48. mezinárodní matematická olympiáda

V třetí dekádě července 2007 se sjelo do vietnamské Hanoje 520 středoškolských studentů z 93 zemí celého světa na další ročník nejprestižnější soutěže jednotlivců v řešení matematických úloh.

Logotypu této mezinárodní olympiády dominuje symbol místa konání 48. MMO, hlavního města Hanoje (jde o chrám literatury, první vietnamskou univerzitu založenou v roce 1076) uprostřed dvou kolmic symbolizujících matematickou soustavu souřadnic a zároveň zeměpisný poledník s rovnoběžkou.

Obě křivky pak dodávají logotypu mocné vnitřní pnutí, které symbol Hanoje obklopuje. Na jedné straně tak představují společné směřování, spojení, solidaritu a přátelství mladých lidí na MMO, na straně druhé vytvářejí představu plamene symbolizujícího odkrytý talent a tvořivost mládí, jež může matematiku využít k naplňování vznešených cílů lidstva.

Vietnamští organizátoři se na celý průběh akce připravili velmi dobře a nachystali soutěžícím a jejich vedoucím velmi zajímavý program na celou dobu pobytu. S podporou státních orgánů zajistili všem účastníkům komfortní hotelové ubytování a výtečné stravování, regulérní podmínky pro oba soutěžní dny i následnou náročnou práci hodnotících porot. Koordinační týmy tvořili velmi erudovaní matematici — učitelé mnoha místních vysokých škol a vědeckých ústavů. Pro chvíle odpočinku byl připraven bohatý program, takže všichni účastníci měli možnost poznat nejen pamětihodnosti hlavního města Hanoje a přírodní krásy přímořského letoviska Ha Long, ale seznámit se při jedné exkurzi rovněž s technologií výroby hedvábí. Význam soutěže byl umocněn přítomností vietnamského premiéra *Nguyen Tan Dunga* na slavnostním zahájení v předvečer prvního soutěžního dne. O týden později předával zlaté medaile nejlepším soutěžícím osobně prezident VSR *Nguyen Minh Triet*.

Vedoucím družstva ČR byl doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., z Masarykovy univerzity v Brně. Naše šestičlenné soutěžní družstvo, které doprovázel RNDr. *Jaroslav Švrček*, CSc., z Univerzity Palackého v Olomouci, bylo jmenováno na základě výsledků ústředního kola 56. ročníku MO ve Zlíně a následného týdenního výběrového soustředění v Kostelci nad Černými lesy. Tvořili je *Miroslav Klimoš* z 2. ročníku Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci, *Michal Rolínek* ze 4. ročníku Gymnázia Johanna Keplera v Praze 6, *Lenka Slavíková* ze 4. ročníku Gymnázia v Mnichově Hradišti a trojice studentů z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně: *Zbyněk Konečný* a *Jiří Řihák* ze 4. ročníku a *Hana Šormová* z 2. ročníku.

Soutěžící jednotlivci jako obvykle řešili ve dvou půldnech vždy tři soutěžní úlohy po dobu 4,5 hodiny; za každou ze šesti úloh mohli získat nejvýše 7 bodů. Výběr soutěžních úloh nebyl pro porotu složenou z vedoucích jednotlivých zemí ani letos jednoduchý. V současnosti prožívají různé národní i nadnárodní matematické soutěže velký rozmach; je proto stále obtížnější posoudit, které z navrhovaných přibližně 30 úloh jsou dostatečně původní a nepodobné těm, které už na nějaké soutěži kdy byly. Diskuse o těchto otázkách jednání poroty znesnadňují a časově protahují. Také snaha poroty zařadit do výsledné šestice dvě extrémně náročné úlohy, které by určily vítěze celého klání, letos nevedla k příliš šťastnému řešení. Z celého pole účastníků třetí úlohu vyřešili pouze tři a šestou úlohu pouze čtyři soutěžící! Proto si mnozí vedoucí kladli otázku: mělo smysl naplnit třetinu zadání soutěže pro 520 účastníků úlohami, které 515 účastníků nemělo vůbec šanci vyřešit? Po soutěži se navíc ukázalo, že šestá úloha ani tolik originální nebyla, protože se přesně kryla s obsahem jednoho článku, který v roce 1993 vyšel v *European Journal of Combinatorics*. Pro nás je ovšem potěšitelné, že po deseti letech byla do soutěže vybrána česká úloha. Jejím autorem je *Marek Pechal*, držitel bronzové medaile z předloňské 46. MMO v Mexiku.

Absolutním vítězem 48. MMO se stal *Konstantin Matvejev* z Ruska, který získal 37 bodů ze 42 možných. Zařadil se tak do čela 39 nejlepších soutěžících, kterým byly za zisk nejméně 29 bodů uděleny zlaté medaile. Stříbrné medaile si z Hanoje odvezli 83 účastníci ohodnocení alespoň 21 bodem. Na bronzovou medaili letos stačilo 14 bodů; potěšilo nás, že mezi 131 držiteli tohoto kovu je i pět reprezentantů České republiky (Konečný, Klimoš, Slavíková, Rolínek a Řihák). Ani šestá naše soutěžící Šormová nevyšla úplně naprázdno, když spolu se 148 dalšími soutěžícími bez medailí získala čestné uznání za úplné vyřešení jedné ze šesti soutěžních úloh. Podrobné výsledky našich soutěžících ukazuje následující tabulka:

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
197.–225.	Miroslav Klimoš	7	0	0	6	2	0	15	III.
171.–196.	Zbyněk Konečný	7	0	0	7	2	0	16	III.
226.–253.	Michal Rolínek	7	0	0	6	1	0	14	III.
226.–253.	Jiří Řihák	7	0	0	7	0	0	14	III.
197.–225.	Lenka Slavíková	6	0	0	7	2	0	15	III.
365.–401.	Hana Šormová	0	1	0	7	0	0	8	HM
	Celkem	34	1	0	40	7	0	82	

Pro srovnání uvádíme i tabulku s výsledky slovenských reprezentantů, kteří sice získali o jednu medaili méně, v celkovém bodovém součtu nás však o čtyři body předstihli:

