# 45. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie A

In: Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Richard Kollár (editor); Václav Sedláček (editor); Jaromír Šimša (editor); Pavel Töpfer (editor): 45. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1995/1996. 37. mezinárodní matematická olympiáda. 8. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1997. pp. 51–80.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404999

# Kategorie A

## Texty úloh

### A – I – 1

Sloupce šachovnice $8 \times 8$ označme zleva doprava čísly $1, 2, \ldots, 8$, řádky označme stejnými čísly zdola nahoru. Do každého políčka zapíšeme součet čísel příslušného řádku a sloupce. Vybereme 8 polí tak, aby žádná dvě z nich nebyla ani ve stejném řádku, ani ve stejném sloupci. Jaký je
a) největší možný součet,
b) největší možný součin,
c) nejmenší možný součet druhých mocnin
čísel na vybraných polích? *(J. Zhouf)*

### A – I – 2

Na stranách $AB$, $BC$ a $CA$ daného trojúhelníka $ABC$ jsou zvoleny po řadě body $K$, $L$ a $M$ tak, že platí

$$0 < \frac{|AK|}{|AB|} = \frac{|BL|}{|BC|} = \frac{|CM|}{|CA|} < 1.$$

Dokažte, že pokud je trojúhelník $KLM$ rovnostranný, pak je rovnostranný i trojúhelník $ABC$. *(J. Šimša)*

### A – I – 3

Posloupnost přirozených čísel $a_1$, $a_2$, $a_3$, $\ldots$ splňuje pro každé přirozené $n \geqq 1$ tři rovnosti:

$$a_n + a_{2n} = a_{3n},$$

$$a_n + a_{3n-1} = a_{2n} + a_{2n-1},$$

$$a_n + a_{3n+1} = a_{2n} + a_{2n+1}.$$

Přitom víme, že všechny čtyři členy $a_1$, $a_{14}$, $a_{17}$ a $a_{21}$ jsou prvočísla. Dokažte rovnost $a_{1995} = a_{2000}$. *(J. Šimša)*

## A – I – 4

Dokažte, že pokud pro přirozená čísla $a$, $b$ je i číslo

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$$

přirozené, pak pro největší společný dělitel $D$ čísel $a$, $b$ platí nerovnost $D \leqq \sqrt{a+b}$. Může nastat rovnost v případě, že $D < a < b$?

(*převzatá úloha*)

## A – I – 5

Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ splňující pro každá $x, y \in \mathbb{N}$ rovnost

$$f(xy) = f(x) + f(y) - f\bigl(D(x,y)\bigr),$$

kde $D(x,y)$ značí největší společný dělitel čísel $x, y$, víte-li, že platí $f(p) =$ $= p$ pro každé prvočíslo $p$.

(*P. Hliněný*)

## A – I – 6

V prostoru je dán trojúhelník $ABC$ se stranami $|AB| = |AC| = 10\,\mathrm{cm}$ a $|BC| = 12\,\mathrm{cm}$. Najděte množinu všech bodů $D$, pro které spojnice středu $O$ koule opsané čtyřstěnu $ABCD$ s těžištěm $T$ tohoto čtyřstěnu je přímka kolmá na rovinu $ADT$.

(*P. Leischner*)

## A – S – 1

Najděte všechny dvojice celých čísel $a$, $b$ takových, že obě čísla

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}, \qquad \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$$

jsou celá.

(*R.Kollár*)

## A – S – 2

Najděte největší reálné číslo $q$, pro které nerovnost $2^n \geqq 1 + nq^n$ platí pro každé přirozené číslo $n \geqq 2$.

(*J.Šimša*)

## A – S – 3

Popište konstrukci rovnoramenného trojúhelníku $ABC$ se základnou $AB$, pro který platí $|OA| = 9\,\mathrm{cm}$ a $|OB| = 3\,\mathrm{cm}$, kde $O$ je střed kružnice připsané straně $BC$ trojúhelníku $ABC$ (tj. kružnice, která se vně dotýká strany $BC$ a prodloužení stran $AB$ a $AC$). (*A. Vrba*)

## A – II – 1

Určete, pro která přirozená čísla $n$ existuje liché $n$-ciferné číslo, které je dělitelné třinácti a má ciferný součet rovný čtyřem. (*J. Šimša*)

## A – II – 2

Dané jsou dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, $r_1 < r_2$, které se vně dotýkají v bodě $F$. Nechť $t$ je jejich společná vnější tečna, její body dotyku s kružnicemi $k_1$, $k_2$ označme po řadě $A$, $B$. Veďme teď jinou tečnu ke kružnici $k_1$ rovnoběžnou s přímkou $t$. Její dotykový bod s kružnicí $k_1$ označme $C$ a průsečíky s kružnicí $k_2$ označme $D$, $E$. Dokažte, že bod $F$ a středy kružnic opsaných trojúhelníkům $ABC$ a $ADE$ leží na jedné přímce. (*M. Niepel*)

## A – II – 3

V rovině je dána úsečka $AB$. Najděte všechny body $C$ této roviny takové, že pro střed $O$ kružnice opsané trojúhelníku $ABC$ a jeho těžiště $T$ platí: $O \not\equiv T$, $OT \perp CT$. (*M. Engliš*)

## A – II – 4

Děti se v táboře dělily do družin následujícím způsobem: Vedoucí určil mezi dětmi několik náčelníků. Každý náčelník si pak do své družiny vzal všechny své kamarády z tábora (kamarádství je vzájemné). Kupodivu to vyšlo *dobře*, tedy tak, že se náčelníci nemuseli o žádné dítě hádat, žádné dítě nezbylo a žádní dva náčelníci nebyli kamarádi. Podruhé určil vedoucí jiný počet náčelníků. Mohlo rozdělení dětí popsaným způsobem opět dopadnout *dobře*? (*P. Hliněný*)

## A – III – 1

Jestliže pro posloupnost $\big(G(n)\big)_{n=0}^{\infty}$ celých čísel platí

$$\begin{aligned} &G(0) = 0,\\ &G(n) = n - G\big(G(n-1)\big) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \end{aligned}$$

potom

a) pro každé přirozené číslo $k$ je $G(k) \geqq G(k-1)$;

b) neexistuje přirozené číslo $k$ takové, že $G(k-1) = G(k) = G(k+1)$.

Dokažte. (*M. Engliš*)

## A – III – 2

V prostoru je dán ostroúhlý trojúhelník $ABC$ s výškami $AP$, $BQ$ a $CR$. Dokažte, že pro každý vnitřní bod $V$ trojúhelníku $PQR$ existuje čtyřstěn $ABCD$ takový, že bod $V$ má ze všech bodů stěny $ABC$ největší vzdálenost (po povrchu čtyřstěnu) od bodu $D$. (*P. Černek, J. Šimša*)

## A – III – 3

Je dáno šest tříprvkových podmnožin konečné množiny X. Dokažte, že prvky množiny X je možno obarvit dvěma barvami tak, aby žádná ze šesti daných podmnožin nebyla jednobarevná, tj. neměla všechny tři prvky stejné barvy. (*P. Hliněný*)

## A – III – 4

Je dán ostrý úhel $XCY$ a na jeho ramenech $CX$, $CY$ po řadě body $A$ a $B$ tak, že $|CX| < |CA| = |CB| < |CY|$. Popište konstrukci přímky, která protíná rameno $CX$ a úsečky $AB$, $BC$ po řadě v bodech $K$, $L$ a $M$ tak, že platí

$$|KA| \cdot |YB| = |XA| \cdot |MB| = |LA| \cdot |LB| \neq 0.$$

(*P. Černek*)

## A – III – 5

Pro která celá čísla $k$ existuje funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ splňující

(i) $f(1\,995) = 1\,996$,

(ii) $f(xy) = f(x) + f(y) + k \cdot f\big(D(x,y)\big)$ pro všechna přirozená čísla $x$, $y$?

$D(x,y)$ označuje největší společný dělitel čísel $x$, $y$. (*P. Hliněný*)

## A – III – 6

Na stranách $AB$, $BC$ a $CA$ daného trojúhelníku $ABC$ jsou dány po řadě body $K$, $L$ a $M$ tak, že platí

$$\frac{|AK|}{|AB|} = \frac{|BL|}{|BC|} = \frac{|CM|}{|CA|} = \frac{1}{3}.$$

Jsou-li kružnice opsané trojúhelníkům $AKM$, $BLK$ a $CML$ shodné, jsou shodné i kružnice těmto třem trojúhelníkům vepsané. Dokažte.

