49. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie C

In: Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 49. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1999/2000. 41. mezinárodní matematická olympiáda. 12. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2005. pp. 24–46.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405013

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

Při dělení jistého přirozeného čísla čísly 19 a 99 vyjdou jako zbytky dvě prvočísla. Součet obou neúplných podílů se rovná 1 999. Určete dělené číslo. (*J. Šimša*)

C – I – 2

Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky, ve kterých spojnice středů vepsané a opsané kružnice svírá s přeponou úhel 45 stupňů. (*M. Krállová*)

C – I – 3

Zjistěte nejmenší přirozená čísla k, pro něž platí jednotlivá tvrzení a), b) a c): Obsadíme-li figurkami libovolných k polí šachovnice 8×8, pak budou obsazena některá

a) tři sousední pole některého řádku,

b) tři sousední pole některé šikmé řady,

c) čtyři sousední pole některého řádku nebo sloupce.

Šikmou řadou rozumíme takovou skupinu polí, jejichž úhlopříčky jednoho z obou směrů leží na jedné a téže přímce. (*J. Šimša*)

C – I – 4

Jirka zhotovil papírový model pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ s podstavou $ABCD$. Když pak model podél čtyř hran rozřízl, bylo ho možno rozvinout (bez překrytí) do roviny. Kolik různých sítí daného jehlanu tak mohl Jirka dostat? Ukázalo se, že síť, kterou Jirka dostal, měla tvar (nekonvexního) sedmiúhelníku. Vypočtěte úhel AVB v boční stěně jehlanu. (*P. Leischner*)

C – I – 5

V číselném výrazu

$$+1+2+3-4-5-6+7+8+9-10-11-12+\ldots+$$
$$+595+596+597-598-599-600),$$

ve kterém chybí levá závorka, jsou postupně vypsána všechna přirozená čísla od 1 do 600; před nimi se pravidelně opakují tři znaménka + a tři znaménka −. Doplňte levou závorku do výrazu tak, aby vyšel výsledek 378. (*P. Černek*)

C – I – 6

Je dán pravidelný šestiúhelník $KLMNOP$. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB tak, aby jeho vrchol C ležel na úsečce NP, body M, O, K ležely po řadě na přímkách AB, BC, CA a aby přímka NP rozdělila trojúhelník ABC na dvě části se stejným obsahem.

(*K. Černeková*)

C – S – 1

Najděte nejmenší přirozené číslo k, pro které platí: Vybereme-li libovolných k různých čísel z množiny $\{1, 4, 7, 10, 13, \ldots, 1\,999\}$, pak mezi vybranými existují dvě různá čísla, jejichž součet se rovná 2 000.

(*J. Zhouf*)

C – S – 2

Čtverec $ABCD$ a obdélník $AEFD$ mají takovou vzájemnou polohu, že bod B leží na kružnici vepsané trojúhelníku AEF. Vypočtěte poměr délky a šířky obdélníku $AEFD$. (*J. Šimša*)

C – S – 3

Jestliže celé kladné číslo N vydělíme číslem 19 a získaný neúplný podíl dále vydělíme číslem 99, vyjde nám při druhém dělení stejný neúplný podíl a stejný zbytek, jako když původní číslo N vydělíme číslem 1 999. Určete jak nejmenší, tak největší takové číslo N. (*J. Šimša*)

C – II – 1

Ze dřeva je vyrobeno šest shodných pravidelných čtyřbokých jehlanů a krychle. Stěna krychle je shodná s podstavami jehlanů. Určete poměr povrchu krychle a tělesa, které vznikne slepením podstav jehlanů se stěnami krychle, je-li poměr objemů těchto těles 1 : 2. (*P. Leischner*)

C – II – 2

Milan zapsal za sebe několik prvních přirozených čísel, vynechal při tom jen čísla 4, 9, 14, 19, 24, 29, ... Pak mezi zapsaná čísla vepsal střídavě znaky minus a plus, takže dostal výraz

$$1-2+3-5+6-7+8-10+11-12+13-15+\ldots$$

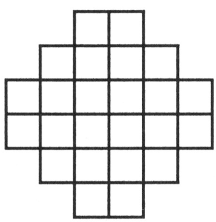
Nakonec ještě vepsal levou závorku za každý znak minus a stejný počet pravých závorek zapsal až na konec výrazu:

$$1-(2+3-(5+6-(7+8-(10+11-(12+13-(15+\ldots))))))$$

Výsledný výraz měl hodnotu 103. Kolik čísel v Milanově výrazu bylo? (Zjistěte všechny možnosti.) (*P. Černek*)

C – II – 3

Jaký největší počet figurek je možno rozestavit na jednotlivá pole hrací desky z obrázku tak, aby v žádné šikmé řadě nebyla figurkami obsazena



žádná tři sousední pole? Nezapomeňte zdůvodnit, proč větší počet figurek takto rozestavit nelze. (Šikmou řadou rozumíme takovou skupinu polí, jejichž úhlopříčky jednoho z obou směrů leží na jedné přímce.)

(*J. Bábeľa*)

C – II – 4

V rovině jsou dány body A, L, M takové, že $|AL| = 6{,}3\,\mathrm{cm}$, $|AM| = 5{,}6\,\mathrm{cm}$, $|LM| = 1{,}8\,\mathrm{cm}$. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jemuž lze vepsat kružnici, která se dotýká ramene BC v bodě L a základny CD v bodě M (body dotyku se základnou AB a ramenem AD lichoběžníku $ABCD$ nejsou dány). (*J. Šimša*)

C – I – 1

Obě dělení hledaného čísla N vyjádříme rovnostmi

$$N = 19a + p \quad \text{a} \quad N = 99b + q,$$

kde a, b jsou příslušné neúplné podíly a p, q příslušné zbytky. Podle zadání jsou čísla p, q prvočísla, přičemž jako zbytky splňují nerovnosti $p < 19$ a $q < 99$. Nezáporná celá čísla a, b jsou dle zadání zase taková, že jejich součet se rovná číslu 1 999. Proto platí $b = 1\,999 - a$ a z dvojího vyjádření čísla N,

$$N = 19a + p = 99 \cdot (1\,999 - a) + q,$$

odvodíme rovnost $118a + (p - q) = 197\,901$. Protože rozdíl zbytků $p - q$ je „malé" číslo, přesněji $-99 < p - q < 19$, je podle poslední rovnosti číslo $118a$ takový násobek čísla 118, jenž leží mezi čísly $197\,901 - 19$ a $197\,901 + 99$. Dělením $197\,901 : 118$ zjistíme, že $197\,901 = 1\,677 \cdot 118 + 15$. Proto nutně platí $a = 1\,677$ (takže $b = 322$) a $p - q = 15$. Z poslední rovnosti plyne, že jedno z prvočísel p, q je liché a druhé sudé, tedy $q = 2$ a $p = 17$. Zbývá vypočítat hodnotu N:

