51. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie C

In: Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Tomáš Pitner (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor); Jaroslav Zhouf (editor): 51. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2001/2002. 43. mezinárodní matematická olympiáda. 14. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2003. pp. 24–38.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405043

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

Dokažte, že existuje jediná číslice c, pro kterou lze najít jediné přirozené číslo n končící číslicí c a mající tu vlastnost, že číslo $2n + 1$ je druhou mocninou prvočísla. (*M. Koblížková*)

C – I – 2

Ve čtyřúhelníku $ABCD$ se úhlopříčky protínají v bodě P, úhlopříčka AC je rozdělena body P, N a M na čtyři shodné úseky ($|AP| = |PN| = |NM| = |MC|$) a úhlopříčka BD je rozdělena body L, K a P na čtyři shodné úseky ($|BL| = |LK| = |KP| = |PD|$). Určete poměr obsahů čtyřúhelníků $KLMN$ a $ABCD$. (*J. Zhouf*)

C – I – 3

Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, které jsou řešením nerovnice

$$\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{6}{y\sqrt{x}} < \frac{5\sqrt{y}}{y}.$$

(*J. Zhouf*)

C – I – 4

Josef se vracel z výletu. Nejdříve jel vlakem a pak pokračoval ze zastávky na kole. Celá cesta mu trvala přesně 1 hodinu 30 minut a urazil při ní vzdálenost 60 km. Vlak jel průměrnou rychlostí 50 km/h. Určete, jak dlouho jel Josef na kole, když jeho rychlost v km/h je vyjádřena přirozeným číslem stejně jako vzdálenost měřená v km, kterou na kole ujel. (*E. Kováč*)

C – I – 5

Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC dané délky a, je-li dán střed P strany AB a bod Q ($Q \neq P$), který je patou výšky z vrcholu B. (*J. Švrček*)

C – I – 6

Jistý panovník pozval na oslavu svých narozenin 28 rytířů. Každý z rytířů měl mezi ostatními právě tři nepřátele.

a) Ukažte, že panovník může rytíře rozesadit ke dvěma stolům tak, aby každý rytíř seděl u stejného stolu s nejvýše jedním nepřítelem.

b) Ukažte, že v případě libovolného takového rozesazení sedí u každého stolu nejvýše 16 rytířů.

(Nepřátelství je vzájemný vztah: Je-li A nepřítelem B, je i B nepřítelem A.) (*J. Šimša*)

C – S – 1

Do sportovního kroužku chodí 21 chlapců. Na posledních dvou schůzkách nikdo nechyběl, chlapci se pokaždé rozdělili do tří družstev po sedmi hráčích. Dokažte, že někteří tři chlapci byli obě schůzky spolu v jednom družstvu. (*J. Šimša*)

C – S – 2

V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník ABC takový, že kružnice $k(A; |AC|)$ protíná přeponu AB v jejím středu S. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku BCS je shodná s kružnicí k. (*J. Švrček*)

C – S – 3

Určete všechny dvojice prvočísel (p, q) takové, že $p > q$ a číslo $p^2 - q^2$ má nejvýše čtyři dělitele. (*P. Calábek*)

C – II – 1

Určete počet dvojic (a, b) přirozených čísel ($1 \leqq a < b \leqq 86$), pro které je součin ab dělitelný třemi. (*J. Zhouf*)

C – II – 2

Nechť kružnice sestrojené nad rameny lichoběžníku jako nad průměry mají vnější dotyk. Dokažte, že dotykový bod těchto kružnic leží na ose úhlu, který obě ramena lichoběžníku svírají. (*J. Švrček*)

C – II – 3

Najděte všechna celá čísla x, pro která jsou obě čísla $(x-3)^2 - 2$, $(x-7)^2 + 1$ prvočísla. (*J. Šimša*)

C – II – 4

V rovině jsou dány body C, V, U takové, že $|CV| = 3\,\mathrm{cm}$, $|VU| = 3{,}5\,\mathrm{cm}$ a $|CU| = 4{,}5\,\mathrm{cm}$. Sestrojte ostroúhlý trojúhelník ABC tak, aby byl V průsečík jeho výšek a bod U byl souměrně sdružený s bodem A podle středu kružnice opsané trojúhelníku ABC. (*P. Leischner*)

C – I – 1

Nechť (liché) číslo $2n+1$ je druhou mocninou prvočísla p, pak p je rovněž liché číslo. Ze vztahu $p^2 = 2n+1$ vyplývá, že $n = \frac{1}{2}(p^2-1) = \frac{1}{2}(p-1)(p+1)$. Sestavme tabulku několika prvních lichých prvočísel p a jim odpovídajících čísel n:

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
n	4	12	24	60	84	144	180	264	420	480	684	840	924

Číslo n je zřejmě sudé, dokonce je (jak prozrazuje i tabulka pro několik hodnot p) dělitelné čtyřmi. To je vidět z toho, že součin $(p-1)(p+1)$ dvou po sobě jdoucích sudých čísel je vždy dělitelný osmi. Z tabulky navíc vidíme, že se mezi číslicemi, kterými n končí vícekrát, vyskytují číslice 0 a 4, jen jednou číslice 2, nevyskytují se 6 a 8.