*(J. Šimša)*

## A – I – 1

a) Ukážeme, že celkový součet vybraných čísel nezávisí na způsobu jejich výběru. Každé číslo v tabulce je součtem čísla řádku a sloupce, v němž je zapsáno, proto je celkový součet čísel roven součtu čísel sloupců plus součet čísel řádků, v nichž jsou zapsána. Protože z každého sloupce a z každého řádku vybíráme právě jedno číslo, bude celkový součet vždy roven součtu čísel všech sloupců plus součet čísel všech řádků. Oba součty jsou však rovny součtu přirozených čísel $1, 2, \ldots, 8$, proto je součet vybraných čísel roven

$$1 + 2 + \ldots + 8 + 1 + 2 + \ldots + 8 = 72,$$

a tento součet nezávisí na způsobu výběru čísel, je to tedy i součet maximální.

b) Označme $a_1$ číslo řádku, v němž je číslo vybrané z prvého sloupce. Podobně označme $a_2$ číslo řádku, v němž je číslo vybrané z druhého sloupce. Takto pro $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ označíme $a_i$ číslo řádku, v němž je číslo vybrané z $i$-tého sloupce. Součin vybraných čísel je pak roven

$$(1 + a_1)(2 + a_2) \cdot \ldots \cdot (8 + a_8), \tag{1}$$

kde $a_1, \ldots, a_8$ je nějaká permutace čísel $1, 2, \ldots, 8$. Maximální hodnotu tohoto výrazu můžeme určit více způsoby.

Protože máme jen konečný počet možností výběru čísel $a_1, a_2, \ldots, a_8$, maximum uvažovaného výrazu zřejmě existuje. Ukážeme, že součin (1) je maximální, jestliže $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_8$, neboli $a_1 = 8$, $a_2 = 7$, ..., $a_8 = 1$. Nechť například $a_i < a_j$ pro $i < j$. Součin ostatních výrazů $k + a_k$ se nezmění, vyměníme-li navzájem $a_i$ a $a_j$. Dokážeme, že takovouto výměnou se zvětší hodnota $(i + a_i)(j + a_j)$, a tedy i celkový součin:

$$(i + a_i)(j + a_j) < (j + a_i)(i + a_j),$$

$$ij + ia_j + ja_i + a_i a_j < ji + ja_j + ia_i + a_i a_j,$$

$$j(a_i - a_j) + i(a_j - a_i) < 0,$$

$$(i - j)(a_j - a_i) < 0.$$

Ale $i - j < 0$ a zároveň $a_j - a_i > 0$, tj. záměnou čísel $a_i$ a $a_j$ se hodnota výrazu zvětšila, proto vzrostl i celý součin. Daný výraz bude tudíž maximální pro $a_1 = 8$, $a_2 = 7$, ..., $a_8 = 1$, kdy je roven $9^8$.

**Jiný postup.** Protože čísla $i + a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ jsou nezáporná, můžeme použít nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem této osmice čísel:

$$\sqrt[8]{(a_1 + 1)(a_2 + 2) \cdot \ldots \cdot (a_8 + 8)} \leqq$$
$$\leqq \frac{(a_1 + 1) + (a_2 + 2) + \ldots + (a_8 + 8)}{8}.$$

Ale z části a) už víme, že součet $(a_1 + 1) + (a_2 + 2) + \ldots + (a_8 + 8)$ je roven 72 pro každý výběr čísel $a_i$. Proto platí:

$$(a_1 + 1)(a_2 + 2) \cdot \ldots \cdot (a_8 + 8) \leqq \left(\frac{72}{8}\right)^8 = 9^8.$$

Protože rovnost v této nerovnosti nastává, právě když je všech osm čísel stejných, bude součin největší pro $a_1 + 1 = a_2 + 2 = \ldots = a_8 + 8 = \frac{72}{8}$. To však nastane jen pro $a_1 = 8$, $a_2 = 7$, …, $a_8 = 1$. Uvažovaný součin je pak roven $9^8$. Maximální součin vybraných čísel dostaneme proto v případě, že vybereme čísla na úhlopříčce vedoucí z levého horního do pravého dolního rohu.

c) Použijeme stejné označení jako v části b). Minimalizujeme hodnotu výrazu

$$(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 2)^2 + \ldots + (a_8 + 8)^2. \tag{2}$$

Po roznásobení (2) dostaneme

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_8^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 8^2 + 2(a_1 + 2a_2 + \ldots + 8a_8).$$

Protože součet $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_8^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 8^2$ nezávisí na pořadí $a_1, a_2, \ldots, a_8$, potřebujeme minimalizovat výraz $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + 8a_8$. O tom, že tento výraz je nejmenší právě pro $a_1 = 8$, $a_2 = 7$, …, $a_8 = 1$, se můžeme přesvědčit více způsoby. Můžeme např. použít Čebyševovu nerovnost, anebo podobné úvahy jako v části b) 1. postupu:

Stačí uvážit, že pokud není $a_1 > a_2 > \ldots > a_8$, musí pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ platit $a_i > a_j$ a zároveň $i > j$. Výměnou hodnot $a_i$ a $a_j$ však dostaneme

$$ia_i + ja_j > ja_i + ia_j,$$
$$(j - i)(a_j - a_i) > 0,$$

neboli

$$1a_1 + \ldots + ja_j + \ldots + ia_i + \ldots + 8a_8 >$$
$$> 1a_1 + \ldots + ja_i + \ldots + ia_j + \ldots + 8a_8,$$

a proto takováto volba nemůže být nejlepší. Je tedy

$$(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 2)^2 + \ldots + (a_8 + 8)^2 \geqq 648,$$

přičemž rovnost nastane jen pro $a_1 = 8$, $a_2 = 7, \ldots, a_8 = 1$.

**Jiný postup.** Z nerovnosti mezi kvadratickým a aritmetickým průměrem pro čísla $a_1 + 1, a_2 + 2, \ldots, a_8 + 8$ dostáváme, že

$$\frac{(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 2)^2 + \ldots (a_8 + 8)^2}{8} \geqq$$
$$\geqq \left(\frac{(a_1 + 1) + (a_2 + 2) + \ldots + (a_8 + 8)}{8}\right)^2 = 81,$$
$$(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 2)^2 + \ldots (a_8 + 8)^2 \geqq 648,$$

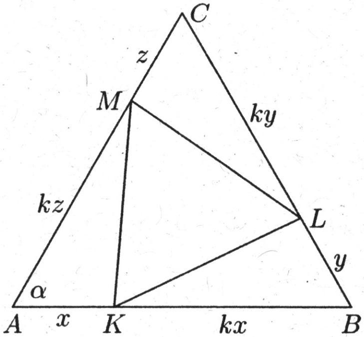
kde rovnost nastane, jen když se budou rovnat čísla $a_1 + 1$, $a_2 + 2$, ..., $a_8 + 8$, neboli pro $a_1 = 8$, $a_2 = 7$, ..., $a_8 = 1$ stejně jako v části b).

## A – I – 2

Vzhledem k dané rovnosti poměrů

$$0 < \frac{|AK|}{|AB|} = \frac{|BL|}{|BC|} = \frac{|CM|}{|CA|} = \frac{1}{k+1} < 1$$

($k > 0$), můžeme zavést následující označení: $|AK| = x$, $|KB| = kx$, $|BL| = y$, $|LC| = ky$, $|CM| = z$, $|MA| = kz$ (obr. 21).




Obr. 21

Použijeme dvakrát kosinovou větu:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC|\cos\alpha,$$
$$|KM|^2 = |AK|^2 + |AM|^2 - 2|AK||AM|\cos\alpha$$

a vyloučíme $\cos\alpha$. Použitím zavedeného označení dostaneme

$$|MK|^2 = x^2(1-k) + y^2k + z^2(k^2-k);$$

analogicky

$$|KL|^2 = y^2(1-k) + z^2k + x^2(k^2-k),$$
$$|LM|^2 = z^2(1-k) + x^2k + y^2(k^2-k).$$

Protože $|MK| = |KL|$, musí platit

$$x^2(1-k^2) + y^2(2k-1) + z^2(k^2-2k) = 0. \tag{1}$$

Podobně z rovností $|KL| = |LM|$, $|LM| = |MK|$ vyjde

$$y^2(1-k^2) + z^2(2k-1) + x^2(k^2-2k) = 0, \tag{2}$$
$$z^2(1-k^2) + x^2(2k-1) + y^2(k^2-2k) = 0. \tag{3}$$

Vyloučením $z^2$ z rovnic (1) a (2) dostaneme

$$(x^2-y^2)(k^2-k+1)^2 = 0.$$

Protože rovnice $k^2-k+1=0$ nemá žádný reálný kořen a $x, y > 0$, plyne odtud, že $x = y$. Analogicky z rovnic (2) a (3) dostaneme $y = z$. Je tedy $x = y = z$, a tudíž i $|AB| = |BC| = |CA|$.

**Jiné řešení.** Označme obsahy trojúhelníků $MAK$, $KBL$, $LCM$ a $ABC$ po řadě $S_A$, $S_B$, $S_C$ a $S$. Potom

$$S_A = \frac{1}{2}x \cdot kz \cdot \sin\alpha =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{k}{(k+1)^2}\cdot(k+1)x\cdot(k+1)z\cdot\sin\alpha = \frac{k}{(k+1)^2}S.$$

Analogicky je

$$S_B = \frac{k}{(k+1)^2}S \quad \text{a} \quad S_C = \frac{k}{(k+1)^2}S,$$

tj. $S_A = S_B = S_C$. Protože trojúhelníky $MAK$, $KBL$, $LCM$ mají stejný obsah a $|MK| = |KL| = |LM|$, mají shodné výšky na strany $MK$, $KL$, $LM$.