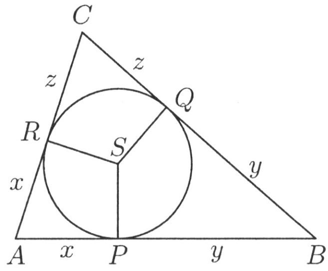
$$N = 19 \cdot 1\,677 + 17 = 99 \cdot 322 + 2 = 31\,880.$$

Poznámka. Můžeme také nejprve odhadnout velikost hledaného čísla N, například řešením „přibližné" rovnice $N/19 + N/99 = 1\,999$, která má kořen $N \doteq 31\,865$. Pak pomocí nejbližších násobků čísel 19 a 99 ($19 \cdot 1\,677 = 31\,863$, $99 \cdot 322 = 31\,878$, $19 \cdot 1\,678 = 31\,882$) určíme jediné možné hodnoty neúplných podílů a, b (stačí diskutovat případy $N < 31\,878$, $31\,878 \leqq N < 31\,882$ a $N \geqq 31\,882$).

Odpověď: Hledané číslo je rovno 31 880.

C – I – 2

Část A. Předpokládejme, že kružnice vepsaná *obecnému* trojúhelníku ABC se dotýká stran AB, BC, AC po řadě v bodech P, Q a R (obr. 1). Z hodin geometrie žáci ví o souměrnosti obou tečen vedených z daného



Obr. 1

bodu k dané kružnici. Úsečky AP a AR jsou tudíž shodné stejně jako úsečky BP a BQ a úsečky CQ a CR. Ukážeme, jak lze délky

$$x = |AP| = |AR|, \quad y = |BP| = |BQ|, \quad z = |CQ| = |CR|$$

vyjádřit pomocí délek stran $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Podle obr. 1 platí

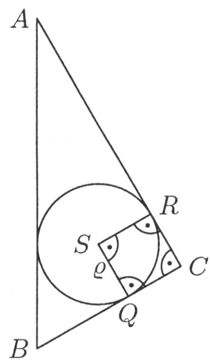
$$x + y = c, \; y + z = a, \; x + z = b,$$

což je soustava tří lineárních rovnic, z níž snadno plynou užitečné vzorce

$$x = \frac{b+c-a}{2}, \; y = \frac{a+c-b}{2}, \; z = \frac{a+b-c}{2}.$$

Část B. Nyní předpokládejme, že ABC je *pravoúhlý* trojúhelník s přeponou AB. Označme S střed kružnice vepsané a Q, R její body dotyku s odvěsnami BC, AC (obr. 2). Protože $SQCR$ je pravoúhelník, jehož sousední strany SQ a SR jsou shodné (mají délku rovnou poloměru ϱ kružnice vepsané), jedná se o čtverec o straně ϱ. Délku úseku $z = |CQ|$ jsme však vypočetli v části A. Tak pro poloměr ϱ kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku s odvěsnami a, b a přeponou c dostáváme vzorec

$$\varrho = \frac{a+b-c}{2}.$$



Obr. 2

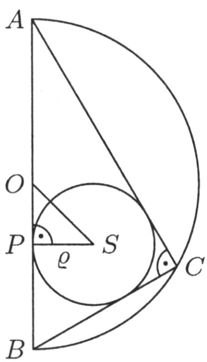
Část C. Předpokládejme konečně, že ABC je pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB, který splňuje podmínku z textu úlohy. Podle Thaletovy věty je střed O kružnice opsané trojúhelníku ABC středem přepony AB. Podle zadání má jeden z úhlů SOA, SOB (kde S je střed vepsané kružnice) velikost 45°; nechť je to úhel SOB (obr. 3), jinak prohodíme označení vrcholů A, B. Bod P, v němž se kružnice vepsaná dotýká strany AB, je pak vnitřním bodem úsečky OB. Podle části A platí vzorec $|BP| = \frac{1}{2}(a + c - b)$, takže

$$|OP| = |OB| - |BP| = \frac{c}{2} - \frac{a + c - b}{2} = \frac{b - a}{2}.$$

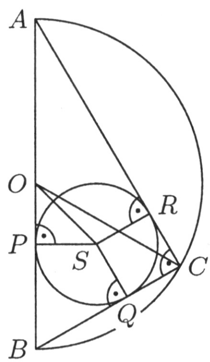
Vyjádřili jsme délku odvěsny OP pravoúhlého trojúhelníku SOP. Jeho druhá odvěsna SP má podle části B délku $|SP| = \varrho = \frac{1}{2}(a + b - c)$. Protože však úhel SOP má dle předpokladu velikost 45°, je trojúhelník SOP rovnoramenný:

$$|OP| = |SP|, \text{ neboli } \frac{b - a}{2} = \frac{a + b - c}{2}, \text{ neboli } 2a = c.$$

Strany pravoúhlého trojúhelníku ABC jsou proto v poměru $a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$, takže jeho vnitřní úhly jsou, jak je dobře známo, 30°, 60° a 90°. Pro úplnost je třeba ještě ukázat, že takový trojúhelník skutečně požadovanou vlastnost má. To lze provést obrácením předchozího postupu: z rovnosti $2a = c$ se odvodí rovnost $|OP| = |SP|$, která znamená, že pravoúhlý trojúhelník SOP je rovnoramenný, takže úhel SOP má skutečně velikost 45°.



Obr. 3



Obr. 4

Stručné řešení podle obr. 4: Úsečka SO svírá s přeponou AB úhel 45°, právě když $|OP| = |SP|$. Protože však $|SP| = |SR| = |QC|$ a $|PB| = |QB|$, je rovnost $|OP| = |SP|$ ekvivalentní s rovností $|OP| + |PB| = |QC| + |QB|$, tedy s rovností $|OB| = |BC|$. Podle Thaletovy věty však vždy platí $|OB| = |OC|$, takže rovnost $|OB| = |BC|$ nastane, právě když je trojúhelník OBC rovnostranný, tedy právě když úhel ABC měří $60°$.

Odpověď: Požadovanou vlastnost mají právě ty pravoúhlé trojúhelníky, jejichž ostré vnitřní úhly mají velikost $30°$ a $60°$.

