51. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie B

In: Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Tomáš Pitner (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor); Jaroslav Zhouf (editor): 51. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2001/2002. 43. mezinárodní matematická olympiáda. 14. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2003. pp. 39–60.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405044

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Do tabulky 4×4 jsou vepsána kladná reálná čísla tak, že součin v každé pětici tvaru  je rovný 1. Zjistěte maximální počet různých čísel zapsaných v tabulce. *(P. Černek)*

B – I – 2

Určete, kolik čísel můžeme vybrat z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 75\,599, 75\,600\}$ tak, aby mezi nimi bylo číslo 75 600 a aby pro libovolná dvě vybraná čísla a, b platilo, že a je dělitelem b nebo b dělitelem a. (Uveďte všechny možnosti.) *(J. Földes)*

B – I – 3

Nechť k je polokružnice sestrojená nad průměrem AB, která leží ve čtverci $ABCD$. Uvažujme její tečnu t_1 z bodu C (různou od BC) a označme P její průsečík se stranou AD. Nechť t_2 je společná vnější tečna polokružnice k a kružnice vepsané trojúhelníku CDP (různá od AD). Dokažte, že přímky t_1 a t_2 jsou navzájem kolmé. *(J. Švrček)*

B – I – 4

Pokud máme n ($n \geqq 2$) přirozených čísel, můžeme s nimi provést následující operaci: vybereme několik z nich, ale ne všechna a každé z vybraných čísel nahradíme jejich aritmetickým průměrem. Zjistěte, zda je možno pro libovolnou počáteční n-tici dostat po konečném počtu kroků všechna čísla stejná, jestliže se n rovná

a) 2 000, b) 35, c) 3, d) 17. *(J. Földes)*

B – I – 5

Zjistěte, pro která reálná čísla p má soustava

$$x^2y - 2x = p,$$
$$y^2x - 2y = 2p - p^2$$

právě tři řešení v oboru reálných čísel. *(P. Černek)*

B – I – 6

Je dán rovnostranný trojúhelník MPQ. Najděte množinu vrcholů C všech trojúhelníků ABC takových, že body P, Q jsou paty výšek z vrcholů A, B a bod M je střed strany AB. *(J. Šimša)*

B – S – 1

Určete reálné číslo p tak, aby rovnice

$$x^2 + 4px + 5p^2 + 6p - 16 = 0$$

měla dva různé kořeny x_1, x_2 a aby součet $x_1^2 + x_2^2$ byl co nejmenší.
(J. Šimša)

B – S – 2

Uvnitř stran BC, CA, AB daného ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou po řadě vybrány body X, Y a Z tak, že každému ze čtyřúhelníků $ABXY$, $BCYZ$ a $CAZX$ lze opsat kružnici. Dokažte, že body X, Y, Z jsou paty výšek trojúhelníku ABC. *(E. Kováč)*

B – S – 3

Na tabuli jsou napsána čísla 1, 2, …, 17. Čísla postupně mažeme, a to tak, že z dosud nesmazaných čísel zvolíme libovolné číslo k a smažeme všechna ta čísla na tabuli, která dělí $k + 17$. Dokažte, že opakováním této procedury se nám nepodaří všechna čísla smazat. *(J. Földes)*

B – II – 1

Najděte všechna přirozená čísla n, která jsou menší než 100 a mají tu vlastnost, že druhé mocniny čísel $7n+5$ a $4n+3$ končí stejným dvojčíslím.
(J. Šimša)

B – II – 2

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$(x^2+1)(y^2+1)+24xy=0$$

$$\frac{12x}{x^2+1}+\frac{12y}{y^2+1}+1=0.$$

(*J. Šimša*)

B – II – 3

Uvnitř stran AB, BC, CD a DA konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ jsou po řadě zvoleny body K, L, M a N. Označme S průsečík přímek KM a LN. Je-li možno vepsat kružnice čtyřúhelníkům $AKSN$, $BLSK$, $CMSL$ a $DNSM$, je možno vepsat kružnici i čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte. (*J. Zhouf*)

B – II – 4

Je dáno n nezáporných čísel. Můžeme vybrat libovolná dvě z nich, řekněme a a b, $a \leqq b$, a zaměnit je čísly 0 a $b-a$. Dokažte, že opakováním této operace lze všechna daná čísla změnit na nuly, právě když původní čísla lze rozdělit do dvou skupin tak, že součty čísel v obou skupinách jsou stejné. (*J. Földes*)

B – I – 1

Označme a, b, c, d, e, f, g, h, i čísla vepsaná do levého horního čtverce 3×3 tabulky (obr. 6). Porovnáme-li součiny pro pětice tvaru a umístěné v této části tabulky, musí platit $abcde = bdefg$, neboli $ac = fg$. Analogicky pro pětice a nám vyjde $ahfdi = cigdh$, neboli $af = cg$. Protože jde vesměs o kladná čísla, plyne z obou rovností $f = c$ a $g = a$. Zároveň si uvědomme, že tuto vlastnost (tj. rovnost čísel v protějších rozích čtverce 3×3) musí mít každý ze čtyř takových čtverců, které v tabulce existují. To využijeme při dalším doplňování dané tabulky.

a	b	c	
h	d	i	
f	e	g	

a	b	c	
h	d	i	
f	e	g	

Obr. 6

a	b	c	e
	d		
c	e	a	b
			d

a	b	c	e
	d		x
c	e	a	b
	x		d

Obr. 7

Uvažujme opět umístění v levém horním rohu dané tabulky s vepsanými čísly a, b, c, d, e, doplňme další čísla podle právě dokázané vlastnosti a označme x chybějící číslo v pětici (obr. 7). Porovnáním obou shodných součinů dostáváme $abcde = abdex$, neboli $x = c$. Kdybychom stejnou úvahu udělali pro pětice polí a , jež dostaneme z uvažovaných pětic překlopením podle svislé osy dané tabulky, vyjde nám analogická rovnost i pro další dvě dvojice polí tabulky (obr. 8).

	b	c	
b			c
c			b
	c	b	

Obr. 8

a	b	c	e
b	d	y	c
c	e	a	b
y	c	b	d

Obr. 9

Teď už máme tabulku vyplněnou celou až na dvě políčka, do kterých vepíšeme číslo y (obr. 9). Porovnáním součinů v obou vyznačených pěticích dostáváme $abcde = abcdy$, neboli $y = e$. Analogická rovnost musí ovšem platit i pro druhá dvě centrální pole tabulky ležící na druhé úhlopříčce, tj. $d = a$. Stačí, abychom celou úvahu zopakovali pro pětice polí, jež vzniknou z uvažovaných pětic překlopením podle svislé osy dané tabulky.

