56. ročník matematické olympiády na středních školách

1. středoevropská matematická olympiáda

In: Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 56. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2006/2007. 48. mezinárodní matematická olympiáda. 19. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2008. pp. 154–166.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405140

1. středoevropská matematická olympiáda

Z podnětu organizačního výboru rakouské matematické olympiády (ÖMO) byly v během 47. mezinárodní matematické olympiády ve Slovinsku delegace devíti středoevropských zemí (Švýcarska, Rakouska, Německa, Slovinska, Chorvatska, České republiky, Slovenska, Polska a Maďarska) seznámeny s návrhem vytvořit pro matematicky talentované středoškoláky uvedených zemí novou soutěž. Snahou iniciátorů vzniku soutěže bylo umožnit dalším studentům zemí střední Evropy porovnat své znalosti z matematiky v mezinárodním měřítku. Na tomto jednání byly také předběžně stanoveny cíle a pravidla této nové mezinárodní soutěže. Iniciátoři jejího vzniku přitom vycházeli z pravidel dvojstranné mezinárodní matematické soutěže středoškoláků „Polsko – Rakousko“, která existovala až do roku 2006 plných 29 let.

První ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO — Middle European Mathematical Olympiad) se uskutečnil 20.–26. září 2007 v rakouském Eisenstadtu — hlavním městě spolkové země Burgenland. Soutěže se však v jejím prvním ročníku zúčastnilo pouze sedm (z devíti) středoevropských zemí (soutěže se nezúčastnilo Německo a Maďarsko).

Každou zemi mělo právo reprezentovat šest soutěžících, kteří se nezúčastnili uplynulé MMO ve Vietnamu a ve školním roce 2007/08 byli studenty středních škol. Úvodního ročníku soutěže se nakonec zúčastnilo 40 studentů (slovinské družstvo přicestovalo do Eisenstadtu pouze se čtyřmi účastníky).

Ústřední komise české MO vybrala pro Středoevropskou matematickou olympiádu šestici středoškoláků sestavenou z vítězů, resp. těch úspěšných řešitelů ústředního kola 56. ročníku MO kategorie A, kteří splňovali podmínky soutěže. České reprezentační družstvo tak v abecedním pořadí tvořili tito soutěžící: *Jan Máca* (G v Třebíči), *Matěj Pe-*

terka (G v Praze 6, Nad Alejí), *Alena Peterová* (G Dobruška), *Samuel Říha* (G v Brně, tř. Kpt. Jaroše), *Tomáš Toufar* (GMK v Bílovci) a *Jan Vaňhara* (GLJ v Holešově). Vedoucím české delegace a jejím zástupcem v jury byl RNDr. *Jaroslav Švrček*, CSc., z Přírodovědecké fakulty UP v Olomouci, jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl Mgr. *Martin Panák*, Ph.D., z brněnského pobočky Matematického ústavu AV ČR.

Vlastní soutěž se konala ve dvou soutěžních dnech, a to v sobotu 22. září (soutěž jednotlivců) a v neděli 23. září (soutěž družstev). Po oba soutěžní dny řešili jednotlivci, resp. reprezentační družstva po 4 úlohách, na jejichž vypracování byl vždy vyhrazen čas 5 hodin. Každá úloha byla přitom hodnocena (podle předem schváleného systému hodnocení) celočíselným počtem bodů v rozpětí 0–8 bodů.

Podobně jako na MMO měly jednotlivé země možnost zaslat s jistým časovým předstihem organizačnímu výboru návrhy úloh pro soutěž. Z nich pak mezinárodní jury vybrala dvě čtveřice úloh, jednu pro soutěž jednotlivců a druhou pro soutěž družstev. Mezi vybranými soutěžními úlohami byly také dvě české úlohy. Jedna z nich byla použita v soutěži jednotlivců (autor *Marek Pechal*) a druhá v soutěži družstev (autor doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc.).