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
197.–225.	Samuel Hapák	7	1	0	7	0	0	15	III.
226.–253.	Ondrej Mikuláš	6	0	0	6	2	0	14	III.
161.–170.	Tomáš Rusin	3	7	0	6	1	0	17	III.
322.–343.	Michal Spišiak	7	1	0	0	2	0	10	HM
123.–132.	Michal Szabados	6	7	0	7	0	0	20	III.
322.–343.	Vladislav Ujházi	0	1	0	7	2	0	10	HM
	Celkem	29	17	0	33	7	0	86	

S radostí můžeme konstatovat, že naše družstvo podalo na 48. MMO lepší výkon, než se očekával podle výsledků přípravných soustředění. V neoficiálním žebříčku zúčastněných států, které uvádíme tabulce na další straně, nám náš výsledek oproti loňské MMO přinesl skok o 10 míst nahoru (případná čísla v závorce uvádějí nižší počet reprezentantů než obvyklých 6). Za povšimnutí stojí, že s výjimkou Polska a Švýcarska podala nečekaně vyrovnaný výkon družstva všech ostatních států, které se pak v září 2007 zúčastnily prvního ročníku *Středoevropské matematické olympiády* (kromě Polska a Švýcarska to bylo pořádající Rakousko, dále pak Slovensko, Slovinsko, Chorvatsko a Česká republika, o účasti v dalších ročnících uvažují i představitelé Německa a Maďarska). Věříme, že nová soutěž vždy na počátku školního roku bude pro její perspektivní účastníky dobrým stimulem k intenzívní celoroční přípravě na následující celosvětovou matematickou olympiádu.

	I	II	III	body		I	II	III	body
Rusko	5	1	0	184	Arménie	0	1	1	73
ČLR	4	2	0	181	Macao	0	1	1	73
Korea	2	4	0	168	Izrael	0	0	3	71
Vietnam	3	3	0	168	Nový Zéland	0	0	3	71
USA	2	3	1	155	Ázerbájdžán	0	0	3	69
Japonsko	2	4	0	154	Bosna a Hercegovina	0	1	0	69
Ukrajina	3	1	2	154	Indonézie	0	1	0	69
KLDR	1	4	0	151	Makedonie	0	0	3	68
Bulharsko	2	3	1	149	Nizozemsko	0	0	1	65
Tchaj-wan	2	3	1	149	Estonsko	0	0	1	64
Rumunsko	1	4	1	146	Albánie	0	0	1	59
Hongkong	0	5	1	143	*Švýcarsko*	0	0	1	59
Írán	1	3	2	143	Lotyšsko	0	0	0	58
Thajsko	1	3	2	133	Finsko	0	1	0	55
Německo	1	3	1	132	Portugalsko	0	0	1	52
Maďarsko	0	5	0	129	Irsko	0	0	1	51
Turecko	1	2	2	124	Turkmenistán	0	0	0	51
Polsko	1	2	2	122	Dánsko	0	0	1	50
Bělorusko	1	1	4	119	Španělsko	0	0	2	48
Moldavsko	0	3	2	118	Kirgizie (5)	0	0	1	43
Itálie	1	1	3	116	JAR	0	0	0	42
Austrálie	0	1	4	110	Kypr	0	0	0	41
Srbsko	1	0	4	107	Trinidad a Tobago	0	0	0	39
Brazílie	0	2	3	106	Tádžikistán	0	0	1	37
Indie	0	3	0	103	Kostarika (5)	0	0	1	36
Gruzie	1	1	1	102	Island	0	0	0	35
Kanada	0	1	3	98	Ekvádor	0	0	1	34
Kazachstán	0	1	3	95	Lucembursko (3)	0	0	1	34
Velká Británie	1	0	3	95	Malajsie	0	0	1	34
Kolumbie	0	1	3	93	Salvádor (4)	0	0	0	34
Litva	1	0	2	92	Pákistán	0	0	1	32
Peru	0	1	2	91	Paraguay (4)	0	0	0	32
Řecko	0	1	3	89	Bangladéš (5)	0	0	0	31
Mongolsko	0	2	1	88	Maroko	0	0	0	28
Uzbekistán	0	1	3	88	Kambodža (4)	0	0	0	26
Singapur	0	0	5	87	Srí Lanka	0	0	0	25
Mexiko	0	0	4	86	Filipíny	0	0	0	21
Slovensko	0	0	4	86	Nigérie	0	0	0	20
Slovinsko	0	0	5	85	Mongolsko (3)	0	0	0	17
Česká republika	0	0	5	82	Kuba (1)	0	0	1	16
Švédsko	0	0	4	81	Lichtenštejnsko (2)	0	0	1	14
Rakousko	0	1	3	80	Venezuela (3)	0	0	0	14
Francie	1	0	2	79	Portoriko (3)	0	0	0	7
Norsko	0	1	1	79	Saudská Arábie	0	0	0	5
Belgie	0	0	3	78	Chile (4)	0	0	0	4
Chorvatsko	0	0	2	76	Bolívie (2)	0	0	0	2
Argentina	0	1	1	75					

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Jsou dána reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pro každé i $(1 \leqq i \leqq n)$ definujme

$$d_i = \max\{a_j \colon 1 \leqq j \leqq i\} - \min\{a_j \colon i \leqq j \leqq n\}.$$

Nechť

$$d = \max\{d_i \colon 1 \leqq i \leqq n\}.$$

(a) Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$ platí nerovnost

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leqq i \leqq n\} \geqq \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) Ukažte, že existují reálná čísla $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$, pro něž v $(*)$ nastane rovnost. *(Nový Zéland)*

2. Uvažujme pět bodů A, B, C, D, E takových, že $ABCD$ je rovnoběžník a čtyřúhelník $BCED$ je tětivový. Přímka l prochází bodem A, přičemž protíná úsečku DC v jejím vnitřním bodě F a přímku BC v bodě G. Předpokládejme, že platí $|EF| = |EG| = |EC|$. Dokažte, že přímka l je osou úhlu DAB. *(Lucembursko)*

3. Někteří účastníci matematické soutěže jsou přátelé. Přátelství je vzájemné. Skupinu soutěžících nazveme *klika*, jsou-li každí dva z nich přátelé. (Speciálně libovolná skupina složená z méně než dvou soutěžících je klika.) Počet členů kliky nazveme jejím *rozměrem*.

