy} \quad \sin |\sphericalangle ABE| = \frac{|AE| \cdot \sin(\alpha + \beta)}{|BE|}.$$

Dosazením do (1) dostáváme

$$|AR| = \frac{|BR| \cdot |AE| \cdot \sin(\alpha + \beta)}{|BE| \cdot \sin \beta}.$$

Zřejmě analogicky (ze sinových vět v trojúhelnících CBR a CBE) můžeme odvodit

$$|CR| = \frac{|BR| \cdot |CE| \cdot \sin(\gamma + \beta)}{|BE| \cdot \sin \beta}.$$

Proto

$$\frac{|AR|}{|CR|} = \frac{|AE| \cdot \sin(\alpha + \beta)}{|CE| \cdot \sin(\gamma + \beta)}.$$

Opět analogicky lze vyjádřit poměry

$$\frac{|CP|}{|EP|} = \frac{|CA| \cdot \sin(\gamma + \delta)}{|EA| \cdot \sin(\varepsilon + \delta)} \quad \text{a} \quad \frac{|EQ|}{|AQ|} = \frac{|EC| \cdot \sin(\varepsilon + \varphi)}{|AC| \cdot \sin(\alpha + \varphi)}.$$

Odtud

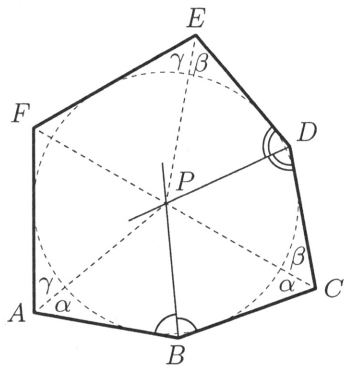
$$\frac{|AR|}{|CR|} \cdot \frac{|CP|}{|EP|} \cdot \frac{|EQ|}{|AQ|} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\gamma + \beta)} \cdot \frac{\sin(\gamma + \delta)}{\sin(\varepsilon + \delta)} \cdot \frac{\sin(\varepsilon + \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)}. \quad (2)$$

Podle zadání však platí $\varphi + \alpha + \beta = \beta + \gamma + \delta = \delta + \varepsilon + \varphi$. Proto

$$\alpha + \beta = \varepsilon + \delta, \quad \gamma + \delta = \alpha + \varphi, \quad \varepsilon + \varphi = \gamma + \beta$$

a součin (2) je rovný 1. Podle Cèvyovy věty se tak přímky AD , BE a CF protínají v jednom bodě.

Jiné řešení. Označme P průsečík os vnitřních úhlů daného šestiúhelníku při vrcholech B a D (obr. 42). Dokážeme, že šestiúhelníku $ABCDEF$ lze vepsat kružnici, jejímž středem je bod P . Dané tvrzení pak plyne z Brianchonovy věty.¹



Obr. 42

Z rovnosti $|AB| = |BC|$ plyne, že trojúhelníky ABP a CBP jsou shodné podle věty *sus*. Proto $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle BCP| = \alpha$. Obdobně jsou shodné i trojúhelníky CDP a EDP , tj. $|\sphericalangle DCP| = |\sphericalangle DEP| = \beta$.

¹ Uvedená věta říká, že jestliže se strany šestiúhelníku $ABCDEF$ dotýkají též kruželosečky, protínají se přímky AD , BE a CF v jednom bodě.

Z uvedených shodností navíc máme $|AP| = |CP| = |EP|$, odkud dohromady se zadanou rovností $|AF| = |EF|$ dostáváme podle věty sss shodnost trojúhelníků AFP a EFP . Proto osa vnitřního úhlu při vrcholu F prochází bodem P a $|\sphericalangle FAP| = |\sphericalangle FEP| = \gamma$.

