37. mezinárodní matematická olympiáda

Symbol olympiády, která se konala v indické Bombaji od 5. do 17. července 1996, představuje zajímavou matematickou úlohu z Bháskarova spisku *Líláváti* (12. stol.), kterou uvádíme ve volném českém překladu: *Páv stojí na vrcholu devět loktů vysokého podstavce, při jehož úpatí je díra. Ve vzdálenosti trojnásobku výšky podstavce vidí hada pohybujícího se směrem k díře a šikmo se naň vrhne. Řekni mi rychle, v jaké vzdálenosti od díry se oba srazí, pohybují-li se oba stejnou rychlostí.* K jejímu řešení vystačíte s Pythagorovou větou, jejíž geometrický důkaz naleznete na obrázku zmíněného podstavce.

Tato mezinárodní matematická olympiáda překonala opět několik rekordů. Přitom tentokrát nešlo ani tolik o rekordy v počtu zúčastněných zemí, který se v posledních letech ustálil kolem sedmdesátky (letošní MMO se zúčastnilo 426 studentů ze 75 zemí), ale spíš v obtížnosti: jak vybraných úloh, tak celkových podmínek. Tropická vedra s občasnými prudkými lijáky počínajícího monzunového období, problémy s dietou (jeden z našich studentů po celou dobu pobytu v Bombaji téměř nejedl, dva soutěžící — nikoli naši, i když podle výsledků by to tak mohlo vypadat — vinou žaludečních obtíží soutěž nedokončili) a nekonečné přesuny autobusy v přecpaném velkoměstě. A posledním smutným rekordem je výsledné umístění českého družstva v neoficiálním pořadí jednotlivých zemí.

Z našich nejlépe dopadli *Tomáš Bárta* spolu s *Michalem Benešem* z pražského gymnázia ve Zborovské ulici, kteří získali shodně 21 bodů, což tentokrát stačilo na II. cenu. S nimi ještě držel krok *David Opěla* z bíloveckého Gymnázia Mikuláše Koperníka, který za 18 bodů dostal cenu III. Zbylí naši tři reprezentanti se už bohužel zařadili do druhé poloviny účastníků MMO a zůstali tedy bez ceny, i když letos na III. cenu bylo potřeba pouhých 12 bodů (bylo i hůře: v roce 1971 na 13. MMO v Žilině stačilo na III. cenu dokonce jen 11 bodů).

Vlastní soutěž proběhla 10. a 11. července v prostorách Střediska pro atomový výzkum Bhabha. Organizace soutěže, jakož i podmínky pro práci jury a koordinaci byly vesměs výborné. Sympatické např. bylo i to, že se na koordinaci podíleli i bývalí úspěšní indičtí olympionici.

Výsledky našich žáků:

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
81.–93.	Tomáš Bárta, 4. roč. gymnázia Praha 5, Zborovská	7	1	6	0	0	7	21	II.
81.–93.	Michal Beneš, 4. roč. gymnázia Praha 5, Zborovská	7	1	6	0	0	7	21	II.
111.–120.	David Opěla, 4. roč. GMK Bílovec	4	1	7	0	0	6	18	III.
216.–226.	Robert Špalek, 4. roč. gymnázia Brno, tř. Kpt. Jaroše	1	0	5	3	0	1	10	
236.–247.	Daniel Kráľ, 4. roč. gymnázia Zlín	4	2	1	0	0	1	8	
290.–324.	Jan Spěvák, 3. roč. gymnázia Praha 1, Hellichova	2	1	1	1	0	0	5	
	Celkem	25	6	26	4	0	22	83	

O náročnosti úloh dává obvykle dobrou informaci počet bodů nutných pro získání příslušné medaile: První cena se udělovala za 28–42 bodů, II. za 20–27 a III. za 12–19 bodů. Porovnáte-li uvedené bodové hranice s předešlo 36. MMO v Torontu, zjistíte posun zhruba o 10 bodů dolů. Na této mezinárodní olympiádě získal plný počet 42 bodů jediný student Ciprian Manolescu z Rumunska, který se tak stal absolutním vítězem.

Extrémně obtížná byla pátá úloha. Její záludnost spočívala už v tom, že první slibně vypadající nápad k řešení nevedl... Koneckonců o její obtížnosti nejlépe svědčí celkový bodový zisk: 209 bodů, to při 424 soutěžících dává průměrný bodový zisk 0,49 — méně než půl bodu!

Trochu nás může mrzet slabý výsledek na hezké druhé úloze. Čtvrtá úloha snad nebyla tak obtížná, nicméně byla (bez znalosti techniky kvadratických zbytků) početně náročnější, což ve spojení s „nedobytnou" pátou úlohou přispělo k hubenému bodovému zisku. A tak jsme nakonec druhý den sbírali body jen za šestou úlohu, kde se nakonec i naši dva nejlepší blýskli velmi pěkným řešením (každý jiným).