Podívejme se, jakou číslicí končí číslo n v závislosti na číslici a, kterou končí číslo p. Je-li $p = 10k + a$, kde k je celé nezáporné číslo a a lichá číslice, pak pro jednotlivá možná a dostaneme:

- Je-li $a = 1$, je $n = 10k(5k+1)$, takže číslo n končí číslicí 0.
- Je-li $a = 3$, je $n = 10k(5k+4)+4$, takže číslo n končí číslicí 4.
- Je-li $a = 5$, je $n = 10(5k^2+5k+1)+2$, takže číslo n končí číslicí 2.
- Je-li $a = 7$, je $n = 10(5k^2+7k+2)+4$, takže číslo n končí číslicí 4.
- Je-li $a = 9$, je $n = 10(k+1)(5k+4)$, takže číslo n končí číslicí 0.

Je-li $2n+1$ druhou mocninou lichého prvočísla (lichého čísla), může číslo n končit jedině číslicemi 0, 2, 4. Jediným kandidátem na hledanou číslici tak zůstává 2.

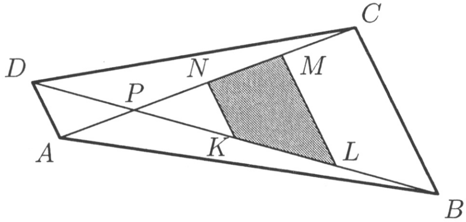
Pokud $2n+1$ je druhou mocninou prvočísla a n končí číslicí 2, prvočíslo p se dá vyjádřit ve tvaru $10k+5 = 5(2k+1)$, je tedy dělitelné pěti. Jediné prvočíslo, které je dělitelné pěti, je číslo 5.

Hledanou číslicí je tedy $c = 2$; pro ni existuje jediné přirozené číslo $n = 12$, které končí číslicí c, přičemž $2n+1$ je druhou mocninou prvočísla.

C – I – 2

Trojúhelníky APD a NPK jsou souměrně sdružené podle středu P (obr. 1), AD a NK jsou tudíž rovnoběžné a $|AD| = |NK|$. Z rovnosti příslušných úseček dále plyne, že trojúhelníky KNP, LMP a BCP jsou podobné, proto $NK \parallel ML \parallel BC$ a navíc $|LM| = 2|KN|$ a $|BC| = 3|KN|$.

Označíme-li s obsah trojúhelníku APD, je obsah trojúhelníku NKP roven s a obsah trojúhelníku MLP je $4s$ (má dvakrát větší výšku z vrcholu P než trojúhelník NKP z téhož vrcholu a jeho strana ML je dvakrát větší než strana NK). Obsah lichoběžníku $KLMN$ je proto $3s$.



Obr. 1

Strana AP trojúhelníku APD je čtyřikrát menší než strana AC trojúhelníku ACD, výšky z vrcholu D jsou v obou trojúhelnících stejné, proto je obsah trojúhelníku ACD roven $4s$. Strana PN trojúhelníku PNK je čtyřikrát menší než strana AC trojúhelníku ACB, kdežto výška trojúhelníku PNK z vrcholu K je třikrát menší než výška trojúhelníku ABC z vrcholu B, proto je obsah trojúhelníku ACB roven $12s$. Obsah čtyřúhelníku $ABCD$ je roven součtu obsahů trojúhelníků ABC a ACD, tedy $16s$.

Poměr obsahů čtyřúhelníků $KLMN$ a $ABCD$ je roven $3 : 16$.

C – I – 3

Ze zadání plyne, že x a y jsou nutně přirozená čísla. Vynásobením obou stran nerovnice kladným číslem $y\sqrt{x}$ přejdeme k ekvivalentní nerovnici

$$xy + 6 < 5\sqrt{xy}.$$

Její úpravou dostaneme

$$(\sqrt{xy} - 3)(\sqrt{xy} - 2) < 0,$$

což platí, právě když $2 < \sqrt{xy} < 3$, neboli $4/x < y < 9/x$.

Protože x a y jsou přirozená čísla, z poslední nerovnosti plyne, že stačí uvažovat jen $x < 9$. Lehce pak určíme všechny dvojice (x, y) celých čísel, které jsou řešením poslední nerovnice, a tedy i dané nerovnice, která je s ní ekvivalentní: $(1,5)$, $(1,6)$, $(1,7)$, $(1,8)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(3,2)$, $(4,2)$, $(5,1)$, $(6,1)$, $(7,1)$, a $(8,1)$.

