49. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie A

In: Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 49. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1999/2000. 41. mezinárodní matematická olympiáda. 12. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2005. pp. 70–100.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405015

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

Nechť P, Q jsou kvadratické trojčleny takové, že tři z kořenů rovnice $P\bigl(Q(x)\bigr) = 0$ jsou čísla -22, 7, 13. Určete čtvrtý kořen této rovnice.

(*P. Černek*)

A – I – 2

Nechť K, L, M jsou po řadě vnitřní body stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC takové, že kružnice vepsané dvojicím trojúhelníků ABK a CAK, BCL a ABL, CAM a BCM mají vnější dotyk. Pak platí

$$|BK| \cdot |CL| \cdot |AM| = |CK| \cdot |AL| \cdot |BM|.$$

Dokažte. (*J. Švrček*)

A – I – 3

V oboru kladných čísel řešte soustavu

$$\begin{aligned}
\sqrt{xy} + \sqrt{xz} - x &= a,\\
\sqrt{yz} + \sqrt{yx} - y &= b,\\
\sqrt{zx} + \sqrt{zy} - z &= c,
\end{aligned}$$

kde a, b, c jsou daná kladná čísla. (*R. Horenský*)

A – I – 4

V rovině je dáno 1 999 shodných trojúhelníků o obsahu 1, které jsou obrazy téhož trojúhelníku v různých posunutích. Je-li průnikem všech daných trojúhelníků množina M, která obsahuje těžiště každého z nich, je obsah množiny M alespoň $\frac{1}{9}$. Dokažte. (*M. Beneš*)

A – I – 5

Je dána funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že $f(n) = 1$, je-li n liché, a $f(n) = k$ pro každé sudé číslo $n = 2^k l$, kde k je přirozené číslo a l číslo liché. Určete největší přirozené číslo n, pro něž platí

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \leqq 123\,456.$$

(*S. Trávníček*)

A – I – 6

Je dán čtyřboký jehlan $ABCDV$ s podstavou $ABCD$. Jeho hrany AB, CD jsou rovnoběžné a roviny ABV a CDV vzájemně kolmé. Označme P patu výšky z vrcholu V na stranu AB v trojúhelníku ABV a Q patu výšky z vrcholu V na stranu CD v trojúhelníku CDV. Dokažte nerovnost

$$|AV|^2 + |BV|^2 + |CV|^2 + |DV|^2 \geqq |PQ|^2 + 2(S_{ABV} + S_{CDV} + S_{PQV}),$$

kde S_{XYZ} značí obsah trojúhelníku XYZ. Zjistěte rovněž, kdy platí rovnost. (*J. Bábeľa*)

A – S – 1

Určete, pro která reálná čísla p má soustava rovnic

$$(x - y)^2 = p^2,$$
$$x^3 - y^3 = 16$$

právě jedno řešení v oboru reálných čísel. (*J. Bábeľa*)

A – S – 2

Je dán trojúhelník ABC. Uvnitř jeho stran BC, CA, AB uvažujme po řadě body K, L, M takové, že úsečky AK, BL, CM se protínají v bodě U. Jestliže trojúhelníky AMU a KCU mají obsah P a trojúhelníky MBU a CLU obsah Q, pak $P = Q$. Dokažte. (*J. Švrček*)

A – S – 3

Určete nejmenší přirozené číslo k, pro které platí: Vybereme-li libovolných k různých čísel z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2\,000\}$, pak mezi vybranými čísly existují dvě, jejichž součet nebo rozdíl je 667. (*J. Šimša*)

A – II – 1

Nechť $P(x)$ je kvadratický trojčlen. Určete všechny kořeny rovnice

$$P(x^2 + 4x - 7) = 0,$$

víte-li, že mezi nimi je číslo 1 a aspoň jeden kořen je dvojnásobný.

(*P. Černek*)

A – II – 2

Je dán rovnoramenný lichoběžník $UVST$, v němž $3|ST| < 2|UV|$. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB tak, aby body B, C ležely na přímce VS, bod U na přímce AB a bod T byl těžištěm trojúhelníku ABC. (*P. Černek*)

A – II – 3

Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b platí nerovnost

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leqq \sqrt[3]{2(a+b)\Bigl(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\Bigr)}.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost. (*J. Šimša*)

A – II – 4

Určete všechny konvexní čtyřúhelníky $ABCD$ s následující vlastností: Uvnitř čtyřúhelníku $ABCD$ existuje bod E takový, že každá přímka, která prochází tímto bodem a protíná strany AB a CD ve vnitřních bodech, dělí čtyřúhelník $ABCD$ na dvě části o stejném obsahu. Svou odpověď zdůvodněte. (*P. Černek, J. Švrček*)

A – III – 1

Nechť n je přirozené číslo. Dokažte, že součet $4 \cdot 3^{2^n} + 3 \cdot 4^{2^n}$ je dělitelný třinácti, právě když n je sudé. (*J. Šimša*)

A – III – 2

Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Na jeho výšce CD je zvolen bod P tak, že kružnice vepsané trojúhelníku ABP a čtyřúhelníku $PECF$ jsou shodné; přitom bod E je průsečík přímky AP se stranou BC a F průsečík přímky BP se stranou AC. Dokažte, že i kružnice vepsané trojúhelníkům ADP a BCP jsou shodné.

(J. Šimša, K. Horák)

A – III – 3

V rovině je dáno 2 000 shodných trojúhelníků o obsahu 1, které jsou obrazy téhož trojúhelníku v různých posunutích. Každý z těchto trojúhelníků obsahuje těžiště všech zbývajících. Dokažte, že obsah sjednocení těchto trojúhelníků je menší než $\frac{22}{9}$. *(P. Calábek)*

A – III – 4

Pro které kvadratické funkce f existuje taková kvadratická funkce g, že kořeny rovnice $g\big(f(x)\big) = 0$ jsou čtyři různé po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti a současně i kořeny rovnice $f(x)g(x) = 0$?

(P. Černek)

A – III – 5

Monika zhotovila papírový model trojbokého jehlanu, jehož podstavou byl pravoúhlý trojúhelník. Když model rozřízla podél odvěsen podstavy a podél těžnice jedné ze stěn, vznikl po rozvinutí do roviny čtverec o straně a. Určete objem tohoto jehlanu. *(P. Leischner)*

A – III – 6

Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ (v desítkové soustavě), pro něž platí rovnost

$$\overline{abcd} + 1 = (\overline{ac} + 1)(\overline{bd} + 1).$$

(J. Zhouf)

A – I – 1

Vzhledem k tomu, že rovnice $P\big(Q(x)\big) = 0$ má reálný kořen, má kvadratická rovnice $P(x) = 0$ dva reálné kořeny r_1, r_2 (nevylučujeme, že $r_1 = r_2$). Mnohočlen $P\big(Q(x)\big)$ lze proto zapsat ve tvaru

$$P\big(Q(x)\big) = a\big(Q(x) - r_1\big)\big(Q(x) - r_2\big),$$

kde a je reálné číslo $a \neq 0$. Rovnice $P\big(Q(x)\big) = 0$ má podle zadání čtyři reálné kořeny, proto každá z kvadratických rovnic $Q(x) - r_1 = 0$, $Q(x) - r_2 = 0$ musí mít dva reálné kořeny. Z Viètových vzorců plyne, že součet kořenů v obou kvadratických rovnicích je týž, neboť obě rovnice mají stejný koeficient u lineárního členu. Přitom tři ze čtyř reálných kořenů obou kvadratických rovnic $Q(x) - r_1 = 0$, $Q(x) - r_2 = 0$ jsou dle zadání čísla -22, 7, 13, čtvrtý kořen označme q. Dále mohou nastat tři možnosti:

(i) Jedna z kvadratických rovnic má kořeny -22, 7, druhá má kořeny 13 a q. Pak platí $-22 + 7 = 13 + q$, tedy $q = -28$.

(ii) Jedna z kvadratických rovnic má kořeny -22, 13, druhá má kořeny 7 a q. Pak platí $-22 + 13 = 7 + q$, tedy $q = -16$.

(iii) Jedna z kvadratických rovnic má kořeny 13, 7, druhá má kořeny -22 a q. Potom však platí $13 + 7 = -22 + q$, tedy $q = 42$.

Je zřejmé, že v každém z případů (i), (ii), (iii) existují příslušné kvadratické trojčleny $P(x)$ a $Q(x)$. Má-li mít jedna z kvadratických rovnic $Q(x) - r_1 = 0$, $Q(x) - r_2 = 0$ kořeny -22, 7 a druhá 13, -28, položíme $Q(x) = x^2 + 15x$, $-r_1 = (-22) \cdot 7 = -154$, $-r_2 = 13 \cdot (-28) = -364$, $P(x) = (x - 154)(x - 364) = x^2 - 518x + 56\,056$. Obdobně lze postupovat ve zbývajících případech.

Čtvrtým kořenem rovnice $P\big(Q(x)\big) = 0$ může být kterékoli z čísel -28, -16, 42.

Jiné řešení. Úvahy o koeficientu u lineárního členu s využitím Viètových vztahů lze nahradit následující úvahou o grafech kvadratických funkcí.

Protože grafy kvadratických funkcí $f_1\colon y = Q(x) - r_1$ a $f_2\colon y = Q(x) - r_2$ mají tutéž osu souměrnosti a přitom existují čtyři reálné kořeny rovnice $P\big(Q(x)\big) = 0$, jsou tyto kořeny na ose x po dvou středově souměrné podle průsečíku os souměrnosti grafů obou funkcí f_1 a f_2 s osou x. Vzhledem k poloze daných tří kořenů na ose x lze dále uvažovat tři možnosti stejně jako v předcházejícím řešení. Např.