Veďme body $A$, $B$, $C$ po řadě rovnoběžky $XY$, $YZ$, $ZX$ s přímkami $MK$, $KL$, $LM$. Především trojúhelník $XYZ$ je rovnostranný (neboť trojúhelník $KLM$ je rovnostranný). Z předcházejícího vyplývá, že body $K$, $L$, $M$ jsou stejně vzdálené od příslušných stran trojúhelníku $XYZ$, a leží tedy na osách příslušných úhlů. Proto můžeme zavést následující označení (osa úhlu rozděluje protilehlou stranu trojúhelníku v poměru přilehlých stran):

$$|AY| = s, \quad |YB| = ks, \quad |BZ| = t,$$
$$|ZC| = kt, \quad |CX| = u, \quad |XA| = ku.$$

Z rovností $|XY| = |YZ| = |ZX|$ pak plyne, že $ku + s = ks + t = kt + u$. Řešením této soustavy dostaneme $s = t = u$. Trojúhelníky $AYB$, $BZC$, $CXA$ jsou tedy shodné (podle věty sus) a $|AB| = |BC| = |CA|$.

**Jiné řešení.** Zvolme na stranách $KL$, $LM$, $MK$ po řadě body $D$, $E$, $F$ tak, aby platilo

$$\frac{|LD|}{|DK|} = \frac{|ME|}{|EL|} = \frac{|KF|}{|FM|} = \frac{|AK|}{|KB|} = m.$$

Protože trojúhelník $KLM$ je rovnostranný, je rovnostranný i trojúhelník $DEF$. Nechť $d_A$, $d_K$, $d_M$, $d_D$, $d_E$ jsou postupně vzdálenosti bodů $A$, $K$, $M$, $D$, $E$ od přímky $BC$. Z daných poměrů pak vyplývá, že

$$d_K = \frac{1}{m+1} d_A, \quad d_M = \frac{m}{m+1} d_A,$$
$$d_D = \frac{m}{m+1} d_K, \quad d_E = \frac{1}{m+1} d_M.$$

Odtud plyne, že $d_D = d_E = \dfrac{m}{(m+1)^2} d_A$, takže $ED$ a $BC$ jsou rovnoběžné. Analogicky se dokáže, že i dvojice $EF$, $CA$ a $FD$, $AB$ jsou rovnoběžné. Trojúhelník $ABC$ je tedy rovnostranný.

# A – I – 3

Přepíšeme-li dané rekurentní vztahy na tvar

$$a_{3n} = a_n + a_{2n},$$
$$a_{3n+1} = a_{2n} + a_{2n+1} - a_n,$$
$$a_{3n-1} = a_{2n} + a_{2n-1} - a_n,$$

vidíme, že daná posloupnost je jednoznačně určená svými prvními dvěma členy. Nechť $a_1 = r$, $a_2 = s$. Přímým výpočtem dostaneme

$$a_3 = r + s,\ a_5 = r + 2s,\ a_7 = r + 3s,\ \dots,$$
$$a_{17} = r + 8s,\ \dots,\ a_{21} = r + 10s,\ \dots,$$
$$a_4 = 2s,\ a_6 = 3s,\ a_8 = 4s,\ \dots,\ a_{14} = 7s,\ \dots$$

Protože $a_{14} = 7s$ je prvočíslo, musí být $s = 1$, a protože čísla $a_1 = r$, $a_{17} = r + 8s$, $a_{21} = r + 10s$ jsou prvočísla, která dávají při dělení třemi různé zbytky, je jedno z nich dělitelné třemi, takže $r = 3$. Nyní můžeme (i když poněkud zdlouhavě) pokračovat v postupném používání rekurentních vztahů až do výpočtu $a_{1\,995}$, $a_{2\,000}$.

Lepší ovšem je všimnout si po výpočtu několika prvních členů dané posloupnosti, že patrně pro každé přirozené $k$ platí

$$a_{2k+1} = r + ks,$$
$$a_{2k} = ks;$$

díky již zmíněné jednoznačnosti stačí ověřit, že každá takto definovaná posloupnost splňuje rekurentní vztahy ze zadání.

a) $n$ je sudé tvaru $n = 2k$:

$$a_n + a_{2n} = a_{2k} + a_{4k} = ks + 2ks = 3ks,$$
$$a_{3n} = a_{6k} = 3ks,$$
$$a_n + a_{3n-1} = a_{2k} + a_{6k-1} = ks + r + (3k-1)s =$$
$$= r + (4k-1)s,$$
$$a_{2n} + a_{2n-1} = a_{4k} + a_{4k-1} = 2ks + r + (2k-1)s =$$
$$= r + (4k-1)s,$$
$$a_n + a_{3n+1} = a_{2k} + a_{6k+1} = ks + r + 3ks = r + 4ks,$$
$$a_{2n} + a_{2n+1} = a_{4k} + a_{4k+1} = 2ks + r + 2ks = r + 4ks.$$

b) $n$ je liché tvaru $n = 2k + 1$:

$$\begin{aligned}
a_n + a_{2n} &= a_{2k+1} + a_{4k+2} = r + ks + (2k+1)s = \\
&= r + (3k+1)s, \\
a_{3n} &= a_{6k+3} = r + (3k+1)s, \\
a_n + a_{3n-1} &= a_{2k+1} + a_{6k+2} = r + ks + (3k+1)s = \\
&= r + (4k+1)s, \\
a_{2n} + a_{2n-1} &= a_{4k+2} + a_{4k+1} = (2k+1)s + r + 2ks = \\
&= r + (4k+1)s, \\
a_n + a_{3n+1} &= a_{2k+1} + a_{6k+4} = r + ks + (3k+2)s = \\
&= r + (4k+2)s, \\
a_{2n} + a_{2n+1} &= a_{4k+2} + a_{4k+3} = \\
&= (2k+1)s + r + (2k+1)s = r + (4k+2)s.
\end{aligned}$$

Potom pro $r = 3$ a $s = 1$ dostáváme $a_{1\,995} = 3 + 997 = 1\,000 = a_{2\,000}$.

## A – I – 4

Po jednoduché úpravě dostaneme, že

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2 + b^2 + a + b}{ab}. \tag{1}$$

Protože $D$ je největší společný dělitel čísel $a$, $b$, můžeme psát $a = Da_1$ a $b = Db_1$, kde $a_1$, $b_1$ jsou nesoudělná přirozená čísla. Výraz (1) má po vykrácení tvar

$$\frac{Da_1^2 + Db_1^2 + a_1 + b_1}{Da_1 b_1}. \tag{2}$$

Aby výraz (2) byl přirozené číslo, musí být čitatel dělitelný jmenovatelem, a tedy i všemi jeho děliteli. Proto musí být čitatel dělitelný $D$,

$$D \mid Da_1^2 + Db_1^2 + a_1 + b_1.$$

Číslo $D$ zřejmě dělí čísla $Da_1^2$ a $Db_1^2$, proto musí platit

$$D \mid a_1 + b_1. \tag{3}$$

Protože čísla $a_1$, $b_1$, $D$ jsou přirozená a platí (3), musí zároveň být

$$D \leqq a_1 + b_1, \tag{4}$$

což po přenásobení $D$ $(D > 0)$ dává

$$D^2 \leqq a + b.$$

Po odmocnění (obě strany jsou kladné) vychází, že

$$D \leqq \sqrt{a+b}. \tag{5}$$

Ještě musíme zjistit, zda někdy nastane v (5) rovnost. Ta zřejmě nastane, právě když nastane rovnost v nerovnosti (4). Proto musí být $D = a_1 + b_1$. Aby byla zároveň splněna podmínka $D < a < b$, musí platit $1 < a_1 < b_1$. Volme proto $a_1 = 2$ a $b_1 = 5$. Potom musí být $D = 2+5 = 7$, neboli $a = Da_1 = 14$ a $b = Db_1 = 35$. Snadno se přesvědčíme, že v tomto případě rovnost (5) skutečně nastane.

*Poznámka.* Můžeme postupovat také tak, že na začátku zavedeme substituci $a = a_1 D$, $b = b_1 D$ a po obdobných úvahách dojdeme k tvrzení $D^2 \mid a + b$, což po odmocnění dává (5).

## A – I – 5

Především si všimněme, že pro nesoudělná čísla $x$, $y$ platí

$$f(xy) = f(x) + f(y) - f(1).$$

Proto pro prvočíselný rozklad $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ čísla $n$ ($p_1, p_2, \dots, p_m$ jsou různá prvočísla a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ jsou přirozená čísla) dostáváme, že $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) + \dots + f(p_m^{\alpha_m}) - (m-1)f(1)$. Dále opakovaným použitím dané rovnosti zjistíme, že $f(p^\alpha) = f(p^{\alpha-1}) = \dots = f(p) = p$ pro prvočíslo $p$ a libovolné přirozené číslo $\alpha$. Odtud vyplývá, že platí

$$f(n) = p_1 + p_2 + \dots + p_m - (m-1)f(1), \qquad n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}.$$

Dokažme ještě uvedené tvrzení podrobněji:

Nejdříve dokážeme matematickou indukcí podle $\alpha$, že pro prvočíslo $p$ platí $f(p^\alpha) = f(p) = p$.