Neoficiální pořadí všech zúčastněných zemí s počtem získaných cen a celkovým bodovým ziskem:

	I	II	III	body
Rumunsko	4	2	–	187
USA	4	2	–	185
Maďarsko	3	2	1	167
Rusko	2	3	1	162
Velká Británie	2	4	–	161
ČLR	3	2	1	160
Vietnam	3	1	1	155
Korea	2	3	–	151
Írán	1	4	1	143
Německo	3	1	1	137
Japonsko	1	3	1	136
Bulharsko	1	4	1	136
Polsko	–	3	3	122
Indie	1	3	1	118
Izrael	1	2	2	114
Kanada	–	3	3	111
Slovensko	–	2	4	108
Ukrajina	1	–	5	105
Turecko	–	2	3	104
Tchaj-wan	–	2	3	100
Bělorusko	1	1	2	99
Řecko	–	1	5	95
Austrálie	–	2	3	93
Jugoslávie	–	1	3	87
Itálie	–	2	2	86
Singapur	1	–	3	86
Hongkong	–	1	4	84
Česká republika	–	2	2	83
Argentina	–	1	3	80
Gruzie	1	–	2	78
Belgie	–	–	–	75
Litevsko	–	–	–	68
Lotyšsko	–	–	–	66
Chorvatsko	–	–	–	63
Arménie	–	–	–	63
Francie	–	–	–	61
Nový Zéland	–	–	–	60
Norsko	–	–	–	60

	I	II	III	body
Finsko	–	–	–	58
Švédsko	–	–	–	57
Moldavsko	–	–	–	55
Rakousko	–	–	–	54
JAR	–	–	–	50
Mongolsko	–	–	–	49
Slovinsko	–	–	–	49
Kolumbie	–	–	–	48
Thajsko	–	–	–	47
Makedonie	–	–	–	44
Španělsko	–	–	–	44
Macao	–	–	–	44
Dánsko	–	–	–	44
Brazílie	–	–	–	36
Srí Lanka	–	–	–	34
Mexiko	–	–	–	34
Estonsko	–	–	–	33
Island	–	–	–	31
Bosna a Hercegovina	–	–	–	30
Ázerbajdžán	–	–	–	27
Nizozemsko	–	–	–	26
Trinidad a Tobago	–	–	–	25
Irsko	–	–	–	24
Švýcarsko	–	–	–	23
Portugalsko	–	–	–	21
Kazachstán	–	–	–	20
Maroko	–	–	–	19
Kuba	–	–	–	16
Kirgizie	–	–	–	15
Albánie	–	–	–	15
Kypr	–	–	–	14
Indonézie	–	–	–	11
Chile	–	–	–	10
Malajsie	–	–	–	9
Turkménie	–	–	–	9
Filipíny	–	–	–	8
Kuvajt	–	–	–	1

Vedoucím naší výpravy byl dr. *Karel Horák* z Matematického ústavu AV ČR, pedagogickým vedoucím družstva byl doc. *Jaromír Šimša* z brněnské pobočky téhož ústavu.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Nechť $ABCD$ je obdélníková deska o rozměrech $|AB| = 20, |BC| = 12$. Deska je rozdělena na 20×12 jednotkových čtverců. Nechť r je dané kladné celé číslo. Mincí lze táhnout z jednoho čtverce na druhý, právě když vzdálenost středů obou čtverců je $\sqrt{r}$. Úkolem je najít posloupnost tahů mincí vedoucí ze čtverce s vrcholem A do čtverce při vrcholu B.

a) Ukažte, že úkol nelze splnit, je-li r dělitelné 2 nebo 3.

b) Dokažte, že je to možné pro $r = 73$.

c) Lze úkol splnit pro $r = 97$? (*Finsko*)

2. Nechť P je bod uvnitř trojúhelníku ABC, pro který platí

$$|\sphericalangle APB| - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle APC| - |\sphericalangle ABC|.$$

Označme D, E středy kružnic vepsaných trojúhelníkům APB a APC. Ukažte, že přímky AP, BD a CE procházejí jedním bodem. (*Kanada*)

3. Nechť $\mathsf{S} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ označuje množinu všech nezáporných celých čísel. Najděte všechny funkce f definované na S, jejichž hodnoty jsou v S, a takové, že

$$f\big(m + f(n)\big) = f\big(f(m)\big) + f(n) \quad \text{pro všechna } m, n \in \mathsf{S}.$$

(*Rumunsko*)

4. Jsou dána kladná celá čísla a, b taková, že obě čísla $15a+16b$ a $16a-15b$ jsou druhými mocninami kladných celých čísel. Najděte nejmenší možnou hodnotu, kterou může nabýt minimum z obou druhých mocnin.