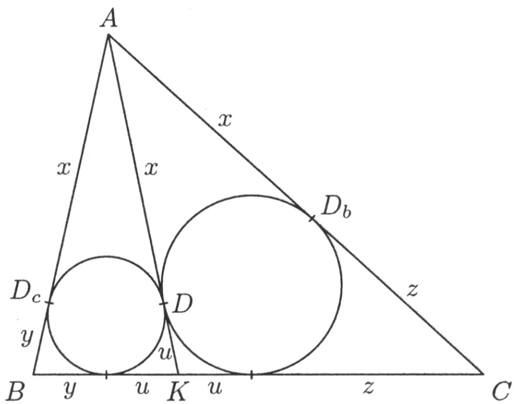
(i) Střed souměrnosti je $-7{,}5 = \frac{1}{2}(-22+7)$, čtvrtý kořen leží na ose x a je symetrický s obrazem čísla 13 dle středu souměrnosti v bodě $-7{,}5$. Čtvrtým hledaným kořenem je tudíž číslo -28.

Podobně lze postupovat ve zbylých dvou případech a dospějeme tak ke stejnému výsledku.

A – I – 2

Uvnitř strany BC trojúhelníku ABC uvažujme bod K takový, že kružnice vepsané trojúhelníkům BKA a CKA mají vnější dotyk v bodě D. Nechť dále (při obvyklém označení délek stran trojúhelníku ABC) platí označení podle obr. 42, tj.

$|AD_b| = |AD_c| = x$, $|BD_c| = y$, $|CD_b| = z$, $|BK| = y+u$, $|CK| = z+u$.



Obr. 42

Z předešlého obrázku snadno vidíme, že platí následující soustava rovnic

$$y + z = a - 2u,$$

$$z + x = b,$$

$$x + y = c.$$

Jednoduchou úpravou odtud dostáváme $2y + 2u = a - b + c$ (analogicky vyjádříme $2z + 2u$), a tudíž platí

$$|BK| = y + u = \frac{1}{2}(a - b + c) = s - b,$$

$$|CK| = z + u = \frac{1}{2}(a + b - c) = s - c,$$

kde $2s = a+b+c$. To značí, že bod K je bodem dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC se stranou BC. Pro body L a M platí využitím analogického postupu následující vztahy:

$$|CL| = s - c, \quad |AL| = s - a, \quad |AM| = s - a, \quad |BM| = s - b.$$

Z předešlých rovností již bezprostředně plyne

$$|BK| \cdot |CL| \cdot |AM| = (s-a)(s-b)(s-c) = |CK| \cdot |AL| \cdot |BM|.$$

Tím je důkaz ukončen.

Poznámka. Úsečky AK, BL, CM vyhovující podmínkám úlohy se tedy protínají podle Cèvovy věty v jediném bodě G, zvaném *Gergonnův* bod daného trojúhelníku ABC.

A – I – 3

Z textu úlohy plyne, že neznámé x, y, z jsou kladná čísla, lze proto danou soustavu upravit do následujícího tvaru

$$\begin{aligned}
-\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} &= \frac{a}{\sqrt{x}},\\
\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z} &= \frac{b}{\sqrt{y}},\\
\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z} &= \frac{c}{\sqrt{z}}.
\end{aligned}$$

Sečteme-li po dvojicích jednotlivé rovnice předešlé soustavy, dostaneme tak soustavu

$$\begin{aligned}
\frac{b}{\sqrt{y}} + \frac{c}{\sqrt{z}} &= 2\sqrt{x},\\
\frac{c}{\sqrt{z}} + \frac{a}{\sqrt{x}} &= 2\sqrt{y},\\
\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{b}{\sqrt{y}} &= 2\sqrt{z}.
\end{aligned}$$

Dále po snadné úpravě

$$\begin{aligned}
b\sqrt{z} + c\sqrt{y} &= 2\sqrt{xyz},\\
c\sqrt{x} + a\sqrt{z} &= 2\sqrt{xyz},\\
a\sqrt{y} + b\sqrt{x} &= 2\sqrt{xyz}.
\end{aligned}$$

Odečtením první a třetí, resp. druhé a třetí rovnice poslední soustavy dále získáme

$$b\sqrt{z} + (c-a)\sqrt{y} = b\sqrt{x},$$
$$a\sqrt{z} - a\sqrt{y} = (b-c)\sqrt{x}.$$

Obě strany první rovnice předešlé soustavy násobíme číslem a, obě strany druhé rovnice pak násobíme číslem $-b$. Sečteme-li obě takto upravené rovnice, obdržíme

$$a(b+c-a)\sqrt{y} = b(c+a-b)\sqrt{x},$$

obdobným způsobem dostaneme rovněž

$$a(b+c-a)\sqrt{z} = c(a+b-c)\sqrt{x}.$$

Jestliže pro kladná čísla a, b, c platí vztah $b+c-a=0$, pak z předešlých dvou rovnic plyne, že také $a+b-c=0$, $c+a-b=0$. Potom však $a=b=c=0$, což není možné. Je tudíž $b+c-a \neq 0$. Z poslední dvojice rovnic vyjádříme $\sqrt{y}$ a $\sqrt{z}$ pomocí $\sqrt{x}$ následujícím způsobem:

$$\sqrt{y} = \frac{b(c+a-b)}{a(b+c-a)}\sqrt{x},$$
$$\sqrt{z} = \frac{c(a+b-c)}{a(b+c-a)}\sqrt{x}.$$

Odtud snadno vidíme, že výrazy $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$ jsou současně všechny kladné nebo všechny záporné. Po dosazení $\sqrt{y}$ a $\sqrt{z}$ do původní soustavy rovnic získáme (po úpravách) řešení (x, y, z), kde

$$x = \frac{a^2(b+c-a)}{(c+a-b)(a+b-c)},$$
$$y = \frac{b^2(c+a-b)}{(b+c-a)(a+b-c)},$$
$$z = \frac{c^2(a+b-c)}{(c+a-b)(b+c-a)}.$$

Vzhledem k tomu, že jsme k řešení soustavy rovnic dospěli výhradně ekvivalentními úpravami, není třeba zkoušku provádět.

Soustava má přitom výše uvedené řešení v oboru kladných čísel, právě když současně platí $b+c-a>0$, $c+a-b>0$, $a+b-c>0$, tj. právě když kladná čísla a, b, c jsou délkami stran trojúhelníku.

A – I – 4

Nechť $A_sB_sC_s$, kde $s \in \{1, 2, \ldots, 1\,999\}$, jsou trojúhelníky vyhovující podmínkám úlohy. Každý z daných trojúhelníků $A_sB_sC_s$ je průnikem vždy tří polorovin $A_sB_sC_s$, $B_sC_sA_s$ a $C_sA_sB_s$, proto je (neprázdná) množina M průnikem $3 \cdot 1\,999 = 5\,997$ takových polorovin. Vzhledem k tomu, že poloroviny $A_sB_sC_s$, kde $s \in \{1, 2, \ldots, 1\,999\}$, se navzájem liší jen posunutím, je jejich průnikem polorovina $A_iB_iC_i$, kde i je pevný index z množiny $\{1, 2, \ldots, 1\,999\}$. Podobně průnikem všech polorovin $B_sC_sA_s$ je určitá polorovina $B_jC_jA_j$ a průnikem všech polorovin $C_sA_sB_s$ je určitá polorovina $C_kA_kB_k$, kde $j, k \in \{1, 2, \ldots, 1\,999\}$.

Množina M je proto průnikem tří výše zmíněných polorovin $A_iB_iC_i$, $B_jC_jA_j$ a $C_kA_kB_k$, M je tedy trojúhelník ABC, kde A je průsečík přímek A_iB_i a C_kA_k, B je průsečík přímek A_iB_i a B_jC_j a konečně C je průsečík přímek B_jC_j a C_kA_k. Tento trojúhelník je podobný všem trojúhelníkům $A_sB_sC_s$, přičemž pro poměr podobnosti λ platí $0 < \lambda \leqq 1$. (Případ $A = B = C$ lze dle textu úlohy vyloučit.)

Vzhledem k tomu, že obsah trojúhelníku ABC je λ^2, stačí dokázat, že $\lambda \geqq \frac{1}{3}$. Označme v výšku z vrcholu C_i na stranu A_iB_i v trojúhelníku $A_iB_iC_i$. Protože přímka A_iB_i je totožná s přímkou AB, je vzdálenost těžiště T_i trojúhelníku $A_iB_iC_i$ od přímky AB rovna $\frac{1}{3}v$. Podle zadání obsahuje množina M těžiště všech trojúhelníků $A_sB_sC_s$, musí tudíž obsahovat těžiště T_i trojúhelníku $A_iB_iC_i$.

Vzdálenost vrcholu C trojúhelníku ABC od jeho strany AB je tedy alespoň $\frac{1}{3}v$. Porovnáním velikostí výšek z vrcholů C_i a C v podobných trojúhelnících $A_iB_iC_i$ a ABC dostáváme již přímo žádanou nerovnost $\lambda \geqq \frac{1}{3}$, tj. $\lambda^2 \geqq \frac{1}{9}$, což jsme chtěli dokázat.