Rovnosti $|\sphericalangle FAB| = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DEF|$ jsou ekvivalentní s rovnostmi $\gamma + \alpha = \alpha + \beta = \beta + \gamma$, z nichž triviálně vyplývá $\alpha = \beta = \gamma$. Proto i osy vnitřních úhlů při vrcholech A , C a E procházejí bodem P a šestiúhelníku $ABCDEF$ lze vepsat kružnici se středem P .

3. Nechť $M = \{1, 2, \dots, p-1\}$ je množina všech nenulových zbytků při dělení p . Pro každé $k \in M$ je kombinační číslo

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

dělitelné prvočíslem p , neboť všechny činitele součinu $k!(p-k)!$ ve jmenovateli jsou menší než p (a tedy s p nesoudělné), zatímco čitatel $p!$ zřejmě prvočíslem p dělitelný je. Každý ze sčítanců součtu v zadání je tedy dělitelný číslem p^2 a naší úlohou je zjistit, pro která prvočísla p je součet

$$S = \frac{1}{p^2} \binom{p}{1}^2 + \frac{1}{p^2} \binom{p}{2}^2 + \dots + \frac{1}{p^2} \binom{p}{p-1}^2 \quad (1)$$

dělitelný p .

Pro každé $k \in M$ zkoumejme, jaký dává přirozené číslo

$$a_k = \frac{1}{p^2} \binom{p}{k}^2 = \left(\frac{(p-1)!}{k!(p-k)!} \right)^2 \quad (2)$$

zbytek při dělení p . Protože pro libovolné i platí $p-i \equiv -i \pmod{p}$, je

$$\begin{aligned} (p-k)! &= (p-k)(p-(k+1)) \dots (p-(p-1)) \equiv \\ &\equiv (-1)^{p-k} k(k+1) \dots (p-1) \pmod{p}. \end{aligned}$$

Úpravou vztahu (2) tak dostáváme

$$\begin{aligned} ((p-1)!)^2 &= a_k (k!(p-k)!)^2 \equiv a_k (k!(-1)^{p-k} k(k+1) \dots (p-1))^2 = \\ &= a_k \cdot k^2 ((p-1)!)^2 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Tuto kongruenci můžeme vydělit výrazem $((p-1)!)^2$, který je nesoudělný s p . Tedy

$$1 \equiv a_k \cdot k^2 \pmod{p}. \quad (3)$$

Jak víme, ke každému zbytku $k \in M$ existuje právě jeden zbytek $z_k \in M$ takový, že $z_k \cdot k \equiv 1 \pmod{p}$; jestliže navíc $k, l \in M$ jsou různé, tak i z_k, z_l jsou různé.² Množina $M' = \{z_1, z_2, \dots, z_{p-1}\}$ má tedy stejně prvků jako množina M , a protože $M' \subset M$, nutně $M' = M$.

Z definice prvku z_k dostáváme $1 = 1^2 \equiv (z_k \cdot k)^2 = z_k^2 \cdot k^2 \pmod{p}$. Dohromady s (3) potom $a_k \cdot k^2 \equiv z_k^2 \cdot k^2 \pmod{p}$ a po vydělení k^2 máme $a_k \equiv z_k^2 \pmod{p}$. Pro zbytek součtu (1) tedy platí

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} \equiv z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{p-1}^2 = \\ &= 1^2 + 2^2 + \dots + (p-1)^2 = \frac{1}{6}p(p-1)(2p-1) \pmod{p} \end{aligned}$$

(využili jsme dokázanou rovnost $\{z_1, z_2, \dots, z_{p-1}\} = \{1, 2, \dots, p-1\}$ a známý vzorec pro součet druhých mocnin). Snadno přímým dosazením ověříme, že výraz $\frac{1}{6}p(p-1)(2p-1)$ není pro $p = 2, 3$ násobkem p . Naopak, každé prvočíslo $p \geq 5$ je nesoudělné s číslem 6, je tedy p dělitelem čísla $p \cdot \frac{1}{6}(p-1)(2p-1)$.

Daný součet je dělitelný číslem p^3 pro všechna prvočísla větší než 5.