(*Rusko*)

5. Nechť $ABCDEF$ je konvexní šestiúhelník takový, že AB je rovnoběžné s ED, BC je rovnoběžné s FE a CD je rovnoběžné s AF. Označme R_A, R_C a R_E poloměry kružnic opsaných trojúhelníkům FAB, BCD a DEF a p obvod daného šestiúhelníku. Dokažte, že

$$R_A + R_C + R_E \geqq \frac{p}{2}.$$

(*Arménie*)

6. Nechť n, p, q jsou kladná celá čísla, pro něž $n > p + q$. Nechť $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou celá čísla, jež splňují následující podmínky:

a) $x_0 = x_n = 0$;

b) pro každé celé číslo i, $1 \leqq i \leqq n$, je

$$\text{buď } x_i - x_{i-1} = p, \quad \text{nebo } x_i - x_{i-1} = -q.$$

Ukažte, že existuje dvojice indexů (i, j) taková, že $i < j$, $(i, j) \neq (0, n)$ a $x_i = x_j$. (*Francie*)

Řešení úloh

1. Je-li $r = m^2 + n^2$ rozklad čísla r na součet dvou druhých mocnin nezáporných celých čísel, můžeme táhnout mincí o m sloupců vodorovně a o n řádků svisle (pokud přitom zůstaneme na desce). Zvolme soustavu souřadnic tak, aby střed čtverce s vrcholem A ležel v počátku a střed čtverce s vrcholem B měl souřadnice $[19, 0]$. (Střed čtverce s vrcholem D pak bude mít souřadnice $[0, 11]$.)

a) Je-li $r = m^2 + n^2$ dělitelné dvěma, je jasné, že obě čísla m, n musí mít stejnou paritu (stejný zbytek mod 2), tj. součet $m+n$ je sudý. Protože obě souřadnice počátku jsou sudé, není možno se dostat do bodu $[19, 0]$, který má součet souřadnic lichý.

Je-li $r = m^2 + n^2$ dělitelné třemi, snadno zjistíme (vzhledem k tomu, že -1 není kvadratický zbytek mod 3), že musí být $m \equiv n \equiv 0 \pmod 3$. Proto ani v tomto případě nelze přejít z počátku, jehož obě souřadnice jsou dělitelné třemi, do bodu $[19, 0]$, jehož první souřadnice 19 násobkem tří není.

b) Protože jediný rozklad čísla $r = 73$ na součet druhých mocnin je $r = 3^2 + 8^2$, máme možnost kombinovat tahy charakterizované vektory $(\pm 3, \pm 8)$ a $(\pm 8, \pm 3)$. Dostaneme tak např. tuto možnou posloupnost polí: $[0, 0] \to [3, 8] \to [11, 5] \to [3, 2] \to [0, 10] \to [8, 7] \to [0, 4] \to [8, 1] \to$ $\to [11, 9] \to [3, 6] \to [11, 3] \to [19, 0]$.

Poznámka. K cestě z bodu $[0, 0]$ do bodu $[19, 0]$ se lze dopracovat i řešením neurčitých rovnic. Označme a, b, c, d postupně počet tahů typu $\pm(8, 3)$, $\pm(8, -3)$, $\pm(3, 8)$ a $\pm(3, -8)$ (tj. a označuje počet tahů daných vektorem $(8, 3)$ minus počet tahů odpovídajících vektoru $(-8, -3)$). Dostaneme tak dvě neurčité rovnice

$$8(a + b) + 3(c + d) = 19, \quad 3(a - b) + 8(c - d) = 0, \tag{1}$$

kterým vyhovíme např. tak, že položíme $a + b = 2$, $c + d = 1$, $a - b = -8$, $c - d = 3$, což dohromady dává $a = -3$, $b = 5$, $c = 2$, $d = -1$. Tak dostaneme počet tahů odpovídajícího typu, nesmíme však přitom zapomenout, že nelze opustit desku. Těmto hodnotám vyhovuje shora uvedená cesta, ale i cesta $[0,0] \to [3,8] \to [11,5] \to [19,2] \to [16,10] \to [8,7] \to [0,4] \to [8,1] \to [11,9] \to [3,6] \to [11,3] \to [19,0]$. Rovnici (1) ovšem vyhovují i $a = 5$, $b = 3$, $c = 1$ a $d = 2$ s dalšími možnými cestami.

c) Protože jediný možný rozklad čísla $r = 97$ na součet dvou druhých mocnin přirozených čísel je $97 = 4^2 + 9^2$, musí každý tah odpovídat jednomu z vektorů $(\pm 9, \pm 4)$, $(\pm 4, \pm 9)$. Rozdělme množinu A všech možných pozic na desce,

$$\mathsf{A} = \{[i,j] \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leqq i \leqq 19, 0 \leqq j \leqq 11\},$$

na dvě disjunktní podmnožiny B a C, kde

$$\mathsf{B} = \{[i,j] \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leqq i \leqq 19, 4 \leqq j \leqq 7\}, \qquad \mathsf{C} = \mathsf{A} \setminus \mathsf{B}.$$

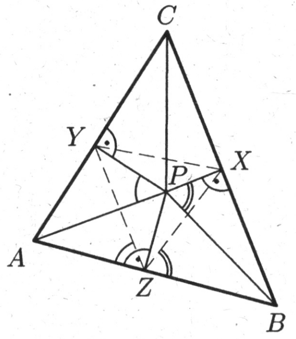
Snadno ověříme, že každý tah typu $(\pm 9, \pm 4)$ vede z bodu množiny B do bodu množiny C a obráceně, zatímco tahy typu $(\pm 4, \pm 9)$ jsou možné jen pro body z množiny C a vedou zpět do C. Každý z tahů typu $(\pm 9, \pm 4)$ mění paritu první souřadnice, takže na cestu z bodu $[0,0]$ do bodu $[19,0]$ potřebujeme *lichý* počet takových tahů. Každý z nich ale vede střídavě z množiny B do C a zpět; my však máme začít i skončit v množině C, k čemuž vede jen sudý počet zmíněných tahů. Odtud plyne, že požadovaná posloupnost tahů pro $r = 97$ neexistuje.