*První krok.* Pro $\alpha = 1$ plyne tvrzení přímo ze zadání.

*Druhý krok.* Nechť tvrzení platí pro $\alpha \geqq 1$, potom

$$f(p^{\alpha+1}) = f(p^\alpha) + f(p) - f\big(D(p^\alpha, p)\big) = f(p^\alpha).$$

Odtud podle indukčního předpokladu plyne, že je také

$$f(p^{\alpha+1}) = f(p^{\alpha}) = f(p) = p.$$

Dále dokážeme, že pokud $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ je prvočíselný rozklad čísla $n \geqq 2$, je

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}) = p_1 + p_2 + \dots + p_m - (m-1)f(1).$$

Tvrzení dokážeme opět indukcí, tentokrát podle počtu $m$ prvočíselných dělitelů čísla $n$.

*První krok.* Pro $m = 1$ dostáváme předchozí tvrzení, které jsme právě dokázali.

*Druhý krok.* Nechť tvrzení platí pro $m \geqq 1$. Potom platí

$$\begin{aligned} f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}) = f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}) + f(p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}) - \\ - f\left(D(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}, p_{m+1}^{\alpha_{m+1}})\right). \end{aligned}$$

Protože ale $D(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}, p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}) = 1$, má dle indukčního předpokladu předcházející rovnost tvar

$$\begin{aligned} f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}) &= p_1 + p_2 + \dots + p_m - \\ &- (m-1)f(1) + p_{m+1} - f(1) = \\ &= p_1 + \dots + p_{m+1} - mf(1). \end{aligned} \tag{1}$$

Ještě zbývá ukázat, že takto definovaná funkce $f$ vyhovuje dané podmínce pro libovolnou hodnotu $f(1)$. Nechť $a$ a $b$ jsou přirozená čísla. Označme $c = D(a,b)$ a nechť $c = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$ je jeho prvočíselný rozklad. Prvočíselný rozklad čísla $a$ má pak zřejmě tvar

$$a = p_1^{\beta_1} \dots p_m^{\beta_m} q_1^{\beta_{m+1}} \dots q_s^{\beta_{m+s}}$$

a podobně číslo $b$ bude mít prvočíselný rozklad

$$b = p_1^{\gamma_1} \dots p_m^{\gamma_m} r_1^{\gamma_{m+1}} \dots r_s^{\gamma_{m+t}}.$$

Zároveň víme, že prvočísla $p_1, \dots, p_m$, $q_1, \dots, q_s$ a $r_1, \dots, r_t$ jsou navzájem různá. Proto rozklad čísla $a \cdot b$ na prvočinitele je

$$a \cdot b = p_1^{\beta_1+\gamma_1} \dots p_m^{\beta_m+\gamma_m} q_1^{\beta_{m+1}} \dots q_s^{\beta_{m+s}} r_1^{\gamma_{m+1}} \dots r_s^{\gamma_{m+t}}.$$

Podmínka ze zadání říká, že

$$f(a \cdot b) = f(a) + f(b) - f\big(D(a, b)\big). \tag{2}$$

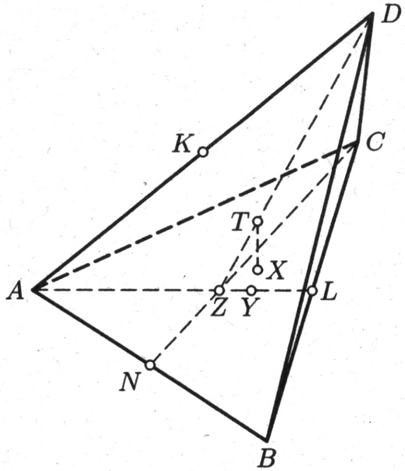
Spočítejme tyto hodnoty pro funkci definovanou pomocí (1):

$$\begin{aligned}
f(a) &= p_1 + \ldots + p_m + q_1 + \ldots + q_s - (m + s - 1)f(1),\\
f(b) &= p_1 + \ldots + p_m + r_1 + \ldots + r_t - (m + t - 1)f(1),\\
f(a \cdot b) &= p_1 + \ldots + p_m + q_1 + \ldots + q_s + r_1 + \ldots + r_t -\\
&\quad - (m + s + t - 1)f(1),\\
f(c) &= p_1 + \ldots + p_m - (m - 1)f(1).
\end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že po dosazení těchto hodnot do (2) dostaneme identitu (ještě je potřeba si uvědomit, že všechny tyto úvahy jsou korektní i v případě $m = 0$, $s = 0$, $t = 0$). Funkce $f$ definovaná pomocí (1) je tedy jediným řešením dané úlohy pro libovolnou hodnotu $f(1)$.

## A – I – 6

Označme $L$ a $K$ středy hran $BC$ a $AD$, $X$ a $Y$ kolmé průměty bodů $T$ a $O$ do roviny $ABC$ a $Z$ těžiště trojúhelníka $ABC$ (obr. 22).




Obr. 22

V dalším budeme využívat následující vlastnosti čtyřstěnu:

▷ body $A, T, D, K, L$ leží v téže rovině, kterou označíme $\delta$ ($K = \frac{1}{2}(A+$ $+D), L = \frac{1}{2}(B+C), T$ je střed $KL, T = \frac{1}{2}(K+L) = \frac{1}{4}(A+B+C+D)$),

▷ body $O$, $T$, $X$, $Y$ leží v téže rovině, kterou označíme $\alpha$,

▷ $Y$ je střed kružnice opsané trojúhelníku $ABC$,

▷ $T$ leží ve čtvrtině úsečky $ZD$ ($Z = \frac{1}{3}(A + B + C)$);

navíc platí, že přímka je kolmá na rovinu, právě když je kolmá na dvě její různoběžné přímky (a tato přímka je pak kolmá na všechny přímky roviny).

Především musíme vyloučit případ $O = T$, kdy $OT$ neurčuje přímku.

a) Protože $OT$ je kolmá na rovinu $\delta$, je $OT$ kolmá na $KL$, a tedy $|OL| = |OK|$. To znamená, že oba rovnoramenné trojúhelníky $OBC$ a $OAD$ jsou shodné, takže $|AD| = |BC| = 12\,\mathrm{cm}$. Bod $D$ proto leží na kulové ploše $\Gamma$ se středem $A$ a poloměrem 12 cm.

Naopak, leží-li bod $D$ na $\Gamma$, je $|AD| = |BC| = 12\,\mathrm{cm}$. Potom $|OL| =$ $= |OK|$, a tedy $OT$ je kolmá na $KL$.

b) Protože $TX$ je kolmá na $AL$ ($TX$ je kolmá na rovinu $ABC$) a $OT$ je kolmá na $AL$ ($OT$ je kolmá na rovinu $\delta$), je $AL$ je kolmá na $\alpha$. Rovina $\alpha$ je ale jednoznačně určená body $A$, $B$, $C$ (prochází bodem $Y$ a je kolmá na $AL$). Označme $\beta$ rovinu, která vznikne z roviny $\alpha$ ve stejnolehlosti se středem $Z$ a koeficientem 4. Ta je rovněž jednoznačně určená body $A$, $B$, $C$ (je kolmá na $AL$ a prochází bodem $S$, který vznikne z bodu $Y$ zmíněnou stejnolehlostí) a leží v ní bod $D$. Naopak, leží-li bod $D$ v rovině $\beta$, snadno nahlédneme, že body $X$, $Y$, $T$, $O$ leží v rovině $\alpha$, která je kolmá na $AL$. Proto $TO$ je kolmá na $AL$.

Případ $O = T$ nastane, právě když je $DS$ kolmá na rovinu $ABC$ ($DS$ odpovídá ve zmíněné stejnolehlosti úsečce $TY = OY$).

Množina bodů $D$ je tedy kružnice (bez čtyř bodů tvořících vrcholy čtverce, dva z nich jsou body roviny $ABC$), která je průnikem kulové plochy $\Gamma$ a roviny $\beta$.

**Jiné řešení.** Především $|AL| = 8\,\mathrm{cm}$. Zaveďme souřadnicový systém s počátkem v bodě $L$ tak, že $BC$ je osa $x$ ($B = (-6, 0, 0)$, $C = (6, 0, 0)$) a $AL$ je osa $y$ ($A = (0, 8, 0)$). Nechť $D = (x, y, z)$.