C – I – 3

Danou řadu 11 písmen rozdělíme nejprve zleva doprava na skupiny po 4, 4 a 3 písmenech. Protože nikde za sebou nestojí čtyři písmena B, je v první skupině čtyř písmen obsaženo aspoň jedno A, totéž platí i o druhé skupině čtyř písmen. Tak jsme dokázali, že v celé řadě 11 písmen jsou aspoň dvě A. Mohou to být právě dvě A, jak ukazuje příklad řady BBBA-BBBABBB. Podruhé rozdělíme celou řadu zleva doprava na skupiny po 3, 3, 3 a 2 písmenech. Protože nikde za sebou nestojí tři písmena A, je v každé skupině tři sousedních písmen aspoň jedno B. Protože jsme vyčlenili tři takové (disjunktní) skupiny, jsou v celé řadě aspoň tři písmena B. Jinak řečeno, v celé řadě 11 písmen je nejvýše osm písmen A. Může to být právě osm A, jak ukazuje příklad řady AABAABAABAA. Kdybychom řešili obecnější úlohu o řadě N písmen A a B, ve které nikde za sebou nestojí ani a písmen A, ani b písmen B, o odpovědi na stejnou otázku by rozhodovala dělení $N : a$ a $N : b$ (se zbytky).

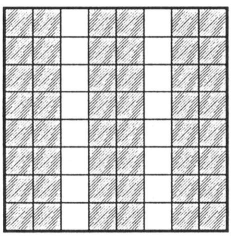
a) Všimněme si, že v každém řádku je možné obsadit nejvýše šest polí tak, aby mezi obsazenými nebyla žádná tři sousední pole (stačí rozdělit všech osm polí řádku na skupiny 3, 3 a 2 sousedních polí a zopakovat úvahu z předchozího odstavce). Proto lze na celé šachovnici obsadit nejvýše $8 \times 6 = 48$ polí tak, aby v žádném řádku nebyla obsazena tři sousední pole. Jinak řečeno, obsadíme-li *libovolných* 49 polí, pak obsazena budou některá tři sousední pole některého řádku. Tento jev nenastane pro (jediné) obsazení 48 polí, které vidíte na obr. 5, kde jsou obsazená pole vyznačena šrafováním (zmíněná jedinečnost plyne z toho, že je jediné možné obsazení šesti polí v každém řádku). Proto je hledané číslo k rovno 49.

b) Zkusme postupovat obdobně jako při řešení části a). Vyberme tedy jeden z obou směrů šikmých řad, například směr „zleva zdola napravo nahoru“ a posuzujme, kolik polí lze obsadit v jednotlivých šikmých řadách vybraného směru tak, aby v žádné z nich nebyla obsazena žádná tři sousední pole. Počty všech polí v těchto 15 řadách jsou (shora dolů) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 a 1; proto v nich lze požadovaným způsobem (při požadované podmínce) obsadit po řadě nejvýše 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2 a 1 pole (znovu uplatníme úvahu o disjunktních trojicích sousedních polí z úvodního odstavce). Proto lze na celé šachovnici obsadit nejvýše

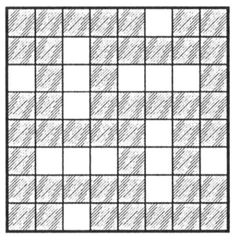
$$1+2+2+3+4+4+5+6+5+4+4+3+2+2+1=48$$

polí tak, aby nebyla obsazena žádná tři sousední pole žádné šikmé řady vybraného směru. Obsadíme-li s touto podmínkou v každé z uvažovaných 15 šikmých řad největší možný počet polí vhodným způsobem (v řadách o 1, 2, 5 a 8 polích je toto „maximální“ obsazení jediné, v řadách o 3, 4, 6 a 7 polích nikoliv, zvolme i v nich obsazení z pohledu zleva doprava typu XXOXXO...), dostaneme na celé šachovnici opět obsazení 48 polí z obr. 6. Co je důležité: při tomto obsazení také v šikmých řadách druhého směru nejsou nikde obsazena tři sousední pole! Shrňme, co jsme zjistili:

1. Obsadíme-li na šachovnici libovolných 49 polí, budou mezi nimi tři sousední pole některé šikmé řady zvoleného směru.
2. Na šachovnici lze obsadit 48 polí tak, aby mezi nimi nebyla žádná tři sousední pole žádné šikmé řady (jednoho i druhého směru).



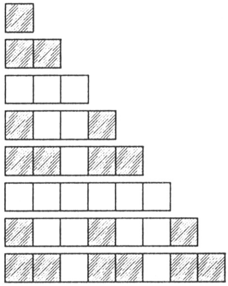
Obr. 5



Obr. 6

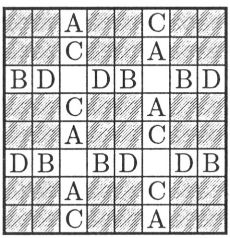
To znamená, že pro část b) úlohy je hledané číslo k rovno 49. Dodejme, že existují právě čtyři různá obsazení 48 polí zmíněná v (2). Kromě úplného obsazení šesti sloupců z obr. 5 a obsazení, které je jeho otočením o 90° (je tedy úplným obsazením šesti řad), je to zajímavé obsazení z obr. 6 a jeho „zrcadlové překlopení“.

DůKAZ. Jak víme, při každém obsazení 48 polí zmíněném v (2) musí být v každé šikmé řadě šachovnice obsazen největší možný počet polí (výčet těchto maximálních počtů jsme uvedli výše); na obr. 7 jsou znázorněny řady polí délek 1 až 8, šrafováním jsou v nich vyznačena právě ta pole, která jsou *nutně obsazena*, je-li v celé řadě jakkoliv obsazen pří-

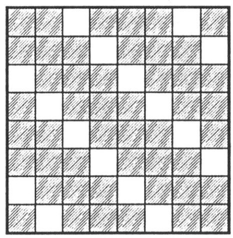


Obr. 7

slušný maximální počet polí (připomínáme podmínku: obsazena nejsou žádná tři sousední pole); znovu zopakujme, že všechna obsazená pole jsou vyznačena pouze v řadách o 1, 2, 5 a 8 polích. Odtud plyne, že při libovolném obsazení 48 polí zmíněném v (2) je nutně obsazeno 36 polí vyznačených na obr. 8; dále už je snadné ukázat, že zbývajících 12 obsazených polí je tvořeno dvěma šesticemi polí značených na obr. 8 jednou z dvojic písmen: A a C, B a C, A a D nebo B a D (obr. 5 odpovídá dvojici písmen B a D, obr. 6 dvojici A a D).