Koordinace žákovských řešení probíhala stejným způsobem jako na MMO. Na závěrečném jednání jury (24. září) byly stanoveny hranice pro udělení zlatých, stříbrných a bronzových medaili a dále bylo potvrzeno oficiální pořadí v soutěži družstev. O tom, že úlohy v 1. ročníku soutěže byly poměrně náročné, svědčí i poměrně nízké hranice pro udělení medailí v soutěži jednotlivců. Pro zlatou medaili bylo stanoveno bodové rozpětí 23–32 bodů, pro stříbrnou 13–22 bodů a pro bronzovou medaili 8–12 bodů. Celkově byly uděleny 2 zlaté, 8 stříbrných a 10 bronzových medailí. Nejlepšího výsledku v soutěži jednotlivců přitom dosáhla *Joanna Bogdanowicz* z Polska. Výsledky našich žáků byly následující:

Umístění		**Body za úlohu** 1	2	3	4	**Body**	**Cena**
26.–29.	Jan Máca	1	0	1	3	5	
30.–32.	Matěj Peterka	0	2	1	1	4	
26.–29.	Alena Peterová	0	0	0	5	5	
14.–16.	Samuel Říha	0	3	0	7	10	bronz
17.–19.	Tomáš Toufar	0	0	8	1	9	bronz
39.–40.	Jan Vaňhara	0	0	0	0	0	
	Celkem	1	5	10	16	33	

O něco lépe si vedli naši soutěžící v soutěži družstev. Díky dobře promyšlené strategii řešení všech čtyř úloh obsadili po zásluze pěkné 3. místo a domů si tak všichni přivezli bronzové medaile. Lépe dopadlo Polsko s celkovým ziskem 31 bodů (ze 32 možných) a Chorvatsko s 25 body. Družstva na 3.–5. místě dosáhla shodně zisku 21 bodů, ale české družstvo (jako jediné z nich) vyřešilo bezchybně — bez ztráty bodu — dvě soutěžní úlohy (2. a 3.), proto v konečném pořadí obsadilo 3. příčku před Slovenskem a Rakouskem. Celkové výsledky soutěže družstev jsou uvedeny v následující tabulce.

		Body za úlohu				**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4		
1.	Polsko	8	7	8	8	31	zlato
2.	Chorvatsko	8	6	8	3	25	stříbro
3.	*Česká republika*	3	8	8	2	21	bronz
4.	Slovensko	3	7	8	3	21	
5.	Rakousko	6	4	8	3	21	
6.	Švýcarsko	3	3	8	5	19	
7.	Slovinsko	3	6	6	3	18	

Pro soutěžící a ostatní účastníky 1. středoevropské MO připravili pořadatelé na poslední dva dny jednodenní výlety, a to k Neziderskému jezeru (Neusiedler See) a do Vídně, kde si účastníci soutěže měli možnost prohlédnout pamětihodnosti hlavního města Rakouska.

Slavnostní zakončení soutěže se konalo za přítomnosti zástupců politického života země Burgenland a ministerstva školství Rakouska v kongresovém sále hotelu Ohr v Eisenstadtu. Předseda mezinárodní jury 1. středoevropské matematické olympiády Univ. Prof. Dr. *Gerd Baron* předal všem oceněným medaile a rovněž poděkoval předsedovi organizačního výboru 1. středoevropské MO Mag. *Thomasi Mühlgassnerovi*, který se výrazným způsobem zasloužil o zdárný průběh celé soutěže.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

Soutěž jednotlivců

1. Nechť a, b, c, d jsou kladná reálná čísla splňující rovnost $a+b+c+d = 4$. Dokažte, že

$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab \leqq 4.$$

(*Švýcarsko*)

2. Je dáno k sad míčů (k je celé číslo větší než 1). Každá sada obsahuje n míčů, které jsou označeny čísly $1, 2, \ldots, n$. Každý míč obarvíme jednou ze dvou barev (bílou nebo černou) tak, že

a) míče označené stejným číslem mají stejnou barvu,

b) žádná $(k+1)$-prvková množina míčů, které jsou označeny (ne nutně různými) čísly $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ tak, že platí $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = a_{k+1}$, není jednobarevná.

V závislosti na k určete největší možné číslo n, pro něž takové obarvení míčů existuje. (*Slovinsko*)

3. Je dána kružnice k a čtyři menší kružnice k_1, k_2, k_3 a k_4 se středy po řadě O_1, O_2, O_3 a O_4, jež leží na kružnici k. Pro $i = 1, 2, 3, 4$ se kružnice k_i a k_{i+1} ($k_5 = k_1$) protínají ve dvou bodech A_i a B_i, přičemž body A_i leží na kružnici k. Předpokládejme že body O_1, A_1, O_2, A_2, O_3, A_3, O_4, A_4 jsou navzájem různé a leží na kružnici k v tomto pořadí. Dokažte, že $B_1B_2B_3B_4$ je pravoúhelník. (*Švýcarsko*)

4. Určete všechny dvojice (x, y) kladných celých čísel, která vyhovují rovnici

$$x! + y! = x^y.$$

(*Česká republika*)

Soutěž družstev

5. Nechť a, b, c, d jsou libovolná reálná čísla z uzavřeného intervalu $\langle \frac{1}{2}; 2 \rangle$, která vyhovují podmínce $abcd = 1$. Určete největší možnou hodnotu výrazu

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{d}\right)\left(d + \frac{1}{a}\right).$$

(*Česká republika*)

6. Pro libovolnou množinu P pěti bodů v rovině (v obecné poloze) označme $a(\mathsf{P})$ počet všech ostroúhlých trojúhelníků s vrcholy v množině P. Určete největší možnou hodnotu $a(\mathsf{P})$.