Z podobnosti trojúhelníků $BLA$ a $YNA$ ($N$ je střed $AB$) dostaneme $|AY| = 6{,}25$. Potom $Y = (0; 1{,}75; 0)$ a $O = (0; 1{,}75; a)$,

$$T = \frac{A + B + C + D}{4} = \left(\frac{x}{4}, 2 + \frac{y}{4}, \frac{z}{4}\right).$$

Protože $OT$ je kolmá na $AL$, je $OT \cdot AL = 0$. Odtud dostaneme $y = -1$. Protože $OT$ je kolmá na $LD$, je $OT \cdot LD = 0$. Odtud vyjde

$x^2 + z^2 = 4az$ (využíváme toho, že $y = -1$). Dále z rovnosti $|OA| = |OD|$ dostaneme $2x^2 + 2z^2 - 4za = 63$. (Využili jsme toho, že $y = -1$.) Z posledních dvou rovností plyne $x^2 + z^2 = 63$. Souřadnice bodu $D$ tedy splňují podmínky $y = -1$ a $x^2 + z^2 = 63$.

## A – S – 1

Nejprve oba výrazy upravíme:

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2 + a + b^2 + b}{ab}, \tag{1}$$

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 + b^3}{ab}. \tag{2}$$

Protože obě čísla (1), (2) jsou celá, musí být $a^2 + a + b^2 + b$ i $a^3 + b^3$ dělitelné číslem $b$. To znamená, že musí být také

$$b \mid a^2 + a \quad \text{a} \quad b \mid a^3 \tag{3}$$

(označení $x \mid y$ znamená, že číslo $x$ dělí číslo $y$). Nyní lze snadno ukázat, že odtud plyne i $b \mid a$. Uvedeme tři různé způsoby:

1) Z (3) plyne, že $b$ dělí i číslo $a^3 - (a-1)(a^2+a) = a$, takže $b \mid a$.
2) Z $b \mid a^3$ plyne, že každý prvočinitel čísla $b$ je také prvočinitelem čísla $a$. Proto jsou čísla $b$ a $(a+1)$ nesoudělná, takže z $b \mid a(a+1)$ plyne $b \mid a$.
3) Jestliže $b$ dělí $a^2 + a$, dělí jistě i jeho $a$-násobek $a^3 + a^2$. Celé číslo $b$ tedy dělí zároveň $a^3 + a^2$ i $a^3$. Dělí proto i jejich rozdíl $a^2$. My už ale víme, že $b$ dělí i $a^2 + a$, proto dělí i číslo $a^2 + a - a^2 = a$, tedy $b \mid a$.

Protože oba uvažované výrazy jsou symetrické vzhledem k $a$ a $b$, platí zároveň i $a \mid b$. Odtud plyne rovnost $|a| = |b|$. Nyní mohou nastat dvě možnosti:

1) Pro $a = b$ můžeme dané výrazy zřejmě upravit po řadě na tvar $\dfrac{2(a+1)}{a}$ a $2a$. Vzhledem k tomu, že čísla $a$ a $a+1$ jsou nesoudělná, platí $a \mid 2$ (prvý výraz musí být celočíselný). Dostáváme čtyři řešení $a = b \in \{-2, -1, 1, 2\}$.
2) Pro $a = -b$ se dané výrazy rovnají po řadě $-2$ a $0$. V tomto případě tedy dostáváme nekonečně mnoho řešení $a = -b = t$, kde $t$ je libovolné nenulové celé číslo.

## A – S – 2

Pro $n = 2$ má platit nerovnost $4 \geqq 1 + 2q^2$, odtud vyplývá horní odhad pro číslo $q$: $q \leqq \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Dokážeme matematickou indukcí, že číslo $q = \frac{\sqrt{6}}{2}$ má požadovanou vlastnost.

*1. krok*: Vzhledem k volbě čísla $q$ v dané nerovnosti platí pro $n = 2$ rovnost.

*2. krok*: Nechť nerovnost platí pro $n = k \geqq 2$, neboli $2^k \geqq 1 + kq^k$. Potom

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geqq 2 + 2kq^k.$$

Zřejmě stačí dokázat, že platí

$$2 + 2kq^k \geqq 1 + (k+1)q^{k+1},$$

neboli $1 \geqq q^k[(k+1)q - 2k]$. Poslední nerovnost ale platí, protože pro $q = \frac{\sqrt{6}}{2}$ je $q < \frac{4}{3} < 2$, takže $q^k > 0$, zatímco výraz v hranaté závorce je záporný:

$$(k+1)q - 2k = k(q-2) + q \leqq 2(q-2) + q = 3q - 4 < 0.$$

Zkoumaná nerovnost tedy platí i pro $n = k + 1$. Tím je důkaz matematickou indukcí hotov.

Odpověď: Hledané největší $q$ je rovno číslu $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

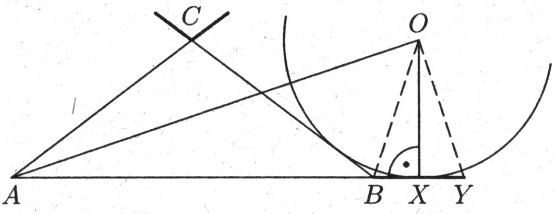
## A – S – 3

Označme $X$ bod dotyku kružnice připsané straně $BC$ s přímkou $AB$ (obr. 23). Protože $AO$ je osa úhlu $CAB$ a $BO$ je osa úhlu $CBX$, je $|\sphericalangle OAB| = \frac{1}{2}\alpha$ ($|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| = \alpha$), $|\sphericalangle OBX| = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{1}{2}\alpha$. Na polopřímce $BX$ zvolme bod $Y$, $Y \neq B$, tak, aby $|BX| = |XY|$. Potom v trojúhelníku $AYO$ platí:

$$|AO| = 9 \text{ cm}, \qquad |OY| = |OB| = 3\,\text{cm},$$

$$|\sphericalangle AOY| = 180° - |\sphericalangle OAB| - |\sphericalangle XYO| =$$

$$= 180° - \frac{\alpha}{2} - |\sphericalangle XBO| = 90°.$$




Obr. 23

Odtud vyplývá konstrukce:

1. $\triangle AYO$; podle věty *sus*: $|AO| = 9\,\mathrm{cm}$, $|OY| = 3\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle AOY| = 90°$,
2. $X$; $X \in AY$, $OX \perp AY$,
3. $B$; $B \in AX$, $|XB| = |XY|$,
4. $\overrightarrow{AD}$; $|\sphericalangle BAD| = 2|\sphericalangle BAO|$, $D \in \overrightarrow{BO}$,
5. $\overrightarrow{BE}$; $|\sphericalangle ABE| = 2|\sphericalangle BAO|$, $E \in \overrightarrow{AO}$,
6. $C$; $C \in \overrightarrow{AD} \cap \overrightarrow{BE}$.

*Poznámka.* Můžeme postupovat i jinak. Nejprve vyjádříme všechny potřebné úhly pomocí úhlu $\alpha$ a dále lze pokračovat například takto:

a) použitím sinové věty v trojúhelníku $ABO$ zjistíme, že $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{3}$,

b) z podobnosti trojúhelníků $AXO \sim OXB$ zjistíme, že

$$\frac{|BX|}{|OX|} = \frac{1}{3} \left( = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{|OX|}{|AX|} \right).$$

Potom může sestrojit trojúhelník $BXO$ nebo $AXO$. Případně můžeme pomocí Pythagorovy věty vypočítat

$$|BX| = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \quad |OX| = \frac{9\sqrt{10}}{10},$$
$$|AX| = \frac{27\sqrt{10}}{10}, \quad |AB| = \frac{24\sqrt{10}}{10}$$

a pak sestrojit příslušné výrazy.

## A – II – 1

Pro $n = 1$ takové číslo samozřejmě neexistuje, pro $n = 2$ je příkladem takového čísla číslo 13. Pro $n = 3$ a $n = 4$ taková čísla neexistují, protože žádné z čísel 301, 211, 121, 103 ani žádné z čísel 3 001, 2 101, 2 011, 1 201, 1 111, 1 021, 1 003 není násobkem třinácti. (Vypsali jsme všechna lichá trojmístná a čtyřmístná čísla s ciferným součtem 4.) Pro větší $n$ se takové číslo dá vždy najít. Stačí uvažovat číslo $1\,001 + 10^{n-4} \cdot 1\,001$. Toto číslo je dělitelné třinácti (neboť 1 001 je dělitelné třinácti), pro $n \geqq 5$ je zároveň liché (končí jednotkou) a jeho ciferný součet je zřejmě 4.