4. Uvažujme prvočíslo p a podívejme se, jaký zbytek při dělení p může dávat číslo $k^2 + k$. Na to stačí za k postupně dosadit čísla $0, 1, \dots, p-1$, dále se už budou zbytky periodicky opakovat. Pro $p = 2, 3, 5, 7$ tak dostaneme zbytky uvedené v tabulce:

$p \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
2	0	0					
3	0	2	0				
5	0	2	1	2	0		
7	0	2	6	5	6	2	0

Vidíme, že v uvedených posloupnostech se některé zbytky neobjevují. Například pro $p = 2$ nedává $k^2 + k$ nikdy zbytek 1, pro $p = 3$ nedostaneme zbytek 1, pro $p = 5$ zbytek 3 ani 4 atd. Abychom to dokázali pro obecné p , stačí ověřit, že některý zbytek se v této konečné posloupnosti objeví aspoň dvakrát. Počet různých zbytků je totiž p a délka posloupnosti je rovněž p , proto jakmile se v posloupnosti nějaký zbytek zopakuje, nebude už v ní dost místa pro všechny možné zbytky.

² Existence zbytku z_k vyplývá z existence celých čísel a, b takových, že $ak + bp = 1$. Jednoznačnost je zřejmá: jestliže $1 \equiv z_k \cdot k \equiv z'_k \cdot k \pmod{p}$, pak vydělením k máme $z_k \equiv z'_k \pmod{p}$. Různost triviálně vyplývá z jednoznačnosti a z vlastnosti $z_{z_k} = k$: jestliže $z_k = z_l$, tak $k = z_{z_k} = z_{z_l} = l$.

Opakujícím se zbytkem je například 0, platí totiž

$$0^2 + 0 \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{i} \quad (p-1)^2 + (p-1) = p^2 - p \equiv 0 \pmod{p},$$

takže zbytek 0 dostaneme pro $k = 0$ i pro $k = p - 1$.

Nechť $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ je množina všech prvočísel menších než 2008. Pro každé $j = 1, 2, \dots, m$ označme r_{p_j} libovolný ze zbytků při dělení prvočíslem p_j , pro který $k^2 + k \not\equiv r_{p_j} \pmod{p_j}$ pro všechna celá čísla k (už jsme dokázali, že takový zbytek existuje). Abychom vyhověli zadání, stačí zvolit n , které splňuje soustavu kongruencí

$$\begin{aligned} n &\equiv -r_{p_1} \pmod{p_1}, \\ n &\equiv -r_{p_2} \pmod{p_2}, \\ &\vdots \\ n &\equiv -r_{p_m} \pmod{p_m}, \end{aligned}$$

potom totiž $k^2 + k + n \equiv k^2 + k - r_{p_j} \not\equiv 0 \pmod{p_j}$ pro všechna $j = 1, 2, \dots, m$. Existence požadovaného n už přímo vyplývá z čínské zbytkové věty³, protože prvočísla p_1, p_2, \dots, p_m jsou navzájem nesoudělná.

5. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ má délku strany 1. Potom každá z jeho úhlopříček má délku⁴

$$u = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

³ Podle ní pro navzájem nesoudělná čísla q_1, \dots, q_m a libovolná celá čísla a_1, \dots, a_m existuje celé číslo x splňující

$$x \equiv a_1 \pmod{q_1}, \quad x \equiv a_2 \pmod{q_2}, \quad \dots, \quad x \equiv a_m \pmod{q_m}.$$

Tuto větu lze jednoduše dokázat přímou konstrukcí x : První kongruenci splňuje $x = kq_1 + a_1$ pro libovolné celé k . Jestliže za k dosadíme postupně $0, 1, \dots, q_2 - 1$, pro x dostaneme q_2 různých zbytků při dělení q_2 a jeden z nich, $k'q_1 + a_1$, bude tudíž roven a_2 . Abychom tedy splnili i druhou kongruenci, stačí zvolit $x = (k' + lq_2)q_1 + a_1$ pro libovolné celé l . Za l dosadíme postupně $0, 1, \dots, q_3 - 1$, dostaneme q_3 různých zbytků při dělení q_3 , jeden z nich bude roven a_3 , atd.