Víme, že největší rozměr kliky složené z účastníků soutěže je sudé číslo. Dokažte, že všechny soutěžící je možno rozesadit do dvou místností tak, aby největší rozměr kliky v jedné místnosti se rovnal největšímu rozměru kliky v druhé místnosti. *(Rusko)*

4. Osa úhlu BCA trojúhelníku ABC protíná jeho opsanou kružnici v bodě R různém od bodu C, osu strany BC v bodě P a osu strany AC v bodě Q. Střed strany BC označme K a střed strany AC označme L. Dokažte, že obsahy trojúhelníků RPK a RQL se rovnají. *(Česká republika)*

5. Kladná celá čísla a, b jsou taková, že číslo $(4a^2-1)^2$ je dělitelné $4ab-1$. Dokažte, že $a = b$. *(Velká Británie)*

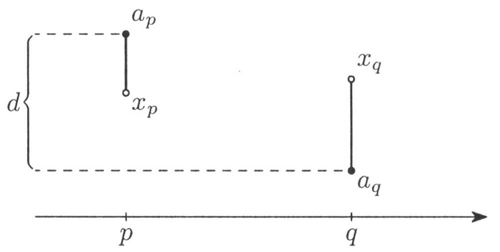
6. Nechť n je kladné celé číslo. Uvažujme množinu

$$\mathsf{S} = \big\{(x, y, z) \colon x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\},\ x + y + z > 0\big\}$$

složenou z $(n+1)^3 - 1$ bodů třírozměrného prostoru. Určete nejmenší možný počet rovin, jejichž sjednocení obsahuje všechny body z S, neobsahuje však bod $(0,0,0)$. (*Nizozemsko*)

Řešení soutěžních úloh

1. Každé z čísel $d_1, d_2, \ldots, d_n$, a tedy i jejich maximum d se rovná rozdílu některých dvou členů posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Existují proto indexy p, q takové, že $p \leqq q$ a $d = a_p - a_q$. (Tyto indexy nejsou obecně určeny jednoznačně, např. pro neklesající posloupnost (a_i) je zřejmě $d = 0$ a rovnost $a_p = a_q$ může splňovat více dvojic členů takové posloupnosti.)



Obr. 51

Nechť $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$ jsou libovolná reálná čísla. K důkazu části (a) stačí pracovat s hodnotami x_p, x_q (obr. 51). Máme totiž $x_q \geqq x_p$, a tedy

$$(a_p - x_p) + (x_q - a_q) = (a_p - a_q) + (x_q - x_p) \geqq a_p - a_q = d.$$

Proto platí aspoň jedna z nerovností $a_p - x_p \geqq \frac{1}{2}d$, $x_q - a_q \geqq \frac{1}{2}d$, odkud dostáváme

$$\max\{|x_i - a_i|: 1 \leqq i \leqq n\} \geqq \max\{|x_p - a_p|, |x_q - a_q|\} \geqq \geqq \max\{a_p - x_p, x_q - a_q\} \geqq \frac{d}{2}.$$

Tím je dokázána část (a).

Položme nyní

$$x_k = \max\left\{a_i - \frac{d}{2}: 1 \leqq i \leqq k\right\} \quad \text{pro } 1 \leqq k \leqq n.$$

Taková posloupnost je zřejmě neklesající, $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$. Ukážeme, že pro takto zvolené hodnoty x_i platí

$$\max\{|x_i - a_i|: 1 \leqq i \leqq n\} = \frac{d}{2}.$$

Protože x_1 jsme zvolili tak, že $|x_1 - a_1| = \frac{1}{2}d$, stačí ukázat, že pro každé $i = 2, \dots, n$ je $|x_i - a_i| \leqq \frac{1}{2}d$.

Přímo z definice hodnoty x_i plyne $x_i - a_i \geqq -\frac{1}{2}d$, ukážeme tedy, že pro libovolné i je také $x_i - a_i \leqq \frac{1}{2}d$. Je-li $j \leqq i$ nejmenší index, pro který $x_j = x_i$, je buď $j = 1$, nebo $j \geqq 2$ a zároveň $x_{j-1} < x_j$. V obou případech zřejmě platí $x_j = a_j - \frac{1}{2}d$. Máme tedy

$$x_i = x_j = a_j - \frac{d}{2}.$$

Z definice hodnoty d samozřejmě plyne, že $a_j - a_i \leqq d$. Celkem tudíž platí

$$x_i - a_i = a_j - \frac{d}{2} - a_i \leqq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}.$$

Ukázali jsme, že pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ platí $-\frac{1}{2}d \leqq x_i - a_i \leqq \frac{1}{2}d$, tedy opravdu $|x_i - a_i| \leqq \frac{1}{2}d$.

Jiné řešení. Kdyby pro některou neklesající posloupnost (x_i) bylo $\max\{|x_i - a_i|\colon 1 \leqq i \leqq n\} < \frac{1}{2}d$, dostali bychom pro každé i, $1 \leqq i \leqq n$, nerovnost $x_i - \frac{1}{2}d < a_i < x_i + \frac{1}{2}d$, neboli

$$d_i < \left(x_i + \frac{d}{2}\right) - \left(x_i - \frac{d}{2}\right) = d.$$

To odporuje definici čísla d.

Označme pro každé i, $1 \leqq i \leqq n$,

$$M_i = \max\{a_j\colon 1 \leqq j \leqq i\} \quad \text{a} \quad m_i = \min\{a_j\colon i \leqq j \leqq n\}.$$

Obě posloupnosti (m_i) i (M_i) jsou zřejmě neklesající, přičemž $m_i \leqq a_i \leqq \leqq M_i$. Položme nyní $x_i = \frac{1}{2}(m_i + M_i)$, výsledná posloupnost je rovněž neklesající, a protože $d_i = M_i - m_i$, platí