C – I – 4

Označme v vzdálenost v kilometrech, kterou Josef ujel na kole, a r jeho rychlost v km/h. Podle zadání jsou r a v přirozená čísla a $v < 60$. Na kole jel Josef po dobu v/r h. Vlakem ujel vzdálenost $(60 - v)$ km a tuto vzdálenost ujel za $(60 - v)/50$ h. Proto podle zadání platí

$$\frac{60 - v}{50} + \frac{v}{r} = \frac{3}{2}.$$

Tato rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$50v - 15r - rv = 0,$$

kterou ještě upravíme na tvar

$$(50 - r)(v + 15) = 15 \cdot 50 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3.$$

Odtud plyne, že $50 - r$ je přirozené číslo menší než 50 a $v + 15$ přirozené číslo větší než 15, jež nepřevyšuje 75, a navíc, že součin $(50 - r)(v + 15)$ je dělitelný číslem 5^3. Mohou nastat čtyři případy.

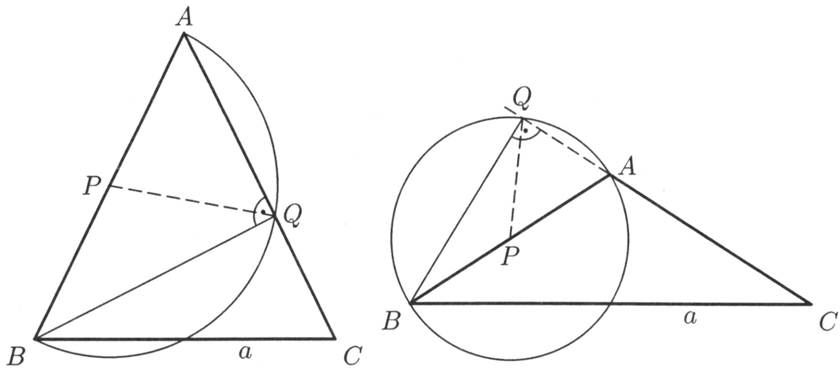
- $5^3 \mid 50 - r$. To není možné, protože $1 \leqq 50 - r < 50$.
- $5^2 \mid 50 - r$ a $5 \mid v + 15$. Číslo $50 - r$ je proto rovno 25, odtud $r = 25$ a $v = 15$.
- $5 \mid 50 - r$ a $5^2 \mid v + 15$. Číslo $v + 15$ je tudíž prvkem množiny $\{25, 50\}$, odtud dopočítáme další dvě možnosti $r = 20$, $v = 10$ a $r = 35$, $v = 35$.
- $5^3 \mid v + 15$. To není možné, protože $15 < v + 15 < 75$.

Možné časy Josefovy jízdy na kole (v minutách) proto jsou $15 \cdot 60/25 = 36$, $10 \cdot 60/20 = 30$ a $35 \cdot 60/35 = 60$.

Výčtem všech možností jsme zjistili, že pokud Josef cestoval podle zadání úlohy, pak jel na kole buď 30, nebo 36, anebo 60 minut.

C – I – 5

Úhel BQA je buď pravý, nebo $Q = A$. Proto bod Q leží na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem BA. (Na obr. 2 je znázorněn případ ostroúhlého i tupoúhlého trojúhelníku ABC.) Protože P je střed úsečky AB, je $|PQ|$ velikost poloměru této kružnice, proto velikost průměru $|AB|$ této kružnice je rovna $2|PQ|$. Trojúhelník ABC má délku ramene $2|PQ|$, a protože známe velikost základny, je tím jednoznačně určen.



Obr. 2

Odtud již plyne *konstrukce*. Nejdříve sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$ shodný s trojúhelníkem ABC o velikostech stran $|A'B'| = |A'C'| = 2|PQ|$ a $|B'C'| = a$, který potom přemístíme tak, aby se střed strany $A'B'$ zobrazil na bod P a pata výšky z vrcholu B' na bod Q. To lze provést jednoznačně až na osovou souměrnost podle přímky PQ. Pokud tedy trojúhelník $A'B'C'$ existuje, má úloha dvě řešení souměrně sdružená podle osy PQ.

Diskuse je zřejmá. Trojúhelník ABC lze setrojit právě tehdy, když lze sestrojit rovnoramenný trojúhelník $A'B'C'$, tj. když $a < 4|PQ|$ (trojúhelníkové nerovnosti), v tomto případě má úloha právě dvě (shodná) řešení. Navíc pro $a < 2\sqrt{2}|PQ|$ bude trojúhelník ABC ostroúhlý, pro $a = 2\sqrt{2}|PQ|$ pravoúhlý a pro $2\sqrt{2}|PQ| < a < 4|PQ|$ tupoúhlý. *Důkaz* správnosti plyne z rozboru úlohy.

