56. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie C

In: Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 56. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2006/2007. 48. mezinárodní matematická olympiáda. 19. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2008. pp. 27–40.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405128

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, pro něž platí

$$a + 5\sqrt{b} = b + 5\sqrt{a}.$$

(Jaroslav Švrček)

C – I – 2

Najděte všechny trojúhelníky, které lze rozřezat na lichoběžníky se stranami délek 1 cm, 1 cm, 1 cm a 2 cm. *(Ján Mazák)*

C – I – 3

Najděte všechna přirozená čísla, jejichž zápis neobsahuje nulu a má následující vlastnost: vynecháme-li v něm libovolnou číslici, dostaneme číslo, které je dělitelem původního čísla. *(Jaromír Šimša)*

C – I – 4

Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Označme E střed strany AB, F střed úsečky DE a G průsečík úseček BD a CE. Vyjádřete obsah lichoběžníku $ABCD$ pomocí jeho výšky v a délky d úsečky FG za předpokladu, že body A, F, C leží v přímce. *(Ján Mazák)*

C – I – 5

Zjistěte, pro které přirozené číslo n je podíl

$$\frac{33\,000}{(n-4)(n+1)}$$

a) co největší, b) co nejmenší přirozené číslo. *(Eva Řídká)*

C – I – 6

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC, v němž D je pata výšky z vrcholu C a V průsečík výšek. Dokažte, že $|AD| \cdot |BD| = |AB| \cdot |VD|$, právě když $|CD| = |AB|$. *(Jaroslav Zhouf)*

C – S – 1

Určete počet všech čtyřmístných přirozených čísel, která jsou dělitelná šesti a v jejichž zápisu se vyskytují právě dvě jedničky.

(Pavel Leischner)

C – S – 2

Je dána kružnice k se středem S, která je opsána pravidelnému šestiúhelníku $ABCDEF$. Tečna v bodě A ke kružnici k protne přímku SB v bodě K a tečna v bodě B protne přímku SC v bodě L. Dokažte, že čtyřúhelníku $KLCB$ lze opsat kružnici, která je shodná s kružnicí k.

(Jaroslav Zhouf)

C – S – 3

Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, jejichž rozdíl $a - b$ je pátou mocninou některého prvočísla a pro něž platí $a - 4\sqrt{b} = b + 4\sqrt{a}$.

(Jaroslav Švrček)

C – II – 1

V rovině jsou dány dva různé body L, M a kružnice k. Sestrojte trojúhelník ABC co největšího obsahu tak, aby jeho vrchol C ležel na kružnici k, bod L byl středem strany AC a bod M středem strany BC.

(Pavel Leischner)

C – II – 2

Nechť p, q, r jsou přirozená čísla, pro něž platí $p + r\sqrt{p+q} + q = 2\,007$.

a) Určete, jakých hodnot může nabývat součet $p + q + r$.

b) Určete počet všech trojic (p, q, r) přirozených čísel, které vyhovují dané rovnici. *(Jaroslav Švrček)*

C – II – 3

Rovnoramennému lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD lze vepsat kružnici se středem O. Určete obsah S lichoběžníku, jsou-li dány délky úseček OB a OC. *(Pavel Leischner)*

C – II – 4

Určete největší dvojmístné číslo k s následující vlastností: existuje přirozené číslo N, z něhož po škrtnutí první číslice zleva dostaneme číslo k-krát menší. (Po vyškrtnutí číslice může zápis čísla začínat jednou či několika nulami.) K určenému číslu k pak najděte nejmenší vyhovující číslo N. *(Jaromír Šimša)*

C – I – 1

Substitucí $m = \sqrt{a}$, $n = \sqrt{b}$ převedeme rovnici na tvar $m^2 - n^2 - 5(m-n) = 0$, odkud pomocí vzorce pro rozdíl čtverců dostaneme $(m-n)(m+n-5) = 0$. Je tedy $m - n = 0$ nebo $m + n = 5$.

V prvním případě po zpětné substituci zjistíme, že úloze vyhovují všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro něž platí $b = a$. Ve druhém dostáváme $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 5$. Je tedy $1 \leqq \sqrt{a}, \sqrt{b} \leqq 4$, proto stačí postupně dosazovat $a = 1, 2, \ldots, 16$ do vztahu

$$b = \left(5 - \sqrt{a}\right)^2 \tag{1}$$

a zjišťovat, zda je odpovídající číslo b přirozené.