(Pět bodů v rovině je v obecné poloze, jestliže žádné tři z nich neleží na téže přímce.) (*Švýcarsko*)

7. Označme $s(T)$ součet délek všech hran čtyřstěnu T. Uvažujme všechny čtyřstěny, jejichž délky hran jsou navzájem různá kladná celá čísla, přičemž jedno z nich je 2 a jedno 3. Takové čtyřstěny budeme nazývat MEMO-čtyřstěny.

a) Určete všechna kladná celá čísla n, pro něž existuje MEMO-čtyřstěn T s vlastností $s(T) = n$.
b) Určete počet navzájem *různých* MEMO-čtyřstěnů T, pro něž platí $s(T) = 2\,007$.

Dva čtyřstěny považujeme za *různé*, jestliže jeden nelze převést na druhý pomocí složení souměrností podle roviny, posunutí nebo otočení.

(Není nutno dokazovat, že dotyčné čtyřstěny nejsou degenerované, tj. že mají kladný objem.) (*Rakousko*)

8. Určete všechna kladná celá čísla k s vlastností: existuje celé číslo a takové, že $(a+k)^3 - a^3$ je násobkem čísla $2\,007$. (*Rakousko*)

Řešení úloh

1. Nechť $p \geqq q \geqq r \geqq s$ je nerostoucí uspořádání prvků uvažované množiny $\{a, b, c, d\}$ kladných reálných čísel, jež vyhovují dané podmínce $a+b+c+d = 4$. Protože $pqrs = abcd = 1$, je také $pqr \geqq pqs \geqq prs \geqq qrs$. Užitím *permutační nerovnosti*[3] tak dostaneme

$$\begin{aligned} a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab &= a \cdot abc + b \cdot bcd + c \cdot cda + d \cdot dab \leqq \\ &\leqq p \cdot pqr + q \cdot pqs + r \cdot prs + s \cdot qrs = (pq+rs)(pr+qs). \end{aligned}$$

Dvojím užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem kladných reálných čísel p, q, r, s dále obdržíme

$$\begin{aligned} (pq+rs)(pr+qs) &\leqq \Big(\frac{pq+rs+pr+qs}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4}\big((p+s)(q+r)\big)^2 \leqq \\ &\leqq \frac{1}{4}\Big(\frac{p+s+q+r}{2}\Big)^4 = \frac{1}{4}\Big(\frac{a+b+c+d}{2}\Big)^4 = 4, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Levou stranu dokazované nerovnosti upravíme na tvar

$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab = ac(ab+cd) + bd(bc+ad) \tag{1}$$

a všimneme si, že se nezmění pro žádnou cyklickou permutaci uspořádané čtveřice (a, b, c, d). Můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že

[3] Jsou-li $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$, $y_1 \leqq y_2 \leqq \ldots \leqq y_n$ dvě posloupnosti reálných čísel, platí pro libovolné uspořádání $z_1, z_2, \ldots, z_n$ čísel $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nerovnost $x_1z_1 + \ldots + x_nz_n \leqq x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

$a \geqq c$. Podobně lze předpokládat, že $b \geqq d$: pokud by totiž platilo $b \leqq d$, dostaneme cyklickou záměnou uspořádané čtveřice (a, b, c, d) čtveřici $(a', b', c', d') = (d, a, b, c)$, v níž $a' = d \geqq b = c'$ a současně $b' = a \geqq c = d'$.

Pro $a \geqq c$ a $b \geqq d$ platí $(a-c)(b-d) \geqq 0$. Tato nerovnost je ekvivaletní s nerovností

$$ab + cd \geqq bc + ad.$$

Pomocí této nerovnosti a užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvojice kladných reálných čísel odhadneme pravou stranu rovnosti (1) následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} &ac(ab + cd) + bd(bc + ad) \leqq \\ &\qquad \leqq ac(ab + cd) + bd(ab + cd) = (ab + cd)(ac + bd) \leqq \\ &\qquad \leqq \left(\frac{(ab + cd) + (ac + bd)}{2}\right)^2 = \left(\frac{(a + d)(b + c)}{2}\right)^2 \leqq \\ &\qquad \leqq \left(\frac{\frac{1}{4}(a + b + c + d)^2}{2}\right)^2 = 4. \end{aligned}$$

Tím je požadovaná nerovnost dokázána.

2. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že míče označené číslem 1 mají bílou barvu. Předpokládejme nejprve, že míče označené číslem 2 jsou černé. Protože

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{k} = k,$$

mají případné míče označené číslem k podle podmínky b) černou barvu. Z analogických důvodů jsou případné míče označené číslem $2k$ bílé, neboť

$$\underbrace{2 + 2 + \ldots + 2}_{k} = 2k.$$

Případné míče označené číslem $k + 1$ jsou pak podle podmínky b) černé, neboť

$$(k + 1) + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{k-1} = 2k.$$

Vzhledem k tomu, že

$$\underbrace{1 + \ldots + 1}_{k-1} + 2k = 3k - 1 = \underbrace{2 + \ldots + 2}_{k-1} + (k + 1),$$

nemohou být míče označené číslem $3k-1$ obarveny ani jednou z obou barev (bílou nebo černou). Odtud $n \leqq 3k-2$.

Předpokládejme nyní, že míče označené číslem 2 mají bílou barvu. Z rovností

$$\begin{aligned} 1+1+\ldots+1+1 &= k, \\ 1+1+\ldots+1+2 &= k+1, \\ 1+1+\ldots+2+2 &= k+2, \\ &\vdots \\ 1+2+\ldots+2+2 &= 2k-1, \\ 2+2+\ldots+2+2 &= 2k \end{aligned}$$

vyplývá, že případné míče označené čísly $k, k+1, \ldots, 2k$ jsou černé. Z rovnosti

$$\underbrace{k+k+\ldots+k}_{k} = k^2$$

dále plyne, že případné míče označené čísly k^2 jsou bílé. Protože však

$$\underbrace{1+\ldots+1}_{k-1}+k^2 = k^2+k-1 = k+\underbrace{(k+1)+\ldots+(k+1)}_{k-1},$$

nemohou mít míče označené číslem k^2+k-1 ani černou, ani bílou barvu. Je tudíž $n \leqq k^2+k-2$.

Protože $k^2+k-2 \geqq 3k-2$ (nerovnost je ekvivaletní s nerovností $k^2-2k = k(k-2) \geqq 0$), vidíme, že uvažované sady mohou obsahovat nejvýše k^2+k-2 míčů.

Nyní ukážeme, že pro $n = k^2+k-2$ má k sad n míčů, v nichž míče s čísly $k, k+1, \ldots, k^2-1$ jsou černé a ostatní bílé (bílých míčů je aspoň k), požadované vlastnosti:

Součet čísel na libovolných k černých míčích je aspoň $k+k+\ldots+$ $+k = k^2 > k^2-1$, takže množina černých míčů splňuje podmínku b).

Uvažujme nyní součet čísel na libovolných k bílých míčích. Jsou-li na nich pouze čísla menší než k, je jejich součet aspoň k a zároveň nejvýše

$$(k-1)+(k-1)+\ldots+(k-1) = k^2-k < k^2.$$

Je-li však aspoň na jednom z k bílých míčů číslo alespoň k^2, je jejich součet roven nejméně

$$k^2+1+1+\ldots+1 = k^2+k-1 > n.$$

Proto i libovolná množina k bílých míčů splňuje podmínku b).

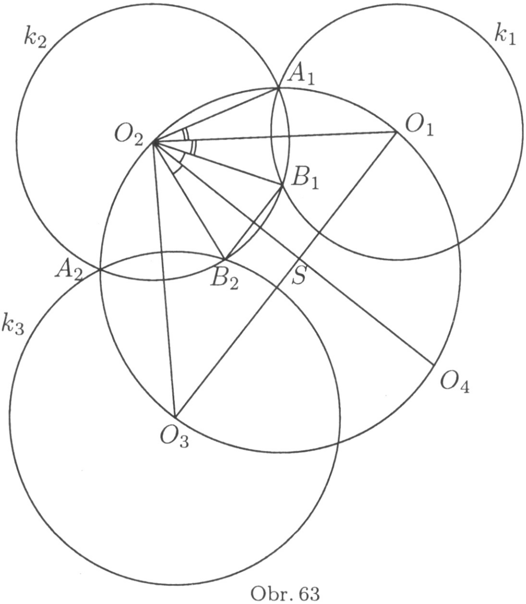
Pro libovolné $k > 1$ je řešením úlohy číslo $n = k^2+k-2$.