⁴ Délku úhlopříčky u pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$ se stranou délky 1 lze jednoduše vypočítat například z podobnosti rovnoramenných trojúhelníků CAB a DEX , kde X je průsečík úhlopříček AD a EC . Čtyřúhelník $ABCX$ je totiž kosočtverec, takže $|EX| = u - 1$, a tedy $(u - 1) : 1 = 1 : u$.

Použitím Ptolemaiovy nerovnosti⁵ pro čtyřúhelníky $APBE$, $APBD$, $APBC$ (obr. 43), resp. příslušné čtveřice bodů, pokud body v uvedeném pořadí netvoří čtyřúhelníky, dostáváme

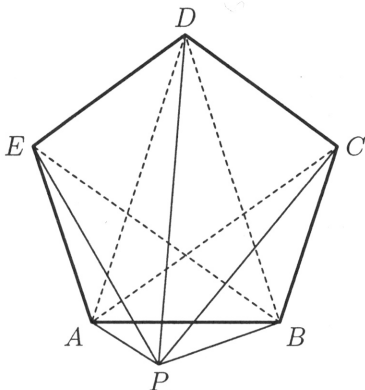
$$\begin{aligned} |PA| \cdot u + |PB| \cdot 1 &\geq 1 \cdot |PE|, \\ |PA| \cdot u + |PB| \cdot u &\geq 1 \cdot |PD|, \\ |PA| \cdot 1 + |PB| \cdot u &\geq 1 \cdot |PC|. \end{aligned} \quad (1)$$

Sečtením těchto nerovností už získáváme dolní odhad pro výraz ze zadání:

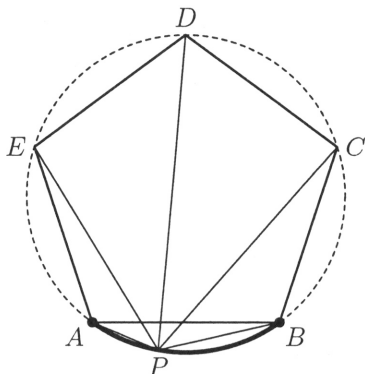
$$(|PA| + |PB|) \cdot (2u + 1) \geq |PC| + |PD| + |PE|,$$

odkud

$$\frac{|PA| + |PB|}{|PC| + |PD| + |PE|} \geq \frac{1}{2u + 1}. \quad (2)$$



Obr. 43



Obr. 44

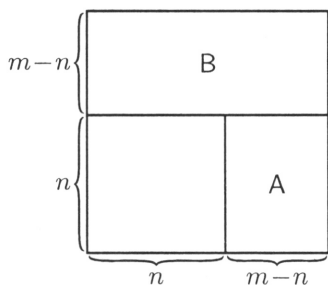
Přitom rovnost ve všech nerovnostech v (1), a tedy i ve (2) platí, právě když jsou čtyřúhelníky $APBE$, $APBD$, $APBC$ tětívnové (připouští se i možnost $P = A$, resp. $P = B$), tj. jestliže bod P leží na kratším

⁵ Jestliže X, Y, Z, W jsou libovolné čtyři body v rovině, pak podle Ptolemaiovy nerovnosti platí $|XY| \cdot |ZW| + |YZ| \cdot |WX| \geq |XZ| \cdot |YW|$, přičemž rovnost podle Ptolemaiovy věty nastane, právě když body X, Y, Z, W leží (v tomto pořadí) na téže kružnici. Je-li $XYZW$ čtyřúhelník, říká Ptolemaiova nerovnost (resp. věta), že součet součinů délek protilehlých stran není menší než součin délek úhlopříček, přičemž rovnost nastane, právě když je čtyřúhelník $XYZW$ tětívnový.

