45. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie B

In: Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Richard Kollár (editor); Václav Sedláček (editor); Jaromír Šimša (editor); Pavel Töpfer (editor): 45. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1995/1996. 37. mezinárodní matematická olympiáda. 8. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1997. pp. 37–50.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404998

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Zjistěte, pro která reálná čísla p má rovnice

$$x^3 + px^2 + 2px = 3p + 1$$

tři různé reálné kořeny x_1, x_2 a x_3 takové, že $x_1x_2 = x_3^2$. (*J. Šimša*)

B – I – 2

V rovině je dán trojúhelník ABC, v kterém $|\sphericalangle BAC| = 105°$, $|\sphericalangle ABC| = 55°$ a $|AB| = 6\,\text{cm}$. Na straně BC sestrojte body X, Y ($|BX| < |BY|$) a na straně AC body M, N ($|AM| < |AN|$) tak, aby čtyřúhelníky $ABXM$ a $MXYN$ byly tětivové a kružnice jim opsané měly stejný poloměr jako kružnice opsaná trojúhelníku NYC. (*P. Černek*)

B – I – 3

Zvolíme-li libovolně 11 různých dvojciferných čísel, vždy z nich lze vybrat dvě skupiny čísel, které mají stejný počet prvků, neobsahují žádný společný prvek a dávají stejný součet. Dokažte. (*A. Vrba*)

B – I – 4

Číslo $2n^4 + n^3 + 50$ je dělitelné šesti právě pro ta přirozená čísla n, pro která je číslo $2 \cdot 4^n + 3^n + 50$ dělitelné třinácti. Dokažte. (*J. Šimša*)

B – I – 5

Je dán trojboký jehlan $ABCV$, jehož podstavou je rovnostranný trojúhelník ABC s délkou strany a. Přímky AV, BV a CV mají od roviny podstavy stejnou odchylku 45°. Určete poloměr koule, která se dotýká jak roviny ABC v bodě A, tak přímky VB. (Odchylkou přímky od roviny rozumíme úhel, který přímka svírá se svým kolmým průmětem do této roviny.) (*R. Kollár*)

B – I – 6

Umístěte v rovině 7 navzájem různých bodů a 7 navzájem různých přímek tak, aby každými dvěma z těchto bodů procházela jedna z těchto přímek a aby se každé dvě z těchto přímek protínaly v jednom z těchto bodů. Proveďte diskusi. (*P. Hliněný*)

B – S – 1

Najděte všechna přirozená čísla n, pro která platí: Číslo $1\overbrace{99\ldots9}^{n}6$ je dělitelné třinácti. (*A. Vrba, J. Šimša*)

B – S – 2

Do kružnice je vepsán čtverec $ABCD$. Libovolným bodem M úhlopříčky AC je vedena tětiva KL rovnoběžná se stranou AB. Dokažte, že

$$|KM|^2 + |ML|^2 = |AB|^2.$$

(*P. Leischner*)

B – S – 3

Najděte 1 996 navzájem různých celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{1996}$ tak, aby mezi součty všech jejich dvojic $a_i + a_j$ $(1 \leqq i < j \leqq 1996)$ bylo

a) co nejvíce různých čísel,
b) co nejméně různých čísel. (*R. Kollár*)

B – II – 1

Najděte všechna přirozená čísla n, pro která je číslo $5^n - 3^n + 2$ dělitelné sedmi. (*A. Vrba, J. Šimša*)

B – II – 2

Body dotyku tečen vedených z bodu V ke kružnici k označme A, B. Sestrojte sečnu kružnice k tak, aby procházela bodem V a kružnici k protínala v bodech C, D, kde $|AC| = |BD|$. (*J. Švrček*)

B – II – 3

Dokažte, že rovnice $x^3 - 1\,996x^2 + rx - 1\,995 = 0$ má pro každý reálný koeficient r nanejvýš jeden celočíselný kořen. (*A. Vrba*)

B – II – 4

Trojboký jehlan $ABCV$ má podstavu ABC ($|AB| = 8\,\mathrm{cm}$, $|AC| = |BC| = 5\,\mathrm{cm}$), jeho boční stěny mají od roviny podstavy odchylku $45°$ a pata P jeho výšky spuštěné z vrcholu V leží uvnitř podstavy. Vypočtěte velikost výšky VP. (Odchylkou dvou rovin rozumíme odchylku přímek, které leží v těchto rovinách a jsou kolmé na jejich průsečnici.)