Jiné řešení části c) (podle *Michala Beneše*). Jediný možný rozklad čísla $r = 97$ je $97 = 4^2 + 9^2$. Uvažujme orientovaný graf, který spojuje všechny možné y-ové souřadnice, jež dostaneme při vertikální změně o 4 nebo o 9:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 4 \arrow[r, leftrightarrow] & 8 \\
0 \arrow[ur, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \\
 & 9 \arrow[r, leftrightarrow] & 5 \arrow[r, leftrightarrow] & 1 \arrow[r, leftrightarrow] & 10 \arrow[r, leftrightarrow] & 6 \arrow[r, leftrightarrow] & 2 \arrow[r, leftrightarrow] & 11 \arrow[r, leftrightarrow] & 7 \arrow[r, leftrightarrow] & 3
\end{tikzcd}$$

Protože se máme dostat z vrcholu $[0,0]$ do vrcholu $[19,0]$, je vidět, že v uvedeném grafu musíme vykonat cestu z uzlu 0 zpět do uzlu 0, tj. musíme provést sudý počet vertikálních změn o 4 i sudý počet vertikálních změn o 9. Protože ale 19 je liché číslo, nelze je dostat jako kombinaci sudého počtu devítek a sudého počtu čtyřek.

2. Sestrojme postupně paty X, Y a Z kolmic z bodu P na strany BC,



Obr. 36

CA a AB (obr. 36). Protože čtyřúhelníky $PXCY$, $PYAZ$ a $PZBX$ jsou tětivové, je

$$\begin{aligned}|\sphericalangle APB| - |\sphericalangle ACB| &= |\sphericalangle APB| - (\pi - |\sphericalangle XPY|) = \\ &= 2\pi - (|\sphericalangle APY| + |\sphericalangle BPX|) - \pi = \\ &= \pi - (|\sphericalangle AZY| + |\sphericalangle BZX|) = |\sphericalangle XZY|\end{aligned}$$

a analogicky

$$|\sphericalangle APC| - |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle XYZ|.$$

Z předpokladů úlohy tedy plyne, že je $|\sphericalangle XZY| = |\sphericalangle XYZ|$, a tedy $|XZ| = |XY|$.

Označme dále Q, resp. R průsečíky přímky AP s osou úhlu ABP, resp. ACP. Z vlastností osy úhlu dostáváme rovnosti

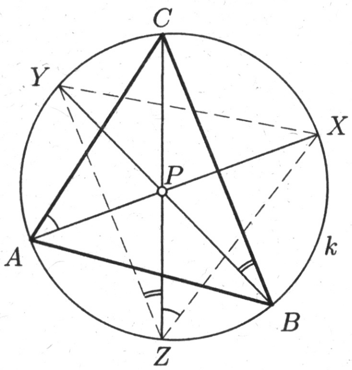
$$\frac{|AQ|}{|QP|} = \frac{|AB|}{|BP|} \quad \text{a} \quad \frac{|AR|}{|RP|} = \frac{|AC|}{|CP|}.$$

Abychom ukázali, že body Q a R splývají, stačí ukázat, že $\dfrac{|AB|}{|BP|} = \dfrac{|AC|}{|CP|}$. Pro průměry CP a BP kružnic opsaných tětivovým čtyřúhelníkům $PXCY$ a $PZBX$ platí $|CP| = \dfrac{|XY|}{\sin\gamma}$ a $|BP| = \dfrac{|XZ|}{\sin\beta}$. Rovnost $Q = R$ je tudíž ekvivalentní s rovností

$$\frac{|AB| \cdot |XY|}{\sin\gamma} = \frac{|AC| \cdot |XZ|}{\sin\beta},$$

která díky rovnosti $|XZ| = |XY|$ plyne ze sinové věty pro trojúhelník ABC.

Jiné řešení. Označme X, Y a Z druhé průsečíky polopřímek AP, BP a CP s kružnicí k opsanou trojúhelníku ABC. Zřejmě $|\sphericalangle APB| - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle APZ| - |\sphericalangle ACP| + |\sphericalangle ZPB| - |\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle PAC| + |\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle PZX| + |\sphericalangle PZY| = |\sphericalangle XZY|$ (obr. 37). Analogicky $|\sphericalangle APC| - |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle XYZ|$. Odtud plyne, že předpokládaná rovnost $|\sphericalangle APB| - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle APC| - |\sphericalangle ABC|$ je ekvivalentní s rovností $|\sphericalangle XZY| = |\sphericalangle XYZ|$, a tedy i s rovností $|XZ| = |XY|$.