A – I – 5

Označme

$$S(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n).$$

Ze zadání plyne $S(1) = 1$. Protože $f(n) \geqq 1$ pro všechna přirozená čísla n, je $S\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rostoucí funkce. Je-li n přirozené číslo tvaru $n = 2^k$, kde k je přirozené, určíme součet $S(n)$ následujícím způsobem: Počet lichých čísel, která nejsou větší než n, je 2^{k-1}. Každé liché číslo se na součtu $S(n)$ podílí hodnotou 1. Počet sudých čísel, která nejsou větší než n, je rovněž 2^{k-1}, přitom každé sudé číslo se na součtu $S(n)$ podílí hodnotou minimálně 1. Je-li navíc toto číslo dělitelné čtyřmi, podílí se na součtu další 1. Je-li dále číslo dělitelné osmi, podílí se další 1, atd. (Hodnotu $S(n)$ tak tvoříme načítáním hodnot 1 „po vrstvách“). Celkem je tedy

$$S(2^k) = 2^{k-1} + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1 = 2^{k-1} + \frac{2^k - 1}{2 - 1} =$$
$$= 2^k + 2^{k-1} - 1 = 3 \cdot 2^{k-1} - 1.$$

Nechť p je přirozené číslo, které lze zapsat ve tvaru $p = 2^m s$, kde m je celé nezáporné číslo a s liché přirozené číslo. Nechť k je přirozené číslo takové, že $p < 2^k$ (tedy $m < k$), a nechť l je liché přirozené číslo. Pak

$$f(2^k l + p) = f(2^k l + 2^m s) = f\big(2^m(2^{k-m} l + s)\big).$$

Číslo $2^{k-m}l+s$ je liché, proto $f\big(2^m(2^{k-m}l+s)\big) = f(2^m s) = f(p)$. Celkem tedy dostáváme $f(2^k l + p) = f(p)$.

Jsou-li k, m nezáporná celá čísla, $k > m$, a l liché číslo, platí podle předcházejícího odstavce

$$S(2^k l + 2^m) = f(1) + f(2) + \ldots + f(2^k l) + f(2^k l + 1) + f(2^k l + 2) +$$
$$+ \ldots + f(2^k l + 2^m) =$$
$$= f(1) + f(2) + \ldots + f(2^k l) + f(1) + f(2) + \ldots + f(2^m) =$$
$$= S(2^k l) + S(2^m).$$

A odtud již matematickou indukcí lehce dokážeme, že jsou-li $k_1 > k_2 > \ldots > k_i$ nezáporná celá čísla, pak platí

$$S(2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_i}) = S(2^{k_1}) + S(2^{k_2}) + \ldots + S(2^{k_i}).$$

Největší nezáporné celé číslo k_1 takové, že $3 \cdot 2^{k_1 - 1} - 1 = S(2^{k_1}) \leqq \leqq 123\,456$, je $k_1 = 16$. Přitom $S(2^{16}) = 98\,303$.

Největší nezáporné celé číslo k_2 takové, že $3 \cdot 2^{k_2 - 1} - 1 = S(2^{k_2}) \leqq \leqq 123\,456 - 98\,303 = 25\,153$, je $k_2 = 14$. Přitom $S(2^{14}) = 24\,575$.

Největší nezáporné celé číslo k_3 takové, že $3 \cdot 2^{k_3 - 1} - 1 = S(2^{k_3}) \leqq \leqq 25\,153 - 24\,575 = 578$, je $k_3 = 8$. Přitom $S(2^8) = 383$.

Největší nezáporné celé číslo k_4 takové, že $3 \cdot 2^{k_4 - 1} - 1 = S(2^{k_4}) \leqq \leqq 578 - 383 = 195$, je $k_4 = 7$. Přitom $S(2^7) = 191$.

Největší nezáporné celé číslo k_5 takové, že $3 \cdot 2^{k_5 - 1} - 1 = S(2^{k_5}) \leqq \leqq 195 - 191 = 4$, je $k_5 = 1$. Přitom $S(2^1) = 2$.

Největší nezáporné celé číslo k_6 takové, že $S(2^{k_6}) \leqq 4 - 2 = 2$, je $k_6 = 0$. Přitom $S(2^0) = 1$.

Tedy

$$\begin{aligned} S(82\,307) &= S(2^{16}+2^{14}+2^8+2^7+2+1) = \\ &= S(2^{16})+S(2^{14})+S(2^8)+S(2^7)+S(2)+S(1) = \\ &= 123\,455 \leqq 123\,456. \end{aligned}$$

Přitom $S(82\,308) = S(82\,307) + f(82\,308) = 123\,455 + 2 = 123\,457 >$ $> 123\,456$.

Největší přirozené číslo n, pro něž platí $S(n) \leqq 123\,456$, je $n = 82\,307$.

Jiné řešení. Na základě úvahy o načítání hodnot „po vrstvách" jako v předešlém řešení zjistíme, že

$$S(n) = n + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor + \ldots .$$

Přitom $\lfloor r \rfloor$ znamená celou část reálného čísla r, což je největší celé číslo, které není větší než r.

Protože pro každé reálné číslo r platí $\lfloor r \rfloor \leqq r$, platí též

$$S(n) \leqq n + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \ldots = \frac{n}{2} + \frac{n}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{n}{2} + n = \frac{3n}{2}.$$

Největší přirozené číslo n, pro něž platí, že $\frac{3}{2}n \leqq 123\,456$, je $n = 82\,304$. Přitom

$$\begin{aligned} S(82\,304) &= 82\,304 + \left\lfloor \frac{82\,304}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{82\,304}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{82\,304}{16} \right\rfloor + \ldots + \\ &\quad + \left\lfloor \frac{82\,304}{65\,536} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{82\,304}{131\,072} \right\rfloor + \ldots = \\ &= 82\,304 + 20\,576 + 10\,288 + 5\,144 + 2\,572 + 1\,286 + \\ &\quad + 643 + 321 + 160 + 80 + 40 + 20 + 10 + 5 + \\ &\quad + 2 + 1 + 0 + 0 + \ldots = \\ &= 123\,452. \end{aligned}$$

Dále

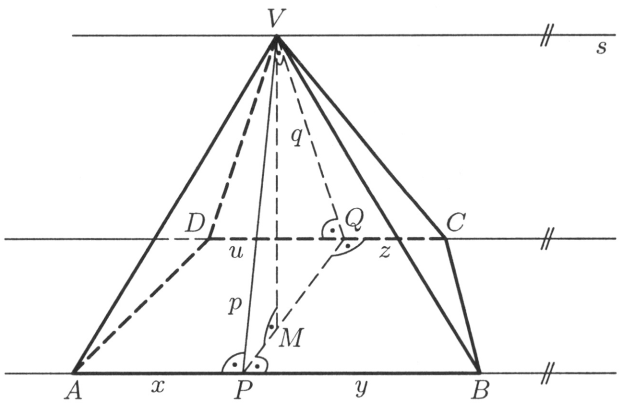
$$\begin{aligned} S(82\,305) &= S(82\,304) + f(82\,305) = 123\,452 + 1 = 123\,453, \\ S(82\,306) &= S(82\,305) + f(82\,306) = 123\,453 + 1 = 123\,454, \\ S(82\,307) &= S(82\,306) + f(82\,307) = 123\,454 + 1 = 123\,455, \\ S(82\,308) &= S(82\,307) + f(82\,308) = 123\,455 + 2 = 123\,457. \end{aligned}$$

Největší přirozené číslo n, pro něž $S(n) \leqq 123\,456$, je tedy $n = 82\,307$.

A – I – 6

Přímka AB je průsečnicí roviny ABV s rovinou podstavy $ABCD$ čtyřbokého jehlanu $ABCDV$, podobně přímka CD je průsečnicí roviny CDV s rovinou podstavy $ABCD$ uvažovaného jehlanu. Vzhledem k tomu, že obě průsečnice jsou dle zadání rovnoběžné, je rovněž průsečnice s rovin ABV a CDV s nimi rovnoběžná (obr. 43). Rovina kolmá k přímce s, procházející vrcholem V daného jehlanu, protíná přímky AB, CD po řadě v bodech P, Q, které jsou patami výšek z vrcholu V po řadě na strany AB, CD v trojúhelnících ABV, CDV. Roviny ABV a CDV jsou podle zadání vzájemně kolmé, trojúhelník PQV má proto pravý úhel u vrcholu V. Pata M výšky z vrcholu V na přeponu PQ je přitom totožná s patou tělesové výšky z vrcholu V jehlanu $ABCDV$. Pro polohu bodů P a Q na přímce AB, resp. CD, je třeba dále rozlišit tři případy:

(i) Oba body P a Q leží na odpovídajících hranách AB, CD.
(ii) Jeden z bodů P, Q leží na odpovídající hraně, druhý na prodloužení odpovídající hrany.
(iii) Žádný z bodů P, Q neleží na odpovídající hraně.