3. Označme O střed kružnice k a $\alpha_i = |\sphericalangle O_iOA_i| = |\sphericalangle O_iOA_{i-1}|$ velikosti středových úhlů příslušných tětivám O_iA_i ($i = 1, 2, 3, 4$, $A_0 = A_4$). Pro jejich součet zřejmě platí $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 180°$.

Nejprve ukážeme, že úsečky O_1O_3 a O_2O_4 (jejich průsečík označme S) jsou navzájem kolmé. To plyne z rovnosti (obr. 63)

$$|\sphericalangle O_1O_3O_2| + |\sphericalangle O_4O_2O_3| = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} = 90°,$$

kterou dostaneme z odpovídajících středových úhlů. Trojúhelník O_2O_3S je tudíž pravoúhlý.



Obr. 63

Nyní ukážeme, že $B_1B_2 \parallel O_1O_3$. Vzhledem k tomu, že $|O_2B_1| = |O_2B_2|$, stačí ukázat, že přímka O_2O_4 je osou úhlu $B_1O_2B_2$. Ze souměnosti kružnic k_1, k_2 dle středné O_1O_2 ovšem plyne

$$\begin{aligned}|\sphericalangle O_4O_2B_1| &= |\sphericalangle O_4O_2O_1| - |\sphericalangle B_1O_2O_1| = \\ &= |\sphericalangle O_4O_2O_1| - |\sphericalangle A_1O_2O_1| = \frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2} - \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\alpha_4}{2}.\end{aligned}$$

Úplně stejně ukážeme (vlastně jen prohodíme role kružnic k_1 a k_3), že také $|\sphericalangle O_4O_2B_2| = \frac{1}{2}\alpha_4$, a tedy $B_1B_2 \parallel O_1O_3$. Podobně dostaneme, že $B_2B_3 \parallel O_2O_4$, $B_3B_4 \parallel O_1O_3$ a $B_4B_1 \parallel O_2O_4$. Tím je důkaz uzavřen.

4. Předně si všimněme, že pro každou hledanou dvojici přirozených čísel x, y platí $x^y = x! + y! \geqq 2$, z čehož plyne $x \geqq 2$.

Uvažujme nejprve případ $x = 2$. Hledáme tedy všechna přirozená čísla y, která vyhovují rovnici $2 + y! = 2^y$. Z té plyne, že $y!$ je sudé, proto $y \geqq 2$ a $2 + y! = 2^y$ je dělitelné 4, což znamená, že $y!$ dává při dělení 4 zbytek 2. Může tedy být jedině $y \in \{2, 3\}$. Vzhledem k tomu, že $2! + 2! = 2^2$ a $2! + 3! = 2^3$, jsou $(2, 2)$ a $(2, 3)$ dvojice přirozených čísel, jež dané rovnici vyhovují.

Nyní uvažujme případ $x \geqq 3$. Číslo $x - 1$ je dělitelem čísla $x!$, není však dělitelem čísla x^y, neboť čísla $x - 1$ a x jsou nesoudělná. Ze zadání tak plyne, že $x - 1$ nemůže být dělitelem čísla $y!$, proto $y \leqq x - 2$.

Pro jakákoli přirozená čísla $y < x$ přitom platí

$$x! + y! = y!\bigl(1 + x \dots (y + 1)\bigr),$$

což nemůže být mocnina přirozeného čísla x s přirozeným mocnitelem, protože činitel v závorce na pravé straně je přirozené číslo větší než 1, které je s číslem x nesoudělné.

Závěr. Daná rovnice má právě dvě řešení (x, y) v oboru přirozených čísel, a to $(2, 2)$ a $(2, 3)$.

5. Vzhledem k podmínce $abcd = 1$ platí

$$\begin{aligned}
&\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{d}\right)\left(c + \frac{1}{d}\right) = \frac{(ab + 1)(bc + 1)(cd + 1)(da + 1)}{abcd} = \\
&\quad = (2 + ab + cd)(2 + bc + da) = \\
&\quad = 4 + 2(ab + bc + cd + da) + (a^2bd + b^2ca + c^2bd + d^2ac) = \\
&\quad = 4 + 2\,\frac{(a + c)(b + d)}{\sqrt{abcd}} + \frac{a^2bd + b^2ca + c^2bd + d^2ac}{abcd} = \\
&\quad = 4 + 2\left(\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}}\right)\left(\sqrt{\frac{b}{d}} + \sqrt{\frac{d}{b}}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{d} + \frac{d}{b}\right).
\end{aligned}$$