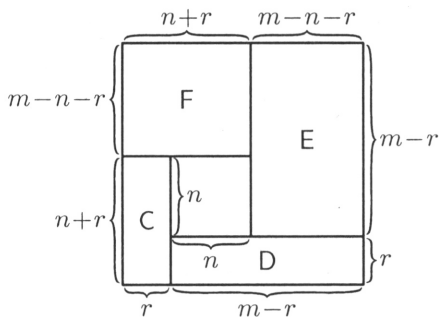
oblouku AB kružnice opsané pětiúhelníku $ABCDE$ (obr. 44). Nejmenší možná hodnota zadaného výrazu je proto

$$\frac{1}{2u+1} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})+1} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \sqrt{5}-2.$$

6. Zřejmě každý pravoúhelník, jehož aspoň jedna strana má délku, která je násobkem k , se dá rozdělit na pravoúhelníky rozměrů $1 \times k$. Pokusme se tedy rozdělit čtverec $m \times m$ na jeden čtverec $n \times n$ a několik pravoúhelníků s uvedenou vlastností. Samozřejmě má smysl zabývat se jen případem $m \geq n$.



Obr. 45



Obr. 46

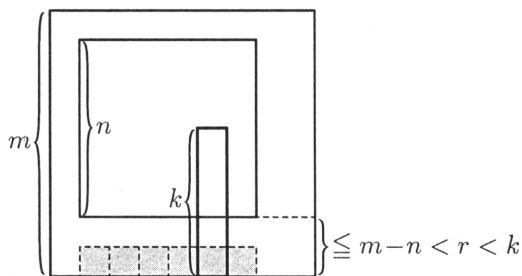
Jestliže $k \mid m - n$, můžeme čtverec $m \times m$ rozdělit tak, jak je znázorněno na obr. 45, oba pravoúhelníky A, B totiž mají jednu stranu délky $m - n$, která je násobkem k .

Jestliže $k \mid m + n$ a $n + r \leq m$, kde r je zbytek, který dává číslo m po dělení k , dá se čtverec $m \times m$ rozdělit jako na obr. 46. Pravoúhelníky D, E mají jednu stranu délky $m - r$, která je násobkem k . Podmínka $k \mid m + n$ zabezpečuje, že násobkem k je i číslo $n + r$, tj. délka jedné ze stran v pravoúhelnících C, F. Díky nerovnosti $n + r \leq m$ mají pravoúhelníky E, F stranu nezáporné délky $m - n - r$, uvedené rozdělení je tedy vskutku možné (strany délky 0 jsou povoleny, v takovém případě na pokrytí degenerovaného pravoúhelníku rozměrů $0 \times l$ prostě nepotřebujeme žádný pravoúhelník $1 \times k$).

Aby trojice (k, m, n) , kde $m \geq n$, vyhovovala zadání, stačí, aby byla splněna aspoň jedna z podmínek

- (a) $k \mid m - n$;
- (b) $k \mid m + n$ a současně $n + r \leq m$, kde r je zbytek, jenž dává číslo m při dělení číslem k .

Ukážeme, že tyto podmínky jsou zároveň i nutné. Nejdříve dokážeme, že jestliže pro trojici (k, m, n) , v níž $m > n$, existuje vyhovující rozdělení, pak $n + r \leq m$ (to při $m > n$ triviálně platí, jakmile je splněna podmínka (a), nemusíme tedy rozlišovat dva případy). Předpokládejme proto sporem, že máme vyhovující rozdělení, a přitom $n + r > m$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že se čtverec $n \times n$ nedotýká spodní strany čtverce $m \times m$ (obr. 47). Protože $m - n < r < k$, všechny jednotkové čtverečky dotýkající se průřezu čtverce $n \times n$ na spodní stranu čtverce $m \times m$ (na obr. 47 znázorněné šedou barvou) musejí být pokryty „ležícími“ pravoúhelníky $1 \times k$ (tj. takovými, které mají delší stranu rovnoběžnou se spodní stranou čtverce $m \times m$); „stoječí“ pravoúhelníky $1 \times k$ je nemohou pokrývat, protože by zasahovaly do čtverce $n \times n$.