(*P. Leischner*)

B – I – 1

Využijeme vztahů mezi kořeny a koeficienty mnohočlenu, tzv. Viètových vzorců. Podle nich je

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -p, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= 2p, \\ x_1x_2x_3 &= 3p + 1. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do druhého vztahu za $x_1x_2 = x_3^2$, dostaneme

$$2p = x_3^2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_3(x_1 + x_2 + x_3) = -px_3,$$

a protože $p = 0$ zřejmě nevyhovuje, je $x_3 = -2$.

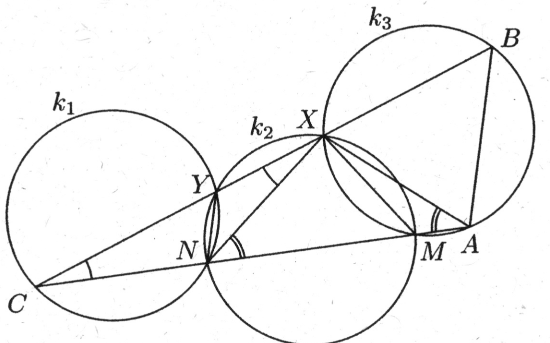
Dále platí

$$4 = x_3^2 = x_1x_2 = \frac{x_1x_2x_3}{x_3} = \frac{3p+1}{-2},$$

odkud $p = -3$. Jen pro toto p tedy může daná rovnice vyhovovat daným podmínkám. Dosadíme-li do Viètových vzorců za x_3 a za p, dopočteme zbývající řešení $x_1 = 4$, $x_2 = 1$ a přesvědčíme se, že je tomu opravdu tak.

B – I – 2

Úlohu vyřešíme pro obecný trojúhelník.



Obr. 8

Rozbor: Předpokládejme, že je úloha vyřešena (obr. 8). Protože NY je tětiva společná kružnicím k_1, k_2, které mají stejný poloměr, a body X,

C leží v opačných polorovinách určených přímkou NY, je $|\sphericalangle NXY| = |\sphericalangle NCY| = \gamma = |\sphericalangle ACB|$. Podobně $|\sphericalangle MAX| = |\sphericalangle MNX| = 2\gamma$ (je totiž $|\sphericalangle MNX| = |\sphericalangle NXC| + |\sphericalangle NCX|$).

Konstrukce: Nejprve sestrojíme na úsečce BC bod X tak, aby $|\sphericalangle CAX| = 2\gamma$. Dále sestrojíme na úsečce AC bod N tak, aby $|\sphericalangle CXN| = \gamma$. Body M, Y můžeme získat analogicky (vyjdeme z bodu B) nebo jako průsečíky kružnic určených trojicemi bodů A, B, X a X, M, N se stranami AC, BC.

Důkaz správnosti konstrukce plyne z toho, že kružnice procházející body A, B, X, M, resp. M, X, N, Y mají společnou tětivu MX a shodné obvodové úhly MAX, MNX. Mají tedy stejný poloměr. Analogicky pro kružnice k_2, k_1.

Diskuse: Bod X lze popsaným způsobem sestrojit, právě když $2\gamma < \alpha$, a bod M, právě když $2\gamma < \beta$. Body N, Y lze pak sestrojit vždy. Nutná a postačující podmínka řešitelnosti úlohy je současná platnost podmínek $2\gamma < \alpha, 2\gamma < \beta$. (Úloha může tedy mít řešení, jen když $\gamma < 36°$.) V našem případě $\alpha = 105°$, $\beta = 55°$, $\gamma = 20°$ jsou podmínky splněny.

Poznámka. Stejným způsobem můžeme řešit obecnější úlohu, která požaduje sestrojit k kružnic stejného poloměru umístěných analogicky jako v úloze pro $k = 3$. Obvodové úhly budou po sobě následovat v posloupnosti γ, 2γ, 3γ, ..., $(k-1)\gamma$.