Daná rovnice se nemění záměnou neznámých a, b. Můžeme tedy předpokládat $a \leqq b$, což spolu s rovností $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 5$ znamená, že $\sqrt{a} \leqq 2{,}5$. Odtud $a \leqq 6{,}25$. Proto se stačí při dosazování omezit jen na hodnoty $a = 1, 2, \ldots, 6$ a zbylá řešení určit záměnou čísel a, b v nalezených dvojicích.

Vtipnější postup spočívá v umocnění závorky na pravé straně vztahu (1) a následné úpravě na tvar

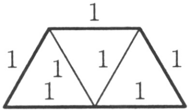
$$\frac{25 + a - b}{10} = \sqrt{a}, \tag{2}$$

z něhož je zřejmé, že číslo a (a vzhledem k symetrii dané rovnice i číslo b) je druhou mocninou přirozeného čísla. (V opačném případě by na levé straně rovnosti (2) bylo číslo racionální, kdežto na pravé číslo iracionální.) Pak je i levá strana vztahu (2) přirozené číslo menší než pět. Odtud plyne, že rozdíl $a - b$ je lichý násobek pěti. Za předpokladu $a < b$ je tedy buď $(a, b) = (4, 9)$, nebo $(a, b) = (1, 16)$. Další dvě řešení vzniknou záměnou čísel a, b.

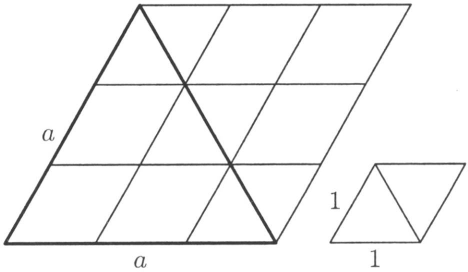
Závěr. Dané rovnici vyhovují jen dvojice $(a, b) = (1, 16)$, $(4, 9)$, $(9, 4)$, $(16, 1)$ a všechny dvojice (a, a), kde a je libovolné přirozené číslo.

C – I – 2

Lichoběžníky se stranami délek 1 cm, 1 cm, 1 cm a 2 cm jsou všechny navzájem shodné a skládají se ze tří rovnostranných trojúhelníků (obr. 1a). (Základny každého lichoběžníku mají dvě různé délky, v našem případě



Obr. 1a



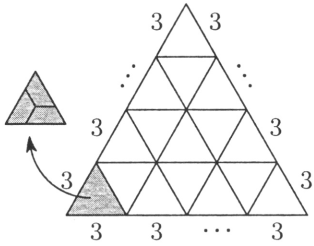
Obr. 1b

to musí být 2 cm a 1 cm.) Budeme je nazývat *základní lichoběžníky.* Rovnostranný trojúhelník s délkou strany 1 cm nazveme *základní trojúhelník.*

Vidíme, že každý z hledaných trojúhelníků lze rozřezat na konečný počet základních trojúhelníků. Proto jsou velikosti jeho vnitřních úhlů násobky šedesáti stupňů. Vnitřní úhly každého trojúhelníku jsou tři a součet jejich velikostí je $180°$, má tedy smysl hledat jen trojúhelníky rovnostranné. Z podmínky rozřezání na konečný počet základních trojúhelníků dále plyne, že délka strany hledaného trojúhelníku vyjádřená v centimetrech je přirozené číslo. Označíme-li ji a, lze náš trojúhelník rozřezat právě na a^2 základních trojúhelníků. To lze odvodit například z podílu jeho obsahu $S_a = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ a obsahu $S_1 = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ základního trojúhelníku. Obecněji platí: dva trojúhelníky, které jsou podobné s koeficientem k, mají obsahy v poměru k^2.

Jiné odvození počtu základních trojúhelníků v rovnostranném trojúhelníku se stranou a cm plyne z doplnění trojúhelníku na kosočtverec podle obr. 1b, kde bylo zvoleno $a = 3$. Kosočtverec je složen ze dvou rovnostranných trojúhelníků se stranou délky a cm. Lze jej tedy rozřezat na a^2 kosočtverců (jeden je zobrazen v pravé dolní části obrázku), z nichž každý je složen ze dvou základních trojúhelníků a kterým rovněž budeme říkat základní. Odtud plyne, že rovnostranný trojúhelník obsahuje stejný počet základních trojúhelníků, jako jemu příslušný kosočtverec obsahuje základních kosočtverců.

