Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Řešte v oboru kladných čísel soustavu rovnic

$$3x + y_{10} = 598{,}6,$$
$$x_{10} + 2y = 723{,}4,$$

v níž x_{10} a y_{10} označují po řadě čísla x a y zaokrouhlená na desítky.

(*S. Bednářová*)

B – I – 2

Na povrchu krychle $ABCDEFGH$ je sestrojena lomená čára složená ze čtyř shodných úseček ve stěnách $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$ a $GHEF$, která vychází z vrcholu A a končí ve vrcholu E. Určete, v jakém poměru dělí tato lomená čára hranu CG. (*J. Zhouf*)

B – I – 3

Do každého pole čtvercové tabulky $n \times n$ vepíšeme jedno z čísel $1, 2, \ldots, n$ tak, aby v každém řádku i v každém sloupci byla buď všechna čísla stejná, nebo všechna různá. Příkladem pro $n = 5$ je následující tabulka

5	4	1	2	3
3	3	3	3	3
4	1	2	5	3
1	2	5	4	3
2	5	4	1	3

Označme S součet všech čísel tabulky. Kolik různých hodnot S pro dané n existuje? (*J. Šimša*)

B – I – 4

Nechť k je kružnice opsaná trojúhelníku ABC, D je průsečík těžnice na stranu AB s kružnicí k. Tečny ke kružnici k v bodech A, B, C, D vytvářejí čtyřúhelník $PQRS$. Zjistěte, pro které trojúhelníky ABC je čtyřúhelník $PQRS$ tětivový. (*J. Földes*)

B – I – 5

Určete všechny polynomy P, které pro každé reálné číslo x splňují rovnost

$$P(2x) = 8P(x) + (x-2)^2.$$

(*P. Černek*)

B – I – 6

Sestrojte trojúhelník ABC s obsahem $18\,\mathrm{cm}^2$ a následující vlastností: obvod každého pravoúhelníku $KLMN$, jehož vrcholy K, L leží na úsečce BC a body M, N po řadě na úsečkách AC, AB, je roven třem pětinám obvodu trojúhelníku ABC. (*S. Bednářová*)

B – S – 1

Najděte všechna trojmístná čísla n, jejichž druhá mocnina končí stejným trojčíslím jako druhá mocnina čísla $3n-2$. (*J. Šimša*)

B – S – 2

Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Označme E průsečík přímek BC a AD. Leží-li průsečík úhlopříček AC a BD na ose úhlu AEB, je trojúhelník ABE rovnoramenný. Dokažte. (*E. Kováč*)

B – S – 3

Určete mnohočleny P a Q takové, že pro všechna reálná čísla x platí

$$Q(x^2) = (x+1)^4 - x\big(P(x)\big)^2.$$

(*P. Černek*)

B - II - 1

Určete všechna reálná čísla p taková, že pro libovolná kladná čísla x, y platí nerovnost

$$\frac{x^3 + py^3}{x + y} \geqq xy.$$

(J. Bábeľa)

B - II - 2

Je dán trojúhelník ABC. Sestrojte rovnoběžník $KLMN$ tak, aby jeho vrcholy K a L ležely na straně AB, vrchol M na straně BC, vrchol N na straně AC a aby trojúhelníky AKN, LBM a NMC měly stejné obsahy.

(J. Šimša)

B - II - 3

Určete všechna přirozená čísla n, pro která je podíl

$$\frac{(n^2)_{10}}{(n_{10})^2}$$

celé číslo. Zápis z_{10} značí číslo, které vznikne zaokrouhlením čísla z na desítky. *(S. Bednářová)*

B - II - 4

Najděte všechny ostroúhlé trojúhelníky ABC, jejichž těžiště T splývá s průsečíkem výšek trojúhelníku PQR, přičemž body P, Q, R jsou po řadě průsečíky polopřímek opačných k polopřímkám TA, TB, TC s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC. *(J. Főldes)*