Jiné řešení. Označme R střed strany BC, ten je zároveň patou výšky z vrcholu A. Oba body Q a R tedy leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB se středem P, proto $|PQ| = |PR| = \frac{1}{2}|AB|$. Jelikož úhel BQC je pravý, leží bod Q na Thaletově kružnici nad průměrem BC se středem R, takže $|RQ| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}a$. Trojúhelník PQR je proto podobný trojúhelníku ABC (koeficent podobnosti je $\frac{1}{2}$).

Při *konstrukci* nejdříve sestrojíme trojúhelník PQR. Na přímce rovnoběžné se střední příčkou PR procházející bodem Q najdeme bod $C \neq Q$ tak, aby $|RC| = \frac{1}{2}a$. Body A a B pak už sestrojíme snadno.

Pro dané body P, Q můžeme sestrojit třetí vrchol R trojúhelníku PQR dvěma způsoby. *Diskuse* je tedy stejná jako v předcházejícím řešení. *Důkaz* správnosti plyne z rozboru úlohy.

C – I – 6

a) Rozesaďme v prvním kole rytíře ke stolům libovolným způsobem. Označme n_1 počet nepřátel prvního rytíře u stolu, u kterého sedí, potom $n_1 \leqq 3$. Podobně označme $n_2 \leqq 3$ počet nepřátel druhého rytíře u stolu, u kterého sedí, atd. Potom pro „hladinu nepřátelství“

$$N_1 = n_1 + n_2 + \ldots + n_{28}$$

v prvním kole platí $0 \leqq N_1 \leqq 3 \cdot 28 = 54$, přičemž N_1 je celé nezáporné číslo.

Předpokládejme, že existuje rytíř, který sedí u stolu s alespoň dvěma nepřáteli. Pak ho přesadíme ke druhému stolu. Tím vznikne nové rozesazení. Zkoumejme nyní hladinu nepřátelství N_2 po tomto druhém kole.

Pokud přesazený rytíř r seděl původně u jednoho stolu se všemi třemi nepřáteli a, b, c, po jeho přesazení se počet nepřátel rytíře r u stolu, u kterého teď sedí, snížil o 3 na nulu, a počet nepřátel rytířů a, b a c u téhož stolu se snížil o jednu. Počty nepřátel zbývajících rytířů u jejich stolů se nezměnily. Tedy $N_2 = N_1 - 6$.

Pokud přesazený rytíř r seděl původně u jednoto stolu se dvěma nepřáteli a a b a byl přesazen ke stolu s nepřítelem c, po jeho přesazení se počet nepřátel rytíře r u stolu, u kterého nyní sedí, snížil o 1 ze dvou na jednoho, počet nepřátel rytířů a a b u jejich stolu se o jedna snížil, a počet nepřátel rytíře c u stolu, u kterého sedí, se zvýšil o 1. Počty nepřátel zbývajících rytířů u jejich stolů se nezměnily. V tomto případě je tedy $N_2 = N_1 - 2$.

V obou případech vychází $N_2 < N_1$.

Pokud ještě po tomto kole existuje rytíř, který sedí u jednoho stolu s alespoň dvěma svými nepřáteli, opět ho požádáme, aby si přesedl k druhému stolu. Pro hladinu nepřátelství N_3 po třetím kole bude ze stejných důvodů jako výše platit $N_3 < N_2$.

Stejným způsobem vytvoříme hladiny nepřátelství $N_4 > N_5 > \ldots$ po dalších kolech.

Protože v každém kole je hladina nepřátelství menší než v předešlém kole, je vyjádřena celým nezáporným číslem a hladina nepřátelství v prvním kole je nejvýše 54, může se taková situace opakovat nejvýše čtyřiapadesátkrát. Počet kol musí být tedy konečný a po posledním kole už neexistuje rytíř, který by seděl u jednoho stolu s alespoň dvěma nepřáteli. Tím jsme dokázali část a).

b) Předpokládejme, že rytíři jsou nyní rozesazeni u stolů A a B tak, že každý sedí u stejného stolu s nejvýše jedním nepřítelem. Označme r_A počet rytířů u stolu A a r_B počet rytířů u stolu B. Platí

$$r_A + r_B = 28. \tag{1}$$

Každý z rytířů u stolu A má u stolu B alespoň dva nepřátele a každý z rytířů stolu B je nepřítelem nejvýše tří rytířů od stolu A, proto pro počet p těch nepřátelských dvojic, jež sedí u různých stolů, platí

$$2r_A \leqq p \quad \text{a} \quad p \leqq 3r_B, \quad \text{takže } 2r_A \leqq 3r_B.$$

Dosadíme-li do této nerovnice z (1) $r_B = 28 - r_A$, dostaneme po úpravě $5r_A \leqq 84$. Vzhledem k tomu, že r_A je celé nezáporné číslo, musí platit $r_A \leqq 16$. S ohledem na symetrii situace platí analogicky $r_B \leqq 16$. Tím jsme splnili část b).