B – I – 3

Dejme tomu, že dvě množiny čísel mají stejný počet prvků a dávají stejný součet. Vynecháme-li z nich všechny společné prvky, dostaneme množiny, které neztratily uvedené dvě vlastnosti a navíc ještě neobsahují žádný společný prvek.

Jedenáctiprvková množina obsahuje $\binom{11}{k}$ k-prvkových podmnožin a toto číslo je největší pro $k = 5$ a $k = 6$: $\binom{11}{5} = \binom{11}{6} = 462$. Přitom součty pěti různých dvojciferných čísel mohou nabývat jen 421 hodnot od $11 + 12 + \ldots + 15 = 65$ do $95 + 96 + \ldots + 99 = 485$. Dvě pětiprvkové podmnožiny se stejným součtem tedy existují pro každou jedenáctiprvkovou množinu dvojciferných čísel.

Poznámka. Kromě elementární kombinatoriky je v úloze využit tzv. Dirichletův princip: Nechť $K > k$. Ať rozdělíme K králíků do k králíkáren jakkoliv, vždy budou v některé králíkárně alespoň dva králíci. V našem případě jsou „králíci“ pětiprvkové množiny a „králíkárny“ čísla

65, ..., 485. Obecněji: Je-li $K > nk$, bude v některé králíkárně více než n králíků.

B – I – 4

Sestavíme tabulku zbytků při dělení čísel $A = 2n^4 + n^3 + 50$ šesti v závislosti na zbytku čísla n (zbytek při dělení čísla A šesti totiž závisí jen na zbytku při dělení čísla n šesti):

n	n^2	n^3	n^4	$2n^4$	$2n^4 + n^3$	$A = 2n^4 + n^3 + 50$
0	0	0	0	0	0	2
1	1	1	1	2	3	5
2	4	2	4	2	4	0
3	3	3	3	0	3	5
4	4	4	4	2	0	2
5	1	5	1	2	1	3

Z tabulky vidíme, že číslo A je násobkem šesti, právě když číslo n dává při dělení šesti zbytek rovný 2, tj. je rovno jednomu z čísel 2, 8, 14, 20, ...

Nyní sestavíme tabulku zbytků při dělení několika prvních čísel $B = 2 \cdot 4^n + 3^n + 50$ třinácti. (Na rozdíl od výrazu A, který je mnohočlenem, se ve výrazu B vyskytuje proměnná n i v exponentu. Nelze proto říci, že zbytek při dělení čísla B třinácti závisí na zbytku při dělení čísla n třinácti. Až při sestavování tabulky se ukáže, s jakou periodou se zbytky opakují.)

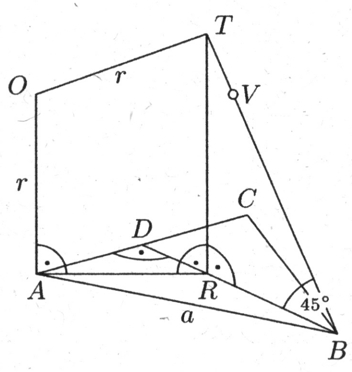
n	3^n	4^n	$2 \cdot 4^n$	$2 \cdot 4^n + 3^n$	$B = 2 \cdot 4^n + 3^n + 50$
0	1	1	2	3	1
1	3	4	8	11	9
2	9	3	6	2	0
3	1	12	11	12	10
4	3	9	5	8	6
5	9	10	7	3	1
6	1	1	2	3	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Další výpočty už nemusíme provádět. Vidíme totiž, že zbytky mocnin 3^n a 4^n se vzhledem k číslu n opakují se společnou periodou rovnou šesti (u mocnin 3^n existuje dokonce menší perioda rovna třem). Proto i posloupnost zbytků čísel B má periodu 6. Navíc je z tabulky patrno, že B je násobkem třinácti, právě když číslo n dává při dělení šesti zbytek 2, tj. je rovno jednomu z čísel 2, 8, 14, 20, ...

Poznámka: Periodicitu v posloupnosti zbytků při dělení mocnin a^k číslem d přesněji postihují Fermatova a Eulerova věta. Podle Fermatovy věty je v případě, kdy d je prvočíslo, délka periody rovna některému děliteli čísla $d - 1$.