Obr. 43

Dokážeme dále nerovnost z textu úlohy pro případ (i). Zaveďme označení ve shodě s obr. 43, tj.

$$|AP| = x,\ |BP| = y,\ |CQ| = z,\ |DQ| = u,\ |VP| = p,\ |VQ| = q.$$

Využitím Pythagorovy věty v pravoúhlých trojúhelnících APV, BPV, CQV, DQV a PQV dostáváme postupně vztahy:

$$|AV|^2 = x^2 + p^2, \quad |BV|^2 = y^2 + p^2, \quad |CV|^2 = z^2 + q^2,$$
$$|DV|^2 = u^2 + q^2, \quad |PQ|^2 = p^2 + q^2.$$

Pro obsahy trojúhelníků ABV, CDV a PQV platí vzorce

$$2S_{ABV} = (x + y)p, \quad 2S_{CDV} = (z + u)q, \quad 2S_{PQV} = pq.$$

Dosadíme-li nyní za $|AV|^2$, $|BV|^2$, $|CV|^2$, $|DV|^2$, $|PQ|^2$ a $2S_{ABV}$, $2S_{CDV}$, $2S_{PQV}$ do nerovnosti v textu úlohy, dostáváme po snadné úpravě

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + p^2 + q^2 \geqq xp + yp + zq + uq + pq.$$

Nyní dokážeme, že předešlá nerovnost platí pro libovolná nezáporná reálná čísla x, y, z, u a libovolná kladná čísla p, q. Vynásobením rozdílu levé a pravé strany této nerovnosti číslem 4 dostáváme po úpravě

$$\begin{aligned}(4x^2 - 4xp + p^2) + (4y^2 - 4yp + p^2) + (4z^2 - 4zq + q^2) +&\\ + (4u^2 - 4uq + q^2) + 2(p^2 - 2pq + q^2) =&\\ = (2x - p)^2 + (2y - p)^2 + (2z - q)^2 + (2u - q)^2 + 2(p - q)^2 \geqq 0.&\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že všechny provedené úpravy byly ekvivalentní, platí též nerovnost uvedená v textu úlohy, což jsme měli dokázat.

Podobně lze postupovat i v případech (ii) a (iii). Odlišné je zde pouze vyjádření hodnot $2S_{ABV}$ a $2S_{CDV}$.

Rovnost může nastat pouze v případě (i), ve zbylých dvou případech je vyloučena. V případě (i) přitom rovnost nastává, právě když platí

$$2x = 2y = 2z = 2u = p = q,$$

tj. právě když podstavou daného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ je obdélník $ABCD$, pata M výšky VM uvažovaného jehlanu je průsečíkem úhlopříček AC a BD v obdélníku $ABCD$ a současně platí

$$|AB| : |BC| : |VM| = 2 : 2\sqrt{2} : \sqrt{2}.$$

A – S – 1

První rovnice je splněna, právě když platí $x = y + p$ nebo $x = y - p$. Po dosazení do druhé rovnice dané soustavy dostaneme po úpravě v prvním případě kvadratickou rovnici

$$3py^2 + 3p^2y + p^3 - 16 = 0,$$

v druhém případě pak kvadratickou rovnici

$$3py^2 - 3p^2y + p^3 + 16 = 0$$

o neznámé y. Daná soustava rovnic bude mít právě jedno řešení v oboru reálných čísel, právě když jedna ze dvou předešlých kvadratických rovnic bude mít jediný (dvojnásobný) kořen a druhá z nich nebude mít žádný reálný kořen nebo bude mít stejný dvojnásobný kořen jako rovnice první (můžeme předpokládat, že $p \neq 0$, protože pro $p = 0$ daná soustava zřejmě nemá řešení). První kvadratická rovnice má diskriminant $D_1 = 3p(64 - p^3)$, druhá má diskriminant $D_2 = -3p(64 + p^3)$. Hledáme tedy ta $p \neq 0$, pro něž je jedno z čísel D_1, D_2 rovno nule a druhé záporné (případ $D_1 = D_2 = 0$ pro $p \neq 0$ totiž nenastane).

Je-li $D_1 = 0$, je $p = 4$ a $D_2 < 0$. Pokud $D_2 = 0$, je $p = -4$ a $D_1 < 0$. Hodnoty $p = 4$ a $p = -4$ jsou tedy jediné, které mají požadovanou vlastnost.

Daná soustava rovnic má přitom pro obě uvedené hodnoty parametru p jediné reálné řešení $(x, y) = (2, -2)$.

Jiné řešení. Z první rovnice máme $|x - y| = |p|$, z druhé rovnice však vidíme, že $x^3 > y^3$, což je ekvivalentní s nerovností $x > y$ (je $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ a $x^2 + xy + y^2 > 0$ pro libovolná reálná x, y s výjimkou případu $x = y = 0$). Je tedy $x = y + |p|$, $|p| > 0$. Po dosazení do druhé rovnice soustavy (pro jednoduchost pišme q místo $|p|$) dostaneme pro y kvadratickou rovnici

$$3qy^2 + 3q^2y + q^3 - 16 = 0$$

s diskriminantem $D(q) = 3q(64 - q^3) = 3q(4 - q)(16 + 4q + q^2)$. Má-li daná soustava v oboru reálných čísel jediné řešení, je nutně diskriminant $D(q)$ předešlé rovnice roven 0, tj. musí platit $(4 - q)(16 + 4q + q^2) = 0$ (víme, že $q = |p| > 0$). Protože pro libovolné reálné q je $16 + 4q + q^2 > 0$, musí být $q = |p| = 4$, tj. $p = 4$ nebo $p = -4$. Zároveň hned dostáváme, že $y = -\frac{1}{2}q = -2$ a $x = y + 4 = 2$.

Daná soustava rovnic má právě jedno reálné řešení, právě když $p = 4$ nebo $p = -4$, a to $(x, y) = (2, -2)$.

Jiné řešení. Z první rovnice máme $x = y + q$, kde $q = p$ nebo $q = -p$. Po dosazení do druhé rovnice soustavy dostaneme pro y kvadratickou rovnici

$$3qy^2 + 3q^2y + q^3 - 16 = 0$$

s diskriminantem $D(q) = 3q(64 - q^3) = 3q(4 - q)(16 + 4q + q^2)$. Má-li daná soustava v oboru reálných čísel jediné řešení, je nutně diskriminant $D(q)$ předešlé rovnice roven 0, tj. musí platit $(4 - q)(16 + 4q + q^2) = 0$. Protože pro $p = 0$ nemá soustava řešení, je $q \neq 0$, navíc pro libovolné reálné q je $16 + 4q + q^2 > 0$, takže musí být $q = 4$, tj. $p = 4$ nebo $p = -4$.

Vraťme se znovu na počátek našeho řešení. Zkouškou se snadno přesvědčíme, že pro $q = 4$ má daná soustava právě jedno reálné řešení $(x, y) = (2, -2)$. Pro $q = -4$ (po dosazení za $x = y - 4$) však nemá rovnice $(y - 4)^3 - y^3 = 16$ žádný reálný kořen.

Daná soustava rovnic má právě jedno reálné řešení, právě když $p = 4$ nebo $p = -4$, a to $(x, y) = (2, -2)$.

A – S – 2

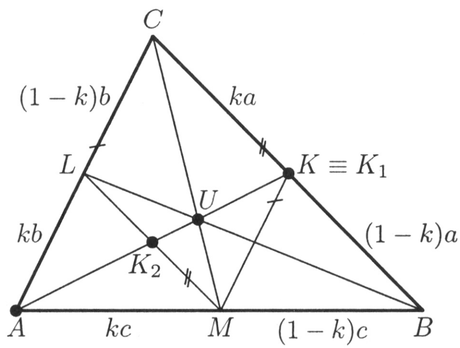
Z rovnosti obsahů trojúhelníků AMU a KCU plyne rovnost obsahů trojúhelníků AMC a AKC. Body K, M mají tedy stejnou vzdálenost od přímky AC. Odtud plyne, že $CA \parallel MK$ a čtyřúhelník $CAMK$ je tedy lichoběžník. Podobně dokážeme, že čtyřúhelník $BCLM$ je rovněž lichoběžník, kde $BC \parallel LM$. Trojúhelníky AML a ABC, resp. BKM a BCA jsou tedy stejnolehlé a platí (obr. 44)

$$|AL| = kb, \ |AM| = kc, \ |BM| = (1 - k)c, \ |BK| = (1 - k)a$$

a dále

$$|CK| = ka, \ |CL| = (1 - k)b, \quad \text{kde } k \in (0; 1).$$

Užitím Cèvovy věty pro trojici úseček AK, BL a CM, které se dle textu



Obr. 44

úlohy protínají v bodě U, dostáváme

$$\frac{kc}{(1-k)c} \cdot \frac{(1-k)a}{ka} \cdot \frac{(1-k)b}{kb} = 1.$$

Odtud plyne $(1-k)/k = 1$, neboli $k = \frac{1}{2}$. Tyto úsečky jsou tedy těžnice a jejich průsečík U je těžištěm daného trojúhelníku. Ze shodnosti úseček AM a BM již plyne rovnost obsahů trojúhelníků AMU a BMU, tedy rovnost $P = Q$, což jsme měli dokázat.

Jiné řešení (bez užití Cèvovy věty). Stejně jako v prvním řešení ukážeme, že úsečky BC a LM jsou rovnoběžné, takže si navzájem odpovídají v jisté stejnolehlosti se středem U a zároveň i v jisté stejnolehlosti se středem A. Označme K_1, K_2 po řadě středy obou uvažovaných úseček. Vzhledem k tomu, že body K_1, K_2 si odpovídají v obou zmíněných stejnolehlostech, leží body A a U (středy obou stejnolehlostí) na přímce K_1K_2. Odtud plyne, že střed K_1 strany BC leží na přímce AU, je tedy totožný s bodem K z textu úlohy. Úsečka AK je tudíž těžnicí trojúhelníku ABC. Podobně dokážeme, že i úsečka BL je těžnicí daného trojúhelníku. Bod U je tedy jeho těžištěm. Závěr je pak stejný jako v prvním řešení.