Všimněme si teď ve vyplněné tabulce pětic polí vyznačených na obr. 10. Zřejmě musí platit $a^2bce = abce^2$, neboli $a = e$. Vidíme, že tabulka obsahuje nejvýše tři různá čísla a, b, c (obr. 11), přičemž $a^3bc = 1$. Nyní zbývá ověřit, že stejný součin a^3bc má každá pětice polí tvaru, kterou lze do tabulky umístit. Protože vyplněná tabulka je osově souměrná podle obou úhlopříček, a tedy i středově souměrná, stačí to ověřit jen pro čtyři možné polohy stejně orientovaných pětic (např. v obvyklé poloze písmene T).

a	b	c	e
b	a	e	c
c	e	a	b
e	c	b	a

a	b	c	e
b	a	e	c
c	e	a	b
e	c	b	a

Obr. 10

a	b	c	a
b	a	a	c
c	a	a	b
a	c	b	a

Obr. 11

Odpověď. V tabulce jsou zapsána nejvýše tři různá kladná čísla a, b, c, přičemž $a^3bc = 1$.

B – I – 2

Uvažujme množinu M, která splňuje podmínky ze zadání. Protože M obsahuje číslo 75 600, musí být aspoň jednoprvková. Dále si všimněme, že pokud z množiny M odstraníme nějaké číslo $a \neq 75\,600$, dostaneme množinu $\mathsf{M}' \subset \mathsf{M}$, která rovněž splňuje dané podmínky. Ověřme to. Množina M′ i nadále obsahuje číslo 75 600. Jsou-li x, y libovolná dvě čísla z množiny M′, platí pro ně automaticky, že $x \mid y$ nebo $y \mid x$, protože to pro ně platí jako pro prvky množiny M.

Tím jsme vlastně dokázali, že pokud najdeme množinu, která má m prvků a splňuje podmínky zadání, pak existuje k-prvková množina požadovaných vlastností pro libovolné k, $1 \leqq k \leqq m$. Stačí tedy najít vyhovující množinu, která má maximální možný počet prvků.

Je-li a libovolný prvek množiny M, je především $a \leqq 75\,600$. Pokud $a < 75\,600$, musí podle zadání platit, že $a \mid 75\,600$. Množina M tedy obsahuje jen dělitele čísla 75 600.

Prvočíselný rozklad čísla 75 600 je $75\,600 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Každý dělitel čísla 75 600 má tedy tvar $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \cdot 7^\delta$, kde $0 \leqq \alpha \leqq 4$, $0 \leqq \beta \leqq 3$, $0 \leqq \gamma \leqq 2$, $0 \leqq \delta \leqq 1$. Každý prvek M je proto charakterizován uspořádanou čtveřicí $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ odpovídajících exponentů v uvedeném rozkladu na prvočinitele. Jsou-li p a p' dva různé prvky M a platí-li například $p < p'$, pak podle zadání musí současně platit $\alpha \leqq \alpha'$, $\beta \leqq \beta'$, $\gamma \leqq \gamma'$, $\delta \leqq \delta'$, přičemž aspoň jedna nerovnost musí být ostrá (jinak by platilo $p = p'$), odkud plyne nerovnost $\alpha + \beta + \gamma + \delta < \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta'$. Protože v našem případě je $0 \leqq \alpha + \beta + \gamma + \delta \leqq 10$, může množina M obsahovat nejvýše 11 prvků. Takovou je např. množina

$$\mathsf{D} = \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^4 \cdot 3, 2^4 \cdot 3^2, 2^4 \cdot 3^3, 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5, 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2, 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7\}.$$

Tím jsme dokázali, že z dané množiny můžeme (včetně čísla 75 600) vybrat požadovaným způsobem $1, 2, \ldots, 11$ prvků.

B – I – 3

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že délka strany čtverce $ABCD$ je 1. Označme M střed strany AB a U průsečík přímek t_1, t_2 (obr. 12). Dále označme l kružnici vepsanou trojúhelníku CDP, S její střed a r poloměr. Dále nechť Q a R jsou postupně dotykové body přímky t_1 s kružnicí l a polokružnicí k. Položme $x = |AP|$. V řešení využijeme známý fakt, že vzdálenosti obou dotykových bodů od průsečíku tečen jsou stejné. Takto například dostáváme

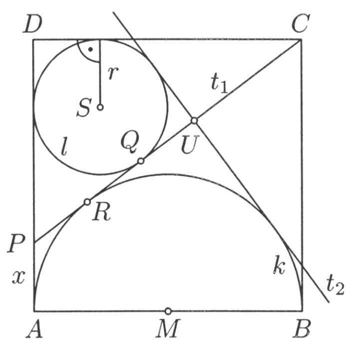
$$|CP| = |CR| + |RP| = |CB| + |AP| = 1 + x. \tag{1}$$

Řešení provedeme ve třech krocích, přitom každý z nich vyplníme více způsoby:

1. krok. Výpočet délky x.

2. krok. Výpočet poloměru r.

3. krok. Důkaz kolmosti přímek t_1 a t_2.



Obr. 12

1. krok, 1. způsob.

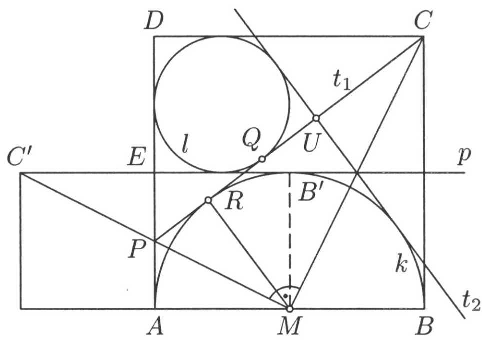
Uvažujme pravoúhlý trojúhelník CDP. Délka jeho přepony se podle (1) rovná $1 + x$ a délky odvěsen jsou 1 a $1 - x$ Z *Pythagorovy věty* tedy dostáváme

$$(1 + x)^2 = 1^2 + (1 - x)^2.$$

Řešením této (po úpravě lineární) rovnice je $x = \frac{1}{4}$.

1. krok, 2. způsob.