Zjistili jsme, že každý z hledaných trojúhelníků je rovnostranný se stranou délky a cm ($a \in \mathbb{N}$) a že je složen z a^2 základních trojúhelníků. Protože každý základní lichoběžník obsahuje právě tři základní trojúhelníky, musí být číslo a^2, a tedy i číslo a dělitelné třemi. Z obr. 2 pak plyne, že každý rovnostranný trojúhelník se stranou délky $3n$ (cm), kde $n = 1, 2, \ldots$, lze rozřezat na základní lichoběžníky.



Obr. 2

Závěr. Podmínkám úlohy vyhovují jen rovnostranné trojúhelníky s délkou strany $a = 3n$, kde n je přirozené číslo.

C – I – 3

Hledané číslo n obsahuje aspoň dvě číslice. Zapišme je ve tvaru $n = 10a + b$, kde a je číslo, jež vznikne škrtnutím poslední číslice b čísla n. Podle zadání platí $a \mid 10a + b$. Odtud $a \mid b$. Uvážíme-li navíc, že $b \neq 0$, musí být a jednomístné číslo, takže n je dvojmístné s nenulovými číslicemi a, b, přičemž $b = ka$, $k \in \mathbb{N}$.

Škrtneme-li číslici a v čísle n, zůstane číslo b, které musí dělit původní číslo $n = 10a + b$, z čehož postupně dostáváme $b \mid 10a$, $ka \mid 10a$, $k \mid 10$ a odtud $k \in \{1, 2, 5\}$. Dosazením do $b = ka$ dostaneme tři možné případy $b = a$, $b = 2a$ a $b = 5a$ a v každém z nich snadno určíme vyhovující dvojice číslic a, b. Tak zjistíme, jak musejí hledaná čísla $n = 10a + b$ vypadat.

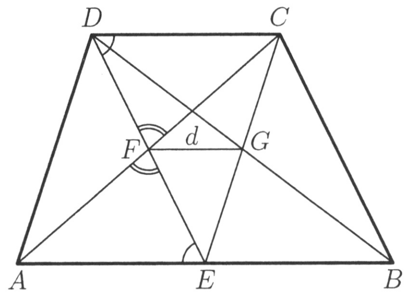
Závěr. Řešením úlohy jsou čísla: 11, 12, 15, 22, 24, 33, 36, 44, 48, 55, 66, 77, 88 a 99: Zkouškou se přesvědčíme, že všechna vyhovují podmínkám úlohy.

C – I – 4

Podle zadání jsou úhly EFD a AFC přímé, takže platí (obr. 3)

$$|\sphericalangle CDF| = |\sphericalangle AEF| \quad \text{(úhly střídavé)},$$
$$|\sphericalangle CFD| = |\sphericalangle AFE| \quad \text{(úhly vrcholové)}.$$

Navíc bod F půlí úsečku DE, proto $|DF| = |EF|$ a trojúhelníky CDF a AEF jsou shodné podle věty *usu*. Odtud plyne $|CD| = |AE|$, což spolu s rovností $|AE| = |EB|$ vede k závěru, že EB a DC jsou dvě shodné a rovnoběžné úsečky. To znamená, že čtyřúhelník $EBCD$ je



Obr. 3

rovnoběžník. Průsečík G jeho úhlopříček proto půlí každou z nich. Body F a G jsou středy stran AC, EC trojúhelníku AEC, takže úsečka FG je jeho střední příčkou a $|AE| = 2|FG|$. Platí proto:

$$|AB| = 2|AE| = 4d \quad \text{a} \quad |CD| = |AE| = 2d.$$

Obsah lichoběžníku $ABCD$ je $S = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)v = 3dv$.

C – I – 5

Platí $33\,000 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$ a $(n+1) - (n-4) = 5$. Protože pro každé přirozené n je hodnota $n+1$ kladná, daný podíl je kladný, jen když je kladná i hodnota $n-4$, odtud $n \geqq 5$.

a) Pro každé přirozené $n \geqq 5$ platí $n - 4 \geqq 1$ a $n + 1 \geqq 6$, proto je největší hodnota daného podílu rovna $33\,000 : (1 \cdot 6) = 5\,500$ a dosáhneme ji pro $n = 5$.

b) Při hledání nejmenšího podílu označme jako a, b čísla $n+1$, $n-4$ v pořadí, které teprve upřesníme. Předpokládejme nejprve, že rozklad čísla ab na součin prvočinitelů obsahuje prvočísla 11 a 5. Pak jsou a, b po sobě jdoucí násobky pěti a právě jedno z nich, dejme tomu a, je násobkem čísla 55.