V části b) můžeme postupovat také sporem: Kdyby u stolu A sedělo aspoň 17 rytířů, měli by dohromady u stolu B aspoň $17 \cdot 2 = 34$ nepřátel, přitom každý rytíř-nepřítel je v tomto čísle započítán nejvýše třikrát. Protože $3 \cdot 11 < 34$, sedí u stolu B aspoň 12 rytířů, dohromady u obou stolů A a B je pak aspoň $17 + 12 = 29$ rytířů, což odporuje zadání.

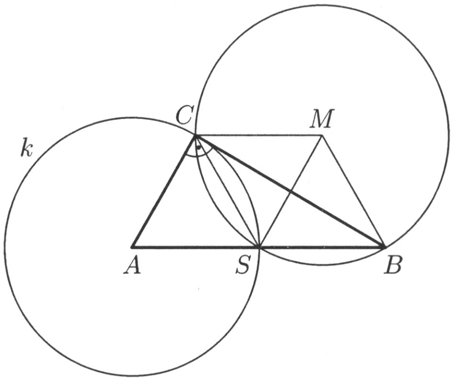
C – S – 1

Uvažujme chlapce H. Šest jeho spoluhráčů z první schůzky je na druhé schůzce rozděleno do tří družstev. Pak jsou buď tři z nich v jednom družstvu, nebo jsou v těchto třech družstvech rozděleni po dvou. Chlapec H je však také členem některého z těchto družstev, a tedy v tomto družstvu se opět nachází trojice spoluhráčů z první schůzky.

Jiné řešení. Označme A, B, C družstva sestavená na první schůzce, D, E, F družstva sestavená na druhé schůzce. Podle zařazení do družstev jsou jednotliví chlapci nejvýše devíti různých typů AD, AE, AF, BD, BE, BF, CD, CE, CF. Kdyby každého typu byli nejvýše dva chlapci, bylo by na schůzkách nejvýše $2 \cdot 9 = 18$ chlapců, což je spor s tím, že jich do kroužku chodí 21. Proto alespoň jednoho typu jsou alespoň tři chlapci, a to je hledaná trojice chlapců.

C – S – 2

Střed přepony S pravoúhlého trojúhelníku ABC je podle Thaletovy věty středem kružnice opsané tomuto trojúhelníku, platí tedy $|CS| = |AS| = |BS|$ (obr. 3). Jelikož body C a S leží na kružnici k, platí $|AS| = |AC|$, je proto trojúhelník ASC rovnostranný a velikost úhlu CSB je rovna $120°$.



Obr. 3

Je-li M střed kružnice opsané trojúhelníku BCS, platí $|CM| = |SM| = |BM|$, a protože $|CS| = |BS|$, jsou CMS a SMB shodné rovnoramenné trojúhelníky se základnami CS a BS. Velikost úhlu CSB je součtem velikostí shodných úhlů CSM a MSB, je proto velikost úhlu MSB rovna $\frac{1}{2} \cdot 120° = 60°$. Trojúhelník MSB je tedy rovnostranný a platí $|MS| = |BS|$.

Poloměr kružnice opsané trojúhelníku CSB je roven $|MS| = |BS| = |AS|$, což je poloměr kružnice k. Kružnice opsaná trojúhelníku BCS a kružnice k mají stejné poloměry, jsou tedy shodné. Tím je důkaz ukončen.

Poznámka: Po zjištění, že ASC je rovnostranný trojúhelník, je možno dokončit řešení i takto: je-li D bod souměrně sdružený s bodem A podle středu C, je trojúhelník ABC „polovinou" rovnostranného trojúhelníku ABD, takže střed M jeho strany BD má od bodů B, S, C stejnou vzdálenost rovnou $\frac{1}{2}|AB|$.

C – S – 3

Číslo 1 má právě jednoho dělitele 1. Určeme dále všechna přirozená čísla $a \neq 1$, která mají nejvýše čtyři dělitele. Takové číslo a má dva triviální dělitele 1 a a, proto může mít nejvýše další dva netriviální dělitele, takže je dělitelné nejvýše dvěma prvočísly. Je-li číslo a dělitelné dvěma různými prvočísly p_1 a p_2, je dělitelné i jejich součinem p_1p_2, vzhledem k uspořádání dělitelů čísla a musí tehdy být $a = p_1p_2$. Je-li číslo a dělitelné právě jedním prvočíslem p_1, platí $a = p_1^k$, kde k je přirozené číslo. Jeho netriviálními děliteli jsou čísla $p_1, p_1^2, \ldots, p_1^{k-1}$, proto $k \leqq 3$.