Obr. 37

Protože trojúhelníky APC a ZPX jsou podobné, je

$$\frac{|AC|}{|ZX|} = \frac{|AP|}{|ZP|} = \frac{|PC|}{|PX|} = \frac{|AP| \cdot |PC|}{|AP| \cdot |PX|} = \frac{|AP| \cdot |PC|}{m},$$

kde $m = |AP| \cdot |PX| = |BP| \cdot |PY| = |CP| \cdot |PZ|$ je až na znaménko velikost mocnosti bodu P ke kružnici k. Je tedy

$$|XZ| = m \frac{|AC|}{|AP| \cdot |PC|}$$

a obdobně

$$|XY| = m \frac{|AB|}{|AP| \cdot |PB|}.$$

Protože $|XZ| = |XY|$, plyne odtud rovnost

$$\frac{|AB|}{|BP|} = \frac{|AC|}{|CP|}.$$

To znamená, že osy úhlů ABP a ACP dělí úsečku AP ve stejném poměru. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Poznámka. Bod P, který vyhovuje předpokladu úlohy, leží na oblouku Apolloniovy kružnice všech bodů U takových, že $\dfrac{|UB|}{|UC|} = \dfrac{c}{b}$. Plyne to ze závěru druhého z uvedených řešení.

3. Předpokládejme, že funkce f je řešením úlohy. Dosazením $m = n = 0$ do dané rovnice dostaneme $f(0) = 0$ a pro $m = 0$ dostaneme rovnost $f\bigl(f(n)\bigr) = f(n)$ pro všechna $n \in \mathsf{S}$. Pokud funkce f není identicky rovna nule, má tedy vždy nenulový pevný bod (tj. bod, který se zobrazí sám na sebe). Označme a nejmenší *kladný* pevný bod funkce f. Pokud $a = 1$, dostaneme pro $m = 1$ rovnost $f\bigl(1 + f(n)\bigr) = 1 + f(n)$, odkud indukcí snadno plyne, že je $f(n) = n$ pro každé $n \in \mathsf{S}$.

Předpokládejme dále, že $a > 1$. Potom zřejmě platí $f(2a) = f\bigl(f(a) + a\bigr) = a + f(a) = 2a$ a dále opět indukcí $f(ka) = ka$ pro každé $k \geqq 1$. Ukážeme, že všechny pevné body zobrazení f (a tedy i všechny funkční hodnoty) jsou tvaru ka pro vhodné celé $k \geqq 0$: Je-li b libovolný pevný bod funkce f, dostaneme pro jeho podíl q při dělení číslem a a příslušný zbytek r $(0 \leqq r < a)$ rovnost

$$aq + r = b = f(b) = f(aq + r) = f\bigl(r + f(aq)\bigr) = \\ = f(r) + f(aq) = f(r) + aq.$$

To znamená, že také $f(r) = r$ je pevný bod zobrazení f, a protože $r < a$, musí být $r = 0$. Protože množina $\{f(n) \colon n \in \mathsf{S}\}$ je množinou pevných bodů funkce f, plyne odtud speciálně, že $f(i) = n_i a$ pro každé $i < a$, přičemž $n_0 = 0$ a $n_i \in \mathsf{S}$. Pro libovolné $n \in \mathsf{S}$, které vyjádříme jako $n = ka + i$, $0 \leqq i < a$, pak z dané funkcionální rovnice plyne

$$f(n) = f(i + ka) = f(i) + ka = n_i a + ka = (n_i + k)a.$$

Zbývá ověřit, že funkce f definovaná právě uvedeným předpisem splňuje danou funkcionální rovnici, ať už jsou čísla n_i $(1 \leqq i < a)$ v případě $a > 1$ zvolena jakkoliv: nechť $m = ka + i$, $n = la + j$, $0 \leqq i, j < a$. Potom

$$f\bigl(m + f(n)\bigr) = f\bigl(ka + i + f(la + j)\bigr) = f\bigl(k + l + n_j)a + i\bigr) = \\ = (k + l + n_j + n_i)a = f(m) + f(n) = f\bigl(f(m)\bigr) + f(n).$$

Odpověď: Dané funkcionální rovnici vyhovují nulová funkce, dále identická funkce f, pro kterou je $f(n) = n$ pro všechna $n \in \mathsf{S}$, a konečně každá funkce f určená předpisem

$$f(n) = \left(\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + n_i\right)a,$$

kde $a > 1$ a $n_1, n_2, \ldots, n_{a-1} \in \mathsf{S}$ jsou libovolné konstanty.