B - I - 1

Nechť

$$x = x_{10} + m, \quad y = y_{10} + n, \quad -5 \leqq m, n \leqq 5, \tag{1}$$

$$a = 3x_{10} + y_{10}, \quad b = x_{10} + 2y_{10}. \tag{2}$$

Čísla a, b jsou násobky deseti a původní soustavu rovnic můžeme přepsat ve tvaru

$$a = 598{,}6 - 3m, \qquad b = 723{,}4 - 2n. \tag{3}$$

Čísla m, n jsou z intervalu $\langle -5, 5)$, proto $a \in \{590, 600, 610\}$ a $b \in$ $\in \{720, 730\}$. Dále ze (2) dostáváme

$$x_{10} = \tfrac{1}{5}(2a - b), \qquad y_{10} = \tfrac{1}{5}(3b - a). \tag{4}$$

Vidíme, že čísla $2a - b$ a $3b - a$ musejí být dělitelná padesáti, a proto přicházejí v úvahu jen dvojice $[a, b] = [590, 730]$, $[a, b] = [610, 720]$. Nalezené hodnoty čísel a, b postupně dosadíme do (4) a (3). Pomocí (1) určíme x a y:

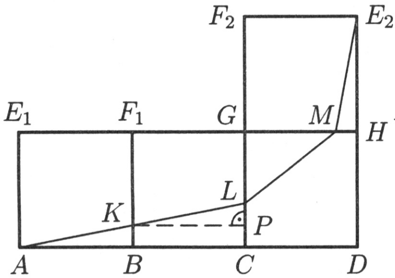
V prvním případě je $x_{10} = 90$, $y_{10} = 320$, $m = \frac{43}{15}$, $n = -3{,}3$, $x =$ $= \frac{1\,393}{15} = 92{,}8\overline{6}$ a $y = 316{,}7$, ve druhém $x_{10} = 100$, $y_{10} = 310$, $m = -3{,}8$, $n = 1{,}7$, $x = 96{,}2$ a $y = 311{,}7$.

B - I - 2

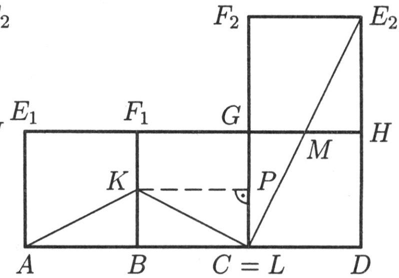
Označme K, L, M body dané lomené čáry, jež po řadě leží na úsečkách BF, CG, GH. Délku hrany krychle položme rovnu jedné a patu kolmice z bodu K na hranu CG označme P (obr. 6). Pravoúhlé trojúhelníky AKB, KLP a EMH se shodují v přeponách AK, KL a EM a v jednotkových odvěsnách AB, KP a EH. Jsou tedy podle věty Ssu shodné a platí $|BK| = |LP| = |MH| = u$. Z pravoúhlých trojúhelníků LMG a ABK ($|GL| = 1 - 2u$, $|GM| = 1 - u$) vyjádříme pomocí Pythagorovy věty druhé mocniny délek jejich přepon a porovnáme je: $1 + u^2 = (1 - u)^2 + (1 - 2u)^2$.

Rovnice má jediný kořen menší než 1: $u = \frac{1}{4}\left(3 - \sqrt{5}\right)$. Poměr $|CL|$: : $|LG| = 2u : (1 - 2u) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$ je roven poměru zlatého řezu.

Pro polohu bodu L na hraně CG je ještě jedna možnost, znázorněná na stejné části sítě krychle na obr. 7. Zřejmě jsou pak body C a L totožné



Obr. 6



Obr. 7

a $u = |BK| = |GM| = |MH| = \frac{1}{2}$, přičemž poměr $|CL| : |LG|$ vyjde nulový.