A – S – 3

Ukážeme, že hledaným k je číslo 1 001. Rozdělme všechna čísla z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2\,000\}$ do 1 000 dvojic

$$\{1, 666\},\ \{2, 665\},\ \{3, 664\},\ \ldots,\ \{333, 334\},$$
$$\{667, 1334\},\ \{668, 1\,335\},\ \{669, 1336\},\ \ldots,\ \{1\,333, 2\,000\}.$$

(Číslo 667 z textu úlohy je rovno součtu čísel každé dvojice v prvním řádku a rozdílu čísel každé dvojice v druhém řádku. Všimněme si, že skutečně každé z čísel $1, 2, 3, \ldots, 2\,000$ je zastoupeno právě v jedné dvojici.)

Číslo 1 001 má požadovanou vlastnost, protože pokud vybereme libovolně 1 001 čísel z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2\,000\}$, budou mezi nimi obě čísla aspoň jedné z uvedených dvojic (máme vybráno 1 001 čísel, ale jen 1 000 dvojic). Součet nebo rozdíl čísel v nalezené dvojici je však 667.

Nyní ukážeme, že žádné číslo $k \leqq 1\,000$ požadovanou vlastnost nemá. Stačí to zřejmě ukázat pro $k = 1\,000$: vybereme-li 1 000 sudých čísel $2, 4, 6, \ldots, 2\,000$, je součet i rozdíl libovolných dvou vybraných čísel sudý, takže se nemůže rovnat lichému číslu 667.

A – II – 1

Označme $Q(x) = x^2 + 4x - 7$, potom $0 = P\bigl(Q(1)\bigr) = P(-2)$. Odtud plyne, že $P(x) = a(x + 2)(x - p)$, kde a a p jsou reálná čísla, $a \neq 0$. Je tedy

$$\begin{aligned} P\bigl(Q(x)\bigr) &= a(x^2 + 4x - 7 + 2)(x^2 + 4x - 7 - p) = \\ &= a(x - 1)(x + 5)(x^2 + 4x - 7 - p). \end{aligned}$$

To znamená, že kořeny dané rovnice jsou kromě čísel 1 a -5 ještě kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 + 4x - 7 - p = 0. \tag{1}$$

Protože aspoň jeden z kořenů dané rovnice má být dvojnásobný, je buď aspoň jedno z čísel 1 a -5 kořenem rovnice (1), nebo má tato rovnice sama dvojnásobný kořen. Přitom z tvaru rovnice (1) plyne, že součet jejích kořenů je -4 (číslo opačné ke koeficientu u lineárního členu), takže tato rovnice má kořen 1, právě když má kořen -5.

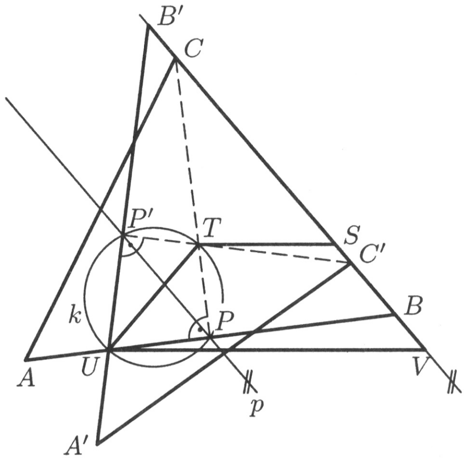
Jsou tedy dvě možnosti:

a) Rovnice (1) má dva kořeny 1 a -5 (takže je $p = -2$) a rovnice $P\bigl(Q(x)\bigr) = a(x - 1)^2(x + 5)^2 = 0$ má dva dvojnásobné kořeny 1 a -5.

b) Rovnice (1) má sama dvojnásobný kořen. Protože součet jejích kořenů je -4, je dvojnásobným kořenem číslo $(-4) : 2 = -2$. (V tomto případě je $p = -11$ a $P\bigl(Q(x)\bigr) = a(x - 1)(x + 5)(x + 2)^2 = 0$.)

Závěr: Úloha má dvě řešení: daná rovnice má buď dva dvojnásobné kořeny 1 a -5, nebo má dva jednoduché kořeny 1 a -5 a dvojnásobný kořen -2.

Označme P střed základny AB hledaného rovnoramenného trojúhelníku ABC. Protože vrchol U daného lichoběžníku $UVST$ leží na přímce AB, je buď $U = P$, anebo tvoří body T, U, P vrcholy pravoúhlého trojúhelníku (obr. 45). V obou případech bod P leží na Thaletově kružnici k sestrojené

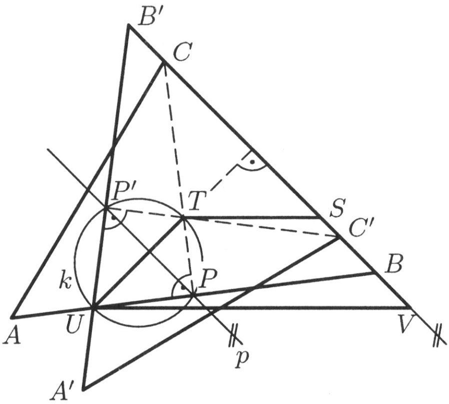


Obr. 45

nad průměrem TU. Označme d vzdálenost vrcholu T daného lichoběžníku od přímky VS. Vzhledem k tomu, že T je těžištěm trojúhelníku ABC, má jeho výška z vrcholu A velikost $3d$, tudíž bod P leží na přímce p, která je s přímkou VS rovnoběžná, má od ní vzdálenost $\frac{3}{2}d$ a leží v polorovině VST. Odtud již plyne *konstrukce* trojúhelníku ABC:

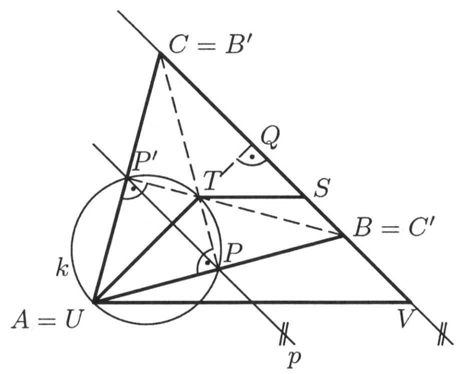
1. sestrojíme kružnici k s průměrem TU;
2. sestrojíme v polorovině VST přímku $p \parallel VS$ ve vzdálenosti $\frac{3}{2}d$ od VS;
3. sestrojíme bod $P \in k \cap p$;
4. sestrojíme přímku $PB \perp TP$, $B \in VS$;
5. sestrojíme vrcholy A ($A \in PB$, $A \neq B$, $|AP| = |PB|$) a C ($C \in PT \cap \cap VS$).

Diskuse: Protože dle předpokladu je $ST \parallel UV$ a $\frac{3}{2}|ST| < |UV|$, protne přímka p stranu TU daného lichoběžníku ve vnitřním bodě, bude tedy sečnou kružnice k a protne ji ve dvou různých bodech P a P' (obr. 45). Pro každý z nich dostáváme jedno řešení, trojúhelníky ABC a $A'B'C'$. Z konstrukce je dále zřejmé, že pokud bude $TU \perp SV$, budou oba body P, P' souměrně sdružené podle osy TU, takže dostaneme dva shodné (souměrně sdružené) trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ (obr. 46). Obě



Obr. 46

souměrně sdružená řešení splynou v jedno v případě, kdy vyjde $A = U$. Přitom bude těžiště T trojúhelníku ABC zároveň průsečíkem jeho výšek, takže výsledný trojúhelník ABC bude rovnostranný (obr. 47). To nastane, právě když obě ramena daného lichoběžníku jsou navzájem kolmá



Obr. 47

a navíc platí $3|ST| = |UV|$, jak plyne z podobnosti trojúhelníků UVQ a TSQ. V tomto jediném případě má úloha jedno řešení. Ve všech ostatních případech má úloha dvě řešení (která jsou pro $TU \perp SV$ shodná).

A – II – 3

Umocněním obou stran dané nerovnosti na třetí dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$\frac{a}{b} + 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a} \leqq 4 + 2\frac{a}{b} + 2\frac{b}{a}$$

neboli

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 4 \geqq 3\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right). \tag{1}$$

V předcházející nerovnosti položme $x = \sqrt[3]{a/b}$ $(x > 0)$. Po vynásobení obou stran nerovnosti (kladným) číslem x^3 a snadné úpravě obdržíme ekvivalentní nerovnost

$$x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1 \geqq 0.$$

Nejdříve zjistíme, zda rovnice $x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ nemá celočíselný kořen. Takový kořen musí dělit absolutní člen, takže jsou jen dvě možnosti, 1 a -1. Snadno ověříme, že uvedená rovnice má kořen $x = 1$, a po dělení dvojčlenem $(x - 1)$ zjistíme, že jde dokonce o kořen dvojnásobný a že platí rozklad

$$x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1 = (x - 1)^2(x^4 + 2x^3 + 2x + 1).$$

Pro každé $x > 0$ je $x^4 + 2x^3 + 2x + 1 > 0$. Platí tedy

$$x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1 = (x - 1)^2(x^4 + 2x^3 + 2x + 1) \geqq 0,$$

což jsme měli dokázat. Rovnost v předchozí nerovnosti přitom nastává, právě když $x = 1$, tj. právě když platí $a = b$.