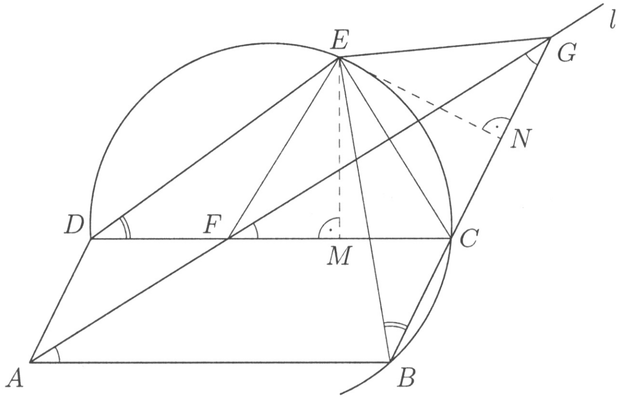
$$-\frac{d_i}{2} = \frac{m_i - M_i}{2} = x_i - M_i \leqq x_i - a_i \leqq x_i - m_i = \frac{M_i - m_i}{2} = \frac{d_i}{2}.$$

Je tudíž

$$\max\{|x_i - a_i|\colon 1 \leqq i \leqq n\} \leqq \max\left\{\frac{d_i}{2}\colon 1 \leqq i \leqq n\right\} = \frac{d}{2}.$$

A protože jsme už dokázali opačnou nerovnost pro libovolnou neklesající posloupnost (x_i), musí pro takto zvolenou posloupnost platit rovnost.

2. Zřejmě stačí ukázat, že $|CF| = |CG|$, protože z rovnosti souhlasných a střídavých úhlů příslušných příčce l rovnoběžek AD, BG (obr. 52) dostaneme $|\sphericalangle BAG| = |\sphericalangle CFG| = |\sphericalangle CGF| = |\sphericalangle CGA| = |\sphericalangle DAG|$.



Obr. 52

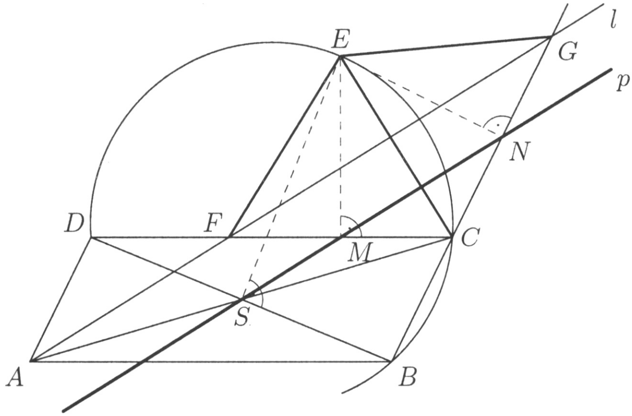
Předpokládejme naopak, že je např. $|CF| < |CG|$. Označme M a N středy úseček CF a CG. Zřejmě pak platí také $|MF| < |NC|$, $|ME| > |NE|$ (pravoúhlé trojúhelníky FME a CNE mají shodnou přeponu), a protože pravoúhlé trojúhelníky DEM a BEN jsou podobné (to plyne z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou EC kružnice k opsané čtyřúhelníku $BCED$), je také $|DM| > |BN|$ a $|DF| = |DM| - |MF| > > |BN| - |NC| = |BC| = |DA|$. Trojúhelníky ADF a GCF jsou podobné, takže poslední nerovnost $|DF| > |DA|$ je ekvivalentní nerovnosti $|CF| > |CG|$. To je opačná nerovnost, než jakou jsme předpokládali.

Začneme-li naopak s opačnou nerovností, dojdeme samozřejmě naprosto stejným postupem opět ke sporu. Tím je dokázána rovnost $|CF| = |CG|$, a tedy i tvrzení úlohy.

Jiné řešení. Označme postupně S, M, N středy úseček CA, CF, CG. Tyto tři body zřejmě leží na přímce p, jež je obrazem přímky l ve stejnolehlosti se středem C a koeficientem $\frac{1}{2}$ (obr. 53). Úsečky EM, EN jsou výškami rovnoramenných trojúhelníků EFC, ECG, jsou tedy kolmé na odpovídající přímky CD, BC. Takže přímka p je Simsonovou přímkou[1] bodu E a trojúhelníku BCD.

---

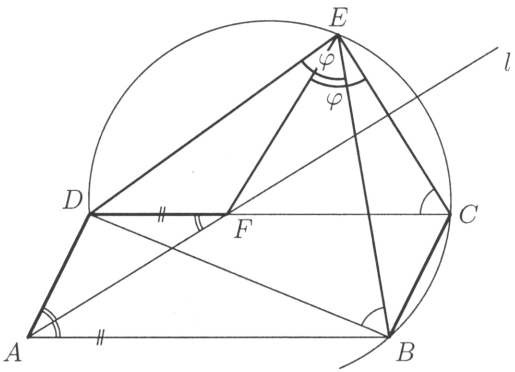
[1] Věta o Simsonově přímce říká, že v jedné přímce leží paty tří kolmic spuštěných z libovolného bodu Q kružnice opsané danému trojúhelníku XYZ na přímky jeho stran; uvedená přímka se nazývá Simsonova přímka bodu Q a trojúhelníku XYZ.



Obr. 53

Úhlopříčky rovnoběžníku se půlí, proto je bod S středem úsečky BD, a protože leží na Simsonově přímce p, musí být zároveň patou kolmice z bodu E na stranu BD. Bod E je tak nutně středem oblouku BD kružnice opsané tětivovému čtyřúhelníku $BCED$ a platí $|ED| = |EB|$.

Z obvodových úhlů nad tětivou ED plyne $|\sphericalangle DBE| = |\sphericalangle DCE|$, takže rovnoramenné trojúhelníky DBE, FCE jsou podobné (jejich ramena EB, EC svírají se základnami DB, FC shodné úhly, obr. 54). V otočení



Obr. 54

okolo bodu E o úhel $\varphi = |\sphericalangle DEB| = |\sphericalangle FEC|$ se bod D zobrazí na B a F na C, proto $|DF| = |BC|$. Zároveň však $|BC| = |AD|$, odkud vyplývá, že trojúhelník AFD je rovnoramenný. Odtud opět využitím shodnosti střídavých úhlů snadno dostaneme, že $|\sphericalangle DAF| = |\sphericalangle DFA| = |\sphericalangle FAB|$, tedy přímka l je opravdu osou úhlu DAB.