Uvažujme nejprve $a = 55$. Ze dvou možných hodnot $b = 50$ a $b = 60$ vybereme tu větší (abychom dostali menší hodnotu zkoumaného podílu). Hodnotě $b = 60$ z rovnosti $n+1 = 60$ (nebo rovnosti $n-4 = 55$) odpovídá $n = 59$ a zkoumaný podíl je pak roven číslu 10.

Pro $a = 110$ (resp. $a = 165$) není číslo 33 000 dělitelné žádným ze sousedních násobků pěti, tedy čísly 105 a 115 (resp. 160 a 170).

Pro další (větší) násobky a čísla 55 dostáváme $ab \geqq 215 \cdot 220 > 33\,000$.

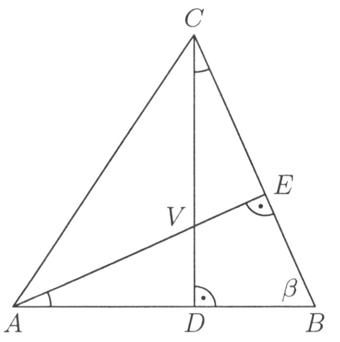
Neobsahuje-li rozklad čísla ab na součin prvočinitelů prvočíslo 11 nebo prvočíslo 5, je zkoumaný podíl (za předpokladu, že je celočíselný) dělitelný číslem 11 resp. číslem 125, takže je to číslo větší než hodnota 10, kterou jsme nalezli dříve.

Závěr. Největší hodnota daného podílu je 5 500 pro $n = 5$ a nejmenší je 10 pro $n = 59$.

C – I – 6

Při označení podle obr. 4 platí:

$$|\sphericalangle ADV| = |\sphericalangle CDB| = 90°,$$
$$|\sphericalangle VAD| = |\sphericalangle BAE| = 90° - \beta = |\sphericalangle BCD|.$$



Obr. 4

Jsou tedy trojúhelníky ADV a CDB podobné podle věty *uu*. Z této podobnosti plyne

$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|VD|}{|BD|}$$

a odtud $|AD| \cdot |BD| = |CD| \cdot |VD|$. Zdůrazněme, že tato rovnost platí pro každý ostroúhlý trojúhelník ABC. Vztah $|AD| \cdot |BD| = |AB| \cdot |VD|$ ze zadání úlohy tedy platí, právě když $|CD| = |AB|$.

C – S – 1

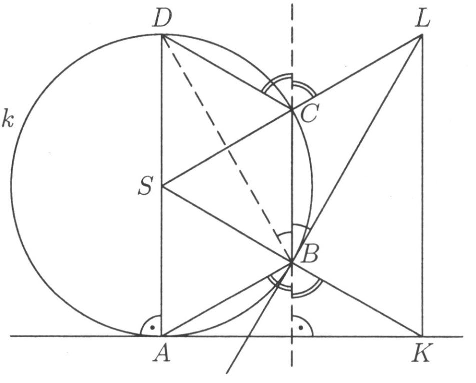
Aby číslo bylo dělitelné šesti, musí být sudé a mít ciferný součet dělitelný třemi. Označme tedy b číslici na místě jednotek (ta musí být sudá, $b \in \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$) a a tu číslici, která je spolu s číslicemi 1, 1 ($a \neq 1$) na prvních třech místech čtyřmístného čísla, jež splňuje požadavky úlohy.

Aby byl součet číslic $a+1+1+b$ takového čísla dělitelný třemi, musí číslo $a+b$ dávat při dělení třemi zbytek 1. Pro $b \in \{0,6\}$ tak máme pro a možnosti $a \in \{4,7\}$ ($a \neq 1$), pro $b \in \{2,8\}$ je $a \in \{2,5,8\}$ a konečně pro $b = 4$ je $a \in \{0,3,6,9\}$. Pro každé zvolené b a odpovídající $a \neq 0$ jsou zřejmě tři možnosti, jak číslice 1, 1 a a na prvních třech místech uspořádat, to je dohromady $(2\cdot 2+2\cdot 3+3)\cdot 3 = 39$ možností, pro $a = 0$ (když $b = 4$) pak jsou jen dvě možnosti (číslice nula nemůže být první číslicí čtyřmístného čísla).