B – I – 3

Podle způsobu obsazení řádků rozdělíme všechny zkoumané tabulky do tří skupin:

(a) V žádném řádku tabulky není n stejných čísel. Sčítáním čísel po řádcích v této situaci zjistíme, že

$$S = n(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{1}{2}n^2(n + 1). \tag{5}$$

(b) V právě jednom řádku tabulky je n stejných čísel a. V každém z ostatních řádků jsou čísla 1, 2, …, n, takže $S = na + (n - 1)(1 + 2 + \ldots + n)$ a po úpravě

$$S = na + \frac{1}{2}n(n^2 - 1), \quad a \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{6}$$

(c) V některém řádku tabulky je n stejných čísel b a v jiném n stejných čísel c. Pokud je $b = c$, vyskytuje se číslo c v každém sloupci aspoň dvakrát, a tedy právě n-krát. V tom případě platí

$$S = n^2c, \qquad c \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{7}$$

Pokud jsou b, c různá čísla, jsou i v každém sloupci tabulky dvě různá čísla, a tedy jsou v něm všechna čísla navzájem různá. Sčítáním po sloupcích zjistíme, že součet S má hodnotu (5).

Dosazením daného n a postupně všech možných hodnot čísel a, c do vztahů (5), (6) a (7) dostaneme celkem $2n+1$ součtů, z toho n součtů typu (6) je navzájem různých a n součtů typu (7) je navzájem různých. Musíme tedy ještě vyšetřit, zda není možná pro nějaké hodnoty čísel a, c rovnost součtů (5) a (6), nebo (5) a (7), nebo (6) a (7).

V prvém případě z rovnice $\frac{1}{2}n^2(n+1) = na + \frac{1}{2}n(n^2-1)$ zjistíme, že rovnost nastane pro $a = \frac{1}{2}(n+1)$, to znamená, jen když n je liché.

Ve druhém případě dojdeme analogicky k závěru, že (5) a (7) se rovnají opět jen pro n liché a $c = \frac{1}{2}(n+1)$.

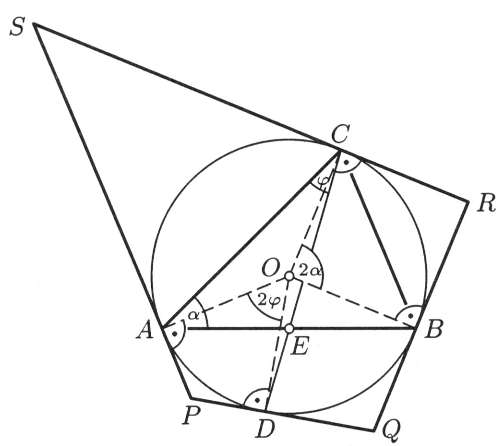
Ve třetím případě upravíme rovnici $na + \frac{1}{2}n(n^2-1) = n^2c$ na tvar $2a-1 = n(2c-n)$, z něhož plyne, že pokud taková dvě čísla $a, c \in \{1, 2, \dots, n\}$ existují, je číslo n nutně liché a číslo $2a-1$ je jeho násobkem. Je však $2a-1 \leqq 2n-1$, proto může být jedině $2a-1 = n$ a $2c-n=1$. Odtud $a = \frac{1}{2}(n+1) = c$.

Shrnutím všech tří situací můžeme konstatovat, že pro n sudé je všech $2n+1$ součtů S různých, kdežto pro n liché se mezi těmito součty vyskytují právě tři stejné.

Odpověď: Součet S všech čísel tabulky nabývá buď $2n+1$ hodnot (když n je sudé), nebo $2n-1$ hodnot (když n je liché).