Poznámka. K důkazu tvrzení o Simsonově přímce stačí využít vlastnosti obvodových úhlů. Při daném označení ukažme, že bod S, v němž přímka MN protíná stranu BD trojúhelníku BCD, je patou kolmice z bodu E opsané kružnice na tuto stranu, tj. že úhel ESB je pravý: Z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou DE plyne, že $|\sphericalangle DBE| = |\sphericalangle DCE|$. Navíc $|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle MCE| = |\sphericalangle SNE|$, neboť body M, C, N, E leží na Thaletově kružnici. To ale znamená, že i body S, B, N, E leží na (Thaletově) kružnici s průměrem EB.

Jiné řešení. Z podobnosti trojúhelníků ADF a GCF plyne

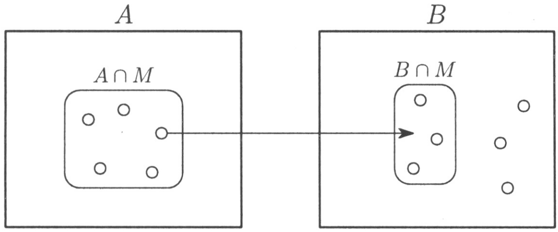
$$\frac{|FC|}{|FD|} = \frac{|CG|}{|AD|} = \frac{|CG|}{|BC|}.$$

Existuje proto spirální podobnost, která zobrazí úsečku DC na úsečku BG, přičemž bod F přejde do bodu C a střed M úsečky FC do středu N úsečky CG. Úhel přímek DC a BG určuje úhel příslušného otočení, vidíme tedy, že střed uvedené spirální podobnosti musí ležet na kružnici opsané trojúhelníku DBC (úsečku DB je z něj vidět pod úhlem $|\sphericalangle DCB|$) a také na kružnici opsané trojúhelníku MCN (i úsečku MN je z něj vidět pod úhlem $|\sphericalangle DCB| = 180° - |\sphericalangle MCN|$). Společným bodem (různým od bodu C) obou kružnic je právě bod E, a protože $|EM| = |EN|$, jde o shodnost, takže je také $|DC| = |BG|$. Je tudíž i $|AB| = |BG|$ a odtud, jak už víme, snadno plyne, že přímka l je osou úhlu BAD.

3. Uvedeme algoritmus, jak rozdělit účastníky do místností. Dvě místnosti, do nichž budeme účastníky rozdělovat, označme A a B. Začneme s určitým rozdělením, které budeme postupně upravovat posíláním účastníků z jedné místnosti do druhé. Během algoritmu budeme označovat A, B i množiny účastníků, kteří právě jsou v daných místnostech, a $c(A)$, $c(B)$ velikost největší kliky v příslušné místnosti.

1. krok. Nechť $2m$ je rozměr největší kliky a M je jedna z klik s tímto rozměrem, tj. $|M| = 2m$. Začneme tím, že všechny soutěžící z M dáme do místnosti A a všechny ostatní do místnosti B. Zřejmě platí $c(A) = |M| \geqq c(B)$.

2. krok. Dokud je $c(A) > c(B)$, posíláme účastníky po jednom z A do B (obr. 55). (Je-li $c(A) > c(B)$, místnost A určitě není prázdná.)



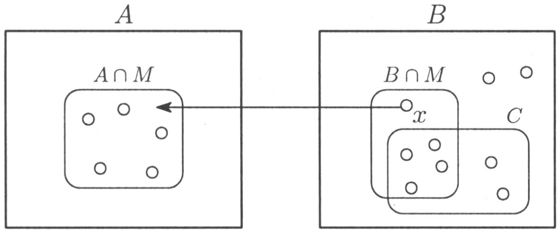
Obr. 55

Po každém přesunu se $c(A)$ zmenší o 1 a $c(B)$ se nejvýše o 1 zvětší. Po konečném počtu přesunů tak dosáhneme toho, že $c(A) \leqq c(B)$, a zároveň bude $c(B) \leqq c(A) + 1$, protože dosud záporný rozdíl $c(B) - c(A)$ nemůže vzrůst o více než o 2. Pokud je nyní $c(A) = c(B)$, náš postup úspěšně skončil.

Pokud $c(B) = c(A) + 1$, budeme pokračovat dalším krokem. Zatím je stále ještě $A \subset M$ klika, proto $c(A) = |A|$, a dokonce platí $|A| \geqq m$, protože kdyby bylo $c(A) = |A| \leqq m-1$, bylo by $c(B) \geqq |B \cap M| \geqq m+1$, a tudíž i $c(B) - c(A) \geqq (m+1) - (m-1) = 2$.

3. krok. Označme $k = c(A)$, takže $c(B) = k + 1$ a podle předchozí úvahy platí $k \geqq m$ a zároveň $|B \cap M| \leqq m$.

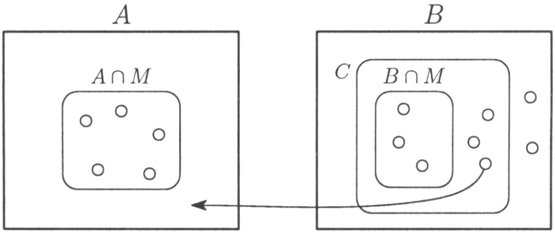
Nechť C je některá klika v B, pro kterou platí $|C| = k + 1$. Pokud existuje účastník $x \in (B \cap M) \setminus C$ (obr. 56), tak ho pošleme zpět do místnosti A. V ní teď bude $k + 1$ členů M, takže $c(A) = k + 1$, přičemž velikost kliky C v B se nezmenšila, tudíž $c(B) = k + 1 = c(A)$ a náš algoritmus úspěšně končí.



Obr. 56

Pokud pro žádnou kliku C velikosti $k+1$ takového účastníka x v $(B \cap \cap M) \setminus C$ nenajdeme, znamená to, že v místnosti B obsahuje každá klika s rozměrem $k + 1$ jako podmnožinu celý průnik $B \cap M$.

4. krok. Dokud je $c(B) = k+1$, volíme některou kliku $C \subset B$ velikosti $k+1$ a pošleme jednoho člena z $C \setminus M$ do místnosti A (obr. 57). (Množina $C \setminus M$ nemůže být prázdná, protože $|C| = k+1 > m \geqq |B \cap M|$.)