Druhé řešení. Užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro trojici kladných čísel a/b, 1, 1 dostaneme

$$\frac{a}{b} + 1 + 1 \geqq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}},$$

a obdobně

$$\frac{b}{a} + 1 + 1 \geqq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

V obou předchozích nerovnostech nastává rovnost, právě když $a = b$. Jejich součtem pak vyjde

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 4 \geqq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}},$$

což je nerovnost (1).

Třetí řešení. Podle nerovnosti mezi mocninnými průměry stupně $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{2}$ dostáváme pro kladná čísla a/b, b/a nerovnost[1]

$$\left(\frac{\sqrt[3]{a/b} + \sqrt[3]{b/a}}{2}\right)^3 \leqq \left(\frac{\sqrt{a/b} + \sqrt{b/a}}{2}\right)^2,$$

v níž nastává rovnost, právě když $a/b = b/a$, tj. právě když $a = b$.

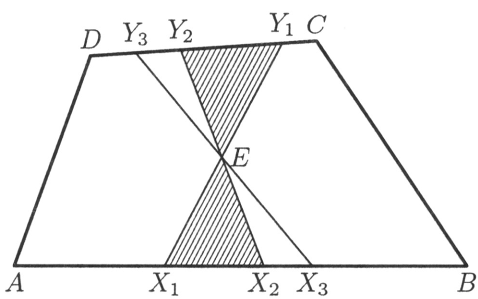
Protože

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 = (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

dostáváme odtud po jednoduché úpravě dokazovanou nerovnost, v níž nastává rovnost, právě když $a = b$.

A – II – 4

Nechť E je vnitřním bodem takového konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, který vyhovuje podmínkám úlohy. Uvažujme přímky X_1Y_1, X_2Y_2 a X_3Y_3, které procházejí bodem E a protínají po řadě strany AB a CD v bodech X_1 a Y_1, X_2 a Y_2, X_3 a Y_3 (obr. 48). Jestliže všechny tři uvažované



Obr. 48

[1] Viz např. J. Herman, R. Kučera, J. Šimša: Metody řešení matematických úloh I, str. 174.

přímky dělí čtyřúhelník $ABCD$ na dvě části o stejném obsahu, rovnají se i obsahy trojúhelníků EX_1X_2 a EY_1Y_2, resp. EX_2X_3 a EY_2Y_3. Protože tyto trojúhelníky mají vždy shodné vnitřní úhly při vrcholu E, plyne z rovnosti jejich obsahů rovnost

$$|EX_1| \cdot |EX_2| = |EY_1| \cdot |EY_2|,$$

resp.

$$|EX_2| \cdot |EX_3| = |EY_2| \cdot |EY_3|.$$

Z obou předešlých rovností dostáváme

$$\frac{|EX_1|}{|EX_3|} = \frac{|EY_1|}{|EY_3|}.$$

Trojúhelníky EX_1X_3 a EY_1Y_3 jsou tedy podobné (podle věty sus) a mají týž obsah. Jsou proto středově souměrné podle středu E a platí tudíž $X_1X_3 \parallel Y_1Y_3$. Čtyřúhelník $ABCD$ má tedy nutně rovnoběžné strany AB a CD.

Naopak každý (konvexní) čtyřúhelník $ABCD$, v němž platí $AB \parallel CD$, vyhovuje podmínkám úlohy. Za bod E pak zvolíme střed úsečky spojující středy rovnoběžných stran AB a CD; požadovaná vlastnost takového bodu je zřejmá.

Závěr: Podmínkám úlohy vyhovují právě všechny konvexní čtyřúhelníky $ABCD$, v nichž $AB \parallel CD$.

A – III – 1

Označme $a_n = 4 \cdot 3^{2^n} + 3 \cdot 4^{2^n}$. Ukážeme nejprve, že pro každé přirozené číslo n je rozdíl $a_{n+2} - a_n$ dělitelný třinácti. Po úpravách obdržíme rovnost

$$a_{n+2} - a_n = 4 \cdot (81^{2^n} - 3^{2^n}) + 3 \cdot (256^{2^n} - 4^{2^n}). \qquad (1)$$

Položme ve známém vzorci

$$A^p - B^p = (A - B)(A^{p-1} + A^{p-2}B + \ldots + B^{p-1}),$$

který platí pro každé přirozené p a pro libovolná dvě reálná čísla A a B, nejprve $p = 2^n$, $A = 81$, $B = 3$ a poté $p = 2^{n-1}$, $A = 256^2$, $B = 4^2$. Protože je $81 - 3 = 78 = 13 \cdot 6$ a také $256^2 - 4^2 = (256 - 4)(256 + 4) = 252 \cdot 260 = 13 \cdot 20 \cdot 252$, jsou oba sčítanci na pravé straně rovnosti (1) čísla dělitelná 13. Je proto také rozdíl $a_{n+2} - a_n$ dělitelný 13. Číslo a_1 není dělitelné 13, neboť $a_1 = 84 = 13 \cdot 6 + 6$, kdežto číslo a_2 číslem 13 dělitelné je ($a_2 = 1\,092 = 13 \cdot 84$). Užitím principu matematické indukce již snadno zjistíme, že a_n je dělitelné 13, právě když n je sudé. Tím je důkaz hotov.

Jiné řešení. Sestavme tabulku zbytků při dělení čísla $a_n = 4 \cdot 3^{2^n} + 3 \cdot 4^{2^n}$ třinácti.

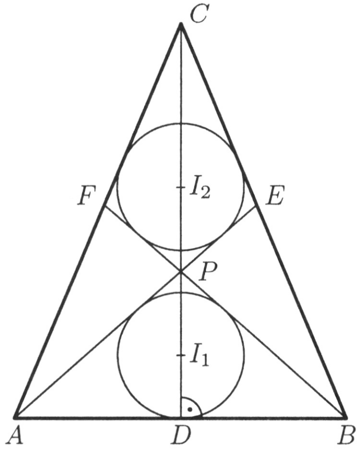
n	1	2	3	4	5	...
3^{2^n}	9	3	9	3	9	...
4^{2^n}	3	9	3	9	3	...
$4 \cdot 3^{2^n}$	10	12	10	12	10	...
$3 \cdot 4^{2^n}$	9	1	9	1	9	...
a_n	6	0	6	0	6	...

Zbytky obou čísel tvaru N^{2^n} určujeme rekurentně pomocí rovností $N^{2^{n+1}} = N^{2^n} \cdot N^{2^n} = \left(N^{2^n}\right)^2$. Protože $3^2 = 9$ a $9^2 = 81 \equiv 3 \pmod{13}$, vidíme, že v druhém i třetím řádku tabulky se pravidelně střídá trojka s devítkou, zbytky čísla a_n při dělení třinácti se tedy (vzhledem k číslu n) rovněž opakují s periodou 2. Číslo a_n je tedy dělitelné třinácti, právě když n je sudé.

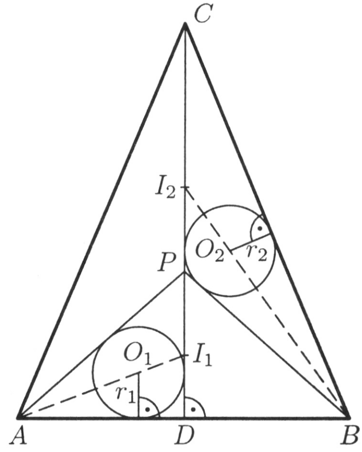
A – III – 2

Protože přímka CD je osou souměrnosti dvou vrcholových úhlů APB a EPF, leží střed I_1 kružnice vepsané trojúhelníku ABP na úsečce DP a zároveň střed I_2 kružnice vepsané čtyřúhelníku $PECF$ leží na úsečce CP (obr. 49). Navíc platí $|I_1P| = |I_2P|$, neboť obě zmíněné kružnice jsou shodné. Středy O_1, O_2 kružnic vepsaných trojúhelníkům ADP a BCP (obr. 50) pak leží po řadě na úsečkách AI_1, BI_2, neboť polopřímky AI_1 a BI_2 jsou osy odpovídajících úhlů DAP a CBP. Z rovnosti $|I_1P| = |I_2P|$ navíc plyne, že trojúhelníky API_1 a BPI_2 mají stejný obsah, protože se rovnají i příslušné výšky $|AD| = |BD|$.

Označme r_1, r_2 poloměry kružnic vepsaných trojúhelníkům ADP a BCP. Vyjádříme-li pomocí nich oba zmíněné obsahy ($S(XYZ)$ značí



Obr. 49



Obr. 50

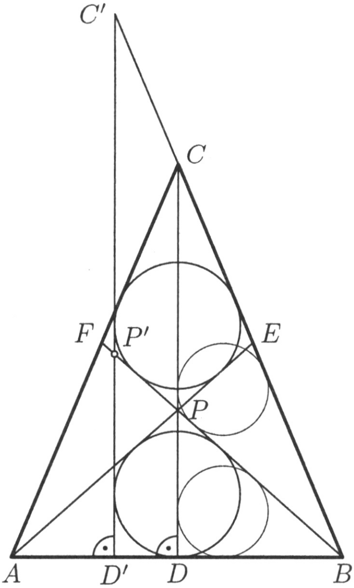
obsah trojúhelníku XYZ), dostaneme

$$
\begin{aligned}
S(API_1) &= S(AO_1P) + S(O_1PI_1) = \\
&= \frac{1}{2}|AP| \cdot r_1 + \frac{1}{2}|I_1P| \cdot r_1 = \frac{r_1}{2}(|AP| + |I_1P|), \\
S(BPI_2) &= S(BO_2P) + S(O_2PI_2) = \\
&= \frac{1}{2}|BP| \cdot r_2 + \frac{1}{2}|I_2P| \cdot r_2 = \frac{r_2}{2}(|BP| + |I_2P|).
\end{aligned}
$$

Vzhledem k tomu, že $S(API_1) = S(BPI_2)$, $|I_1P| = |I_2P|$ a $|AP| = |BP|$, plyne odtud $r_1 = r_2$, což jsme měli dokázat.