B – I – 4

Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Při označení podle obr. 8 jsou úhly PAO a PDO pravé a velikost středového úhlu AOD



Obr. 8

je dvojnásobkem velikosti příslušného obvodového úhlu ACD. Ve čtyřúhelníku $APDO$ je tedy $|\sphericalangle APD| = 180° - 2|\sphericalangle ACD|$. Analogicky $|\sphericalangle BRC| = 180° - 2|\sphericalangle BAC|$. Čtyřúhelník $PQRS$ je tětivový, právě když $|\sphericalangle SPQ| + |\sphericalangle SRQ| = 180°$, tj. $180° - 2|\sphericalangle ACD| + 180° - 2|\sphericalangle BAC| = 180°$. Odtud vychází pro to, aby čtyřúhelník $PQRS$ byl tětivový, nutná a postačující podmínka $|\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle BAC| = 90°$. Při označení podle obr. 8 to znamená $|\sphericalangle ACE| + |\sphericalangle EAC| = 90°$, tj. těžnice CE je kolmá na AB, jak je vidět z trojúhelníku ACE. Je tedy $|AC| = |BC|$, protože trojúhelníky AEC a BEC jsou shodné podle věty *sus*.

Závěr: Čtyřúhelník $PQRS$ je tětivový jen tehdy, je-li trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB.

B – I – 5

Stupeň polynomu P je aspoň dva. Nechť nejprve $P(x) = ax^2 + bx + c$. Dosazením tohoto vyjádření do vztahu v zadání dostáváme

$$4ax^2 + 2bx + c = (8a + 1)x^2 + (8b - 4)x + 8c + 4.$$

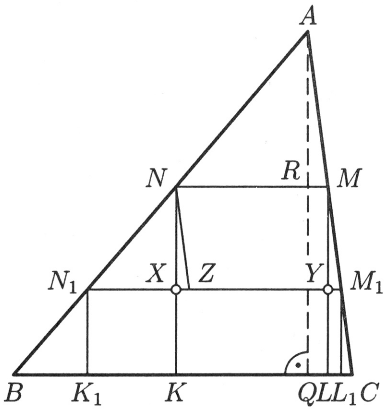
Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x na levé a pravé straně dostaneme $4a = 8a + 1$, $2b = 8b - 4$ a $c = 8c + 4$. Odtud $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = -\frac{4}{7}$.

Je-li dále stupeň n polynomu P větší než dva, zjistíme analogicky, že jeho člen $a_n x^n$ s nejvyšší mocninou x splňuje vztah $2^n a_n = 8a_n$, tedy $n = 3$, přičemž $a_n \neq 0$ je libovolné. Koeficienty mnohočlenu P u mocnin x^2, x^1 a x^0 vyjdou stejně jako v předchozí situaci.

Závěr: Úloze vyhovují všechny mnohočleny $P(x) = ax^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{7}$, kde a je libovolné reálné číslo.

B – I – 6

Uvažujme dva pravoúhelníky $KLMN$, $K_1L_1M_1N_1$ vepsané do trojúhelníku ABC uvedeným způsobem. Nechť $|KL| < |K_1L_1|$. Označme Z průsečík rovnoběžky s AC vedené bodem N s úsečkou N_1M_1, Q patu výšky z vrcholu A na stranu BC a X, Y průsečíky hranice pravoúhelníku $KLMN$ s úsečkou N_1M_1 (obr. 9). Obvody obou pravoúhelníků jsou si rovny, právě když $|N_1X| + |YM_1| = |NX|$. To je ekvivalentní s podmínkou $|NX| = |N_1Z|$, neboť $|XZ| = |YM_1|$. Trojúhelníky BCA, N_1ZN i NMA si jsou podobné, proto $a = v_a$. A protože $S = a \cdot \frac{1}{2}v_a = 18\,\mathrm{cm}^2$, plyne odtud rovnost $a = v_a = 6\,\mathrm{cm}$.



Obr. 9

Obvod pravoúhelníku $KLMN$ je $2|NM|+2|KN| = 2|AR|+2|RQ| = 2v_a = 2a = 12\,\mathrm{cm}$. Obvod $2s$ trojúhelníku ABC je proto $\frac{5}{3} \cdot 12\,\mathrm{cm} = 20\,\mathrm{cm}$. Odtud $b + c = 2s - a = 14\,\mathrm{cm}$.