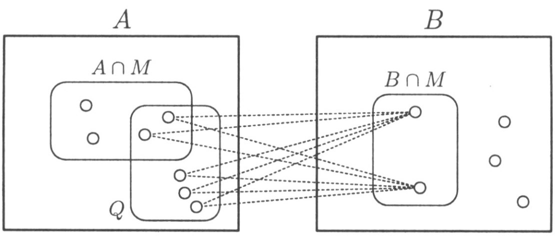
Obr. 57

Pokaždé, když pošleme jednoho účastníka z B do A, zmenší se $c(B)$ nejvýše o 1. Nakonec tak dosáhneme toho, že $c(B) = k$. Přitom v místnosti A máme kliku $A \cap M$ velikosti $|A \cap M| = k$, takže $c(A) \geqq k$. Ukážeme, že v A už není klika s větším rozměrem a že jsme tím pádem hotovi.

Nechť Q je libovolná klika v A. Dokážeme, že $|Q| \leqq k$. V místnosti A, a tedy i v množině Q mohou být dva typy účastníků:

- ▷ Členové M; protože M je klika, jsou to přátelé všech členů $B \cap M$.
- ▷ Účastníci, které jsme do A poslali ve 4. kroku; každý z nich byl v klice, která obsahovala $B \cap M$, proto je přítelem všech členů $B \cap M$.

Všichni členové Q jsou tedy přátelé všech členů $B \cap M$ (obr. 58), navíc



Obr. 58

množiny Q a $B \cap M$ samotné jsou kliky, takže i jejich sjednocení $Q \cup$ $\cup\, (B \cap M)$ je klika. A protože M je klika s největším rozměrem, máme

$$|M| \geqq |Q \cup (B \cap M)| = |Q| + |B \cap M| = |Q| + |M| - |A \cap M|,$$

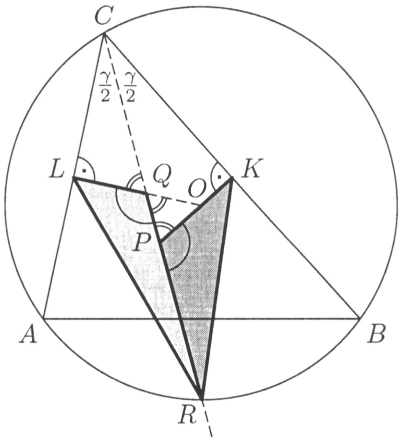
odkud $|Q| \leqq |A \cap M| = k$.

Nakonec jsme tedy i po 4. kroku dostali rovnost $c(A) = c(B)$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

4. Pokud je $|AC| = |BC|$, je trojúhelník ABC rovnoramenný a souměrný podle osy úhlu při vrcholu C, je tedy $P = Q$ a není co dokazovat. Předpokládejme proto (samozřejmě bez újmy na obecnosti), že $|AC| < |BC|$.

Protože CR je osa úhlu, jsou pravoúhlé trojúhelníky QLC a PKC podobné (obr. 59). Kromě jiného to znamená rovnost úhlů $|\sphericalangle CQL| = |\sphericalangle PQO| = |\sphericalangle QPO|$, takže trojúhelník QPO je rovnoramenný a platí $|PO| = |QO|$. Ze zmíněné podobnosti pak ještě plyne

$$\frac{|PK|}{|QL|} = \frac{|PC|}{|QC|}.$$



Obr. 59

Vzhledem k rovnosti úhlů RPK a RQL tak pro obsahy uvažovaných trojúhelníků dostáváme

$$\frac{S(RPK)}{S(RQL)} = \frac{\frac{1}{2}\sin|\sphericalangle RPK| \cdot |RP| \cdot |PK|}{\frac{1}{2}\sin|\sphericalangle RQL| \cdot |RQ| \cdot |QL|} = \frac{|RP| \cdot |PC|}{|RQ| \cdot |QC|} = 1,$$

neboť tětiva CR je zřejmě souměrná podle stejné osy jako rovnoramenný trojúhelník QPO, takže je $|RP| = |QC|$ a $|PC| = |RQ|$. Tím je rovnost $S(RPK) = S(RQL)$ dokázána.

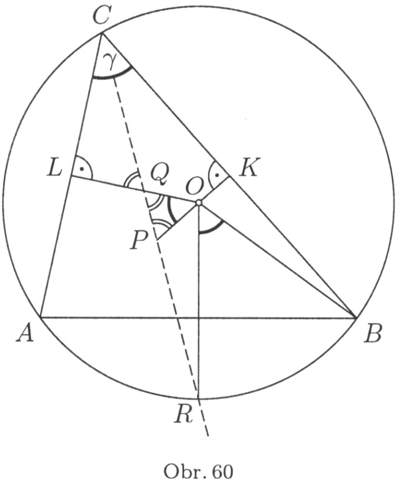
Jiné řešení. Podobně jako v prvním řešení budeme rovnou předpokládat, že $|AC| < |BC|$. Označme γ velikost vnitřního úhlu při vrcholu C. Z pravoúhlých trojúhelníků QLC a PKC (obr. 60) plyne, že

$$|\sphericalangle CQL| = |\sphericalangle CPK| = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\gamma,$$

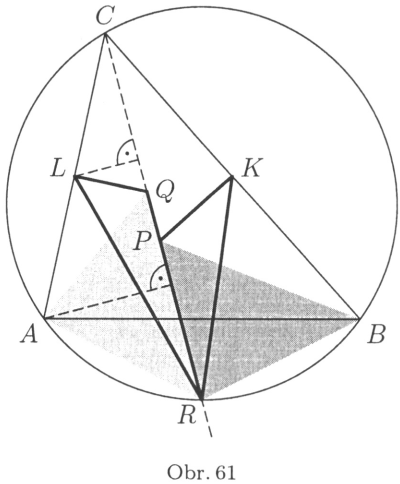
takže trojúhelník QPO je rovnoramenný s úhlem velikosti γ při hlavním vrcholu O. Středový úhel stejné velikosti zřejmě přísluší i shodným tětivám AR a BR opsané kružnice (tětivy jsou shodné, protože CR je osou úhlu ACB). Uvažujme proto otočení se středem O o úhel γ. V něm se bod A zobrazí do bodu R, bod R do bodu B a bod Q do bodu P. Uvedené otočení tak převádí trojúhelník ARQ na trojúhelník RBP (obr. 61), oba trojúhelníky jsou tudíž shodné a mají stejné obsahy. Nyní si stačí uvědomit, že

$$S(ARQ) = 2S(RQL) \quad \text{a} \quad S(RBP) = 2S(RPK),$$

protože vzdálenosti vrcholů A a B od přímky CR jsou rovny dvojnásobkům vzdáleností odpovídajících středů L a K stran AC a BC od téže přímky.