Jiné řešení. Vzhledem k souměrnosti trojúhelníku ABC podle osy CD stačí ukázat, že se shodují kružnice vepsané trojúhelníkům BDP a BPC.

Vnější společné tečny shodných kružnic vepsaných úhelníkům ABP a $PECF$ jsou rovnoběžné se střednou CD, tedy kolmé na přímku AB. Uvažujme tu z nich, která protíná úsečky AD, PF a polopřímku opačnou CB. Tyto průsečíky označme po řadě D', P', C' (obr. 51). Ve stejnolehlosti, která zobrazí trojúhelník $BD'C'$ na trojúhelník BDC, odpovídají trojúhelníkům $BD'P'$ a $BP'C'$ trojúhelníky BDP a BPC. Protože kružnice vepsaná čtyřúhelníku $PECF$ je zároveň vepsána i trojúhelníku $BP'C'$ a kružnice vepsaná trojúhelníku ABP je zároveň vepsána trojúhelníku $BD'P'$ a obě uvedené kružnice jsou dle předpokladu shodné, jsou shodné i jejich obrazy ve zmíněné stejnolehlosti, tedy kružnice vepsané trojúhelníkům BDP a BPC.

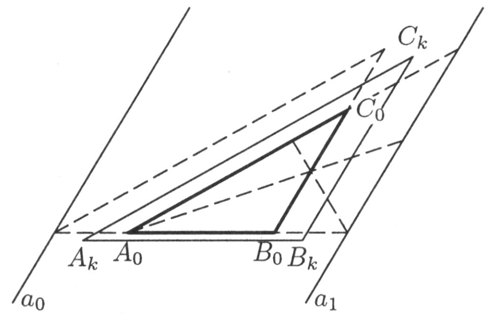


Obr. 51

A – III – 3

Nechť trojúhelník ABC o obsahu 1 je vzorem všech 2 000 trojúhelníků $A_kB_kC_k$, $k \in \{1, 2, \ldots, 2\,000\}$, v různých posunutích. Obsahuje-li každý z těchto trojúhelníků těžiště všech zbývajících, plyne z řešení úlohy A–I–4, že průnikem všech těchto trojúhelníků je trojúhelník $A_0B_0C_0$, který je podobný trojúhelníku ABC, přičemž jeho strany A_0B_0, B_0C_0, C_0A_0 jsou po řadě rovnoběžné se stranami AB, BC, CA a pro poměr podobnosti λ navíc platí $\lambda \in \langle \frac{1}{3}; 1)$.

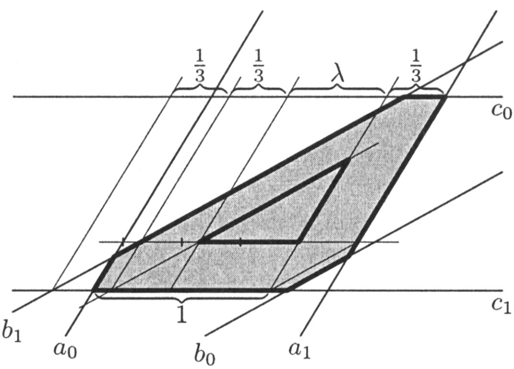
Je-li $A_kB_kC_k$ ($k \in \{1, 2, \ldots, 2\,000\}$) libovolný z daných trojúhelníků, je trojúhelník $A_0B_0C_0$ jeho částí, proto leží vrchol A_k v polorovině $B_0C_0A_0$ ve vzdálenosti nejvýše v_a od hraniční přímky B_0C_0, kde v_a je velikost výšky trojúhelníku ABC příslušné vrcholu A. Na druhou stranu je i vzdálenost strany B_kC_k od vrcholu A_0 nejvýše v_a. Protože navíc trojúhelník $A_0B_0C_0$ obsahuje těžiště všech takovýchto trojúhelníků $A_kB_kC_k$, nemůže být vzdálenost strany B_kC_k od strany $B_0C_0 \parallel B_kC_k$ větší než $\frac{1}{3}v_a$. Vzdálenost vrcholu A_0 od strany B_0C_0 je λv_a, dohromady je tedy vzdálenost obou rovnoběžných přímek B_kC_k, B_0C_0 nejvýše $\min(\frac{1}{3}, 1 - \lambda) \cdot v_a$. Vidíme, že všechny dané trojúhelníky leží uvnitř pásu omezeného dvěma rovnoběžkami $a_0 \parallel a_1 \parallel B_0C_0$ (obr. 52), jejichž vzdálenost od B_0C_0 je v_a a $\min(\frac{1}{3}, 1-\lambda)\cdot v_a$. Analogické tvrzení můžeme vyslovit i pro další dva směry C_0A_0 a A_0B_0. Sjednocení všech daných trojúhelníků musí tedy ležet v průniku všech tří odpovídajících pásů.



Obr. 52

Rozlišíme nyní dva případy podle toho, čemu se rovná $\min(\frac{1}{3}, 1-\lambda)$.

1. Nechť $\frac{1}{3} \leqq \lambda < \frac{2}{3}$. Průnikem odpovídajících tří pásů je šestiúhelník, který vznikne z trojúhelníku T určeného trojicí přímek (a_1, b_1, c_1) odstraněním tří trojúhelníčků T_a, T_b, T_c určených trojicemi přímek (a_0, b_1, c_1), (a_1, b_0, c_1) a (a_1, b_1, c_0). V obr. 53 jsou vyznačeny některé poměrné vzdálenosti vzhledem k $|AB|$, s jejichž pomocí zjistíme, že trojúhelník T je



Obr. 53

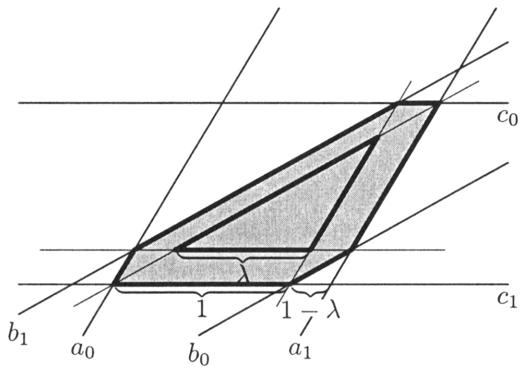
podobný trojúhelníku ABC s poměrem podobnosti $1+\lambda$ a trojúhelníky T_a, T_b, T_c jsou podobné trojúhelníku ABC s poměrem podobnosti $\lambda - \frac{1}{3}$. Z vypočtených poměrů je zároveň zřejmé, že pro $\lambda = \frac{1}{3}$ se trojúhelníky

T_a, T_b, T_c stáhnou do jediného bodu, takže uvedený šestiúhelník se zredukuje na trojúhelník T.

Pro obsah $S(\lambda)$ vyznačeného útvaru tak pro $\lambda < \frac{2}{3}$ platí

$$S(\lambda) = (1+\lambda)^2 - 3\Big(\lambda - \frac{1}{3}\Big)^2 =$$
$$= -2\lambda^2 + 4\lambda + \frac{2}{3} = -2(\lambda-1)^2 + \frac{8}{3} < \frac{8}{3} - 2\cdot\frac{1}{9} = \frac{22}{9}.$$

2. Nechť $\frac{2}{3} \leqq \lambda \leqq 1$. Průnikem odpovídajících tří pásů je opět šestiúhelník (obr. 54), přičemž odpovídající trojúhelník T je podobný troj-



Obr. 54

úhelníku ABC s poměrem podobnosti $3-2\lambda$ a trojúhelníky T_a, T_b, T_c jsou podobné trojúhelníku ABC s poměrem podobnosti $1-\lambda$ (v tomto případě se šestiúhelník zredukuje na trojúhelník T pro $\lambda = 1$).

Pro obsah $S(\lambda)$ v tomto případě platí

$$S(\lambda) = (3-2\lambda)^2 - 3(1-\lambda)^2 =$$
$$= \lambda^2 - 6\lambda + 6 = (\lambda-3)^2 - 3 \leqq \frac{49}{9} - 3 = \frac{22}{9}$$

s rovností pro $\lambda = \frac{2}{3}$.

Zjistili jsme, že sjednocení všech trojúhelníků $A_kB_kC_k$ ($k = 1, 2, \ldots, 2\,000$) je pro $\lambda \neq \frac{2}{3}$ částí rovinného útvaru, jehož obsah je menší než $\frac{22}{9}$. Pro $\lambda = \frac{2}{3}$ je pak částí šestiúhelníku s obsahem $\frac{22}{9}$. Strana tohoto šestiúhelníku, která leží např. na přímce a_0, může obsahovat jen konečně mnoho vrcholů A_i daných trojúhelníků $A_iB_iC_i$, takže v šestiúhelníku určitě najdeme trojúhelníček kladného obsahu, který do uvažovaného sjednocení nepatří. Obsah sjednocení uvažovaných trojúhelníků je proto i v tomto případě menší než $\frac{22}{9}$. Tím je důkaz hotov.