Máme tedy sestrojit trojúhelník ABC, je-li dáno a, v_a, $b + c$.

Uvedeme několik postupů řešení.

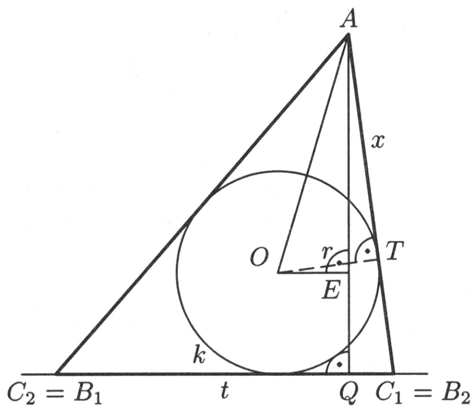
1. možnost: Snadno vypočteme $s = 10$ (cm), $s - a = 4$, $s - b = 10 - b$, $s - c = b - 4$. Po dosazení do Heronova vzorce pro obsah trojúhelníku ABC dostaneme $\sqrt{40 \cdot (10 - b) \cdot (b - 4)} = 18$, což vede po úpravě na kvadratickou rovnici $10b^2 - 140b + 481 = 0$. Jejím řešením obdržíme

$$b = 7 + \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad c = 7 - \frac{3}{\sqrt{10}}, \qquad \text{nebo} \quad b = 7 - \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad c = 7 + \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

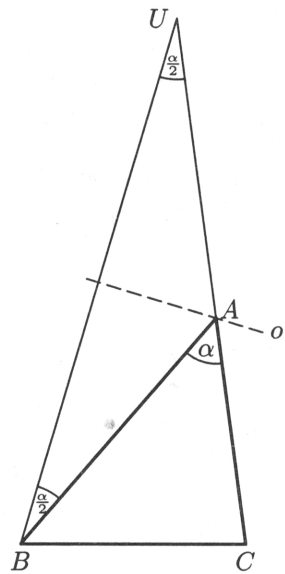
Obě řešení vyhovují a snadno je ze známých délek stran sestrojíme. Délku $d = 3/\sqrt{10}$ nalezneme eukleidovsky jako čtvrtou geometrickou úměrnou tak, že vztah přepíšeme na tvar $d : 1 = 3 : \sqrt{10}$. Nejdříve ovšem sestrojíme $\sqrt{10}$ např. pomocí Eukleidovy věty o výšce.

2. možnost: Nechť $k(O, r)$ je kružnice vepsaná trojúhelníku ABC a T její bod dotyku se stranou AC (obr. 10). Pravoúhlý trojúhelník AOT můžeme sestrojit, neboť známe délky jeho odvěsen $|AT| = x = s - a = 4\,\mathrm{cm}$, $|TO| = r = S/s = 1{,}8\,\mathrm{cm}$, dále kružnici $k(O, r)$ a nad přeponou AO ještě jeden pravoúhlý trojúhelník s odvěsnou AE délky $v_a - r = 4{,}2\,\mathrm{cm}$. (Tento trojúhelník zřejmě existuje — výpočtem délky přepony trojúhelníku AOT pomocí Pythagorovy věty lze ověřit, že $|AO| > v_a - r$.)

Úsečku AE doplníme podle obrázku na úsečku AQ délky v_a. Kolmice na AQ v bodě Q je přímka t. Její průsečíky s tečnami z bodu A ke kružnici k jsou hledané vrcholy B, C. Úloha má dvě řešení. Vzhledem k jednoznačně sestrojenému trojúhelníku AOT nalezneme sice konstrukcí pomocí Thaletovy věty dva trojúhelníky AOE a AOE_1, každý z výsledných trojúhelníků AB_kC_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ se však v souhlasně označených prvcích shoduje s některým z překrývajících se trojúhelníků AB_1C_1, AB_2C_2 na obr. 10.