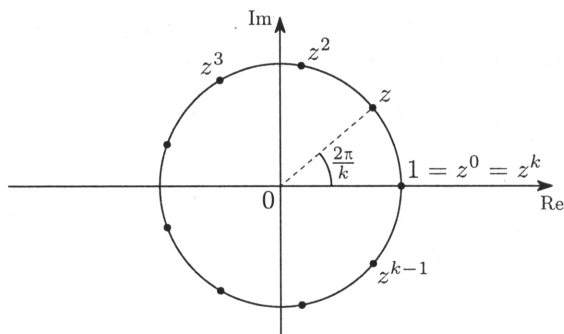
Obr. 47

Nechť p je počet „ležících“ pravoúhelníků $1 \times k$ pokrývajících zmíněných n šedých jednotkových čtverečků. Protože tyto pravoúhelníky pokrývají jen čtverečky při spodní straně čtverce $m \times m$ a zároveň pokrývají minimálně n šedých jednotkových čtverečků, platí $n \leq pk \leq m$. Spolu s nerovností $n + r > m$ dostáváme

$$m - r < pk \leq m,$$

což je ve sporu s tím, že r je zbytek čísla m při dělení číslem k (mezi čísla $m - r$ a m nemůže ležet žádný násobek čísla k).

Zbývá dokázat, že $k \mid m - n$ anebo $k \mid m + n$. Hlavní myšlenka je následující. Do každého jednotkového čtverečku napíšeme jedno číslo. Přitom celé očíslování uděláme tak, aby v každém pravoúhelníku $1 \times k$ byl součet čísel roven 0. To znamená, že v každém vyhovujícím rozdělení bude muset být součet všech čísel ve čtverci $m \times m$ stejný jako součet čísel v menším čtverci $n \times n$. Porovnáním obou součtů stanovíme nutné podmínky pro k , m a n .

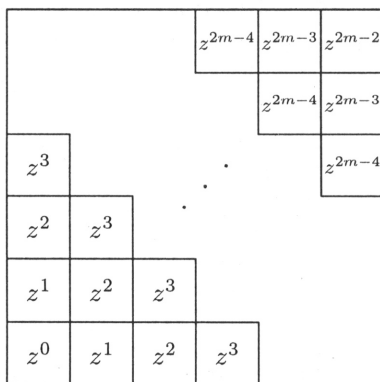


Obr. 48

Výhodné bude očíslování pomocí komplexních čísel. Označme $z = \cos(2\pi/k) + i \sin(2\pi/k)$. Číslo z je tedy k -tá komplexní odmocnina z čísla 1 s nejmenším úhlem (obr. 48). Přitom

$$z^0 + z^1 + \dots + z^{k-1} = \frac{z^k - 1}{z - 1} = \frac{0}{z - 1} = 0. \quad (1)$$

Očíslujme čtverečky tak, jak je naznačeno na obr. 49, tj. jestliže čtverec $m \times m$ je umístěn do prvního kvadrantu souřadnicové soustavy s vrcholem v počátku, tak do čtverečku, jehož levý dolní vrchol má souřadnice (x, y) , napíšeme číslo z^{x+y} :



Obr. 49

Uvažujme libovolný pravoúhelník $1 \times k$. Nechť v jeho čtverečku s nejmenší x -ovou (jestliže se jedná o „ležící“ pravoúhelník), resp. nejmenší

y -ovou (jestliže je to „stojící“ pravoúhelník) je napsáno číslo z^t . Potom součet všech čísel v něm napsaných je (s využitím (1))

$$z^t + z^{t+1} + \dots + z^{t+k-1} = z^t(z^0 + z^1 + \dots + z^{k-1}) = 0,$$

takové očíslování tedy splňuje požadovanou podmínku.