Označme C' bod, který vznikne otočením bodu C okolo středu M o $90°$ v kladném směru. Potom bod C' leží na přímce p, která je obrazem přímky BC v uvedeném otočení (obr. 13), přičemž rovnoběžné úsečky



Obr. 13

$C'E$ a AM mají tutéž délku $\frac{1}{2}$. Protože přímka MP je osou úhlu AMR a přímka MC osou úhlu BMR, jsou přímky MP a MC navzájem kolmé, takže bod C' leží na přímce MP. Trojúhelníky PAM' a PEC' jsou tedy souměrně sdružené podle středu P, a proto $x = |AP| = \frac{1}{2}|AE| = \frac{1}{4}$.

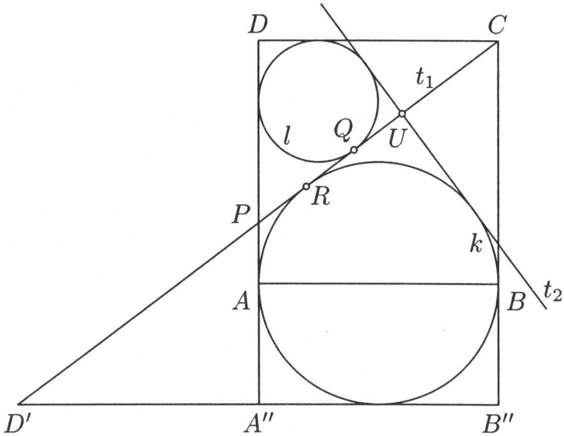
2. krok, 1. způsob.

Je-li ϱ poloměr kružnice vepsané trojúhelníku se stranami a, b, c, je jeho obsah roven $\frac{1}{2}(a + b + c)\varrho$. Pro pravoúhlý trojúhelník CDP, v němž známe délky všech stran, tak dostáváme (připomeňme, že $|PC| = 1 + x = \frac{5}{4}$)

$$r = \frac{\frac{1}{2}|CD| \cdot |DP|}{\frac{1}{2}(|CD| + |DP| + |PC|)} = \frac{1}{4}.$$

2. krok, 2. způsob.

Nechť $A''B''$ je obraz úsečky AB v posunutí ve směru polopřímky CB o délku $\frac{1}{2}$ (obr. 14). Označme D' průsečík přímek $A''B''$ a t_1. Potom kružnice, jejíž částí je polokružnice k, je vepsána trojúhelníku $D'B''C$ a navíc jsou trojúhelníky $D'B''C$ a CDP podobné. Poměr poloměrů jejich vepsaných kružnic je tedy roven poměru jejich kratších odvěsen. To znamená, že $\frac{1}{2} : r = \frac{3}{2} : \frac{3}{4}$, neboli $r = \frac{1}{4}$.



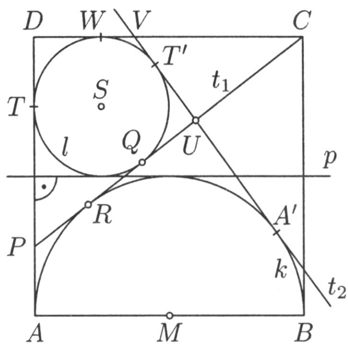
Obr. 14

3. krok, 1. způsob.

Podle 2. kroku víme, že průměr kružnice l je roven poloměru polokružnice k. Proto přímka p (osa úsečky AD) je společnou vnitřní tečnou polokružnice k a kružnice l (obr. 15). Přitom přímka p je kolmá na přímku AD, která je jejich vnější společnou tečnou. V osové souměrnosti podle středné SM obou kružnic je obrazem vnější tečny AD vnější tečna t_2 a obrazem vnitřní tečny p vnitřní tečna t_1. Jsou tedy navzájem kolmé i tečny t_1 a t_2.

3. krok, 2. způsob.

Označme V průsečík přímky t_2 se stranou CD. Protože délky obou společných *vnějších* tečen (pokud je bereme jako úsečky, jejichž krajními body jsou dotykové body) polokružnice k a kružnice l jsou stejné, tj. $|AT| = |A'T'|$, dostáváme na základě shodnosti délek tečen z bodu P



Obr. 15

ke kružnici l a shodnosti délek tečen z bodu U k polokružnici k

$$|AT| = |AP| + |PT| = |AP| + |PQ| = 2|AP| + |RQ|,$$
$$|A'T'| = |A'U| + |UT'| = |RU| + |UQ| = |RQ| + 2|UQ|,$$

což znamená, že $|UQ| = |AP| = \frac{1}{4}$. Dále z rovnosti délek tečen z bodu C k polokružnici k a kružnici l dostáváme $|RQ| = |CR| - |CQ| = |CB| - |CW| = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. To znamená, že $|PU| = \frac{3}{4} = |PD|$, takže čtyřúhelník $PUVD$ je deltoid, a tedy $|\sphericalangle PUV| = |\sphericalangle PDV| = 90^\circ$, tj. přímky t_1 a t_2 jsou navzájem kolmé.

Tím je důkaz hotový.

B – I – 4

Rozeberme nejprve případ a), tedy $n = 2\,000$. Vyberme tisíc čísel a proveďme s nimi danou operaci. Potom vezměme zbylých tisíc čísel a rovněž s nimi proveďme danou operaci. Dostaneme tisíc čísel rovných a a tisíc čísel rovných b. Pokud $a = b$, je úloha vyřešena. Pokud $a \neq b$, tak postupně vybírejme číslo rovné a a číslo rovné b a nahraďme je průměrem $\frac{1}{2}(a + b)$. Takto můžeme vybrat $1\,000$ dvojic a všechna čísla nahradit číslem $\frac{1}{2}(a + b)$. Tedy pro $n = 2\,000$ existuje posloupnost kroků, která převede libovolných $2\,000$ čísel na stejná čísla.

Případ $n = 35$ budeme řešit podobně. Vyberme 7 disjunktních pětic a v každé z nich proveďme operaci popsanou výše, přičemž v každé dostaneme stejná čísla. Z každé nově vytvořené pětice vyberme teď jedno číslo. Dostaneme 7 čísel, s kterými opět provedeme danou operaci. Podobným způsobem vyberme další sedmice a vytvořme odpovídající průměry.

Všechny sedmice budou stejné, neboť v každé pětici máme stejná čísla. Všechna čísla budou tedy stejná. I v tomto případě existuje posloupnost kroků, která převede libovolných 35 čísel na stejná čísla.