**Jiné řešení.** Nejdříve podobně jako v prvním řešení ukážeme, že pro $n = 2$ takové číslo existuje a pro $n = 1, 3, 4$ neexistuje. Všimněme si teď, jaké zbytky při dělení třinácti dávají jednotlivé mocniny čísel 1, 10, $10^2$, $10^3$, $10^4$, ... :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| číslo: | 1 | 10 | $10^2$ | $10^3$ | $10^4$ | $10^5$ | $10^6$ | $10^7$ | $10^8$ | ... |
| jeho zbytek: | 1 | 10 | 9 | 12 | 3 | 4 | 1 | 10 | 9 | ... |

Vidíme, že zbytek čísla $10^n$ při dělení třinácti závisí jen na tom, jaký je zbytek čísla $n$ při dělení šesti:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ je tvaru: | $6k$ | $6k+1$ | $6k+2$ | $6k+3$ | $6k+4$ | $6k+5$ |
| zbytek čísla $10^n$: | 1 | 10 | 9 | 12 | 3 | 4 |

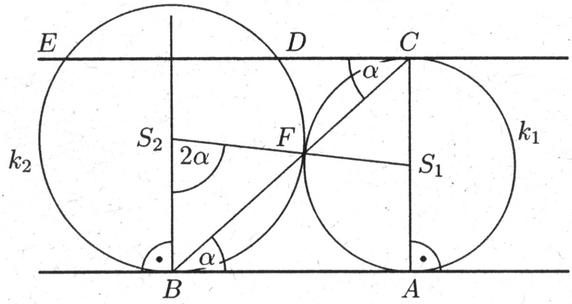
Pomocí této tabulky najdeme příklady $n$-ciferných čísel s potřebnou vlastností pro každé přirozené $n \geqq 5$:

| počet číslic čísla $n$ | číslo | rovné | dává stejný zbytek jako |
|---|---|---|---|
| $6k$ $(k \geqq 1)$ | $1\underbrace{00\ldots0}_{6k-5}1\,101$ | $10^{6k-1} + 1\,101$ | $4 + 12 + 9 + 1 = 26$ |
| $6k+1$ $(k \geqq 1)$ | $2\underbrace{00\ldots0}_{6k-2}11$ | $2 \cdot 10^{6k} + 11$ | $2 \cdot 1 + 11 = 13$ |
| $6k+2$ $(k \geqq 0)$ | $1\underbrace{00\ldots0}_{6k}3$ | $10^{6k+1} + 3$ | $10 + 3 = 13$ |
| $6k+3$ $(k \geqq 1)$ | $1\underbrace{00\ldots0}_{6k-4}101\,001$ | $10^{6k+2} + 101\,001$ | $9 + 4 + 12 + 1 = 26$ |
| $6k+4$ $(k \geqq 1)$ | $1\underbrace{00\ldots0}_{6k-2}10\,011$ | $10^{6k+3} + 10\,011$ | $12 + 3 + 11 = 26$ |
| $6k+5$ $(k \geqq 0)$ | $1\underbrace{00\ldots0}_{6k}1\,011$ | $10^{6k+4} + 1\,011$ | $3 + 12 + 11 = 26$ |

*Odpověď*: Číslo s požadovanou vlastností existuje pro $n = 2$ a pro každé $n \geqq 5$.

## A – II – 2

Ukažme, že $F$ leží na přímce $BC$. Nechť $|\sphericalangle FBA| = \alpha$. Potom $|\sphericalangle FBS_2| = |\sphericalangle BFS_2| = 90° - \alpha$ (obr. 24). Z trojúhelníku $FBS_2$ potom




Obr. 24

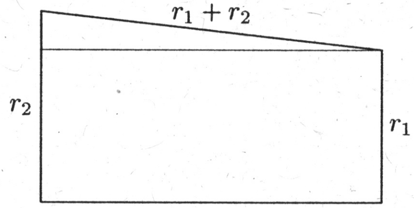
vyjde $|\sphericalangle BS_2F| = 2\alpha$ (jinými slovy, velikost tzv. úsekového úhlu tětivy $BF$ je rovna polovině příslušného středového úhlu $BS_2F$). To znamená, že $|\sphericalangle AS_1F| = 180° - 2\alpha$. Z věty o obvodovém a středovém úhlu pak plyne, že $|\sphericalangle ACF| = 90° - \alpha$, takže $|\sphericalangle FCD| = \alpha$. Protože úhly $FCD$ a $FBA$ jsou shodné, leží $F$ na přímce $BC$.

Dále víme, že trojúhelník $BAC$ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu $A$. Střed jeho kružnice opsané tedy leží na přeponě $BC$. Pokud $F$ není středem přepony $BC$ a má-li platit dokazované tvrzení, musí i střed kružnice opsané trojúhelníku $ADE$ ležet na přímce $BC$. Protože $DE$ je jeho strana a přímka $S_2B$ je osou této strany, potom vzhledem k tomu, že bod $B$ je průsečíkem přímek $BS_2$ a $BC$, musí být právě on středem kružnice opsané trojúhelníku $ADE$. Proto stačí dokázat, že kromě rovnosti $|BE| = |BD|$ platí i $|BD| = |BA|$.

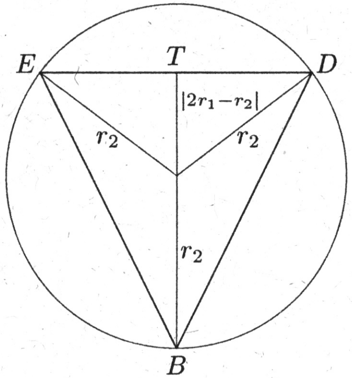
Spočtěme teď velikost $|BA|$ (obr. 25),

$$|BA| = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2} = \sqrt{4r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_2}.$$

Spočtěme ještě velikost $|BD|$ (obr. 26, kde je znázorněna situace při $2r_1 > r_2$; situace v opačném případě vypadá analogicky a nemá vliv na




Obr. 25




Obr. 26

další výpočet):

$$
\begin{aligned}
|TD|^2 &= r_2^2 - (2r_1 - r_2)^2,\\
|BD|^2 &= |TD|^2 + |TB|^2 = r_2^2 - (2r_1 - r_2)^2 + (2r_1)^2 = 4r_1r_2,\\
|BD| &= 2\sqrt{r_1r_2}.
\end{aligned}
$$

Dostali jsme rovnost $|BD| = |BA|$, tedy $B$ je středem kružnice opsané trojúhelníku $ADE$, a proto bod $F$ i oba středy kružnic leží na přímce $BC$.

## A – II – 3

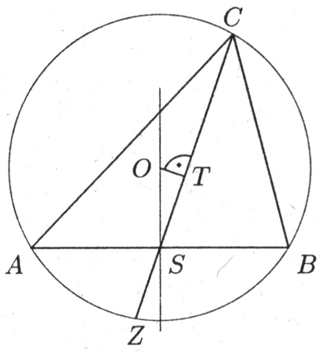
Nechť $ABC$ je trojúhelník s požadovanými vlastnostmi. Označme $S$ střed úsečky $AB$, $k$ kružnici opsanou trojúhelníku $ABC$, $Z$ průsečík přímky $CS$ s kružnicí $k$ (různý od $C$) (obr. 27). Protože $OT \perp CZ$, je $T$ středem tětivy $CZ$, navíc $|SC| = 3 \cdot |ST|$ ($T$ je těžiště), takže $|SZ| = |ST|$. Dvojím vyjádřením mocnosti bodu $S$ ke kružnici $k$ (lze samozřejmě použít i podobnost trojúhelníků $AZS$ a $CBS$) máme

$$|SA| \cdot |SB| = |SZ| \cdot |SC|,$$

neboli $|SA|^2 = \frac{1}{3}|SC| \cdot |SC|$, takže

$$|SC| = \sqrt{3}\,|SA|.$$

Bod $C$ leží tedy na kružnici $k_1(S; \sqrt{3}\,|SA|)$. Označíme-li $A_0$, $B_0$ průsečíky přímky $AB$ s kružnicí $k_1$ a $E$, $F$ průsečíky osy úsečky $AB$ s kružnicí $k_1$, musí být $C \not\equiv A_0, B_0$ (jinak by $ABC$ nebyl trojúhelník) a $C \not\equiv E, F$ (jinak by trojúhelník $ABC$ byl rovnostranný a bylo by $O = T$).




Obr. 27

Nechť naopak $C$ je libovolný bod kružnice $k_1$ různý od $A_0$, $B_0$, $E$ a $F$. Označme $k$ kružnici opsanou trojúhelníku $ABC$ a $Z$ průsečík kružnice $k$ s přímkou $CS$ ($Z \not\equiv C$). Z mocnosti bodu $S$ ke kružnici $k$ (opět lze použít i podobnost trojúhelníků) vyplývá

$$|SZ| = \frac{|SA|^2}{|SC|} = \frac{|SA|}{\sqrt{3}} = \frac{|SC|}{3} = |ST|,$$

tedy $T$ je střed tětivy $CZ$, a proto je buď $O = T$, nebo $OT \perp CZ$. Případ $O = T$ může nastat jen pro $T$ z osy úsečky $AB$, tj. $CS \perp AB$, neboli $C \in \{E, F\}$, což jsme však vyloučili. Vzniklý trojúhelník $ABC$ tedy vyhovuje podmínkám úlohy.

*Závěr*: Hledaným geometrickým místem bodů je kružnice $k_1$ se středem $S$ a poloměrem $\sqrt{3}\,|SA|$) bez bodů $A_0$, $B_0$, $E$, $F$.

## A – II – 4

Ne. Označme počet náčelníků v prvním výběru $k$ a v druhém $l$. Postupujme sporem. Předpokládejme, že $k \neq l$, a přitom obě rozdělení dopadla *dobře.* Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $l > k$ (jinak výběry vyměníme, zřejmě na jejich pořadí nezáleží). Protože podruhé bylo družin víc, musí v tomto výběru (podle Dirichletova principu) existovat aspoň dva náčelníci, kteří byli v prvním výběru ve stejné družině (označme tuto družinu $M$). Ani jeden z nich nemohl být náčelníkem $M$, jinak by museli být kamarádi a druhé rozdělení by pak nemohlo vyjít *dobře.* Potom ale mají oba společného kamaráda — náčelníka družiny $M$, proto druhé rozdělení nemohlo vyjít *dobře* ani v tomto případě. To je spor s předpokladem $k \neq l$.