Uvažujme nyní funkci $f(x) = x + 1/x = f(1/x)$, která je rostoucí na intervalu $\langle 1; \infty)$. Vzhledem k tomu, že $a, b, c, d \in \langle \frac{1}{2}; 2\rangle$, a s ohledem na tvar posledního součtu dostáváme pro daný součin odhad

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{d}\right)\left(c + \frac{1}{d}\right) \leqq 4 + 2f(2)^2 + 2f(4),$$

přičemž této největší hodnoty nabývá např. pro $a/c = b/d = 4$. Volbou $a = b = 2$ a $c = d = \frac{1}{2}$ je pak splněna jak předešlá podmínka, tak i podmínka $abcd = 1$ ze zadání úlohy.

Největší možná hodnota daného výrazu je tedy $4 + 2(2 + \frac{1}{2})^2 + 2(4 + \frac{1}{4}) = 25$. Maximální hodnoty lze přitom dosáhnout pro následující čtveřice (a, b, c, d) reálných čísel: $(2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$, $(\frac{1}{2}, 2, 2, \frac{1}{2})$ a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 2)$.

Poznámka. Nejmenší možná hodnota uvažovaného výrazu je přitom $4 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 16$. Tato hodnota je dosažena pro $a = c$ a $b = d$, kde $ab = 1$, tj. pro každou čtveřici $(a, b, c, d) = (t, 1/t, t, 1/t)$, kde $t \in \langle \frac{1}{2}; 2 \rangle$.

6. Libovolných pět bodů (v obecné poloze) vytvoří v rovině deset trojúhelníků. Ukážeme, že aspoň tři z nich nejsou ostroúhlé.

Uvažujme nejprve libovolné čtyři ze zvolené pětice bodů v rovině. Mezi všemi trojúhelníky, které tvoří uvažovaná čtveřice bodů, je vždy aspoň jeden, který není ostroúhlý. Pokud uvažované čtyři body jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníku, má aspoň jeden z vnitřních úhlů takového čtyřúhelníku velikost aspoň $90°$. Trojúhelník určený rameny tohoto úhlu očividně není ostroúhlý.

V opačném případě, kdy jeden z uvažovaných čtyř bodů leží uvnitř trojúhelníku s vrcholy ve zbývajících třech bodech, existují dokonce dva trojúhelníky, jež nejsou ostroúhlé. Zřejmě nejvýše jeden ze tří úhlů, jejichž společným vrcholem je vnitřní bod tohoto trojúhelníku, má velikost menší než $90°$. Zbylým dvěma pak odpovídají dva tupoúhlé trojúhelníky.

Protože v libovolné čtveřici bodů v rovině lze vždy najít aspoň tři, jež tvoří trojúhelník, který není ostroúhlý, platí totéž i pro pět navzájem různých bodů roviny. Zvolme jednu takovou trojici bodů a uvažme čtveřici bodů, která jeden z nich neobsahuje. Mezi nimi zase existuje trojice bodů, jež tvoří trojúhelník, který není ostroúhlý. Obě nalezené trojice mají společný aspoň jeden vrchol (nikoliv však všechny tři). Uvažujme konečně čtyřúhelník, jehož vrcholy tvoří čtveřice bodů bez vrcholu, který je oběma nalezeným neostroúhlým trojúhelníkům společný. Tři jeho vrcholy tvoří vrcholy dalšího (třetího) trojúhelníku, který není ostroúhlý a od předešlých dvou se liší přinejmenším jedním vrcholem.

Nakonec ukážeme, že v rovině existuje pětice bodů, jež tvoří právě sedm ostroúhlých trojúhelníků. Zvolme v kartézské soustavě souřadnic např. body $A[0; -1]$, $B[3; 0]$, $C[1; 3]$, $D[-1; 3]$ a $E[-3; 0]$. Tato pětice bodů tvoří vrcholy konvexního pětiúhelníku $ABCDE$, který je osově souměrný podle osy strany CD. Trojúhelníky ABE, BCD a CDE jsou tupoúhlé, zatímco všechny ostatní trojúhelníky jsou ostroúhlé. Trojúhelník ACD zřejmě ostroúhlý je, a využijeme-li souměrnosti uvedeného pětiúhelníku, stačí ukázat, že i trojúhelníky ACE (s nejdelší stranou CE), ADE