Nejvýše čtyři dělitele tedy mají pouze číslo 1 a čísla tvaru p_1, p_1^2, p_1^3 a p_1p_2, kde p_1 a p_2 jsou různá prvočísla.

Nechť $p > q$ jsou prvočísla a číslo $a = p^2 - q^2 = (p-q)(p+q)$ má nejvýše čtyři dělitele. Pak platí $1 \leqq p - q < p + q \leqq a$. Rozlišíme následující případy:

1. $p - q = 1$. Rozdíl prvočísel p, q je liché číslo, proto jedno z nich je sudé a druhé se liší o 1. Tedy $p = 3$, $q = 2$ a číslo $a = 3^2 - 2^2 = 5$ má dva dělitele 1 a 5.
2. $p - q > 1$. Číslo a má právě čtyři různé dělitele $1, p-q, p+q, a$, proto vzhledem k úvodní úvaze mohou nastat dvě možnosti:
   a) $p - q$ je prvočíslo p_1 a $p + q$ je p_1^2. Pak ovšem p_1 dělí $p_1^2 + p_1 = p + q + (p - q) = 2p$, přitom p je prvočíslo, takže $p_1 = p$ nebo $p_1 = 2$. Rovností $p - q = p_1$ je však možnost $p_1 = p$ vyloučena, proto musí platit $p_1 = 2$. Ze soustavy $p - q = 2$, $p + q = 4$ ovšem plyne $q = 1$, což není prvočíslo.
   b) $p - q$ je prvočíslo p_1 a $p + q$ je prvočíslo p_2. Protože $p_2 > p_1$, je prvočíslo p_2 liché. Odtud plyne $q = 2$, jinak by číslo p_2 bylo součtem dvou lichých prvočísel p a q, tedy číslo sudé. Tři prvočísla $p_1 = p - 2$, p a $p_2 = p + 2$ dávají různé zbytky při dělení třemi, takže jedno z nich je rovno 3. Z $p = 3$ ovšem plyne $p_1 = 1$, z $p_2 = 3$ zase $p = 1$, zbývá proto možnost $p_1 = 3$, tedy $p = 5$. Číslo $a = 5^2 - 2^2 = 21$ má právě čtyři dělitele 1, 3, 7, 21.

Všechny dvojice prvočísel (p, q) vyhovující zadání úlohy jsou dvojice $(3, 2)$ a $(5, 2)$.

Jiné řešení. Vysvětlíme nejdříve, proč $q = 2$. Připusťme naopak, že $q > 2$. Pak obě prvočísla p a q jsou lichá, takže $(p-q)$ a $(p+q)$ jsou dvě různá sudá čísla, tudíž jejich součin $p^2 - q^2$ je číslo tvaru $4k$, kde $k \geqq 2$. Takové číslo ale má čtyři dělitele $1, 2, 4$ a $4k$, proto se jeho dělitel $2k$ musí rovnat číslu 4. Platí tedy $(p-q)(p+q)=8$, odkud $p-q=2$ a $p+q=4$, takže $q=1$, a to je spor. Rovnost $q=2$ je dokázána.

Hledáme tedy všechna prvočísla $p>2$, pro která má číslo p^2-4 nejvýše čtyři dělitele. Snadno se přesvědčíme, že vyhovuje $p=3$ i $p=5$. V případě $p \geqq 7$ je ovšem jedno z čísel $p+2$, $p-2$ dělitelné třemi (podle toho, zda prvočíslo p dává při dělení třemi zbytek 1 nebo 2), takže číslo p^2-4 má pět různých dělitelů 1, 3, $p-2$, $p+2$ a p^2-4.

Úloze tedy vyhovují dvě dvojice prvočísel (p,q): $(3,2)$ a $(5,2)$.

C – II – 1

Nejprve spočteme, kolik je všech dvojic čísel takových, že $1 \leqq a < b \leqq 86$, a pak od tohoto počtu odečteme počet těch dvojic, pro něž součin ab není třemi dělitelný.