## A – III – 1

a) Po určení několika prvních členů dané posloupnosti si můžeme všimnout, že pro malé hodnoty $n$ je rozdíl $G(n)-G(n-1)$ buď 0, nebo 1. Toto tvrzení (z kterého už plyne tvrzení a) úlohy) dokážeme matematickou indukcí.

*První krok.* Pro $n = 1$ je $G(0) = 0$, $G(1) = 1 - G\bigl(G(0)\bigr) = 1$, tedy $G(1) - G(0) = 1$, tj. uvedené tvrzení platí.

*Druhý krok.* Nechť $G(k) - G(k-1) \in \{0,1\}$ pro každé přirozené $k \leqq n$. Odtud především plyne, že $0 \leqq G(k) \leqq k$ pro každé $k \leqq n$, protože $G(0) = 0$. Dále je

$$G(n+1) - G(n) = 1 + G\bigl(G(n-1)\bigr) - G\bigl(G(n)\bigr).$$

Je-li $G(n-1) = G(n)$, je $G\bigl(G(n-1)\bigr) = G\bigl(G(n)\bigr)$, a tedy $G(n+1) - G(n) = 1$.

V opačném případě je $G(n) = G(n-1) + 1$, čili $G\bigl(G(n-1)\bigr) - G\bigl(G(n)\bigr) = G(a) - G(a+1)$, kde $a = G(n-1)$ je nezáporné celé číslo nepřevyšující $n-1$, proto podle indukčního předpokladu platí $G(a) - G(a+1) \in \{-1,0\}$. To znamená, že $G(n+1) - G(n) = 1 + G(a) - G(a+1) \in \{0,1\}$. Tím je důkaz indukcí uvedeného tvrzení a zároveň i důkaz tvrzení (a) úlohy hotov.

b) Postupujme sporem. Předpokládejme, že existuje přirozené číslo $k$, pro něž

$$G(k-1) = G(k) = G(k+1) = A.$$

Ze zadání ovšem plyne, že

$$A = G(k+1) = k + 1 - G\bigl(G(k)\bigr) = k + 1 - G(A),$$
$$A = G(k) = k - G\bigl(G(k-1)\bigr) = k - G(A),$$

takže

$$k + 1 = G(A) + A = k,$$

což je hledaný spor, protože $k + 1 \neq k$.

Dokázali jsme, že přirozené číslo $k$, pro které by platilo $G(k-1) = G(k) = G(k+1)$, neexistuje.

**Jiné řešení.** (Podle *Petra Kaňovského*, Brno.) Označme

$$w = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Pro toto číslo platí $\frac{1}{2} < w < 1$ a $w^2 + w - 1 = 0$. Ukážeme, že platí $G(n) = [nw]$ (celá část čísla $nw$). Tvrzení a) i b) je pak již snadným důsledkem toho, že $w > 0$ resp. $w > \frac{1}{2}$.

Uvažujme libovolné přirozené číslo $n$ a označme pro stručnost

$$x = nw - [nw]$$

necelou část čísla $nw$. Z definice celé části je vidět, že

$$[(n+1)w] = [nw + w] = [nw] + [x + w].$$

Nyní postupně platí

$$\begin{aligned} w[nw] - n + [(n+1)w] &= w[nw] - n + [nw] + [x + w] = \\ &= (w+1)[nw] - n + [x + w] = \\ &= (w+1)(nw - x) - n + [x + w] = \\ &= (w^2 + w - 1)n - (w+1)x + [x + w] = \\ &= -(w+1)x + [x + w]. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že

$$[(n+1)w] = n - (w[nw] + w) + \big(-(w+1)x + w + [x + w]\big). \tag{1}$$

Nyní dokážeme, že platí

$$\big[-(w+1)x + w + [x + w]\big] = 0. \tag{2}$$

Rozlišme tři případy:

1) Je-li $0 \leqq x < 1 - w$, tak $[x + w] = 0$ a zároveň

$$\begin{aligned} -(w+1)x + w &\leqq w < 1, \\ -(w+1)x + w &> -(w+1)(1 - w) + w = \\ &= w^2 + w - 1 = 0, \end{aligned}$$

odkud ihned plyne dokazované tvrzení.

2) Podobně, je-li $1 - w < x < 1$, tak $[x + w] = 1$ a zároveň

$$-(w+1)x + w + 1 \geqq -(w+1) + w + 1 = 0,$$
$$-(w+1)x + w + 1 < -(w+1)(1-w) + w + 1 =$$
$$= w^2 + w = 1.$$

3) Kdyby bylo $x = 1-w$, pak by číslo $(n+1)w = x + [nw] + w = 1 + [nw]$ bylo celé, a tedy $w$ by muselo být racionální, což není pravda. Tento případ tedy nemůže nastat.

Tím je důkaz rovnosti (2) proveden.

Ze vztahů (1) a (2) plyne

$$[(n+1)w] = n - \big[\big([nw]+1\big)w\big].$$

Definujeme-li tedy posloupnost $G_1(n)$ vztahem

$$G_1(n) = [(n+1)w],$$

pak vidíme, že posloupnost $G_1$ splňuje rekurentní vztah

$$G_1(n) = n - G_1(G_1(n-1)),$$

tj. stejný rekurentní vztah jako $G(n)$. Navíc platí

$$G_1(0) = [(0+1)w] = 0,$$

tedy vidíme že i $G(0) = G_1(0)$.

Dokažme nyní, že libovolná funkce $G(n)$, splňující podmínky v zadání úlohy, je identicky rovna $G_1(n)$. Důkaz provedeme matematickou indukcí.

1) $G(0) = 0 = G_1(0)$.

2) Nechť $n_0$ je libovolné přirozené číslo a nechť pro všechna $n < n_0$ platí $G(n) = G_1(n) = [(n+1)w]$. Pak $G(n_0 - 1) = [nw_0]$ a protože dále $0 \leqq [nw_0] < n_0$ (první nerovnost je zřejmá, druhá plyne pro $n_0 < 3$ přímým dosazením a pro $n_0 \geqq 3$ z $n_0 - nw_0 = (1-w)n_0 > 1$), je také $G(G(n_0-1)) = G_1(G_1(n_0-1))$ a tedy $G(n_0) = n_0 - G(G(n_0-1)) = n_0 - G_1(G_1(n_0-1)) = G_1(n_0)$.

Vidíme tedy, že funkce $G$ je zadáním jednoznačně určena a musí být $G(n) = [(n+1)w]$, kde $w = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, pro všechna přirozená čísla $n$.

## A - III - 2

Nechť $V$ je pevný vnitřní bod trojúhelníku $PQR$ a předpokládejme, že hledaný čtyřstěn $ABCD$ existuje. Stěny $ABD$, $BCD$ a $CAD$ (prozatím neznámého) čtyřstěnu $ABCD$ sklopíme do roviny $ABC$. Dostaneme tak síť tohoto čtyřstěnu, ohraničenou lomenou čarou $AD_1BD_2CD_3A$. Naším cílem bude vybrat bod $D$ tak, aby trojúhelník $D_1D_2D_3$ byl ostroúhlý, obsahoval trojúhelník $ABC$ a aby bod $V$ byl středem kružnice mu opsané. Platí totiž tvrzení: *Je-li $S$ střed kružnice opsané ostroúhlému trojúhelníku $KLM$, pak pro každý jeho bod $X \neq S$ platí*

$$\min\{|XK|, |XL|, |XM|\} < |SK| = |SL| = |SM|.$$

(Toto tvrzení plyne z toho, že celý trojúhelník $KLM$ je pokryt třemi kruhovými výsečemi o středech $K$, $L$, $M$ a poloměru $|SK|$, přitom každý vnitřní bod $X \neq S$ trojúhelníku $KLM$ leží uvnitř jedné z nich.)

Potřebujeme tedy, aby přímka $AV$ byla osou úsečky $D_3D_1$, přímka $BV$ osou $D_1D_2$ a přímka $CV$ osou $D_2D_3$. Musí proto platit

$$|\sphericalangle D_1D_2D_3| = \pi - |\sphericalangle BVC|, \quad |\sphericalangle D_2D_3D_1| = \pi - |\sphericalangle CVA|,$$
$$|\sphericalangle D_3D_1D_2| = \pi - |\sphericalangle AVB|.$$

Díky tomu, že $V \in \triangle PQR$, jsou úhly $BVC$, $CVA$ a $AVB$ tupé (stačí uvážit Thaletovy kružnice s průměry $BC$, $CA$ a $AB$), takže vnitřní úhly hledaného trojúhelníku $D_1D_2D_3$ jsou známé a ostré. Můžeme tedy sestrojit libovolný trojúhelník $D'_1D'_2D'_3$ podobný neznámému trojúhelníku $D_1D_2D_3$, označit $V'$ střed jeho opsané kružnice a na třech polopřímkách s počátkem $V'$, které procházejí středy stran $D'_3D'_1$, $D'_1D'_2$ a $D'_2D'_3$, sestrojit (dostatečně blízko od bodu $V'$) po řadě body $A'$, $B'$ a $C'$ tak, aby $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ (známe velikosti úhlů $V'A'B'$ a $V'A'C'$). Pak lomená čára $A'D'_1B'D'_2C'D'_3A'$ ohraničuje síť některého čtyřstěnu $A'B'C'D'$, který je podobný hledanému čtyřstěnu $ABCD$.