Uvažujme $n = 3$. Uvažujme trojici čísel $(1, 1, 2)$. Provádět danou operaci s dvěma jednotkami nemá smysl, takže po prvním kroku, který změní naši trojici, dostaneme čísla $(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Znovu jsme dostali dvě čísla stejná, která se nevyplatí „průměrovat". Tedy další krok, který změní naši trojici, ji nechá v tvaru $(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2})$. Všimněme si, že po každém kroku je součet čísel stejný. Dokážeme to i v obecném případě: Označme $a_1, a_2, \ldots, a_n$ daná čísla. Bez újmy na obecnosti proveďme krok s prvními m $(m < n)$ čísly. Dostaneme čísla

$$\underbrace{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m}, \ldots, \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m}}_{m\text{-krát}}, a_{m+1}, \ldots, a_n.$$

Jejich součet je $m \cdot \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} + a_{m+1} + \ldots + a_n = a_1 + \ldots + a_n$. Tím je uvedené tvrzení dokázáno.

Máme-li tedy dostat z čísel $(1, 1, 2)$ všechna čísla stejná, tak na konci úprav musíme dostat všechna čísla rovná $\frac{2+1+1}{3} = \frac{4}{3}$. Všimněme si, že při postupných krocích se ve jmenovateli čísel objevují jen mocniny čísla 2. Dokážeme to matematickou indukcí.

V prvním kroku to zřejmě platí. Po k krocích máme tři čísla, která mají ve jmenovateli jen mocniny čísla 2. V dalším kroku můžeme vybrat buď jedno číslo, které nám trojici nezmění, anebo dvě čísla. Nahradíme-li je jejich průměrem, budeme zřejmě dělit číslem 2. A znovu dostaneme ve jmenovateli jen mocninu dvojky. V každém kroku dostaneme tedy do jmenovatele jen mocniny dvojky, ale na konci úprav tam máme mít číslo 3, což je spor. Zjistili jsme, že pro $n = 3$ neexistuje pro každou trojici čísel posloupnost kroků, která změní všechna čísla na stejná.

Případ $n = 17$ dokážeme podobně jako případ $n = 3$. Ukázali jsme dříve (pro obecné n), že v každém kroku zůstává zachován součet čísel. Vezměme tedy nějakou 17-tici přirozených čísel, jejíž součet není dělitelný 17. Na konci máme dostat 17-tici stejných čísel rovných $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{17}}{17}$, přičemž tento zlomek je v základním tvaru. V žádném kroku však nedostaneme do jmenovatele číslo 17. Toto tvrzení znovu dokážeme indukcí. První krok je zřejmý. Po k krocích dostaneme 17-tici čísel, v jejichž jmenovateli není číslo 17. Z těchto čísel vezměme $m < 17$

a sečtěme je. Podle indukčního předpokladu dostaneme ve jmenovateli nejmenší společný násobek jmenovatelů vybraných čísel. Ten podle indukčního předpokladu nebude dělitelný 17. Pokud teď tento součet vydělíme číslem $m < 17$, nedostaneme ve jmenovateli číslo dělitelné 17. Tudíž ani po $k+1$ krocích nedostaneme ve jmenovateli číslo dělitelné 17. Protože na konci musíme dostat čísla, která mají ve jmenovateli 17, dostáváme spor. Pro některé 17-tice přirozených čísel tedy nedokážeme najít posloupnost kroků, která z nich vytvoří stejná čísla.

B – I – 5

Pokud vynásobíme první rovnici neznámou y a druhou neznámou x, dostaneme na levé straně obou rovnic $x^2y^2 - 2xy$. Porovnáním pravých stran máme

$$py = p(2-p)x. \tag{1}$$

Pokud $p = 0$, vypadá daná soustava takto:

$$\begin{aligned} x^2y - 2x &= 0, \\ y^2x - 2y &= 0, \end{aligned}$$

přičemž po jednoduché úpravě je

$$\begin{aligned} x(xy - 2) &= 0, \\ y(xy - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Vidíme, že soustava má nekonečně mnoho řešení: je jím každá dvojice (x, y) reálných čísel taková, že $xy = 2$. (Kromě těchto dvojic je řešením pouze dvojice $x = y = 0$.)

Pokud $p = 2$, dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x(xy - 2) &= 2, \\ y(xy - 2) &= 0, \end{aligned}$$

která má jediné řešení $y = 0$, $x = -1$.

Vraťme se teď k rovnici (1), přičemž budeme dále předpokládat, že $p \notin \{0, 2\}$. Rovnici vydělíme číslem p:

$$y = (2-p)x. \tag{2}$$

Dosazením tohoto vztahu do první z daných rovnic dostáváme ($p \neq 2$) kubickou rovnici

$$(2-p)x^3 - 2x - p = 0. \tag{3}$$

Řešení kubické rovnice obecně není tak jednoduché jako řešení kvadratické rovnice. V našem případě však můžeme uhodnout jeden její kořen $x = -1$. Potom můžeme polynom $(2-p)x^3 - 2x - p$ beze zbytku vydělit kořenovým činitelem $x + 1$. Vydělením dostáváme

$$(2-p)x^3 - 2x - p = (x+1)\big((2-p)x^2 + (p-2)x - p\big).$$

Stačí tedy vyřešit kvadratickou rovnici

$$(2-p)x^2 + (p-2)x - p = 0. \tag{4}$$

Uvědomme si, že neznámá y je jednoznačně určena neznámou x pomocí vztahu (2). Má-li tedy mít daná soustava právě tři řešení, musí mít rovnice (3) tři navzájem různá řešení. To znamená, že rovnice (4) musí mít dvě různá řešení, která se navíc nerovnají -1. Budeme zkoumat, kdy je diskriminant D rovnice (4) kladný. Jednoduchým výpočtem dostáváme

$$D = (p-2)^2 - 4(2-p)(-p) = (2-p)(3p+2).$$

Odtud vidíme, že $D > 0$, právě když $p \in (-\frac{2}{3}, 2)$. Dosazením $x = -1$ snadno vidíme, že rovnice (4) má kořen -1 jen pro $p = \frac{4}{3}$. Rovnice (3) má proto tři různá řešení, právě když $p \in (-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, 2)$.

Obráceně, má-li rovnice (3) tři různá řešení, má tři různá řešení i soustava (2), (3), která je však pro $p \neq 0$ a $p \neq 2$ ekvivalentní s danou soustavou.

Odpověď. Daná soustava má v oboru reálných čísel právě tři řešení, právě když $p \in (-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, 2)$.

Poznámka. Úlohu je možno řešit více způsoby — například z první rovnice vyjádřit neznámou y pomocí x a to dosadit do druhé rovnice, anebo první rovnici vydělit x a druhou y a získané rovnice odečíst. Oba tyto způsoby opět vedou na kubickou rovnici (3).