4. Označme $15a + 16b = r^2$ a $16a - 15b = s^2$, kde $r, s \in \mathbb{N}$. Odtud dostáváme

$$r^4 + s^4 = (15^2 + 16^2)(a^2 + b^2) = 481(a^2 + b^2).$$

Číslo 481 má prvočíselný rozklad $481 = 13 \cdot 37$, musí tedy platit $r^4 + s^4 \equiv 0 \pmod{p}$ pro $p \in \{13, 37\}$. Nyní využijeme skutečnost, že čtvrtá mocnina celého čísla nikdy nedává zbytek -1 ani modulo 13, ani modulo 37. To plyne z *malé věty Fermatovy*, podle níž pro libovolné prvočíslo p a pro každé celé x je buď $x^{p-1} \equiv 0$, nebo $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Kdyby tedy pro nějaké celé x bylo $x^4 \equiv -1 \pmod{13}$, bylo by též $x^{12} \equiv (-1)^3 = -1 \pmod{13}$, a to nemůže nastat; podobně z kongruence $x^4 \equiv -1 \pmod{37}$ pro nějaké celé x plyne $x^{36} \equiv (-1)^9 \pmod{37}$, což rovněž neplatí.

Rovnice $r^4 + s^4 \equiv 0 \pmod{p}$ tedy nemůže mít řešení $r \not\equiv 0 \pmod{p}$, $s \not\equiv 0 \pmod{p}$ ($p \in \{13, 37\}$), protože pak by pro r' takové, že $rr' \equiv 1 \pmod{p}$ (podle zmíněné malé věty Fermatovy stačí volit $r' = r^{p-2}$) platilo $-1 \equiv -r^4 r'^4 \equiv s^4 r'^4 = (sr')^4 \pmod{p}$. Proto musí být $r \equiv s \equiv 0 \pmod{p}$, neboli $p \mid r$, $p \mid s$, tedy $481 \mid r$, $481 \mid s$, což znamená, že $r \geqq 481$, $s \geqq 481$. Protože pro $r = s = 481$ najdeme dvojici $a = 481 \cdot 31$, $b = 481$, je hledané minimum rovno 481^2.

Jiné řešení. Stejně jako v předchozím řešení zavedeme čísla r a s, pro něž dostaneme dvě kongruence $r^4 + s^4 \equiv 0 \pmod{p}$, neboli $r^4 \equiv -s^4 \pmod{p}$, kde $p \in \{13, 37\}$. Kdyby některá z těchto kongruencí měla řešení $r \not\equiv 0 \pmod{p}$, dostali bychom umocněním na liché číslo $\frac{1}{4}(p-1)$ podle malé věty Fermatovy

$$1 \equiv r^{p-1} = \left(r^4\right)^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv \left(-s^4\right)^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv -s^{p-1} \equiv -1 \pmod{p},$$

což není možné. Je tedy $r \equiv s \equiv 0 \pmod{p}$ a dále postupujeme stejně jako v předchozím řešení.

Jiné řešení. Označme $15a + 16b = r^2$ a $16a - 15b = s^2$, kde $r, s \in \mathbb{N}$. Sečtením vhodných násobků uvedených dvou rovností dostaneme

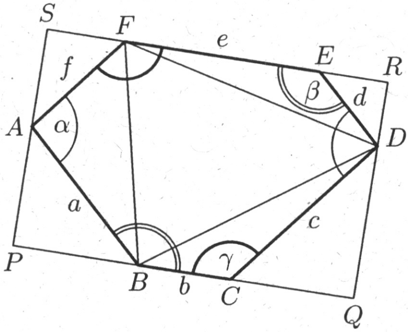
$481a = 15r^2 + 16s^2$. Uvažujeme-li tuto rovnici modulo 13, dostaneme $2r^2+3s^2 \equiv 0 \pmod{13}$. Pokud prozkoumáme všechny kvadratické zbytky modulo 13, zjistíme, že tato možnost může nastat, jen když $13 \mid r$ a $13 \mid s$. Obdobně probráním všech kvadratických zbytků modulo 37 zjistíme, že rovnici $481a = 15r^2 + 16s^2$ modulo 37 vyhovují pouze ta r, s, pro něž $37 \mid r$, $37 \mid s$. Závěr je stejný jako v prvém řešení.

5. Označme obvyklým způsobem a, b, c, d, e a f délky stran daného šestiúhelníku $ABCDEF$. Je zřejmé, že šestiúhelník má shodné protější úhly, $\alpha = |\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle CDE|$, $\beta = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$ a $\gamma = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle EFA|$. Opišme šestiúhelníku obdélník $PQRS$ tak, aby dvě jeho protější strany obsahovaly dvě protější rovnoběžné strany šestiúhelníku, např. tak, že $AP \perp BC$, $AS \perp EF$, $DQ \perp BC$, $DR \perp EF$ (obr. 38). V takovém případě je $|FB| \geqq |PS|$ a zároveň $|FB| \geqq |QR|$, přičemž $|PS| = a \sin\beta + f \sin\gamma$, $|QR| = c \sin\gamma + d \sin\beta$. Je tedy také

$$2|FB| \geqq (d+a)\sin\beta + (c+f)\sin\gamma.$$

Analogicky dostaneme (opíšeme-li obdélník dalšími dvěma způsoby)

$$2|BD| \geqq (b+e)\sin\beta + (c+f)\sin\alpha,$$
$$2|DF| \geqq (d+a)\sin\alpha + (b+e)\sin\gamma.$$