Obr. 10



Obr. 11

3. možnost: Úsečka CU na obr. 11 má délku $b + c$. Trojúhelník UBA je tedy rovnoramenný se základnou UB, a proto $|\sphericalangle BUC| = \frac{1}{2}\alpha$. Tento úhel umíme sestrojit podle předchozího postupu, neboť je to úhel OAT na obr. 10. Sestrojíme tedy nejprve trojúhelník CUB, ve kterém známe $|BC|$, $|CU|$ a $|\sphericalangle CUB|$. Bod A je pak průsečík úsečky CU s osou strany BU. Konstrukce vede opět na dvě řešení.

B – S – 1

Jestliže číslo n vyhovuje podmínce úlohy, existuje přirozené číslo k takové, že

$$(3n - 2)^2 - n^2 = 1\,000k.$$

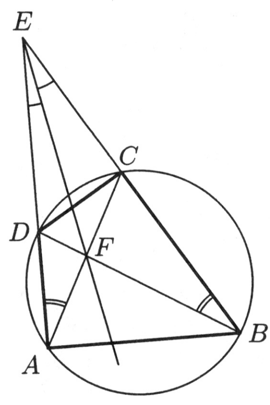
Levou stranu uvedené rovnosti rozložíme na součin podle vzorce pro rozdíl čtverců a po snadné úpravě dostaneme

$$(2n-1)(n-1) = 250k = 2 \cdot 5^3 \cdot k.$$

Čísla $2n-1$ a $n-1$ jsou nesoudělná (je $2n-1 = 2(n-1)+1$), přitom první z nich je liché, takže druhé musí být sudé. Hledáme tedy *lichá* trojmístná čísla n taková, že buď $n-1$ je násobkem 250, nebo $2n-1$ je lichým násobkem čísla 125. V prvním případě dostaneme $n \in \{251, 501, 751\}$ a ve druhém vidíme, že musí být $2n-1 \in \{375, 625, 875, 1\,125, 1\,375, 1\,625, 1\,875\}$, tedy (protože n je liché) $n \in \{313, 563, 813\}$. Celkem má úloha uvedených šest řešení.

B – S – 2

Označme F průsečík úhlopříček AC a BD (obr. 12). Jestliže je přímka EF osou úhlu AEB, jsou úhly AEF a BEF shodné. Navíc jsou



Obr. 12

shodné i úhly EAF a EBF, neboť jsou to obvodové úhly příslušné téže tětivě CD. Trojúhelníky AFE a BFE se shodují ve společné straně EF, jsou tedy shodné podle věty *usu*, $|AE| = |BE|$, a trojúhelník ABE je tudíž rovnoramenný.

B – S – 3

Předpokládejme, že P je mnohočlen stupně n. Členy polynomu $Q(x^2)$ obsahují jen sudé mocniny x a polynom $x \cdot P^2(x)$ je lichého stupně $2n+1$. Protože má platit $Q(x^2) = (x+1)^4 - x \cdot P^2(x)$, vidíme, že nemůže být $2n+1 > 4$. Je tedy $n \leqq 1$ a

$$P(x) = ax + b, \quad Q(x^2) = (x+1)^4 - x(ax+b)^2. \tag{1}$$

Po úpravě dostaneme $Q(x^2) = x^4 + (4-a^2)x^3 + (6-2ab)x^2 + (4-b^2)x + 1$. Koeficienty při lichých mocninách x jsou rovny nule, proto $a, b \in \{-2, 2\}$ a $Q(x^2) = x^4 + (6-2ab)x^2 + 1$. Dosazením každé ze čtyř možných dvojic čísel a, b do (1) nalezneme všechna čtyři řešení úlohy:

$P(x) = 2x + 2$ a $Q(x) = x^2 - 2x + 1$,
$P(x) = 2x - 2$ a $Q(x) = x^2 + 14x + 1$,
$P(x) = -2x + 2$ a $Q(x) = x^2 + 14x + 1$,
$P(x) = -2x - 2$ a $Q(x) = x^2 - 2x + 1$.