B – I – 6

Uvažujme trochu obecnější úlohu. Předpokládejme jen, že trojúhelník MPQ je rovnoramenný se základnou PQ, přičemž $|\sphericalangle PMQ| = \varphi$.

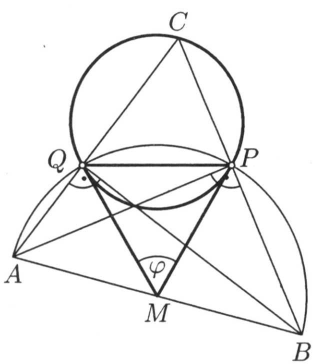
Označme standardně α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníku ABC. Body P, Q jsou paty výšek z bodů A, B, takže body A, B, P, Q leží na kružnici se středem M (jde o *Thaletovu kružnici* nad průměrem AB). To znamená, že $|MA| = |MB| = |MP| = |MQ|$, a tedy trojúhelník AMQ (pokud $A \neq Q$) je rovnoramenný; analogicky trojúhelník BMP. Potom platí

$$|\sphericalangle AMQ| = 180^\circ - 2|\sphericalangle MAQ|,$$
$$|\sphericalangle BMP| = 180^\circ - 2|\sphericalangle MBP|, \qquad |\sphericalangle PCQ| = \gamma. \tag{1}$$

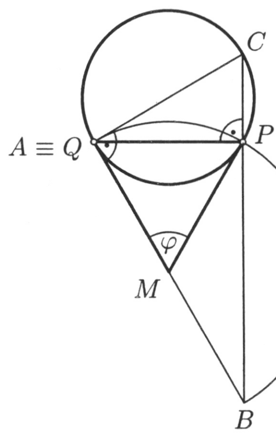
Dále rozeberme několik případů podle toho, zda má být trojúhelník ABC ostroúhlý, pravoúhlý, anebo tupoúhlý.

Případ 1. Trojúhelník ABC je ostroúhlý (obr. 16). Zřejmě body M a C leží v opačných polorovinách určených přímkou PQ. Navíc platí $|\sphericalangle MAQ| = \alpha$, $|\sphericalangle MBP| = \beta$ a $|\sphericalangle AMQ| + \varphi + |\sphericalangle BMP| = 180^\circ$, odkud po dosazení (1) dostáváme $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$.

Případ 2. Trojúhelník ABC má při vrcholu A pravý úhel (obr. 17). Zřejmě body M a C leží v opačných polorovinách určených přímkou PQ. Dále $A \equiv Q$ a $|\sphericalangle BMP| = 180^\circ - \varphi$. Z (1) potom vyplývá $\beta = |\sphericalangle MBP| = \frac{1}{2}\varphi$, a tedy $\gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$. Pokud je pravý úhel při vrcholu B, analogicky dostaneme $\gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$.



Obr. 16

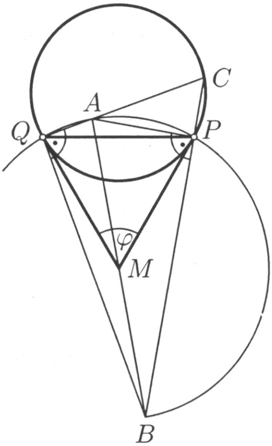


Obr. 17

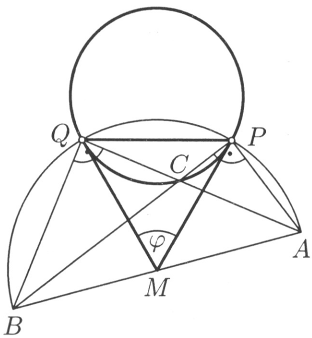
Případ 3. Trojúhelník ABC má při vrcholu A tupý úhel (obr. 18). Zřejmě body M a C leží v opačných polorovinách určených přímkou PQ. Přitom $|\sphericalangle MAQ| = 180^\circ - \alpha$, $|\sphericalangle MBP| = \beta$ a $\varphi - |\sphericalangle AMQ| +$

$+ |\sphericalangle BMP| = 180°$, odkud po dosazení (1) dostáváme $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 90° - \frac{1}{2}\varphi$. Pokud je tupý úhel při vrcholu B, analogicky dostaneme $\gamma = 90° - \frac{1}{2}\varphi$.

Případ 4. Trojúhelník ABC má při vrcholu C tupý úhel (obr. 19). Zřejmě body M a C leží ve stejné polorovině určené přímkou PQ. Dále z pravoúhlých trojúhelníků ABQ a ABP dostáváme $|\sphericalangle MAQ| = \alpha$, $|\sphericalangle MBP| = \beta$ a $|\sphericalangle AMQ| + |\sphericalangle BMP| = 180° + \varphi$. Z (1) potom vyplývá $\gamma = 90° + \frac{1}{2}\varphi$.



Obr. 18



Obr. 19

Zřejmě trojúhelník ABC nemůže mít při vrcholu C pravý úhel, jinak by body C, P, Q splynuly. Celkově jsme tedy dostali, že pokud bod C leží v polorovině opačné k polorovině PQM, je $|\sphericalangle PCQ| = 90° - \frac{1}{2}\varphi$, a pokud bod C leží v polorovině PQM, je $|\sphericalangle PCQ| = 90° + \frac{1}{2}\varphi$. Množinou všech takových bodů C je tedy kružnice, označme ji k, nad tětivou PQ s výjimkou bodů P, Q (kde větší oblouk kružnice k je částí množiny všech bodů X takových, že $|\sphericalangle PXQ| = 90° - \frac{1}{2}\varphi$).

Obráceně nechť $C \in k \setminus \{P, Q\}$ a MPQ je rovnoramenný trojúhelník se základnou PQ. Potom si snadno uvědomíme, jako bychom sestrojili body A, B. Bod A leží na přímce CQ a na přímce, která je kolmá na CP a prochází bodem P. Analogicky dostaneme bod B. V takovémto trojúhelníku ABC budou body P, Q patami výšek z vrcholů A, B. Stačí tedy dokázat, že M je střed AB. Označme N střed strany AB. Dokážeme, že $M \equiv N$. Označme $\psi = |\sphericalangle PNQ|$. Zřejmě bod N leží v polorovině PQM a je středem kružnice, na které leží body A, B, P, Q, takže trojúhelník

NPQ je rovnoramenný se základnou PQ. Přitom z výše uvedených úvah vyplývá, že pokud bod C leží v polorovině opačné k polorovině PQM, je $\gamma = 90° - \frac{1}{2}\psi$, a pokud bod C leží v polorovině PQM, je $\gamma = 90° + \frac{1}{2}\psi$. To znamená, že $\psi = \varphi$. Navíc oba body M a N leží na ose úsečky PQ. Takže nutně $M \equiv N$, a tedy M je opravdu střed strany AB.