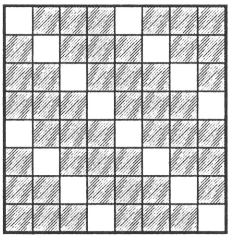


Obr. 8

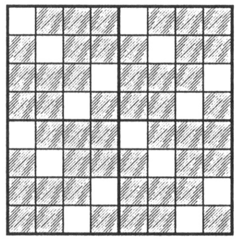


Obr. 9

c) Jako v části b) se zajímáme o skupiny polí dvou směrů, v tomto případě o řádky a sloupce. Posuzujme například nejdříve, kolik polí lze obsadit v jednotlivých řádcích tak, aby v žádném z nich nebyla obsazena čtyři sousední pole. Jak zjistíme pomocí rozdělení řádku na dvě čtveřice sousedních polí, obsazených polí bude v každém řádku nejvýše šest. Proto lze na celé šachovnici obsadit nejvýše $8 \times 6 = 48$ polí tak, aby v žádném řádku nebyla obsazena čtyři sousední pole. Jinak řečeno: obsadíme-li libovolných 49 polí, pak obsazena budou čtyři sousední pole některého řádku. (Je zajímavé srovnat tento závěr s obdobným závěrem z řešení části a), kde jsme se zajímali nikoliv o čtveřice, nýbrž o trojice sousedních polí.) Nyní samozřejmě vzniká otázka, zda je možné na šachovnici obsadit 48 polí tak, aby nebyla obsazena čtyři sousední pole nejen v žádném řádku, ale ani v žádném sloupci. Taková obsazení existují, dva příklady vidíme na obr. 9 a 10. Proto i v části c) je hledané číslo k rovno 49. Bez důkazu dodejme ještě popis všech obsazení 48 polí šachovnice, kdy mezi obsazenými poli nejsou čtyři sousední pole žádného řádku ani sloupce: Celou šachovnici rozdělíme na čtyři čtvrtiny 4×4, v jedné z nich, například levé horní části, obsadíme z 16 polí právě 12 tak, aby v ní zůstalo neobsazeno právě jedno pole v každém ze čtyř řádků i v každém ze čtyř sloupců (to je možné udělat $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ způsoby, jeden z nich, odlišný od způsobů z obr. 9 a 10, je na obr. 11), a toto obsazení shodně přeneseme vodorovnými a svislými posunutími o čtyři pole do ostatních tří čtvrtin celé šachovnice.



Obr. 10



Obr. 11

Odpověď: Hledané číslo k je pro každou z částí a)–c) rovno témuž číslu 49 (pořadovému číslu tohoto ročníku MO).

C – I – 4

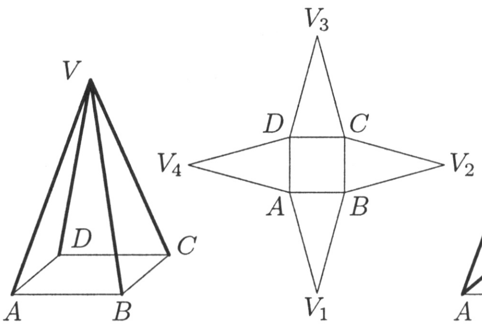
Počet různých sítí daného jehlanu určíme tak, že nejprve všechny možné sítě nakreslíme. Abychom některou možnost neopomenuli, měli bychom do výčtu sítí vnést *určitý systém*. Popíšeme dva přístupy, které takový systém vytvářejí.

Přístup 1 („od sítě k jehlanu"). Každá síť bude složena z jednoho čtverce o straně a a čtyř rovnoramenných trojúhelníků o stranách a, b, b, kde a značí délku podstavné hrany a b délku boční hrany daného jehlanu $ABCDV$. Přemýšlejme tedy o tom, jak takový čtverec a čtyři trojúhelníky „slepit" podél shodných stran do „celku" a zda tento celek skutečně vytvoří síť jehlanu. Je velmi přirozené rozčlenit řešení tohoto úkolu *podle počtu stran čtverce, které budou slepeny* (možné počty jsou 1 až 4).

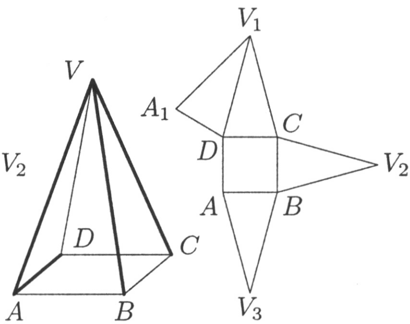
Přístup 2 („od jehlanu k síti"). Přemýšlejme o tom, jak rozříznout daný jehlan $ABCDV$ podél čtyř hran, abychom po rozvinutí dostali jeho síť. (Brzy si při tom uvědomíme jeden obecný poznatek: z každého vrcholu tělesa musí vycházet aspoň jedna hrana řezu.) Protože nám jde o počet různých (tj. po dvou neshodných) sítí, s ohledem na symetrii daného jehlanu není příliš vhodné systematizovat čtveřice hran řezu podle toho, zda obsahují některé konkrétní hrany (jako např. hrany AB, AV apod.). Výhodnější je rozdělení těchto čtveřic do skupin podle toho, *kolik hran řezu je v jehlanu podstavných* (a kolik bočních).

Protože oba popsané přístupy vedou ke shodné systematizaci (je-li právě k hran řezu podstavných, je v příslušné síti právě $4-k$ stran čtverce slepeno s trojúhelníky), popíšeme výčet všech sítí jen podle přístupu 2:

1. Neleží-li v podstavě $ABCD$ žádná hrana řezu, je jehlan rozříznut podél všech čtyř bočních hran, příslušná síť je na obr. 12.



Obr. 12

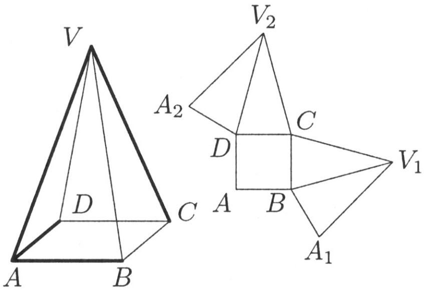


Obr. 13

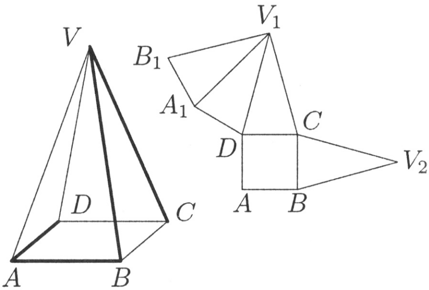
2. Předpokládejme, že v podstavě $ABCD$ leží jediná hrana řezu, například hrana AD. Z vrcholů B a C musí vycházet nějaké hrany řezu, mohou to tedy být jedině hrany BV a CV. Tři hrany řezu jsou tedy AD, BV a CV, s ohledem na symetrii je lhostejno, zda je čtvrtou hranu řezu AV nebo DV, nechť je to tedy hrana AV jako na obr. 13.
3. Předpokládejme, že v podstavě $ABCD$ leží právě dvě hrany řezu. Rozlišme, zda jsou to hrany sousední (např. AB a AD), nebo hrany protější (např. AD a BC); pro větší přehlednost oba případy posuďme v oddělených odstavcích:

(3a) Je-li podstava rozříznuta právě podél hran AB a AD (takže řezem v podstavě je lomená čára BAD), musí být třetí hranou řezu hrana CV, čtvrtá hrana řezu je pak jedna z hran AV, BV nebo DV. S ohledem na symetrii případů, kdy je čtvrtou hranou řezu

BV nebo DV, uvádíme jen obrázky pro hrany řezu AV (obr. 14) a BV (obr. 15).