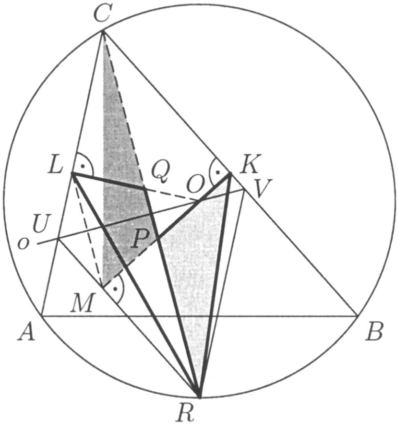
Obr. 60



Obr. 61

Jiné řešení. Jak jsme zjistili už v prvním řešení, procházejí středem O opsané kružnice jak osy KP, LQ stran BC, resp. AC, tak i osa o tětivy CR (obr. 62). Průsečíky osy o s přímkami AC, BC označme po řadě

U a V. Z vlastnosti osy úsečky plyne $|CU| = |RU|$ a $|CV| = |RV|$. Platí i $|CU| = |CV|$, neboť v trojúhelníku CUV je strana UV kolmá k ose úhlu při vrcholu C, kterou je polopřímka CR. Čtyřúhelník $CURV$ je tedy kosočtverec nebo čtverec. V osové souměrnosti podle přímky UV tak přejde dvojice rovnoběžek CU, RV v dvojici rovnoběžek RU, CV; přímka LQ jdoucí samodružným bodem O kolmo k první dvojici přímek



Obr. 62

proto přejde v přímku jdoucí bodem O kolmo k druhé dvojici přímek, tedy v přímku KP. Tato přímka tudíž protne přímku RU v bodě M, který je souměrně sdružený s bodem L. Ze stejného důvodu jsou souměrně sdružené i body P, Q (a samozřejmě i body C, R), takže jsou souměrně sdružené i trojúhelníky CPM a RQL. Ještě si povšimněme dvojice trojúhelníků MRC, MRK; také ty mají stejný obsah, neboť $CK \parallel MR$. Platí tedy

$$\begin{aligned} S(PRK) &= S(MRK) - S(MRP) = S(MRC) - S(MRP) = \\ &= S(MPC) = S(RQL). \end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov.

5. Jestliže $(4a^2 - 1)^2$ je dělitelné číslem $4ab - 1$, je jím dělitelný i výraz

$$\begin{aligned} &(4a^2 - 1)^2 - 2(4a^2 - 1)(4ab - 1) + (4ab - 1)^2 = \\ &= \big((4a^2 - 1) - (4ab - 1)\big)^2 = (4a)^2(a - b)^2. \end{aligned}$$

A protože čísla $4a$ a $4ab-1$ jsou nesoudělná, dostáváme, že $(a-b)^2$ je rovněž dělitelné číslem $4ab-1$. To znamená, že

$$(a-b)^2 = m(4ab-1) \tag{1}$$

pro vhodné přirozené číslo m. Pro $m=0$ dostáváme $a=b$. Ukážeme, že pro libovolné $m>0$ rovnici (1) žádná dvojice přirozených čísel a, b nevyhovuje.

Předpokládejme naopak, že takové dvojice čísel a, b existují, a vyberme mezi nimi dvojici (a_0, b_0) s nejmenším b_0. Protože vztahu (1) zároveň vyhovuje i symetrická dvojice (b_0, a_0), plyne odtud $b_0 < a_0$.

Vztah (1) pro $a = a_0$, $b = b_0$ nyní přepíšeme do tvaru

$$a_0^2 - (2+4m)b_0a_0 + (b_0^2+m) = 0, \tag{2}$$

z něhož vidíme, že přirozené číslo $x_1 = a_0$ vyhovuje kvadratické rovnici

$$x^2 - (2+4m)b_0x + (b_0^2+m) = 0$$

s celočíselnými koeficienty. Proto i její druhý kořen $x_2 = (b_0^2+m)/a_0 > 0$, který dostaneme z Viètova vztahu, je přirozený. Zřejmě tedy i dvojice (b_0, x_2) vyhovuje rovnosti (1), takže vzhledem k volbě čísla b_0 platí $x_2 >$ $> b_0$ neboli $m > a_0b_0 - b_0^2 = b_0(a_0-b_0)$. Dosazením čísel a_0, b_0 do (1) tak máme

$$(a_0-b_0)^2 > b_0(a_0-b_0)(4a_0b_0-1),$$

odkud za uvedených předpokladů vychází nerovnost $4b_0^2 < 1$, což nemůže pro žádné přirozené číslo b_0 platit.

Jiné řešení. Z podmínky $4ab-1 \mid (4a^2-1)^2$ a rovnosti pro rozdíl čtverců

$$b^2(4a^2-1)^2 - (a-b)^2 = a(4ab-1)(4a^2b+a-2b)$$

plyne

$$4ab-1 \mid (a-b)^2. \tag{3}$$

Připusťme, že nalezený vztah splňuje nějaká dvojice (a, b) přirozených čísel s vlastností $a \neq b$. S ohledem na symetrii vztahu (1) můžeme předpokládat, že $a > b$. Pak rovnost $(a-b)^2 = m(4ab-1)$, kde m je vhodné přirozené číslo, přepíšeme do tvaru

$$(a-b-2mb)^2 = 4m^2b^2 + 4mb^2 - m,$$

z něhož plyne, že $4m^2b^2 + 4mb^2 - m = t^2$ pro vhodné celé číslo $t > 2mb$, neboť $4mb^2 - m > 0$. S ohledem na $t^2 < 4m^2b^2 + 4mb^2 < (2mb + b)^2$ však musí zároveň být $t < 2mb + b$, dohromady tedy $t = 2mb + b - s$, kde celé číslo s splňuje nerovnosti

$$0 < s < b\ (< a). \tag{4}$$

Rovnost $4m^2b^2 + 4mb^2 - m = (2mb + b - s)^2$ upravíme do tvaru

$$m(4bs - 1) = (b - s)^2, \quad \text{odkud} \quad 4bs - 1 \mid (b - s)^2.$$

Dvojice (b, s) proto splňuje stejně jako výchozí dvojice (a, b) vztah (3). Podle (4) je ovšem nová dvojice (b, s) v každé z obou složek menší než původní dvojice (a, b). Protože složky uvažovaných dvojic jsou přirozená čísla, můžeme celou proceduru zmenšování složek zopakovat pouze několikrát; po určitém počtu kroků proto dojdeme ke dvojici různých přirozených čísel, k níž už není možné proceduru uplatnit, a to je spor. Žádná dvojice *různých* přirozených čísel splňující vztah (3) proto neexistuje.[2]