(s nejdelší stranou AD) a BDE (s nedelší stranou BE) jsou ostroúhlé, tj. stačí ukázat, že úhly EAC, DEA a BDE proti nejdelším stranám odpovídajících trojúhelníků jsou ostré. Podle kosinové věty tak stačí dokázat následující tři nerovnosti

$$|EA|^2 + |AC|^2 > |CE|^2,$$
$$|DE|^2 + |EA|^2 > |AD|^2,$$
$$|BD|^2 + |DE|^2 > |BE|^2,$$

které snadno ověříme výpočtem:

$$|EA|^2 + |AC|^2 = (3^2 + 1^2) + (1^2 + 4^2) = 27 > 25 = 4^2 + 3^2 = |CE|^2,$$
$$|DE|^2 + |EA|^2 = (2^2 + 3^2) + (3^2 + 1^2) = 23 > 17 = 1^2 + 4^2 = |AD|^2,$$
$$|BD|^2 + |DE|^2 = (4^2 + 3^2) + (2^2 + 3^2) = 38 > 36 = 6^2 + 0^2 = |BE|^2.$$

Největší možná hodnota funkce a je tedy $a(\{A, B, C, D, E\}) = 7$.

7. Pokud některá ze stěn uvažovaného čtyřstěnu obsahuje hranu délky 2, liší se délky obou zbývajících hran této stěny (podle trojúhelníkové nerovnosti) o 1. Protože hrana délky 2 je společná dvěma stěnám čtyřstěnu, plyne odtud, že množina délek všech šesti hran uvažovaného čtyřstěnu obsahuje dvě (různé) dvojice po sobě jdoucích přirozených čísel.

Pokud některá ze stěn uvažovaného čtyřstěnu obsahuje hranu délky 3, liší se délky obou zbývajících hran o 1 nebo o 2.

Uvažujme nejprve případ, kdy obě hrany délek 2 a 3 leží v téže stěně čtyřstěnu. Z předchozích úvah plyne, že délka třetí hrany této stěny je 4 a délky tří zbývajících hran tohoto čtyřstěnu můžeme označit jako a, $a+1$ a b, kde a a b jsou přirozená čísla, $a \geqq 5$. Ze všech čtyř trojúhelníkových nerovností, které pro stěny se společnou hranou délky b můžeme sestavit, vychází, že číslo b může nabývat jen některou z hodnot $a-2$, $a-1$, $a+2$ nebo $a+3$. Označme vrcholy zkoumaného čtyřstěnu A, B, C, D tak, aby bylo $|AB| = 2$, $|BC| = 3$ a $|CA| = 4$. Pro délky zbývajících tří hran se společným vrcholem D tak máme následující možnosti: A) $a, a+1, a+2$, B) $a-2, a, a+1$, C) $a, a+1, a+3$, D) $a-1, a, a+1$, přičemž poslední možnost D) je zřejmě ekvivalentní možnosti A).

A) $a, a+1, a+2$. Jak jsme již zmínili v úvodu, musí být délky hran AD, BD dvě po sobě jdoucí přirozená čísla, proto volbou délky hrany AD jako a či $a+2$ jsou už délky zbývajích dvou hran určeny jednoznačně, jen pro $|AD| = a+1$ dostaneme dvě možnosti. Celkem tedy pro každé

$a \geqq 5$ dostaneme *čtyři* různé MEMO-čtyřstěny T se součtem $s(T) = 3a + 12 \geqq 27$, přičemž $s(T) \equiv 0 \pmod 3$ (tento poznatek se nám bude hodit v závěru řešení úlohy).

B) $a-2, a, a+1$. V tomto případě je možné (s ohledem na úvodní pozorování) jediné uspořádání délek hran, a to $|AD| = a+1$, $|BD| = a$, $|CD| = a-2$, $a - 2 \geqq 5$ neboli $a \geqq 7$, a pro takový MEMO-čtyřstěn T vychází součet $s(T) = 3a + 8 \geqq 29$, přičemž $s(T) \equiv 2 \pmod 3$.

C) $a, a+1, a+3$. I v tomto případě dostáváme jedinou možnost, a to $|AD| = a$, $|BD| = a+1$ a $|CD| = a+3$, $a \geqq 5$, s odpovídajícím součtem $s(T) = 3a + 13 \geqq 28$, přičemž $s(T) \equiv 1 \pmod 3$.

Zjistili jsme, že pro libovolné $n \geqq 27$ dokážeme sestrojit MEMO-čtyřstěn, jehož jedna stěna má hrany délek 2, 3 a 4 a zbylé tři hrany určíme podle toho, jaký zbytek při dělení třemi dává číslo n; podle tohoto zbytku zvolíme jednu z možností A), B) nebo C) a hodnotu čísla a tak, aby bylo $s(T) = n$.