B – II – 1

Nerovnost je pro kladná x, y zřejmě ekvivalentní se vztahem

$$y^2(py - x) - x^2(y - x) \geqq 0.$$

Je-li $p \geqq 1$, dostáváme

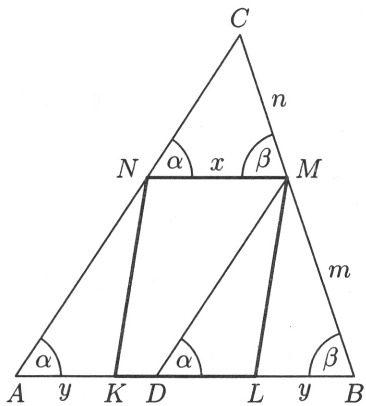
$$y^2(py - x) - x^2(y - x) \geqq y^2(y - x) - x^2(y - x) = (x + y)(y - x)^2 \geqq 0.$$

Je-li však $p < 1$, neplatí daná nerovnost například pro $x = y = 1$.

Závěr: Daná nerovnost je splněna pro každá dvě kladná čísla x, y, právě když $p \geqq 1$.

B – II – 2

Předpokládejme, že rovnoběžník $KLMN$ má požadované vlastnosti. V posunutí o vektor $\boldsymbol{NM}$ (obr. 13) je obrazem trojúhelníku AKN troj-



Obr. 13

úhelník DLM. Vzniklý trojúhelník DBM má mít (dle zadání) dvakrát větší obsah než trojúhelník NMC a je tomuto trojúhelníku podobný (věta *uu*). Koeficient k podobnosti, která převádí trojúhelník DBM na trojúhelník NMC, je odmocninou z podílu obsahů těchto trojúhelníků a zároveň podílem délek libovolných dvou v podobnosti si odpovídajících úseček: $k = \sqrt{2} = \dfrac{|BM|}{|MC|}$. Z podmínky rovnosti obsahů trojúhelníků LBM, DLM a AKN, jejichž výšky na strany LB, DL a AK jsou shodné, navíc plyne $|LB| = |DL| = |AK|$.

Odtud plyne *konstrukce*: Na úsečce BC sestrojíme bod M tak, aby $|BM| : |MC| = \sqrt{2} : 1$. Rovnoběžka s přímkou AC vedená bodem M protne úsečku AB v bodě D. Vrchol N nalezneme jako průsečík úsečky AC s přímkou, která prochází bodem M rovnoběžně s AB. Bod L sestrojíme jako střed úsečky DB, bod K je pak obrazem bodu L v posunutí o vektor $\boldsymbol{MN}$.

Výsledkem konstrukce je rovnoběžník $KLMN$ (jediný pro každý trojúhelník ABC), o němž se snadno přesvědčíme, že má požadované vlastnosti.

Jiné řešení. Z rovností obsahů trojúhelníků AKN a LBM se shodnými výškami na strany AK a LB plyne shodnost těchto stran. Označme (obr. 13) $|AB| = c$, $|NM| = |KL| = x$, $|BM| = m$ a $|MC| = n$ a $|LB| = |AK| = y$; zřejmě $c = 2y + x$, takže $y = \frac{1}{2}(c - x)$. Trojúhelníky NMC a LBM mají stejné obsahy, je tedy $\frac{1}{2}xn \sin\beta = \frac{1}{2}ym \sin\beta$ neboli $xn = ym$. Po dosazení za y a úpravě máme

$$x(m + 2n) = mc. \tag{1}$$

Z podobnosti trojúhelníků NMC a ABC plyne úměra $x : c = n : (m + n)$ neboli

$$nc = x(m + n), \tag{2}$$

takže z rovnosti součinu levých a součinu pravých stran vztahů (1) a (2) dostaneme $m = n\sqrt{2}$, tj. $\dfrac{|BM|}{|MC|} = m : n = \sqrt{2}$. Odtud vyplývá *konstrukce* podobně jako v předchozím řešení.