Označme C množinu všech přirozených čísel nejvýše rovných 86,

$$\mathsf{C}=\{1,2,\ldots,86\}.$$

Množina C má celkem 86 prvků. Číslo a z ní můžeme vybrat 86 způsoby a ke každému takto vybranému číslu a existuje 85 čísel $b \in \mathsf{C}$ různých od a. Proto počet všech uspořádaných dvojic (a,b) přirozených čísel $(1 \leqq a \neq b \leqq 86)$ je roven $86 \cdot 85$. Tuto množinu můžeme rozdělit na páry uspořádaných dvojic (a,b) a (b,a), proto právě pro polovinu dvojic platí $a<b$ (druhou polovinu tvoří dvojice, v nichž $a>b$). Počet všech dvojic (a,b) přirozených čísel takových, že $1 \leqq a < b \leqq 86$, je tedy roven $\frac{1}{2}\cdot 86\cdot 85 = 3\,655$. (Je to zároveň počet všech *neuspořádaných* dvojic přirozených čísel z množiny C, což je kombinační číslo $\binom{86}{2}=3\,655$.)

Součin ab je dělitelný třemi, právě když je aspoň jeden z činitelů a, b dělitelný třemi. Protože mezi čísly z množiny C je právě 28 čísel dělitelných třemi, je v C právě $86-28=58$ čísel, jež nejsou dělitelná třemi. Celkem tedy můžeme sestavit $\frac{1}{2}\cdot 58\cdot 57 = 1\,653$ dvojic různých přirozených čísel (a,b) takových, že $1 \leqq a < b \leqq 86$, a přitom součin ab není dělitelný třemi.

Počet všech dvojic (a,b) přirozených čísel $(1 \leqq a < b \leqq 86)$, pro které je součin ab dělitelný třemi, je roven $3\,655 - 1\,653 = 2\,002$.

Jiné řešení. Označme A, resp. B množinu všech těch dvojic (a,b) $(1 \leqq a < b \leqq 86)$, ve kterých je číslo a, resp. b dělitelné třemi. Mezi čísly v množině $\mathsf{C}=\{1,2,\ldots,86\}$ existuje 28 čísel dělitelných třemi (jsou to čísla $3,6,9,\ldots,84$). Ke každému číslu $a \in \mathsf{C}$ existuje $86-a$ čísel $b \in \mathsf{C}$

takových, že $a < b$. Proto počet všech prvků množiny A je roven

$$
\begin{aligned}
(86-3)&+(86-6)+(86-9)+\ldots+(86-84)= \\
&=28\cdot 86-3\cdot(1+2+3+\ldots+28)= \\
&=28\cdot 86-3\cdot\frac{1}{2}\big((1+28)+(2+27)+(3+26)+\ldots+(28+1)\big)= \\
&=28\cdot 86-3\cdot\frac{1}{2}\cdot 29\cdot 28=2\,408-1\,218=1\,190.
\end{aligned}
$$

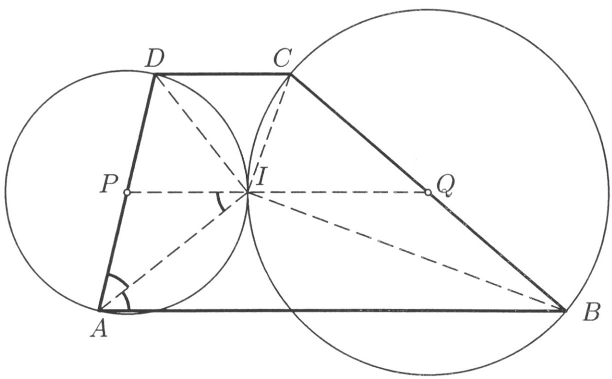
Ke každému číslu $b \in \mathsf{C}$ existuje $b-1$ čísel $a \in \mathsf{C}$ takových, že $a < b$. Proto počet všech prvků množiny B je roven

$$
\begin{aligned}
(3-1)+(6-1)+(9-1)+\ldots+(84-1)&= \\
=3\cdot(1+2+\ldots+28)-28&=1\,218-28=1\,190.
\end{aligned}
$$

Průnik množin A a B obsahuje takové dvojice čísel (a,b), v nichž jsou obě složky a i b dělitelné třemi, přičemž $a < b$. Těchto dvojic je podle úvahy z úvodního řešení $\frac{1}{2}\cdot 28\cdot 27 = 378$. Počet prvků sjednocení množin A a B, tj. počet všech dvojic (a,b) přirozených čísel $(1 \leqq a < b \leqq 86)$, pro které je součin ab dělitelný třemi, je roven součtu prvků množin A a B zmenšený o počet prvků jejich průniku, tj. $1\,190 + 1\,190 - 378 = 2\,002$.