Odpověď. Hledanou množinou všech vrcholů C je kružnice k s výjimkou bodů P, Q. Speciálně pro $\varphi = 60°$ je k kružnice souměrně sdružená s kružnicí opsanou trojúhelníku MPQ podle přímky PQ.

Jiné řešení. Uvažujme znovu obecnější úlohu jako v předcházejícím řešení. Opět si uvědomme, že body A, B, P, Q leží na kružnici se středem M. Vzhledem k tomu, že M je střed úsečky AB, leží aspoň jeden z bodů A, B nutně v polorovině PQM. Bez újmy na obecnosti nechť je to bod B. Potom z věty o obvodových úhlech vyplývá, že $|\sphericalangle QBP| = \frac{1}{2}\varphi$. Dále

$$|\sphericalangle BCQ| = 90° - |\sphericalangle QBC| = 90° - |\sphericalangle QBP| = 90° - \frac{\varphi}{2}.$$

Pokud $\gamma < 90°$, leží bod C v polorovině opačné k polorovině PQM a platí $\gamma = |\sphericalangle BCQ| = 90° - \frac{1}{2}\varphi$. Pokud $\gamma > 90°$, leží bod C v polorovině PQM a platí $\gamma = 180° - |\sphericalangle BCQ| = 90° + \frac{1}{2}\varphi$.

Další postup je už analogický jako v prvním řešení.

Diskusi případů v obou řešeních můžeme částečně obejít. Stačí si uvědomit několik faktů. Pokud V je průsečíkem výšek v trojúhelníku ABC, je bod C průsečíkem výšek v trojúhelníku ABV. Proto trojúhelník ABC má vlastnost ze zadání úlohy, právě když ji má trojúhelník ABC', kde $C' = V$. Znamená to, že množina vrcholů C všech vyhovujících trojúhelníků je totožná s množinou jejich průsečíků výšek V. Protože body C, V leží vždy v opačných polorovinách určených přímkou PQ a platí $|\sphericalangle PVQ| + |\sphericalangle PCQ| = 180°$, stačí najít množinu vrcholů C jen v jedné ze zmíněnych polorovin (jak už víme, je jí kružnicový oblouk), v druhé polorovině touto množinou pak musí být doplněk toho oblouku do celé kružnice.

B – S – 1

Pro kořeny x_1, x_2 dané kvadratické rovnice (pokud existují) platí podle Viètových vztahů rovnosti

$$x_1 + x_2 = -4p \quad \text{a} \quad x_1 x_2 = 5p^2 + 6p - 16,$$

ze kterých vypočteme zkoumaný součet

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-4p)^2-2(5p^2+6p-16)=$$
$$=6p^2-12p+32=6(p-1)^2+26.$$

Odtud plyne nerovnost $x_1^2+x_2^2 \geqq 26$, přitom rovnost může nastat, jen když $p=1$. Zjistíme proto, zda pro $p=1$ má daná rovnice skutečně dvě různá řešení: jde o rovnici $x^2+4x-5=0$ s kořeny $x_1=-5$ a $x_2=1$. Tím je úloha vyřešena.

Dodejme, že většina řešitelů patrně nejprve zjistí, pro která p má daná rovnice dva různé kořeny. Protože pro její diskriminant D platí

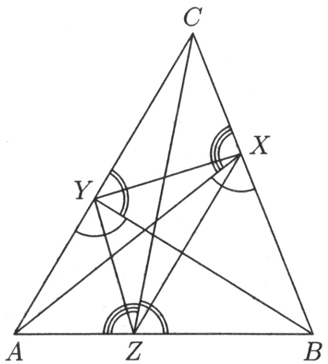
$$D=(4p)^2-4(5p^2+6p-16)=-4p^2-24p+64=-4(p+8)(p-2),$$

jsou taková p právě čísla z intervalu $(-8,2)$.

Odpověď: Maximální hodnota součtu $x_1^2+x_2^2$ (rovná 26) odpovídá jedinému číslu $p=1$.

B – S – 2

V tětivovém čtyřúhelníku $ABXY$ označme $\varphi=|\sphericalangle AXB|=|\sphericalangle AYB|$ velikost obou shodných obvodových úhlů nad společnou tětivou AB (obr. 20). Podobně označme $\psi=|\sphericalangle BZC|=|\sphericalangle BYC|$ a $\omega=|\sphericalangle CXA|=$



Obr. 20

$=|\sphericalangle CZA|$ velikosti shodných obvodových úhlů nad tětivami BC a CA v tětivových čtyřúhelnících $BCYZ$ a $CAZX$. Zapíšeme-li postupně rovnosti pro každou ze tří dvojic vyznačených sousedních úhlů ve vrcholech

X, Y a Z, dostaneme pro neznámé velikosti φ, ψ a ω soustavu tří lineárních rovnic

$$\begin{aligned}\varphi + \psi &= \pi,\\ \psi + \omega &= \pi,\\ \omega + \varphi &= \pi,\end{aligned}$$

která má jediné řešení $\varphi = \psi = \omega = \frac{1}{2}\pi$, jak snadno zjistíme např. odečtením libovolných dvou rovnic a dosazením. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Poznámka. Jsou-li naopak body X, Y a Z paty výšek trojúhelníku ABC, jsou čtyřúhelníky $ABXY$, $BCYZ$ a $CAZX$ tětivové podle Thaletovy věty.

B – S – 3

Protože pro zvolené číslo k vždy platí $18 \leqq k + 17 \leqq 34$ a mezi čísly $18, 19, \ldots, 34$ má každé z čísel $12, 13, \ldots, 17$ pouze jeden násobek (totiž dvojnásobek), libovolné číslo $m \in \{12, 13, \ldots, 17\}$ smažeme pouze při volbě jediného čísla k (při kterém $k + 17 = 2m$). Například číslo 15 smažeme pouze volbou $k = 13$, číslo 13 pouze volbou $k = 9$. Ke smazání obou čísel 15 a 13 tedy musíme někdy vybrat $k = 13$ a někdy později $k = 9$. Pak ale v okamžiku výběru čísla $k = 9$ je už smazáno jak číslo 10 (smazali jsme ho nejpozději při výběru $k = 13$), tak číslo 1 (to jsme smazali hned při prvním výběru). Při žádném dalším výběru už proto nesmažeme číslo 9, protože číslo $k + 17$ je dělitelné devíti pouze při výběrech $k = 1$ a $k = 10$. Dokázali jsme, že opakováním dané procedury nelze smazat všechna tři čísla 15, 13 a 9, tím spíše nelze smazat všechna čísla od 1 do 17.