6. Nejmenší možný počet rovin je $3n$. Snadno najdeme $3n$ rovin, jež dané podmínky splňují. Můžeme například vzít roviny s rovnicemi $x = i$, $y = i$, $z = i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ anebo roviny s rovnicemi $x + y + z = k$ pro $k = 1, 2, \ldots, 3n$. Ukážeme, že méně než $3n$ rovin nestačí.

Nejprve dokážeme následující tvrzení:

Nechť $P = P(x_1, \ldots, x_k)$ je nenulový mnohočlen k proměnných. Jestliže $P(0, \ldots, 0) \neq 0$ a zároveň $P(x_1, \ldots, x_k) = 0$ pro libovolná $x_1, \ldots, x_k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ taková, že $x_1 + \ldots + x_k > 0$, je $\operatorname{st} P \geqq kn$, kde $\operatorname{st} P$ označuje stupeň mnohočlenu P, tj. exponent nejvyšší mocniny x ve výrazu $P(x, \ldots, x)$.

Tvrzení dokážeme matematickou indukcí vzhledem k počtu proměnných k. Pro $k = 1$ je jeho platnost zřejmá: jestliže nenulový mnohočlen jedné proměnné má n kořenů (v našem případě jsou kořeny P čísla $1, 2, \ldots, n$), má stupeň aspoň n.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k = m$. Dokážeme, že potom platí i pro $k = m + 1$. Kvůli přehlednosti označme $y = x_{m+1}$. Jestliže P chápeme jako mnohočlen proměnné y, můžeme ho vydělit mnohočlenem

[2] O objevu klíčového vztahu dělitelnosti (1) a skutečnosti, že i za druhým řešením se skrývá manipulace s kořeny kvadratické rovnice (2) z prvního řešení se dočtete v článku Jaromíra Šimši v Rozhledech matematicko-fyzikálních 83 (2008), č. 1, str. 14.

$Q(y) = y(y-1)\dots(y-n)$. Přitom jako zbytek dostaneme mnohočlen R. Přesněji,

$$P(x_1, \dots, x_m, y) = Q(y) \cdot S(x_1, \dots, x_m, y) + R(x_1, \dots, x_m, y),$$

kde $\mathrm{st}_y\, R \leqq n$ (tj. stupeň zbytku R, pokud ho chápeme jako mnohočlen jedné proměnné y, je menší než stupeň mnohočlenu Q). Protože $Q(y) = 0$ pro $y = 0, 1, \dots, n$, máme $R(x_1, \dots, x_m, y) = P(x_1, \dots, x_m, y)$ pro libovolná $x_1, \dots, x_m, y \in \{0, 1, \dots, n\}$, neboli R splňuje podmínky našeho tvrzení. Zřejmě $\mathrm{st}\, R \leqq \mathrm{st}\, P$, stačí tedy dokázat, že $\mathrm{st}\, R \geqq (m+1)n$.

Rozepišme R podle mocnin y:

$$R(x_1, \dots, x_m, y) = R_n(x_1, \dots, x_m)y^n + R_{n-1}(x_1, \dots, x_m)y^{n-1} + \dots + R_0(x_1, \dots, x_m).$$

Ukážeme, že na mnohočlen $R_n(x_1, \dots, x_m)$ můžeme použít indukční předpoklad.

Uvažujme mnohočlen $T(y) = R(0, \dots, 0, y)$ stupně nejvýše n. Tento mnohočlen má n kořenů $y = 1, 2, \dots, n$. Na druhé straně T není konstantní nulový mnohočlen, neboť $T(0) \neq 0$. Je tedy $\mathrm{st}\, T = n$ a jeho vedoucí koeficient $R_n(0, \dots, 0)$ je nenulový.

Vezmeme-li libovolná čísla $a_1, \dots, a_m \in \{0, 1, \dots, n\}$, kde $a_1 + \dots + a_m > 0$, a dosadíme $x_i = a_i$ do $R(x_1, \dots, x_m, y)$, dostaneme mnohočlen proměnné y. Tento mnohočlen je nulový ve všech bodech $y = 0, 1, \dots, n$ (tj. má aspoň $n+1$ kořenů) a má stupeň nejvýše n. Proto musí být nulový, neboli $R_i(a_1, \dots, a_m) = 0$ pro všechna $i = 0, 1, \dots, n$. Speciálně $R_n(a_1, \dots, a_m) = 0$.

Mnohočlen $R_n(x_1, \dots, x_m)$ tak splňuje předpoklady našeho tvrzení a podle indukčního předpokladu dostáváme $\mathrm{st}\, R_n \geqq mn$, pročež

$$\mathrm{st}\, P \geqq \mathrm{st}\, R \geqq \mathrm{st}\, R_n + n \geqq (m+1)n.$$

Teď už řešení snadno dokončíme. Předpokládejme, že máme N rovin pokrývajících všechny body z S, ale neobsahujících bod $(0,0,0)$. Nechť rovnice těchto rovin jsou $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ (pro $i = 1, 2, \dots, N$). Uvažujme mnohočlen

$$P(x, y, z) = (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1)(a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2)\dots(a_N x + b_N y + c_N z + d_N),$$

jehož stupeň je zřejmě N. Tento mnohočlen pro libovolné $(x_0, y_0, z_0) \in \mathsf{S}$ splňuje rovnost $P(x_0, y_0, z_0) = 0$ a zároveň $P(0,0,0) \neq 0$. Podle dokázaného tvrzení je tedy $N = \mathrm{st}\, P \geqq 3n$.