Součet čísel v libovolném čtverci $n \times n$, jehož levý dolní čtvereček má číslo z^t , je roven (sčítáme po jednotlivých řádcích)

$$\begin{aligned} & (z^t + \dots + z^{t+n-1}) + (z^{t+1} + \dots + z^{t+n}) + \dots + \\ & \qquad \qquad \qquad + (z^{t+n-1} + \dots + z^{t+2n-2}) = \\ & = (z^t + z^{t+1} + \dots + z^{t+n-1})(z^0 + z^1 + \dots + z^{n-1}) = \\ & = z^t(z^0 + z^1 + \dots + z^{n-1})^2 = z^t \left(\frac{z^n - 1}{z - 1} \right)^2. \end{aligned}$$

Tento vztah můžeme použít i na výpočet součtu v celém čtverci $m \times m$. Ten má v levém dolním čtverečku číslo $z^0 = 1$, takže součet čísel v něm je $(z^m - 1)^2 / (z - 1)^2$.

Jestliže tedy máme vyhovující rozdělení, přičemž v levém dolním čtverečku čtverce $n \times n$ je napsáno číslo z^t , musí platit

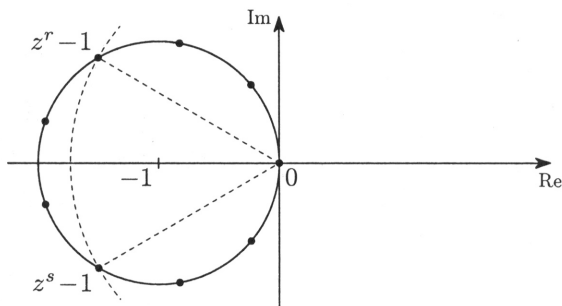
$$z^t \left(\frac{z^n - 1}{z - 1} \right)^2 = \left(\frac{z^m - 1}{z - 1} \right)^2.$$

Aby se dvě komplexní čísla rovnala, musejí se rovnat i jejich absolutní hodnoty. Důsledkovými úpravami předešlé rovnosti (využívající zřejmý vztah $|z| = 1$) tak postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \left| z^t \left(\frac{z^n - 1}{z - 1} \right)^2 \right| &= \left| \left(\frac{z^m - 1}{z - 1} \right)^2 \right|, \\ |z|^t \frac{|z^n - 1|^2}{|z - 1|^2} &= \frac{|z^m - 1|^2}{|z - 1|^2}, \\ |z^n - 1|^2 &= |z^m - 1|^2, \\ |z^n - 1| &= |z^m - 1|. \end{aligned}$$

Nechť r, s jsou zbytky, které dávají m, n při dělení číslem k . Protože $z^k = 1$, zřejmě $z^m = z^r$ a $z^n = z^s$. Pro která čísla $r, s \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ mají komplexní čísla $z^r - 1, z^s - 1$ stejnou absolutní hodnotu? První možností samozřejmě je $r = s$. V takovém případě dávají m a n stejný zbytek při dělení k , takže $k \mid m - n$. Zabýváme se dále jen případem $r \neq s$.

Čísla z^r, z^s leží v komplexní rovině na jednotkové kružnici se středem v 0 (obr. 48), tudíž $z^r - 1, z^s - 1$ leží na jednotkové kružnici se středem v -1 . Aby měla dvě různá čísla na této kružnici stejnou absolutní hodnotu, musejí být stejně vzdálená od 0, což zřejmě nastane jedině v případě, kdy $z^r - 1, z^s - 1$ jsou navzájem komplexně sdružená, tj. jestliže $r + s = k$ (obr. 50). V tomto případě tedy $k \mid m + n$.



Obr. 50

Poznámka. Uvedenou metodou číslování polí čtvercové sítě komplexními jednotkami je možno také (či dokonce především) dokázat následující pozoruhodný výsledek: lze-li pravoúhelník $m \times n$ rozdělit na několik dílů $1 \times k$, pak $k \mid m$ nebo $k \mid n$.