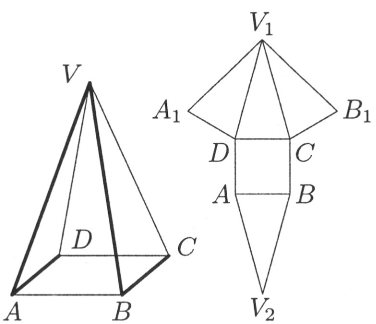


Obr. 14

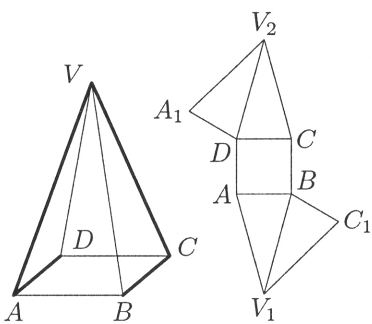


Obr. 15

(3b) Je-li podstava rozříznuta právě podél hran AD a BC, je třetí hranou řezu jedna z bočních hran AV, DV a čtvrtou hranou řezu jedna z bočních hran BV, CV (nemohou to totiž být ani obě hrany AV, DV, ani obě hrany BV, CV). S ohledem na symetrii stačí rozlišit jen dva případy: boční hrany řezu jsou buď AV a BV (obr. 16), nebo AV a CV (obr. 17).

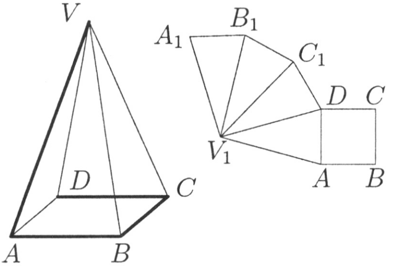


Obr. 16

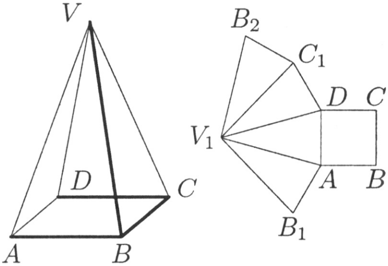


Obr. 17

4. Předpokládejme, že v podstavě $ABCD$ leží právě tři hrany řezu, například hrany AB, BC a CD, takže řezem v podstavě je lomená čára $ABCD$. S ohledem na symetrii nyní stačí rozlišit jen dva případy: čtvrtá hrana řezu vede do vrcholu V buďto z jednoho z obou krajních vrcholů zmíněné lomené čáry $ABCD$, například bodu A (obr. 18), nebo z jednoho z obou prostředních vrcholů, například bodu B (obr. 19).



Obr. 18



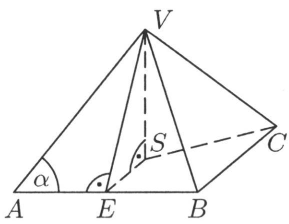
Obr. 19

Zjistili jsme, že daný jehlan má právě osm různých sítí. (Většina žáků asi správně všech osm sítí do svých řešení nakreslí, aniž pocítí nutnost vysvětlovat, proč jiné sítě neexistují. Diskutujme s nimi o této otázce.)

Přejděme nyní k druhé části úlohy, otázce, kdy některá ze sítí daného jehlanu má tvar nekonvexního sedmiúhelníku. Podle obrázků vidíme, že každá síť má, obecně vzato, osm vrcholů; jejich počet se sníží na sedm, právě když se úhel u jednoho z osmi obecných vrcholů „napřímí", tj. bude mít velikost 180°. Velikosti všech dotyčných úhlů lze snadno vyjádřit pomocí $\omega = |\sphericalangle AVB|$ a $\alpha = |\sphericalangle BAV|$; zjistíme tak, popsaná situace nastane, jen když jeden z úhlů

$$2\alpha,\ \alpha + 90^\circ,\ 2\alpha + 90^\circ,\ 2\omega,\ 3\omega \text{ nebo } 4\omega \qquad (*)$$

bude 180°. Položme si nyní poněkud obecnější otázku: Jaké hodnoty α a ω jsou přípustné, tj. odpovídají nějakému jehlanu $ABCDV$? Označme S střed čtverce $ABCD$ a E střed hrany AB (obr. 20), z pravoúhlého



Obr. 20

trojúhelníku EVS plyne, že $|EV| > |ES|$ neboli $|EV| > |AE|$, proto pro úhel α v pravoúhlém trojúhelníku AVE platí $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ (pro $\alpha = 45^\circ$ bychom dostali „zdegenerovaný" jehlan s nulovou výškou, pro $\alpha = 90^\circ$ „jehlan" s nekonečnou výškou, tedy hranol). Zároveň je jasné, že pro každé $\alpha \in (45^\circ, 90^\circ)$ odpovídající jehlan existuje. Odtud vzhledem k rovnosti $2\alpha + \omega = 180°$ plyne, že přípustné hodnoty ω zaplní interval $(0°, 90°)$. Proto z úhlů $(*)$ mohou být přímé jedině úhly 3ω a 4ω. Pro $\omega = 60°$ mají tvar sedmiúhelníku sítě z obr. 15 a 16, pro $\omega = 45°$ sítě z obr. 18 a 19.

Odpověď: Jirka mohl dostat právě osm různých sítí. Úhel AVB měl velikost $45°$ nebo $60°$.

C – I – 5

Rozdělíme je do pěti etap.

Část A. Podle způsobu opakování znamének rozdělíme daný výraz (ještě bez obou závorek) na 100 úseků po šesti číslech

$$+1+2+3-4-5-6, \quad +7+8+9-10-11-12,$$
$$+13+14+15-16-17-18, \ \ldots,$$
$$+589+590+591-592-593-594,$$
$$+595+596+597-598-599-600$$

(říkejme jim dále stručně „úseky“). Při výpočtu celého výrazu bude výhodné určovat „dílčí součty“ právě po těchto úsecích: po doplnění chybějící levé závorky se totiž naruší „celistvost“ jediného úseku (toho, do kterého závorku doplníme).