Celkem existuje 41 čtyřmístných přirozených čísel, jež splňují podmínky úlohy.

C – S – 2

Tečna ke kružnici k v bodě A je kolmá na průměr AD, a tedy i na stranu BC daného šestiúhelníku (obr. 5). Zároveň přímky SB a AB svírají s BC šedesátistupňový úhel, takže jsou souměrně sdružené podle osy BC. Bod K je tudíž souměrně sdružený s bodem A podle osy BC.



Obr. 5

Podobně tečna BL je kolmá na BS, takže svírá s přímkou BC úhel 30° stejně jako přímka BD. Přímka BL je tudíž souměrně sdružená s přímkou BD podle osy BC. Také přímky SC a CD jsou souměrně sdružené dle osy BC, takže bod L je podle téže osy souměrně sdružený s bodem D.

Dostali jsem tak, že čtyřúhelník $KLCB$ je souměrně sdružený s lichoběžníkem $ADCB$, kterému je opsána kružnice k. Vrcholy čtyřúhelníku $KLCB$ proto leží na kružnici souměrně sdružené s kružnicí k podle osy BC. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

C – S – 3

Z rovnosti $a - 4\sqrt{b} = b + 4\sqrt{a}$ plyne rovnost $a - b = 4\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$. Protože $a - b = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$, dostáváme po vydělení kladným číslem $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ rovnost

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 4, \tag{1}$$

neboli

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} + 4. \tag{2}$$

Jejím umocněním vyjde $a = b + 16 + 8\sqrt{b}$. Protože číslo $r = 8\sqrt{b}$ musí být celé, je $\sqrt{b}$ racionální odmocnina přirozeného čísla, takže $b = n^2$ pro vhodné přirozené číslo n. Z rovnosti (2) tak máme $a = (n+4)^2$ a $a - b = (n+4)^2 - n^2 = 2^3(n+2)$. Číslo $a - b$ je tudíž pátou mocninou prvočísla, jen když $n + 2 = 2^2$ neboli $n = 2$.

Jedinou vyhovující dvojicí (a, b) je dvojice $(36, 4)$.

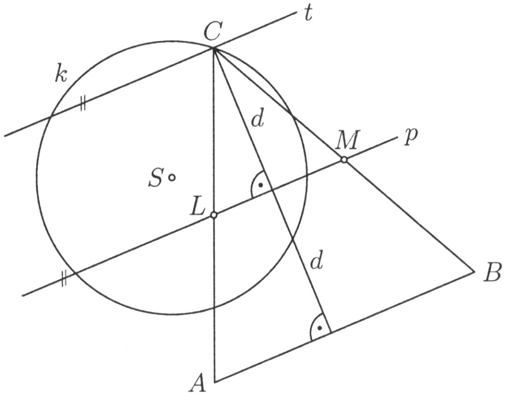
Poznámka. Když si po odvození vztahu (1) uvědomíme, že v závorce na pravé straně rovnosti $a - b = 4\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$ je kladné racionální, a tedy přirozené číslo, vidíme, že musí platit $a - b = 2^5$. Pro odmocniny $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ tak dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} \sqrt{a} + \sqrt{b} &= 8, \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} &= 4, \end{aligned}$$

jejichž sečtením vyjde $\sqrt{a} = 6$ a odečtením $\sqrt{b} = 2$.

C – II – 1

Při *rozboru* uvažme libovolný trojúhelník ABC s vrcholem C na kružnici k, jehož strany AC, BC mají středy po řadě v bodech L, M (obr. 6). Protože LM je střední příčkou takového trojúhelníku, je jeho obsah roven čtyřnásobku obsahu trojúhelníku LMC. Tento trojúhelník má pevnou stranu LM, takže jeho obsah je největší, právě když je největší jeho výška z vrcholu C, tedy vzdálenost d bodu C od přímky p určené body L, M.



Obr. 6

Dodejme, že místo srovnání obsahů trojúhelníků ABC a LMC dojdeme ke stejné podmínce také takto: trojúhelník ABC má stranu AB pevné délky $c = 2|LM|$ a výšku $v_c = 2d$. Proto je jeho obsah $\frac{1}{2}cv_c$ roven $2|LM| \cdot d$, takže je největší možný, když je taková vzdálenost d.