B – II – 3

Položme $m = \dfrac{(n^2)_{10}}{(n_{10})^2}$ a $n = 10k + r$, kde k je celé nezáporné a r je poslední číslice čísla n, tj. $r \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Zřejmě je m celé pro všechna n, která mají $r = 0$ a $k > 0$. Pokud je $k = 0$ a $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, není zlomek m definován.

Nechť je $k > 0$ a $r \in \{1, 2\}$. Pak $m = \dfrac{100k^2 + 20kr}{100k^2} = 1 + \dfrac{r}{5k}$, což není celé číslo.

Pro $k > 0$ a $r = 3$ platí $m = \dfrac{100k^2 + 60k + 10}{100k^2} = 1 + \dfrac{6k + 1}{10k^2}$. Čitatel posledního zlomku není na rozdíl od jmenovatele dělitelný deseti, tedy m není celé číslo.

Je-li $k > 0$ a $r = 4$, máme $m = \dfrac{100k^2 + 80k + 20}{100k^2} = 1 + \dfrac{4k + 1}{5k^2}$. Odtud $m = 2$ pro $k = 1$. Pro $k > 1$ je $\dfrac{4k + 1}{5k^2} = \dfrac{4k + 1}{(4k + k)k} < \dfrac{4k + 1}{(4k + 1)k} = \dfrac{1}{k}$, a tak m nemůže být celé číslo.

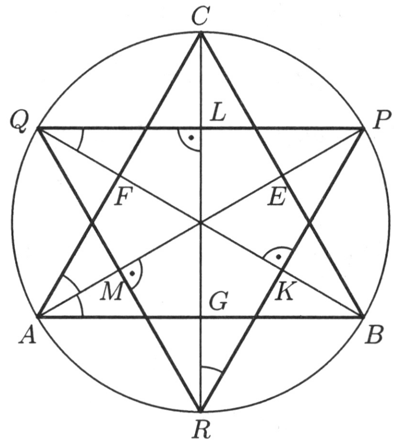
Je-li konečně $r \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, dostáváme

$$m = \frac{100k^2 + 20kr + (r^2)_{10}}{100(k + 1)^2} < \frac{100k^2 + 200k + 100}{100(k + 1)^2} = 1.$$

Závěr: m je celé číslo pro všechna přirozená čísla n, jejichž dekadický zápis končí číslicí 0, a pro $n = 14$.

B – II – 4

Pravoúhlé trojúhelníky LRP a KQP na obr. 14 jsou podobné, protože



Obr. 14

mají společný ostrý úhel při vrcholu P. Využijeme-li navíc, že obvodové úhly příslušné témuž oblouku jsou shodné, dostáváme $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CRP| = |\sphericalangle LRP| = |\sphericalangle KQP| = |\sphericalangle BQP| = |\sphericalangle BAP|$. Bod E je střed úsečky BC, tětivy CP a BP příslušné shodným obvodovým úhlům ACP a BAP jsou shodné. Trojúhelník CEP je tedy shodný s trojúhelníkem BEP podle věty *sss*, tudíž úhly AEB a BEP stejně jako úhly AEB a AEC jsou shodné (a pravé). Odtud plyne i shodnost trojúhelníků AEC a AEB podle věty *sus*. Je tedy $|AC| = |AB|$. Analogicky zjistíme, že $|AB| = |BC|$.

Závěr: Daným podmínkám vyhovují jen rovnostranné trojúhelníky ABC.

Poznámka. Rovnost $|CP| = |BP|$ lze dokázat i jinak, například na základě poznatku, že obrazy ortocentra v souměrnostech podle stran trojúhelníku leží na kružnici trojúhelníku opsané. Těžiště T trojúhelníku ABC je zároveň ortocentrem trojúhelníku PQR. Proto jsou obrazem úsečky TP v osových souměrnostech podle přímek PQ a PR po řadě úsečky CP a BP, které jsou tudíž shodné.