Uložte žákům úkol, aby vypsali čísla toho úseku, který obsahuje dané číslo x, například $x = 24$, $x = 100$, $x = 571$ apod. Žáci si tak uvědomí, jaký význam má při tom zbytek při dělení čísla x číslem 6, a tím se připraví na to, aby dokázali zapsat čísla v k-tém úseku ($k = 1, 2, 3, \ldots, 100$) takto:

$$6k-5, \ 6k-4, \ 6k-3, \ 6k-2, \ 6k-1, \ 6k.$$

Část B. Určeme nyní hodnoty výrazů tvořených jednotlivými úseky. Po několika prvních výpočtech

$$1+2+3-4-5-6 = -9, \quad 7+8+9-10-11-12 = -9, \quad \ldots$$

dojdeme k závěru, že pro každý úsek vyjde -9. Ověřme to následujícím algebraickým postupem, přičemž první číslo úseku označíme písmenem x:

$$x+(x+1)+(x+2)-(x+3)-(x+4)-(x+5) = (3x+3)-(3x+12) = -9.$$

(V tomto místě ještě není důležité, že číslo x je tvaru $6k-5$.)

Část C. Zjistíme nyní možné hodnoty V zkoumaného výrazu v případě, kdy chybějící levou závorku vepíšeme před číslo z některého konkrétního úseku, například toho, který obsahuje číslo 100:

$$V = 1 + \ldots + \underbrace{*97 + *98 + *99 - *100 - *101 - *102}_{\text{někam sem doplníme závorku}} + 103 + \ldots - 600)$$

Hvězdičkami jsme označili možná místa pro doplňovanou závorku. Snadno určíme, že před číslem 97 je 16 úseků a že za číslem 102 je 83 úseků ($16 + 83 = 99$, nezapočítaný stý úsek je tvořen čísly od 97 do 102). Je zřejmé, že pokud umístíme závorku na místo před číslo 97, 98 nebo 99, tedy za znaménko plus, přispěje do výsledku V všech 100 úseků číslem -9, takže vyjde $V = 100 \cdot (-9) = -900$. Umístíme-li závorku na místo před číslo 100, 101 nebo 102, tedy za znaménko minus, přispěje 16 úseků (před číslem 97) do výsledku V číslem -9, zatímco 83 úseků (za číslem 102) přispěje číslem $-(-9) = 9$. Se závorkou před číslem 100 tak vyjde

$$V = 16 \cdot (-9) + 97 + 98 + 99 - 100 + 101 + 102 + 83 \cdot 9 = 1\,000,$$

se závorkou před číslem 101

$$V = 16 \cdot (-9) + 97 + 98 + 99 - 100 - 101 + 102 + 83 \cdot 9 = 798,$$

konečně se závorkou před číslem 102

$$V = 16 \cdot (-9) + 97 + 98 + 99 - 100 - 101 - 102 + 83 \cdot 9 = 594.$$

Část D. Konkrétní postup z části C nyní zopakujeme v obecné situaci, kdy závorku doplníme do k-tého úseku, na místo některé z hvězdiček:

$$\begin{aligned} V = 1 + \ldots + *[6k-5] + *[6k-4] + *[6k-3] - \\ - *[6k-2] - *[6k-1] - *[6k] + \ldots - 600) \end{aligned}$$

(vyjádření čísel jsme zapsali do *hranatých* závorek kvůli odlišení od vepisované *kulaté* závorky). V části C bylo k rovno číslu 17, nyní je to libovolné přirozené číslo od 1 do 100 včetně. Před číslem $6k - 5$ je zřejmě $(k - 1)$ úseků a za číslem $6k$ je $(100 - k)$ úseků. Pokud umístíme závorku na místo před číslo $6k - 5$, $6k - 4$ nebo $6k - 3$, tedy za znaménko plus, přispěje do výsledku V všech 100 úseků číslem -9, takže vyjde

$V = 100 \cdot (-9) = -900$. Umístíme-li závorku na místo před číslo $6k-2$, $6k-1$ nebo $6k$, tedy za znaménko minus, přispěje prvních $(k-1)$ úseků číslem -9, zatímco posledních $(100-k)$ úseků přispěje číslem $-(-9)=9$. Se závorkou před číslem $6k-2$ tak vyjde

$$V = (k-1)\cdot(-9) + [6k-5] + [6k-4] + [6k-3] - [6k-2] + [6k-1] + \\ + [6k] + (100-k)\cdot 9 = 898 + 6k,$$

se závorkou před číslem $6k-1$

$$V = (k-1)\cdot(-9) + [6k-5] + [6k-4] + [6k-3] - [6k-2] - [6k-1] + \\ + [6k] + (100-k)\cdot 9 = 900 - 6k,$$

konečně se závorkou před číslem $6k$

$$V = (k-1)\cdot(-9) + [6k-5] + [6k-4] + [6k-3] - \\ - [6k-2] - [6k-1] - [6k] + (100-k)\cdot 9 = 900 - 18k.$$

Našli jsme všechny možné hodnoty V zkoumaného výrazu po doplnění levé závorky.

Část E. Zjistíme nyní všechny případy, kdy výsledek V má hodnotu 378 ze zadání úlohy. Podle části D stačí řešit rovnice

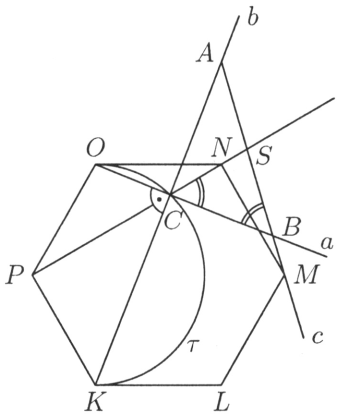
$$898 + 6k = 378,\ \ 900 - 6k = 378,\ \ 900 - 18k = 378$$

v oboru přirozených čísel k od 1 do 100. Řešení má pouze druhá a třetí rovnice, a to $k = 87$ resp. $k = 29$. Hodnotě $k = 87$ odpovídá umístění závorky před číslo $6k - 1 = 521$, hodnotě $k = 29$ odpovídá umístění závorky před číslo $6k = 174$.

Odpověď: Úloha má dvě řešení; závorku doplníme buďto bezprostředně před číslo 521, nebo bezprostředně před číslo 174.

C – I – 6

Jak je tomu u řešení konstrukčních úloh obvyklé, načrtneme nejdříve do jednoho obrázku daný šestiúhelník $KLMNOP$ i hledaný trojúhelník ABC tak, aby jejich tvar i vzájemná poloha aspoň přibližně odpovídaly zadání (obr. 21). Speciální poloha daných bodů K, L, M, N, O, P



Obr. 21

nebude mít na způsob konstrukce trojúhelníku ABC žádný vliv. Proto je možné k rozboru úlohy využít i takový náčrtek, do kterého nejprve nakreslíme pravoúhlý trojúhelník ABC, teprve pak na přímkách AB, BC, CA libovolně vybereme body M, O, K; konečně výběr bodů N a P podřídíme pouze tomu, že body N, C, P mají v tomto pořadí ležet na přímce, jež dělí trojúhelník ABC na dvě části se stejným obsahem; jde tedy o přímku CS, kde S je střed strany AB.