Pokud hrany délek 2 a 3 neleží v téže stěně uvažovaného čtyřstěnu, leží na mimoběžných hranách. Vzhledem k podmínce o velikostech hran ve dvou stěnách se společnou hranou délky 2 musí být délky hran v jedné z těchto stěn a a $a+1$, ve druhé pak b a $b+1$, kde a a b jsou vhodná přirozené čísla (obě větší než 3). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $b > a$, což s ohledem na podmínku o délkách hran ve stěně s hranou délky 3 znamená, že $b = a + 2$ (nemůže být $b = a+1$, protože ve čtyřstěnu by existovaly dvě hrany téže délky). Zbývající hrany uvažovaného čtyřstěnu mají tudíž délky a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a \geqq 4$. Zvolíme-li označení vrcholů tak, aby $|AB| = 2$, $|AC| = a$ a $|BC| = a+1$, vyjde pro zbylé hrany $|CD| = 3$, $|AD| = a+2$ a $|BD| = a+3$. Existuje proto jediný typ MEMO-čtyřstěnu T, pro jehož součet $s(T)$ platí $s(T) = 4a + 11 \geqq 27$, přičemž $s(T) \equiv 3 \pmod 4$.

Zjistili jsme, že pro každé $n \geqq 27$, které dává při dělení čtyřmi zbytek 3, dovedeme najít ještě jeden (odlišný) MEMO-čtyřstěn T se součtem $s(T) = n$.

Nyní dovedeme odpovědět i na otázku b) úlohy. Protože číslo $2\,007 = 3^2 \cdot 223$ je dělitelné třemi a zároveň dává při dělení čtyřmi zbytek 3, existuje celkem $4 + 1 = 5$ MEMO-čtyřstěnů T s vlastností $s(T) = 2\,007$. (Čtyři z nich odpovídají možnosti A z úvodního rozboru a mají kromě stěny s hranami 2, 3, 4 hrany délek 665, 666, 667 a pátý čtyřstěn má kromě mimoběžných hran délek 2 a 3 hrany délek 501, 502, 503 a 504.)

Závěr. Dané úloze vyhovují všechna přirozená čísla $n \geqq 27$ a existuje právě pět MEMO-čtyřstěnů T s vlastností $s(T) = 2\,007$.

8. Předně si uvědomme, že $2\,007 = 9 \cdot 223$, kde 223 je prvočíslo. Daný výraz upravme na tvar

$$(a+k)^3 - a^3 = 3ak(a+k) + k^3,$$

z něhož je zřejmé, že pro dělitelnost číslem 2 007 je nutné, aby číslo k bylo dělitelné třemi. V takovém případě je ovšem uvažovaný rozdíl zároveň dělitelný i devíti.

Nyní ukážeme, že pro každé k tvaru $k = 3m$, kde m je libovolné přirozené číslo, existuje celé číslo a takové, že daný rozdíl je dělitelný prvočíslem 223. Protože

$$(a+k)^3 - a^3 = 9m(a^2 + 3am + 3m^2),$$

stačí pro libovolné přirozené m najít a tak, že $a^2 + 3am + 3m^2$ je dělitelné 223.

Pro dané m uvažujme výraz

$$4(a^2 + 3am + 3m^2) = (2a + 3m)^2 + 3m^2.$$

Čísla 4 a 223 jsou nesoudělná, budeme proto hledat b takové, že

$$b^2 + 3m^2 \equiv 0 \pmod{223} \tag{1}$$

(protože 223 je prvočíslo, snadno pak k nalezenému číslu b určíme hledané číslo a tím, že vyřešíme kongruenci $b \equiv 2a + 3m \pmod{223}$). K tomu účelu využijeme následující rozklad čísla $223 = 196 + 27 = 14^2 + 3 \cdot 3^2$. Z uvedeného rozkladu plyne, že je

$$14^2 m^2 n^2 + 3m^2 \cdot 3^2 n^2 = (14mn)^2 + 3m^2 \cdot (3n)^2 \equiv 0 \pmod{223}.$$

Zvolíme-li nyní přirozené číslo n tak, že $3n \equiv 1 \pmod{223}$, vidíme, že pro $b = 14nm$ skutečně platí (1).

Tím jsme dokázali, že požadovanou vlastnost mají právě všechna kladná celá čísla k dělitelná třemi.