Pro který bod $C \in k$ je vzdálenost d největší? Veďme bodem C přímku t rovnoběžnou s přímkou p. Je-li vzdálenost d největší možná, musí celá kružnice k ležet ve stejné polorovině s hraniční přímkou t jako přímka p (volbou bodu $C \in k$ uvnitř opačné poloroviny bychom vzdálenost d zvětšili). Přímka t je proto nutně tečnou kružnice k (rovnoběžnou s danou přímkou p) a bod C je jejím dotykovým bodem.

Odtud již plyne *konstrukce*: bod C určíme jako ten ze dvou průsečíků kružnice k s kolmicí na přímku p vedenou středem S kružnice k, který má od přímky p větší vzdálenost (mají-li ji oba průsečíky stejnou, vybereme kterýkoliv z nich). Body A, B pak sestrojíme jako obrazy bodu C v souměrnosti podle středu L, resp. M.

Diskuse: Tečny kružnice k rovnoběžné s přímkou LM mají od této přímky dvě *různé* vzdálenosti, právě když střed S kružnice k na přímce LM *neleží*; tehdy má úloha jediné řešení. V opačném případě, kdy střed S na přímce LM leží, má úloha dvě řešení.

C – II – 2

a) Splňují-li přirozená čísla p, q, r danou rovnici, dostaneme z ní vyjádření

$$\sqrt{p+q} = \frac{2\,007 - p - q}{r},$$

takže číslo $\sqrt{p+q}$ je racionální, a tedy celé (odmocnina z přirozeného čísla je totiž buď číslo celé, nebo číslo iracionální). Proto z rovností

$$2\,007 = p + r\sqrt{p+q} + q = (p+q) + r\sqrt{p+q} = \sqrt{p+q}\big(\sqrt{p+q} + r\big)$$

dostáváme rozklad čísla 2 007 na dva celočíselné činitele $\sqrt{p+q}$ a $\sqrt{p+q} + r$, pro které zřejmě platí

$$1 < \sqrt{p+q} < \sqrt{p+q} + r.$$

Z rozkladu na prvočinitele $2\,007 = 3^2 \cdot 223$ tudíž vidíme, že jsou možné pouze dva případy, které přehledně zapíšeme do tabulky:

$$\begin{array}{cccccccc}
\sqrt{p+q} & \sqrt{p+q}+r & & p+q & r & & p+q+r \\
3 & 669 & \Longleftrightarrow & 9 & 666 & \Longrightarrow & 675 \\
9 & 223 & & 81 & 214 & & 295
\end{array}$$

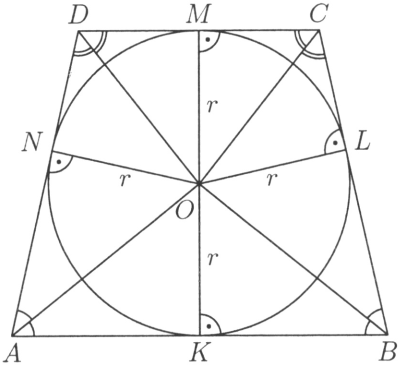
Možné hodnoty součtu $p+q+r$ tedy jsou pouze dvě čísla: 675 a 295. (Konkrétní trojice (p, q, r), které to prokazují, nebudeme uvádět, protože rovnou určíme v části b) jejich počet.)

b) Rovnost $p+q+r = 675$ nastane, právě když bude trojice (p, q, r) splňovat podmínky $p+q = 9$ a $r = 666$; takových trojic je právě tolik co dvojic (p, q), pro něž $p+q = 9$, tedy 8.

Rovnost $p+q+r = 295$ nastane, právě když bude trojice (p, q, r) splňovat podmínky $p+q = 81$ a $r = 214$; takových trojic je právě tolik co dvojic (p, q), pro něž $p+q = 81$, tedy 80.

C – II – 3

Označme postupně K, L, M, N body dotyku vepsané kružnice po řadě se stranami AB, BC, CD, DA (obr. 7). Protože $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník, jeho vnitřní úhly u vrcholů A, B, C, D mají po řadě velikosti α, α, $180° - \alpha$ a $180° - \alpha$. Úsečky OA, OB, OC, OD ležící na osách těchto