## A - III - 3

Označme dané podmnožiny $\mathsf{A}_1$, $\mathsf{A}_2$, $\ldots$, $\mathsf{A}_6$. Tvrzení dokážeme indukcí podle počtu $n$ prvků množiny $\mathsf{X}$. Začneme s případem $n = 6$. (Pokud má množina $\mathsf{X}$ méně než 6 prvků, doplníme ji na šestiprvkovou přidáním nových prvků, které nezmění množiny $\mathsf{A}_i$.) Protože $\binom{6}{3} = 20 > 2 \cdot 6$, existuje tříprvková množina $\mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$, která se nerovná ani žádné z množin

$\mathsf{A}_i$, ani žádnému doplňku $\mathsf{X} - \mathsf{A}_i$. Obarvíme-li prvky $\mathsf{Y}$ jednou barvou a prvky $\mathsf{X} - \mathsf{Y}$ barvou druhou, dostaneme „správné“ obarvení.

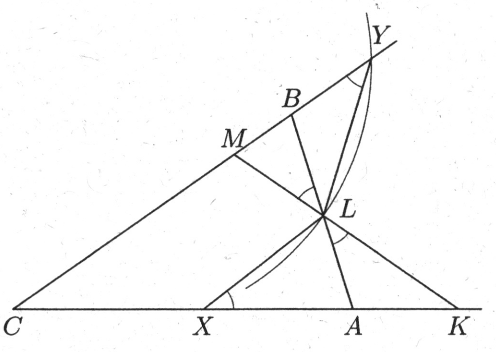
Nyní předpokládejme, že množina $\mathsf{X}$ má aspoň 7 prvků. Pak existuje dvojice různých prvků $u, v \in \mathsf{X}$, které spolu neleží v žádné z množin $\mathsf{A}_i$. (Opravdu, existuje totiž nejvýše $6 \cdot \binom{3}{2} = 18$ dvojic prvků, které patří do některé z množin $\mathsf{A}_i$, zatímco všech dvojic prvků z $\mathsf{X}$ je aspoň $\binom{7}{2} = 21$.) Tuto dvojici prvků $u$, $v$ „slepíme“ do jednoho nového prvku $w$. Jinými slovy, pokud množina $\mathsf{A}_i$ obsahuje prvek $u$ nebo $v$, nahradíme ho prvkem $w$. Dostaneme opět šest tříprvkových podmnožin množiny $\mathsf{X}'$, která má o 1 prvek méně než původní množina $\mathsf{X}$. Prvky množiny $\mathsf{X}'$ můžeme podle indukčního předpokladu „správně“ obarvit; dáme-li prvkům $u$, $v$ barvu prvku $w$ a barvy ostatních prvků v $\mathsf{X}'$ zachováme, dostaneme „správné“ obarvení množiny $\mathsf{X}$. Tím je dokázán indukční krok, a tedy i tvrzení úlohy.

## A – III – 4

Trojúhelníky $ALK$ a $BYL$ jsou podobné, protože (obr. 28) $|\sphericalangle LAK| = |\sphericalangle YBL|$ ($|CA| = |CB|$) a (ze zadání)

$$\frac{|KA|}{|LA|} = \frac{|LB|}{|YB|}.$$

Odtud $|\sphericalangle ALK| = |\sphericalangle BYL|$. Analogicky z podobnosti trojúhelníků




Obr. 28

$ALX$ a $BML$ vyjde $|\sphericalangle AXL| = |\sphericalangle MLB|$. Protože však body $M$, $L$

a $K$ leží v přímce, je také $|\sphericalangle MLB| = |\sphericalangle ALK|$. Potom $|\sphericalangle LYB| = |\sphericalangle ALK| = |\sphericalangle BLM| = |\sphericalangle AXL|$. Z rovnosti $|\sphericalangle LYB| = |\sphericalangle AXL|$ plyne $|\sphericalangle LYC| + |\sphericalangle LXC| = 180°$, takže body $C$, $X$, $L$, $Y$ leží na jedné kružnici $k$. Odtud už vyplývá konstrukce hledané přímky:

1. kružnice $k$ opsaná trojúhelníku $CXY$, kde $|\sphericalangle XDY| = 2|\sphericalangle ABC|$,
2. $L$; $L \in k \cap AB$,
3. $\sphericalangle BLM$; $M \in BC$, $|\sphericalangle BLM| = |\sphericalangle AXL|$,
4. $K$; $K \in LM \cap \overrightarrow{CA}$.

Správnost konstrukce vyplývá z rozboru. Úloha má vždy právě jedno řešení.

## A – III – 5

Ze vztahu (ii) pro $x = y$ vyplývá $f(x^2) = f(x \cdot x) = (k+2)f(x)$. Dvojnásobnou aplikací předchozího vztahu dostaneme

$$f(x^4) = f(x^2 \cdot x^2) = (k+2)f(x^2) = (k+2)^2 f(x).$$

Jiným postupem ale dostaneme

$$\begin{aligned} f(x^4) &= f(x \cdot x^3) = f(x) + f(x^3) + kf(x) = \\ &= (k+1)f(x) + f(x \cdot x^2) = \\ &= (k+1)f(x) + f(x) + f(x^2) + kf(x) = \\ &= (2k+2)f(x) + f(x^2) = (3k+4)f(x). \end{aligned}$$

Nyní stačí najít libovolné $x$, pro které je $f(x) \neq 0$, tedy například podle (i) $x = 1\,995$. Porovnáním předchozích dvou vztahů dostaneme podmínku

$$(k+2)^2 f(1\,995) = f(1\,995^4) = (3k+4)f(1\,995),$$
$$(k+2)^2 = 3k+4,$$
$$k \in \{0, -1\}.$$

Pro $k = -1$ dostáváme funkcionální rovnici z domácího kola. Víme, že jejím obecným řešením je pro $x = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ funkce

$$f(x) = f(p_1) + \ldots + f(p_n) - (n-1)f(1).$$

Podmínku (i) úlohy můžeme splnit například volbou $f(5) = 1\,996$, $f(p) = 0$ pro všechna prvočísla $p \neq 5$ a $f(1) = 0$.

Pro $k = 0$ dostáváme funkcionální rovnici

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Odtud především pro $x = y = 1$ plyne $f(1) = 0$. Obecným řešením této rovnice pak je pro $x = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ funkce

$$f(x) = \alpha_1 f(p_1) + \dots + \alpha_n f(p_n),$$

kde $f(p_i)$ jsou libovolná celá čísla. Opět stačí zvolit $f(5) = 1\,996$ a $f(p) = 0$ pro všechna prvočísla $p \neq 5$ jako výše.

## A – III – 6

Dokážeme, že za uvedených předpokladů je trojúhelník $ABC$ rovnostranný. Označme strany a úhly trojúhelníku $ABC$ obvyklým způsobem. Z rovností

$$|KL| = 2R\sin\beta, \quad |LM| = 2R\sin\gamma, \quad |MK| = 2R\sin\alpha,$$

kde $R$ je společný poloměr tří opsaných kružnic, vychází

$$|KL| : |LM| : |MK| = \sin\beta : \sin\gamma : \sin\alpha,$$

takže $\triangle ABC \sim \triangle LMK$. Proto platí

$$|KL| = \lambda b, \quad |LM| = \lambda c, \quad |MK| = \lambda a,$$

přičemž koeficient podobnosti $\lambda$ určíme úvahou o obsazích trojúhelníků: Z rovností

$$S_{AKM} = S_{BLK} = S_{CML} = \frac{2}{9} S_{ABC}$$

plyne, že $S_{KLM} = \frac{1}{3} S_{ABC}$, takže $\lambda^2 = \frac{1}{3}$. Napišme kosinové věty pro trojúhelníky $ABC$ a $AKM$:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ \frac{1}{3}a^2 &= \left(\frac{2b}{3}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{2b}{3}\cdot\frac{c}{3}\cdot\cos\alpha. \end{aligned}$$

Odečteme-li od devítinásobku druhé rovnosti dvojnásobek první, dostaneme rovnost $a^2 = 2b^2 - c^2$. Z dalších dvojic kosinových vět odvodíme analogicky rovnosti $b^2 = 2c^2 - a^2$ a $c^2 = 2a^2 - b^2$, takže $a = b = c$.

Trojúhelníky $AKM$, $BLK$ a $CMA$ jsou tedy shodné a mají shodné i vepsané kružnice.