A – III – 4

Ze zadání plyne, že každá z rovnic $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ má dva reálné kořeny, přitom všechny čtyři kořeny obou uvažovaných rovnic jsou navzájem různé. Označme x_1, x_2 kořeny rovnice $f(x) = 0$. Platí tedy $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, kde a je reálné číslo, $a \neq 0$. Číslo x_1 je podle zadání rovněž kořenem rovnice $g\bigl(f(x)\bigr) = 0$, platí tudíž $g\bigl(f(x_1)\bigr) = g(0) = 0$. Odtud vyplývá, že rovnice $g(x) = 0$ má jeden kořen 0. Označme b ($b \neq 0$) druhý kořen této rovnice. Je tedy $g(x) = cx(x - b)$, kde c je reálné číslo, $c \neq 0$. Čísla 0 a b jsou podle zadání rovněž kořeny rovnice $g\bigl(f(x)\bigr) = 0$:

$$g\bigl(f(0)\bigr) = cf(0)\bigl(f(0) - b\bigr) = 0 \quad \text{a} \quad g\bigl(f(b)\bigr) = cf(b)\bigl(f(b) - b\bigr) = 0.$$

Jelikož čísla 0 a b nemohou být kořeny rovnice $f(x) = 0$, plyne odtud $f(0) = f(b) = b$.

Na číselné ose jsou proto jak body 0 a b, tak i body x_1 a x_2 souměrně sdružené podle x-ové souřadnice vrcholu paraboly $y = f(x)$. Čísla 0, b, x_1 a x_2 (tvořící dle zadání aritmetickou posloupnost) mohou tedy být uspořádána dvěma způsoby:

• Čísla x_1 a x_2 leží uvnitř intervalu s krajními body 0 a b. Pak $x_1 = \frac{1}{3}b$ a $x_2 = \frac{2}{3}b$ (při vhodné volbě indexů), tudíž

$$b = f(0) = a\Bigl(-\frac{b}{3}\Bigr)\Bigl(-\frac{2b}{3}\Bigr) = \frac{2ab^2}{9},$$

takže $b = \dfrac{9}{2a}$ a

$$f(x) = a\Bigl(x - \frac{3}{2a}\Bigr)\Bigl(x - \frac{3}{a}\Bigr) = ax^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2a}.$$

• Čísla 0 a b leží uvnitř intervalu s krajními body x_1 a x_2. Pak $x_1 = -b$ a $x_2 = 2b$ (při vhodné volbě indexů), tudíž

$$b = f(0) = ab(-2b) = -2ab^2,$$

takže $b = -\dfrac{1}{2a}$ a

$$f(x) = a\Big(x - \frac{1}{2a}\Big)\Big(x + \frac{1}{a}\Big) = ax^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2a}.$$

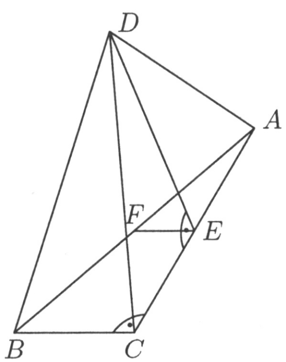
Závěr: Úloze vyhovují všechny kvadratické funkce f tvaru

$$f(x) = ax^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2a} \qquad \text{nebo} \qquad f(x) = ax^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2a},$$

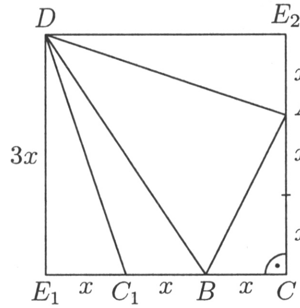
kde a je libovolné nenulové reálné číslo.

A – III – 5

Označme $ABCD$ uvažovaný jehlan s podstavou ABC, kde $|\sphericalangle ACB| = 90°$. Podle textu úlohy byl model rozříznut podél obou odvěsen AC a BC podstavy a dále podél těžnice z vrcholu D jedné ze stěn BCD, ACD. Při řezu podél těžnice ve stěně ABD by totiž nebylo možné rozvinout model do roviny. Bez újmy na obecnosti předpokládejme dále, že řez je veden podél těžnice DE ve stěně ACD (obr. 55), kdy po rozvinutí do roviny vznikne útvar s hranicí $BCAE_2DE_1C_1B$ a pravým úhlem u vrcholu C (obr. 56). Protože tento útvar je čtverec (označme ho C), jsou úhly AE_2D a DE_1C_1 pravé (žádný z nich nemůže být přímý, neboť jejich součet je 180°). Proto je těžnice DE trojúhelníku ACD zároveň jeho výškou a body E_1, E_2 jsou vrcholy čtverce C.

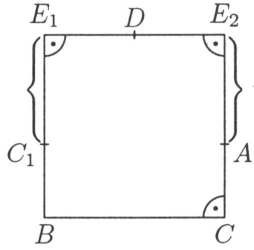


Obr. 55



Obr. 56

Kdyby vrcholy E_1 a E_2 čtverce C byly sousední, z rovnosti $|E_1C_1| = |E_2A|$ a z toho, že C má vrchol C, by plynulo, že $\mathsf{C} = CE_2E_1B$, a tak $|BC| = |BE_1|$, což ale odporuje rovnosti $|BC| = |BC_1|$ (obr. 57). Tak



Obr. 57

jsme (sporem) dokázali, že vrcholy E_1 a E_2 čtverce C *nejsou* sousední, proto k vrcholům C patří (kromě bodů E_1, E_2 a C) nutně bod D (z úseku E_2DE_1 hranice $BCAE_2DE_1C_1B$).

Popsané body rozdělují hranici čtverce $\mathsf{C} = CE_2DE_1$ na úseky, jejichž délky jsou vyznačeny na obr. 56 pomocí výhodného označení $x = \frac{1}{3}a$. Délky ostatních hran jehlanu spočteme podle Pythagorovy věty:

$$|DC| = |DA| = \sqrt{(3x)^2 + (x)^2} = x\sqrt{10},$$
$$|DB| = \sqrt{(3x)^2 + (2x)^2} = x\sqrt{13}, \quad |AB| = x\sqrt{5}.$$

Abychom zjistili objem jehlanu $ABCD$, potřebujeme určit velikost jeho tělesové výšky.

Označíme-li F střed hrany AB, vidíme, že hrana AC je kolmá na rovinu EFD, neboť $AC \perp BC \parallel EF$ a $AC \perp DE$. Rovina EFD je tedy kolmá na základnu ABC.

Tělesová výška jehlanu je proto výškou (z vrcholu D) trojúhelníku DEF. Protože DF tvoří těžnici trojúhelníku ABD, ze známého vzorce pro velikost těžnice dostaneme

$$2|DF|^2 = |DA|^2 + |DB|^2 - \frac{1}{2}|AB|^2 = \frac{41}{2}x^2,$$

takže strany trojúhelníku DEF mají délky $|DF| = \frac{1}{2}x\sqrt{41}$, $|DE| = 3x$ a $|EF| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}x$. Podle Heronova vzorce je obsah S takového trojúhelníku roven

$$S = \frac{x^2}{4}\sqrt{\left(3 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{41}}{2}\right)\left(3 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{41}}{2}\right)\left(3 + \tfrac{\sqrt{41}}{2} - \tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{\sqrt{41}}{2} + \tfrac{1}{2} - 3\right)} =$$
$$= \frac{x^2}{16}\sqrt{(7 + \sqrt{41})(7 - \sqrt{41})(5 + \sqrt{41})(\sqrt{41} - 5)} = \frac{x^2\sqrt{2}}{2},$$

a tak má jeho výška v z vrcholu D velikost $v = 2S/|EF| = 2x\sqrt{2}$. Objem V jehlanu $ABCD$ je proto roven

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| \cdot v = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,x^3 = \frac{2\sqrt{2}}{81}\,a^3.$$

Závěr: Objem uvažovaného jehlanu je $\frac{2}{81}\sqrt{2}\,a^3$.

Poznámka. Ze čtverce lze popsaným způsobem čtyřstěn $ABCD$ požadovaných vlastností vytvořit, když je součet dvou ze tří předpokládaných stěnových úhlů při vrcholu D větší než úhel třetí. Protože jejich součet je $90°$, stačí ověřit, že každý z těchto tří úhlů je menší než $45°$. Nerovnost $|\sphericalangle CDB| < 45°$ je zřejmá, zbylé dvě nerovnosti jsou důsledkem výpočtů, podle kterých $\cos|\sphericalangle ADB| = 9/\sqrt{130} > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ a $\operatorname{tg}|\sphericalangle CDA| = \operatorname{tg} 2|\sphericalangle C_1DE_1| = \frac{3}{4} < 1$.

A – III – 6

Rovnost $1\,000a + 100b + 10c + d + 1 = (10a + c + 1)(10b + d + 1)$ lze upravit na tvar

$$100a(9-b) + 10a(9-d) + 10b(9-c) + c(9-d) = 0.$$

Přitom každý ze čtyř sčítanců na levé straně je nezáporné celé číslo, proto bude tato rovnost splněna, právě když bude každý z nich roven nule. Protože je $a > 0$, musí být $b = d = 9$ a následně i $c = 9$. V tom případě rovnici vyhovuje libovolná číslice a, $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Řešením úlohy jsou tedy právě všechna následující čtyřmístná čísla: 1 999, 2 999, 3 999, 4 999, 5 999, 6 999, 7 999, 8 999 a 9 999.