Obr. 7

úhlů proto spolu se čtyřmi navzájem shodnými úsečkami OK, OL, OM, ON rozdělují celý lichoběžník na osm pravoúhlých trojúhelníků, které se shodují v jedné odvěsně a mají ostré vnitřní úhly $\frac{1}{2}\alpha$ a $90° - \frac{1}{2}\alpha$. Těchto osm trojúhelníků lze tudíž rozdělit do dvou čtveřic shodných trojúhelníků: jednu z nich tvoří trojúhelníky OAK, OAN, OBK, OBL a druhou trojúhelníky OCL, OCM, ODM a ODN. Odtud plyne, že obsah S lichoběžníku $ABCD$ je roven čtyřnásobku součtu obsahů trojúhelníků OBL a OCL, tedy čtyřnásobku obsahu trojúhelníku OBC. Podle vnitřních úhlů u vrcholů B a C vidíme, že trojúhelník OBC je pravoúhlý s odvěsnami OB a OC, takže má obsah $\frac{1}{2}|OB| \cdot |OC|$ a hledaný celkový obsah S je tudíž $S = 2|OB| \cdot |OC|$.

Poznámka. Je-li O střed kružnice vepsané tečnovému čtyřúhelníku $ABCD$, je snadné ukázat, že jeho obsah je roven dvojnásobku součtu obsahů trojúhelníků OAB a OCD stejně jako trojúhelníků OBC a ODA. Poslední dva trojúhelníky jsou u našeho rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ shodné.

Jiné řešení. Pro výšku v a strany a, b, c, d lichoběžníku $ABCD$ s vepsanou kružnicí $k(O, r)$ platí rovnosti $v = 2r$ a $a + c = b + d$. Z první z nich plyne, že střed O leží na střední příčce lichoběžníku, jejíž délka $\frac{1}{2}(a + c)$ je podle druhé rovnosti rovna $\frac{1}{2}(b + d)$. V našem případě ovšem platí $b = d$, takže střední příčka je shodná s oběma rameny a bod O je jejím středem, neboť rovnoramenný lichoběžník je osově souměrný. Dohromady dostáváme, že bod O leží na kružnici sestrojené nad průměrem BC, a proto je OBC pravoúhlý trojúhelník o obsahu $\frac{1}{2}|OB| \cdot |OC|$. Jeho výška na přeponu BC je však poloměrem r vepsané kružnice k, tudíž obsah trojúhelníku OBC je rovněž roven $\frac{1}{2}b \cdot r$. Porovnáním obou vyjádření dostaneme rovnost $|OB| \cdot |OC| = b \cdot r$. Pro hledaný obsah S našeho lichoběžníku proto platí

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot v = b \cdot 2r = 2 \cdot |OB| \cdot |OC|.$$

C – II – 4

Libovolné $(m+1)$-místné přirozené číslo N s první číslicí c má vyjádření $N = c \cdot 10^m + x$, kde x je právě to číslo, které dostaneme z čísla N po škrtnutí první číslice c. Podle zadání má platit $N = c \cdot 10^m + x = kx$ neboli $c \cdot 10^m = (k-1)x$. Číslo $k-1$ tedy musí být dělitelem čísla $c \cdot 10^m$, které má ovšem pouze jednomístné prvočinitele: prvočísla 2, 5 a prvočinitele z rozkladu číslice c. Budeme proto postupně testovat na prvočinitele čísla $k-1$ pro největší dvojmístná k:

▷ $k = 99$: $k-1 = 98 = 2 \cdot 7^2$ nevyhovuje, neboť $7^2 \nmid c \cdot 10^m$.

▷ $k = 98$: $k-1 = 97$ nevyhovuje, neboť 97 je dvojmístné prvočíslo.

▷ $k = 97$: $k-1 = 96 = 2^5 \cdot 3$ vyhovuje, neboť například $2^5 \cdot 3 \mid c \cdot 10^m$ pro $c = 3$ a $m = 5$; abychom dostali menší N, můžeme ovšem zvolit menší $m = 4$ a $c = 3 \cdot 2 = 6$ (jiné c pro $m = 4$ nevyhovuje). Pro $m \leqq 3$ už vztah $2^5 \cdot 3 \mid c \cdot 10^m$ neplatí pro žádnou nenulovou číslici c.

Hledané největší dvojmístné k je tedy 97. Podle předchozí diskuse určíme nejmenší vyhovující N, kterému odpovídá $m = 4$, $c = 6$ a $x = 6 \cdot 10^4 : 96 = 625$, takže $N = 6 \cdot 10^4 + 625 = 60\,625$.

Odpověď: Hledané k je rovno 97 a nejmenší vyhovující N je 60 625.