Obr. 38

Ze sinové věty pro trojúhelníky FAB, BCD a DEF vycházejí rovnosti

$$R_A = \frac{|FB|}{2\sin\alpha}, \quad R_C = \frac{|BD|}{2\sin\gamma}, \quad R_E = \frac{|DF|}{2\sin\beta},$$

takže

$$4R_A \geqq (c+f)\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + (d+a)\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$
$$4R_C \geqq (b+e)\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + (c+f)\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma},$$
$$4R_E \geqq (d+a)\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + (b+e)\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}.$$

Sečtením posledních tří nerovností dostaneme

$$\begin{aligned}4R_A + 4R_C + R_E \geqq (c+f)\Big(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\Big) + (d+a)\Big(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\Big) + \\ + (b+e)\Big(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\Big) \geqq \\ \geqq 2(c+f+d+a+b+e) = 2p,\end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat. Rovnost zřejmě platí, právě když $\alpha = \beta = \gamma$ a $FB \perp BC$, $BD \perp AB$ a $DF \perp CD$, tj. právě když $ABCDEF$ je pravidelný (stačí si uvědomit, že trojúhelníky FAB, BCD a DEF jsou rovnoramenné s úhly 30° při základně, takže trojúhelník BDF má nutně všechny úhly šedesátistupňové).

6. (Podle *Michala Beneše*.) Předpokládejme, že čísla p a q jsou nesoudělná (je-li totiž d jejich největší společný dělitel, lze v úloze čísla p, q, x_i zaměnit po řadě čísly p/d, q/d, x_i/d; protože dle zadání platí nerovnost $n > p+q$, platí samozřejmě i nerovnost $n > p/d + q/d$).

Každý člen x_i lze psát ve tvaru $x_i = s_i p - t_i q$, kde celá nezáporná čísla s_i a t_i udávají, kolik z čísel $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_i - x_{i-1}$ je rovno p resp. $-q$ (takže $s_i + t_i = i$), pro $i = 0$ položme $s_0 = t_0 = 0$. Dvojice (s_i, t_i) budeme interpretovat jako mřížové body v rovině se souřadnicovými osami s a t (budeme předpokládat, že osa s je vodorovná, orientovaná doprava a osa t svislá, orientovaná vzhůru). Pro každé i jsou mřížové body (s_{i-1}, t_{i-1}) a (s_i, t_i) sousední, tj. lze je spojit šipkou délky 1 ve směru některé ze souřadných os. Těchto n šipek vytvoří cestu

$$\Gamma_0 = \{(s_0, t_0) \to (s_1, t_1) \to (s_2, t_2) \to \ldots \to (s_n, t_n)\}.$$

(Šipky směřují pouze doprava a nahoru.)

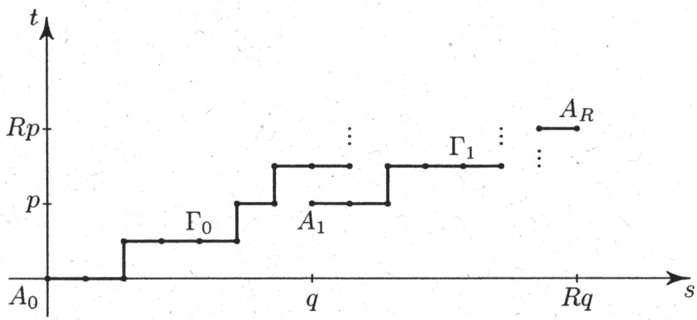
Rovnost $x_i = x_j$ nastane právě pro ta $i < j$, pro která $(t_j - t_i)q = (s_j - s_i)p$, neboli (vzhledem k předpokládané nesoudělnosti p a q)

$t_j = t_i + rp$ a $s_j = s_i + rq$ pro vhodné přirozené r. Tak pro $i = 0$ a $j = n$ dostáváme, že $s_n = Rq$ a $t_n = Rp$ pro vhodné přirozené R. Podle zadání je $n > p + q$, takže z rovností $n = s_n + t_n = R(p + q)$ plyne odhad $R \geqq 2$. Proto bude úloha vyřešena, prokážeme-li existenci indexů $i < j$ takových, že $s_j = s_i + q$ a $t_j = t_i + p$.

Připusťme, že takové indexy neexistují. Geometricky to znamená, že cesta Γ_0 nemá společný bod se svým „posunutím"

$$\Gamma_1 = \{(s_0 + q, t_0 + p) \to (s_1 + q, t_1 + p) \to (s_2 + q, t_2 + p) \to \ldots \to \\ \to (s_n + q, t_n + p)\}.$$