Jiné řešení. Připusťme, že všechna čísla lze smazat po n výběrech čísla k (spojených s mazáním všech dělitelů čísla $k+17$) a že každým výběrem se něco umaže (jinak je takový výběr zbytečný). Poslední mj. znamená, že každé číslo je vybráno nejvýše jednou. Zřejmě $n > 1$ a pro poslední vybrané číslo k_n musí platit $k_n | (k_n + 17)$, tj. $k_n = 17$ (možnost $k_n = 1$ je vyloučena tím, že číslo 1 je smazáno hned při prvním výběru). Před posledním výběrem jsou na tabuli jen dělitelé čísla 34, tedy kromě čísla 17 případně číslo 2. Kdyby tam číslo 2 nebylo, muselo by opět platit $k_{n-1} \mid (k_{n-1} + 17)$, což už možné není. Proto nutně $k_{n-1} = 2$. Taková volba je ale zbytečná, protože číslo $2 + 17$ je prvočíslo.

B – II – 1

Protože číslo $4n+3$ je liché, musí být liché i číslo $7n+5$, takže číslo n musí být sudé: $n=2k$ pro vhodné celé k.

Požadovanou vlastnost lze vyjádřit takto: rozdíl $D=(7n+5)^2-(4n+3)^2$ je dělitelný číslem 100. S využitím rozkladu

$$D=\big((7n+5)-(4n+3)\big)\big((7n+5)+(4n+3)\big)=(3n+2)(11n+8)$$

po dosazení $n=2k$ dostaneme vyjádření $D=4(3k+1)(11k+4)$. Zajímá nás tedy, kdy je součin $(3k+1)(11k+4)$ dělitelný číslem 25. Oba činitelé $3k+1$ a $11k+4$ nemohou být násobky pěti zároveň, protože pro jejich největší společný dělitel vychází

$$\mathrm{nsd}(11k+4,3k+1)=\mathrm{nsd}(3k+1,2k+1)=\mathrm{nsd}(2k+1,k)=\mathrm{nsd}(k,1)=1.$$

Zjistíme proto, kdy platí $25 \mid 3k+1$ a kdy platí $25 \mid 11k+4$. Z vyjádření

$$3k+1=3(k-8)+25 \quad \text{a} \quad 11k+4=11(k-11)+125$$

vidíme, že $25 \mid 3k+1$, právě když $k=25t+8$, zatímco $25 \mid 11k+4$, právě když $k=25t+11$ (písmeno t značí v obou případech celé číslo). Hledaná čísla $n=2k$ jsou proto čísla tvarů $n=50t+16$ a $n=50t+22$, v rozmezí od 1 do 99 jsou to tudíž právě čísla 16, 22, 66 a 72.

Jiné řešení. Nejprve zjistíme poslední číslice čísel $(7n+5)^2$ a $(4n+3)^2$ v závislosti na poslední číslici čísla n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$7n+5$	5	2	9	6	3	0	7	4	1	8
$(7n+5)^2$	5	4	**1**	6	9	0	**9**	6	1	4
$4n+3$	3	7	1	5	9	3	7	1	5	9
$(4n+3)^2$	9	9	**1**	5	1	9	**9**	1	5	1

(Výpočet celé tabulky se zkrátí na polovinu, když si předem jako v předchozím řešení uvědomíme, že n musí být sudé.) Vidíme, že čísla $(7n+5)^2$ a $(4n+3)^2$ končí stejnou číslicí, právě když číslo n končí číslicí 2 nebo 6. Každé hledané $n<100$ je tedy buď tvaru $n=10a+2$, nebo tvaru $n=10a+6$, kde a je neznámá číslice. I když by stačilo otestovat všech $2\cdot 10=20$ takových čísel n, zvolíme jiný postup.

(i) Pro $n = 10a + 2$ platí

$$(7n+5)^2 = (70a+19)^2 = 4\,900a^2 + 2\,660a + 361,$$
$$(4n+3)^2 = (40a+11)^2 = 1\,600a^2 + 880a + 121.$$

Vidíme, že číslo $(7n + 5)^2$ má na místě desítek stejnou číslici, jakou má číslo $6a + 6$ na místě jednotek; číslo $(4n + 3)^2$ zase má na místě desítek stejnou číslici, jakou má číslo $8a + 2$ na místě jednotek. Hledáme tedy číslice a, pro které rozdíl $(8a+2) - (6a+6) = 2(a-2)$ končí číslicí nula; zřejmě to platí pouze pro $a = 2$ a $a = 7$, kterým odpovídají řešení $n = 22$ a $n = 72$.

(ii) Pro $n = 10a + 6$ platí

$$(7n+5)^2 = (70a+47)^2 = 4\,900a^2 + 6\,580a + 2\,209$$
$$(4n+3)^2 = (40a+27)^2 = 1\,600a^2 + 2\,160a + 729.$$

Tentokrát jsou počty desítek v těchto číslech stejné jako počty jednotek v číslech $8a$ a $6a + 2$. Rozdíl $8a - (6a + 2) = 2(a - 1)$ končí číslicí nula jedině pro $a = 1$ a $a = 6$. Odpovídající řešení jsou $n = 16$ a $n = 66$.