C – II – 2

Nechť $ABCD$ je takový lichoběžník se základnami AB a CD (obr. 4). Označme P střed ramene AD, Q střed ramene BC a I dotykový bod



Obr. 4

kružnic sestrojených nad rameny jako průměry. Bod P je středem kružnice sestrojené nad ramenem AD, proto jsou úsečky PA a PI shodné a API je rovnoramenný trojúhelník se základnou AI. Odtud plyne, že úhly PAI a AIP jsou shodné. Protože bod dotyku dvou kružnic leží na středné těchto kružnic, je I bodem střední příčky PQ lichoběžníku $ABCD$, která je rovnoběžná s jeho základnami. Úhly PIA a IAB jsou střídavé a mají proto stejnou velikost. Tedy úhly PAI a IAB jsou shodné a AI je osou úhlu DAB. Bod I leží na ose tohoto úhlu, proto má stejnou vzdálenost od jeho ramen AD a AB. Podobně se ukáže, že IB je osou úhlu ABC a bod I má stejnou vzdálenost od přímek AB a BC. Odtud již plyne, že bod I má stejnou vzdálenost od ramen AD a BC, a leží proto na ose úhlu, který tato ramena svírají.

C – II – 3

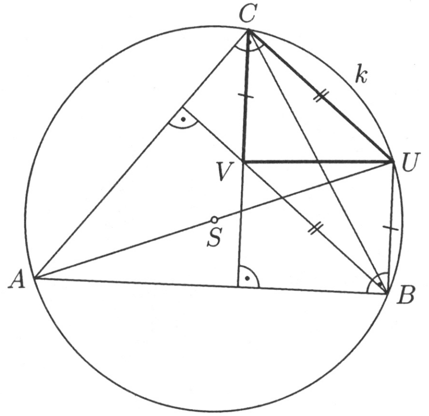
Obě čísla 3 a 7 jsou lichá, proto pro libovolné celé číslo x mají čísla $x-3$ a $x-7$ (a tedy i čísla $(x-3)^2$ a $(x-7)^2$) stejnou paritu. Čísla -2 a 1 mají různou paritu, proto čísla $(x-3)^2-2$, $(x-7)^2+1$ mají různou paritu, jedno z nich je tedy sudé. Protože jediné sudé prvočíslo je číslo 2, je jedno z čísel $(x-3)^2-2$, $(x-7)^2+1$ rovno 2.

a) Nechť $(x-3)^2-2=2$. Potom $(x-3)^2=4$, tj. $x=5$ nebo $x=1$. Pro $x=5$ je hodnota výrazu $(x-7)^2+1$ rovna 5, což je prvočíslo, pro $x=1$ je hodnota tohoto výrazu rovna 37, což je také prvočíslo.

b) Nechť $(x-7)^2+1=2$. Potom $(x-7)^2=1$, tj. $x=8$ nebo $x=6$. Pro $x=8$ je hodnota výrazu $(x-3)^2-2$ rovna 23, což je prvočíslo, pro $x=6$ je hodnota tohoto výrazu rovna 7, což je také prvočíslo. Hledanými celými čísly x jsou všechny prvky množiny $\{1,5,6,8\}$.

C – II – 4

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, S střed kružnice k jemu opsané a V průsečík jeho výšek (obr. 5). Nechť U je bod souměrně sdružený s bodem A podle S. Bod U leží na kružnici k uvnitř toho oblouku BC, který neobsahuje bod A. Úsečka AU je průměrem kružnice k, proto podle Thaletovy věty jsou úhly UCA a UBA pravé. Jelikož výška BV je kolmá na stranu AC trojúhelníku ABC, jsou úsečky BV a UC rovnoběžné. Z podobného důvodu jsou rovnoběžné i úsečky CV a UB, takže $BUCV$ je rovnoběžník. Úsečky BC a UV mají tudíž společný střed.



Obr. 5

Odtud již plyne konstrukce. Sestrojíme bod B souměrně sdružený s bodem C podle středu úsečky UV. Bod A pak určíme jako průsečík kolmice k přímce BU procházející bodem B a kolmice k přímce CU procházející bodem C.

Ukažme nyní, že takto sestrojený trojúhelník ABC má všechny požadované vlastnosti. Bod B je sestrojen tak, že platí $BV \parallel UC$ a $CV \parallel UB$. Bod A je sestrojen tak, že platí $AB \perp UB$ a $AC \perp UC$, což znamená, že body B a C leží na Thaletově kružnici nad průměrem AU. Body A a U jsou tudíž souměrně sdružené podle středu této kružnice, která je opsána trojúhelníku ABC. Ze vztahů $AC \perp UC$ a $BV \parallel UC$ plyne $BV \perp AC$, takže bod V leží na výšce z vrcholu B ke straně AC sestrojeného trojúhelníku. Podobně ze vztahů $AB \perp UB$ a $CV \parallel UB$ plyne, že bod V leží na výšce z vrcholu C ke straně AB. Bod V je tedy průsečík výšek trojúhelníku ABC.

Úloha má za daných podmínek právě jedno řešení.