Uvažujme dále mřížové body $A_r = (rq, rp)$ pro $r \geqq 0$. Z našeho předpokladu o vzájemné poloze cest Γ_0 a Γ_1 především plyne, že na cestě Γ_0, jež spojuje body A_0 a A_R, neleží bod A_1, počátek cesty Γ_1. Nechť tedy cesta Γ_0 prochází například „nad" bodem A_1 (kdyby procházela „pod" tímto bodem, stačilo by v následující úvaze všude vyměnit „nad" za „pod"). Pak ovšem (díky vzájemné poloze obou cest) leží Γ_0 „nad" Γ_1 v celém společném úseku $q \leqq s \leqq Rq$. Z toho, že cesta Γ_0 prochází „nad" bodem A_r pro některé $r = 1, 2, \ldots, R-1$ (jak je tomu pro $r = 1$), okamžitě plyne, že „posunutá" cesta Γ_1 prochází „nad" bodem A_{r+1} (obr. 39), takže (díky upřesněné vzájemné poloze v úseku $q \leqq s \leqq Rq$)



Obr. 39

„nad" bodem A_{r+1} prochází i cesta Γ_0. Indukcí zjišťujeme, že Γ_0 dochází „nad" bod A_R, což odporuje tomu, že v tomto bodě cesta Γ_0 končí.

Jiné řešení. (Podle *Tomáše Bárty*.) Můžeme předpokládat, že p a q jsou nesoudělná čísla, protože jinak vezmeme $p' = \dfrac{p}{(p,q)}$, $q' = \dfrac{q}{(p,q)}$, kde

(p, q) označuje největší společný dělitel čísel p a q; zřejmě $n > p + q > > p' + q'$.

Bez újmy na obecnosti můžeme dále předpokládat (díky symetrii), že $p > q$. Abychom dostali $x_n = 0$, musíme zřejmě kq krát přičíst p a kp krát odečíst q, takže $n = k(p + q) \geqq 2(p + q)$.

Budeme dále počítat modulo p. Pokud $x_i - x_{i-1} = p$, je $x_i \equiv x_{i-1} \pmod p$, a pokud $x_i - x_{i-1} = -q$, je $x_i \not\equiv x_{i-1} \pmod p$. V dané posloupnosti $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nyní označme z_j všechny ty indexy, pro které dojde k odečtení q, tj. dojde ke změně zbytkové třídy modulo p,

$$
\begin{aligned}
0 = x_0 \equiv x_1 \equiv \ldots \equiv x_{z_1 - 1} \not\equiv x_{z_1} \pmod p, \qquad (1) \\
x_{z_1} \equiv \ldots \equiv x_{z_2 - 1} \not\equiv x_{z_2} \ (\equiv -q) \pmod p, \\
\vdots
\end{aligned}
$$

(počet indexů $z_1, z_2, \ldots$ je právě kp). Zřejmě bude $x_{z_p} \equiv -pq \equiv x_0 \pmod p$. Předpokládejme dále, že v dané posloupnosti neexistují dvě čísla splňující podmínky úlohy. V tom případě nemůže být $x_0 \leqq x_{z_p} \leqq x_{z_1 - 1}$, protože jinak by bylo x_{z_p} rovno některému z čísel (1), která dle předpokladu tvoří po sobě jdoucí násobky čísla p, a $x_{z_p} \equiv 0 \pmod p$. Je tedy buď $x_{z_p} > x_{z_1 - 1}$, nebo $x_{z_p} < x_0$.

a) Nechť $x_{z_p} > x_{z_1 - 1}$. Odtud plyne $x_{z_{p+1}} > x_{z_2 - 1}$. Je totiž

$$x_{z_{p+1}} \geqq x_{z_p} - q > x_{z_1 - 1} - q = x_{z_1}$$

a nemůže být

$$x_{z_1} < x_{z_{p+1}} \leqq x_{z_2 - 1},$$

protože $x_{z_{p+1}} \equiv -q \pmod p$ a všechna čísla s touto vlastností mezi x_{z_1} a $x_{z_2 - 1}$ patří do dané posloupnosti. Snadno ukážeme matematickou indukcí, že je také

$$x_{z_{p+j}} > x_{z_{j+1} - 1}, \quad j \geqq 0,$$

speciálně

$$x_{z_{2p}} > x_{z_{p+1} - 1} \geqq x_{z_p} > x_{z_1 - 1} > x_0.$$

Matematickou indukcí vyjde $x_{z_{jp}} > x_0$ pro každé přípustné $j > 0$, a to odporuje tomu, že $x_n = 0$.

b) Nechť $x_{z_p} < x_0$. Podobně jako v a) odvodíme, že je $x_{z_{p+1}} < x_{z_1}$ (je totiž

$$x_{z_{p+1}} = x_{z_{p+1} - 1} - q < x_0 - q \leqq x_{z_1 - 1} - q = x_{z_1},$$

protože všechna čísla $x_{z_p}, x_{z_p+1}, \ldots, x_{z_{p+1}-1} \equiv 0 \pmod{p}$ jsou různá od nuly, tedy nutně menší než x_0).

Indukcí dále dostaneme, že $x_{z_{p+j}} < x_{z_j}$ pro každé $j \geqq 0$ a speciálně $x_{z_{2p}} < x_{z_p} < x_0$, $x_{z_{jp}} < x_0$ pro každé přípustné $j > 0$, což opět odporuje tomu, že $x_0 = 0$.