Z obr. 21 je patrné, že bod C můžeme sestrojit jako průsečík úsečky NP s Thaletovou kružnicí τ nad průměrem OK, neboť úhel OCK je pravý. Jakmile takto nalezneme bod C, sestrojíme přímky $a = OC = BC$ a $b = KC = AC$. Všimněme si nyní trojúhelníku SBC. Podle Thaletovy věty platí $|SC| = |SB|$, takže přímka a svírá shodné ostré úhly s přímkami PN a AB (tyto úhly jsou vyznačeny na obrázku). Protože přímka a je již sestrojena a přímka PN je určena zadáním úlohy, má podle předchozí věty (prozatím neznámá) přímka $c = AB$ jednoznačně určený směr; protože má tato přímka c navíc procházet daným bodem M, můžeme ji nyní sestrojit. Pak už určíme vrcholy A a B jako průsečíky přímky c po řadě s přímkami b a a. Tím je celý postup konstrukce hotov. Důkaz správnosti: výsledkem konstrukce je zřejmě pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB, jehož vrchol C leží na úsečce NP a jehož strany BC, CA, AB leží po řadě na přímkách a, b, c, které procházejí po řadě body O, K, M; zbývá vysvětlit, proč průsečík S přímky PN s přeponou AB je jejím středem. To ale plyne z toho, že podle konstrukce má trojúhelník SBC shodné úhly při vrcholech B a C.

Ze vzájemné polohy úsečky NP a kružnice τ nad průměrem OK plyne, že pro každý pravidelný šestiúhelník $KLMNOP$ má úloha jediné řešení.

C – S – 1

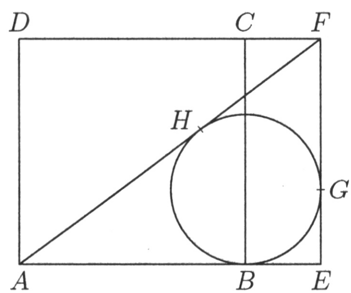
Označme $\mathsf{M} = \{1, 4, 7, 10, 13, \ldots, 1\,999\}$ a vypišme všechny součty dvou *různých* (to už nebudeme dále zdůrazňovat) čísel z M, které se rovnají číslu 2 000:

$$2\,000 = 1 + 1\,999 = 4 + 1\,996 = 7 + 1\,993 = \ldots = 997 + 1\,003.$$

S výjimkou jediného čísla 1 000 vystupuje každé číslo z M v právě jednom součtu (součet $1\,000 + 1\,000$ se dle zadání neuvažuje). Protože $997 = 1 + 3 \cdot 332$, je vypsáno právě 333 součtů. Lze tedy vybrat 334 čísel z M (po jednom z každého vypsaného součtu spolu s číslem 1 000, tedy například čísla $1, 4, 7, \ldots, 997, 1\,000$) tak, že součet žádných dvou vybraných čísel není 2 000. Vybereme-li však libovolných 335 čísel z M, pak některá dvě vybraná čísla jsou sčítanci jednoho z vypsaných součtů (zopakujme: vypsaných součtů je 333 a chybí v nich jediné číslo z M). Proto je $k = 335$ hledaná hodnota.

C – S – 2

Protože oba pravoúhelníky musí ležet ve stejné polorovině s hraniční přímkou AD, leží bod B na polopřímce AE. Proto se zmíněná kružnice dotýká strany AE trojúhelníku AEF právě v bodě B. Body, v nichž se kružnice dotýká stran EF a FA, označme po řadě G a H (obr. 22). Označme ještě $a = |AB| = |EF|$ a nechť $|AE| = ka$, $k > 1$. Ze sou-



Obr. 22

měrností dvojic tečen ke kružnici plynou rovnosti $|AH| = |AB| = a$, $|EG| = |EB| = |AE| - |AB| = (k-1)a$, $|FH| = |FG| = |EF| - |EG| = (2-k)a$, tudíž $|AF| = |AH| + |FH| = (3-k)a$. Pythagorova věta pro trojúhelník AEF tak dává rovnici $(3-k)^2 = k^2 + 1$, jež je po úpravě lineární a má (jediný) kořen $k = \frac{4}{3}$.

Odpověď: Hledaný poměr je 4 : 3.

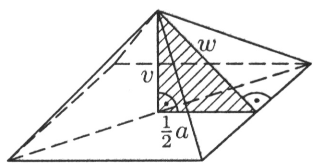
C – S – 3

Zmíněná tři dělení zapíšeme rovnostmi $N = 19a + b$, $a = 99c + d$ a $N = 1\,999c + d$. Odtud vyplývá, že $19(99c + d) + b = 1\,999c + d$, neboli $18d + b = 118c$. Nejmenší a největší vyhovující N najdeme podle nejmenšího a největšího možného neúplného podílu c (při dělení čísla N číslem 1 999). Z rovnosti $18d + b = 118c$ plyne především, že $c > 0$ (kdyby bylo $c = 0$, bylo by $b = d = 0$, tedy i $N = 0$, ale N je kladné); pro $c = 1$ z rovnosti $18d + b = 118$ usoudíme, že $d = 6$ a $b = 10$ (neboť pro zbytek b při dělení $N : 19$ platí $0 \leqq b \leqq 18$). Proto je nejmenší N rovno číslu $1\,999 \cdot 1 + 6 = 2\,005$. Abychom zjistili největší N, poznamenejme nejdříve, že pro zbytky d a b při děleních $a : 99$ a $N : 19$ platí nerovnosti $d \leqq 98$ a $b \leqq 18$, z nichž plyne odhad $118c \leqq 18 \cdot 98 + 18$, odkud $c \leqq 15$. Pro $c = 15$ ovšem z rovnosti $18d + b = 118 \cdot 15$ vyplývá, že $d = 98$ a $b = 6$, neboť $0 \leqq b \leqq 18$ a $118 \cdot 15 = 1\,770 = 18 \cdot 98 + 6$. Největší N je tudíž rovno $1\,999 \cdot 15 + 98 = 30\,083$.

Odpověď: Nejmenší vyhovující N je 2 005, největší takové N je 30 083.

C – II – 1

Povrch vzniklého tělesa je tvořen všemi 24 bočními stěnami daných šesti jehlanů. Označme v výšku těchto jehlanů a a délku jejich podstavné hrany (jež je shodná s hranou dané krychle). Ze zadání úlohy vyplývá, že objem jednoho jehlanu je šestinou objemu krychle, tedy $\frac{1}{3}a^2v = \frac{1}{6}a^3$, odkud



Obr. 23

$v = \frac{1}{2}a$. Boční stěna jehlanu je rovnoramenný trojúhelník, pro jehož výšku w z hlavního vrcholu (obr. 23) platí podle Pythagorovy věty rovnost $w^2 = v^2 + (\frac{1}{2}a)^2$, odkud po dosazení $v = \frac{1}{2}a$ vychází $w = \frac{1}{2}\sqrt{2}a$. Proto je obsah boční stěny jehlanu roven $\frac{1}{2}aw = \frac{1}{4}\sqrt{2}a^2$. Výsledné těleso má povrch 24krát větší, tedy $6\sqrt{2}a^2$, zatímco povrch krychle je $6a^2$.