B – II – 2

Protože pro libovolná reálná čísla x, y jsou obě čísla $(x^2 + 1)$ a $(y^2 + 1)$ nenulová (totiž kladná), můžeme přejít k novým neznámým

$$u = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{a} \quad v = \frac{y}{y^2+1},$$

ve kterých má zřejmě původní soustava rovnic tvar

$$1 + 24uv = 0 \quad \text{a} \quad 12u + 12v + 1 = 0.$$

Odtud například pro neznámou u snadno dostaneme kvadratickou rovnici

$$24u^2 + 2u - 1 = 0$$

s kořeny $u_1 = \frac{1}{6}$ a $u_2 = -\frac{1}{4}$, kterým „symetricky“ odpovídají hodnoty $v_1 = -\frac{1}{4}$ a $v_2 = \frac{1}{6}$. Protože (kvadratické) rovnice

$$\frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{6} \quad \text{a} \quad \frac{t}{t^2+1} = -\frac{1}{4}$$

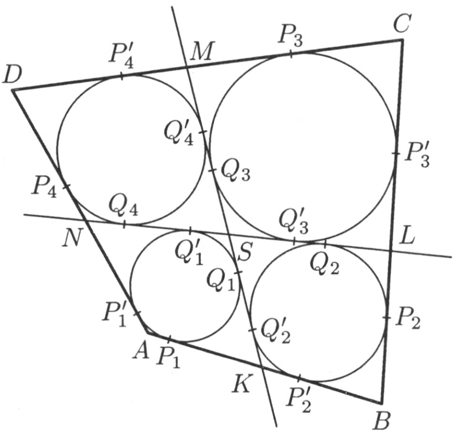
mají řešení

$$s_{1,2} = 3 \pm \sqrt{8} \quad \text{a} \quad t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3},$$

má původní soustava právě osm řešení, a to dvojice tvaru $(x, y) = \big(3 \pm \pm \sqrt{8}, -2 \pm \sqrt{3}\big)$ a $(x, y) = \big(-2 \pm \sqrt{3}, 3 \pm \sqrt{8}\big)$, kde znaménka jsou kombinována libovolně.

B – II – 3

Předpokládejme, že zmíněným čtyřem čtyřúhelníkům lze vepsat kružnice. Body dotyků těchto kružnic s příslušnými stranami čtyřúhelníků označme



Obr. 21

jako na obr. 21. Ze souměrnosti tečen sestrojených z jednoho bodu k téže kružnici plynou rovnosti

$$|AP_1| = |AP_1'|,\ |BP_2| = |BP_2'|,\ |CP_3| = |CP_3'|,\ |DP_4| = |DP_4'| \qquad (1)$$

a

$$|SQ_1| = |SQ_1'|,\ |SQ_2| = |SQ_2'|,\ |SQ_3| = |SQ_3'|,\ |SQ_4| = |SQ_4'|. \qquad (2)$$

Ze souměrnosti společných vnějších tečen dvou kružnic zase plynou rovnosti

$$\begin{aligned} &|P_1P_2'| = |Q_1'Q_2|,\ |P_2P_3'| = |Q_2'Q_3|,\\ &|P_3P_4'| = |Q_3'Q_4|,\ |P_4P_1'| = |Q_4'Q_1|. \end{aligned} \qquad (3)$$

Podle známé poučky lze konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ vepsat kružnici, právě když délky jeho stran splňují podmínku

$$|AB| + |CD| = |BC| + |DA|,$$

kterou lze s ohledem na (1) upravit do tvaru

$$|P_1P_2'| + |P_3P_4'| = |P_2P_3'| + |P_4P_1'|. \tag{4}$$

Všimněme si, že podle (2) a (3) platí rovnosti

$$\begin{aligned}
|P_1P_2'| &= |Q_1'Q_2| = |Q_1'S| + |SQ_2| = |SQ_1| + |SQ_2|,\\
|P_2P_3'| &= |Q_2'Q_3| = |Q_2'S| + |SQ_3| = |SQ_2| + |SQ_3|,\\
|P_3P_4'| &= |Q_3'Q_4| = |Q_3'S| + |SQ_4| = |SQ_3| + |SQ_4|,\\
|P_4P_1'| &= |Q_4'Q_1| = |Q_4'S| + |SQ_1| = |SQ_4| + |SQ_1|.
\end{aligned}$$

Obě strany (4) se tudíž rovnají součtu $|SQ_1| + |SQ_2| + |SQ_3| + |SQ_4|$ a důkaz je hotov.

B – II – 4

Poznamenejme nejdříve, že popsanou operaci nemá smysl provádět s dvojicí čísel (a, b) obsahující číslo nulu, neboť taková dvojice se operací nezmění.

(i) Předpokládejme nejdříve, že danou skupinu n nezáporných čísel lze rozdělit na dvě podskupiny A a B se stejným součtem čísel. Ukažme, že v tomto případě lze opakováním operace změnit všechna čísla obou skupin A a B na nuly. Obsahuje-li některá ze skupin A, B aspoň jedno kladné číslo (jinak jsme hotovi), plyne z rovnosti součtů čísel v obou skupinách, že kladné číslo existuje v obou z nich. Vyberme tedy kladné číslo $a \in A$ a kladné číslo $b \in B$ a proveďme operaci právě s těmito dvěma čísly. Je-li například $a \leqq b$ (v případě $a \geqq b$ je úvaha obdobná), změní se číslo a ve skupině A na nulu a číslo b ve skupině B na číslo $b - a$, takže se celkový součet čísel ve skupině A zmenší o a, stejně jako celkový součet čísel ve skupině B. Proto budou po provedené operaci součty čísel ve skupinách A a B opět stejné, přitom se celkový počet nul v $A \cup B$ zvětší o 1 (pokud bylo $a \neq b$) nebo o 2 (pokud bylo $a = b$). Opakováním popsané operace s kladnými čísly $a \in A$ a $b \in B$ se proto po konečném počtu kroků dostaneme do situace, kdy v žádné ze skupin A, B již nebude kladné číslo.

(ii) Předpokládejme nyní, že z dané n-tice nezáporných čísel jsme dostali vhodným opakováním operace n-tici složenou ze samých nul. Dokažme indukcí, že před provedením každé jednotlivé operace bylo možné aktuální n-tici čísel rozdělit na dvě podskupiny A a B se stejným součtem. Před provedením *poslední* operace musela mít aktuální n-tice čísel tvar $\{a, a, 0, 0, \ldots, 0\}$, takže vhodné rozdělení bylo $A = \{a\}$ a $B = \{a, 0, 0, \ldots, 0\}$. Předpokládejme nyní, že *po provedení* některé operace s čísly (a, b), $a \leqq b$, existovalo rozdělení čísel do podskupin A a B se stejným součtem, a ukažme, že i *před provedením* této operace takové rozdělení existovalo. Jistě můžeme předpokládat, že nová čísla 0 a $b - a$ nepatří do stejné z obou podskupin A a B (jinak přehodíme číslo 0 do druhé podskupiny, což nezmění součty čísel v podskupinách), nechť tedy například $0 \in A$ a $b - a \in B$. Potom číslo 0 v A zaměníme číslem a a číslo $b - a$ v B zaměníme číslem b; dostaneme tak vhodné rozdělení aktuálních čísel před uvažovanou operací.