Odpověď: Poměr povrchů původní krychle a výsledného tělesa je $1 : \sqrt{2}$.

Poznámka. Za daných předpokladů vznikne slepením těleso, které bude mít dvanáct shodných stěn (tzv. kosočtverečný dvanáctistěn). Uvedené shodné jehlany mají totiž v součtu stejný objem jako daná krychle a dostaneme je, když krychli rozdělíme na šest shodných jehlanů se společným hlavním vrcholem ve středu krychle.

C – II – 2

V daném výrazu odstraníme závorky a čísla sdružíme do čtveřic:

$$\underbrace{1-2-3+5}+\underbrace{6-7-8+10}+$$
$$+\underbrace{11-12-13+15}+\underbrace{16-17-18+20}+\ldots$$

(poslední skupina je kratší, není-li počet N všech čísel násobkem čtyř). Čísla v i-té skupině ($i = 1, 2, \ldots$) tvoří výraz $(5i-4)-(5i-3)-(5i-2)+5i$, jehož hodnota je zřejmě rovna jedné (nezávisle na indexu i). Proto je hodnota V celého výrazu v případě $N = 4k$ rovna $V = k$, v případě $N = 4k+1$ rovna $V = k + (5k+1) = 6k+1$, v případě $N = 4k+2$ rovna $V = k + (5k+1) - (5k+2) = k-1$ a v případě $N = 4k+3$ rovna $V = k + (5k+1) - (5k+2) - (5k+3) = -4k-4$. Snadno se zjistí, kdy $V = 103$:

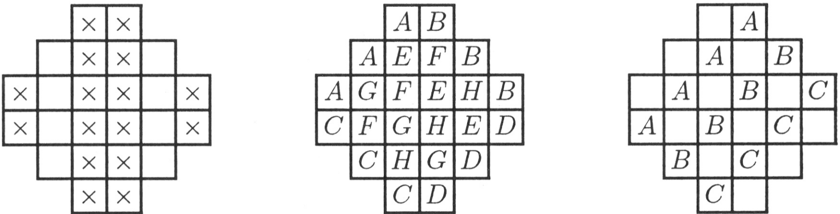
$$\begin{array}{llll}
N = 4k, & V = k = 103, & & N = 412, \\
N = 4k+1, & V = 6k+1 = 103, & k = 17, & N = 69, \\
N = 4k+2, & V = k-1 = 103, & k = 104, & N = 418, \\
N = 4k+3, & V = -4k-4 = 103, & k \notin \mathbb{N}. &
\end{array}$$

Odpověď: V Milanově výrazu bylo buď 69, nebo 412, nebo 418 čísel.

C – II – 3

Příklad z obr. 24a ukazuje, že je možno požadovaným způsobem rozestavit 16 figurek (obsazená pole jsou označena křížky). Vysvětlíme nyní, proč více figurek rozestavit nelze. Na obr. 24b vidíte rozdělení všech polí desky do osmi šikmých řad po třech polích, když pole téže řady-trojice jsou označena stejným písmenem. Figurkami je možno obsadit nejvýše dvě pole v každé řadě-trojici (2 pole A, 2 pole B, …, 2 pole H), celkem nejvýše $8 \cdot 2 = 16$ polí.

Tvrzení o tom, že nelze rozestavit více než 16 figurek, zdůvodníme ještě jinak, postupem obdobným z řešení úlohy domácího kola. Šikmé řady jednoho směru mají postupně 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3 pole, v nich lze obsadit nejvýše 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2 pole. Součet posledních čísel je sice 17, ale kdyby v každé ze tří uvažovaných řad o 4 polích (řady polí A, polí B a polí C na obr. 24c) byla obsazena 3 pole, musela by být obsazena všechna krajní pole těchto tří řad, ta však tvoří dvě šikmé řady-trojice druhého směru (krajní šikmé řady ABC na obr. 24c).



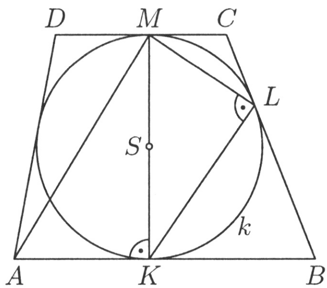
a b c

Obr. 24

Odpověď: Největší možný počet rozmístěných figurek je 16.

C – II – 4

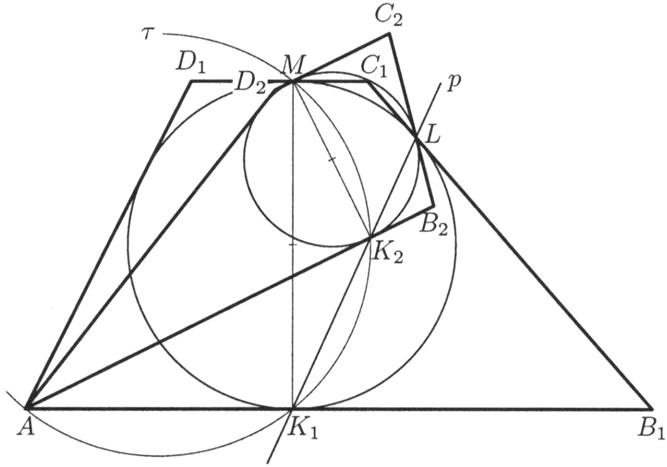
Označme k vepsanou kružnici, S její střed a K bod dotyku kružnice k se základnou AB (obr. 25). Protože $AB \parallel CD$, $SK \perp AB$ a $SM \perp CD$, je



Obr. 25

KM průměr kružnice k. Proto jsou oba úhly AKM a KLM pravé, bod K tudíž sestrojíme jako průsečík Thaletovy kružnice τ nad průměrem AM s přímkou p, jež prochází bodem L a je kolmá na LM. Zbytek konstrukce je snadný: bod S určíme jako střed úsečky KM, sestrojíme kružnici

$k = (S, |SK|)$ a v bodech L a M po řadě její tečny b a c. Vrchol B pak určíme jako průsečík polopřímky AK s přímkou b, vrchol C jako průsečík přímek b a c, konečně vrchol D sestrojíme jako průsečík přímky c s tečnou d kružnice k, jež je souměrně sdružená s tečnou AK podle osy AS. Pro trojúhelník ALM ze zadání má kružnice τ s přímkou p společné dva body, které jsou na obr. 26 označeny K_1, K_2, proto má úloha dvě řešení — lichoběžníky $AB_1C_1D_1$ a $AB_2C_2D_2$.



Obr. 26