B – I – 5

Situaci znázorňuje obr. 9, v němž T je bod dotyku tečny BV, O je střed koule, $|AB| = |BC| = |AC| = 2|AD| = a$, R kolmý průmět bodu T do roviny ABC, $|BT| = |BA| = a$ (tečny), $|TR| = |BR| = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Hledaný poloměr r vypočteme z pravoúhlého lichoběžníku $ARTO$, jehož stranu $|AR|$ vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku ADR, ve kterém známe $|AD| = \frac{1}{2}a$, $|DR| = |BD| - |BR| = \frac{1}{2}a\sqrt{3} - \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Vyjde $|AR|^2 = \frac{1}{2}a^2(3 - \sqrt{6})$, $r = \frac{1}{2}a\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$.



Obr. 9

B – I – 6

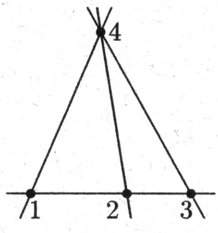
Budeme mluvit jen o umísťovaných bodech a přímkách. Ze 7 bodů lze utvořit 21 dvojic a ty leží na 7 přímkách. Mohou tedy nastat jen dva případy:

(1) Na každé přímce leží právě 3 dvojice bodů, tj. právě 3 body.

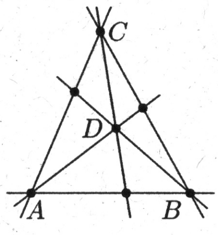
(2) Na některé z přímek leží více než 3 dvojice bodů, tj. více než 3 body.

Pokusme se nejprve vytvořit konfiguraci 7 bodů a 7 přímek typu (1): Zvolme přímku a na ní tři body 1, 2, 3. Dále zvolíme bod 4 — ten musí ležet mimo přímku 12 (obr. 10). Sestrojíme přímky 14, 24 a 34. Na přímce 24 leží ještě jeden bod 5. Můžeme ho zvolit

(a) uvnitř úsečky 24,
(b) uvnitř polopřímky opačné k 42,
(c) uvnitř polopřímky opačné k 24.

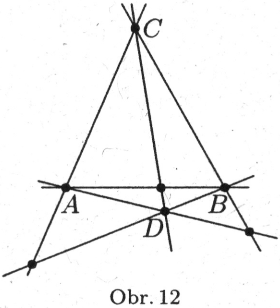


Obr. 10



Obr. 11

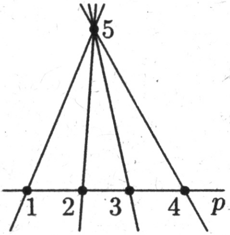
Doplníme přímky 15 a 35 a jejich průsečíky s přímkami 14, resp. 34. V případech (a), (b) dojdeme vždy ke konfiguraci jako na obr. 11. V případě (c) může ještě nastat několik různých situací podle toho, kam padne průsečík přímek 15, 34 a průsečík přímek 35, 14, vždy však vedou ke konfiguraci jako na obr. 12.



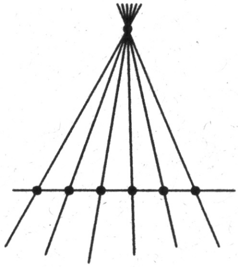
Obr. 12

Do každé z těchto dvou konfigurací obsahující 7 bodů a 6 přímek zbývá doplnit sedmou přímku tak, aby procházela právě třemi body. Každý z bodů A, B, C, D je již spojen s každým ze šesti ostatních bodů, sedmá přímka tedy musí procházet třemi body neoznačenými písmeny. Ty však neleží v přímce, takže žádná konfigurace typu (1) neexistuje.

Přistoupíme k vytvoření konfigurace typu (2). Vyjdeme od přímky p, na níž leží 4 body. Všech 7 bodů na ní ležet nemůže (to bychom neměli 7 různých přímek), zvolme tedy pátý bod mimo tuto přímku (obr. 13). Kdyby další bod ležel mimo přímku p, určoval by spolu s předchozími body 3 nebo 5 přímek, což není možné.



Obr. 13



Obr. 14

Zbývající dva body tedy leží také na přímce p. Úloze vyhovuje jedině konfigurace z obr. 14.

Poznámka. Celý důkaz můžeme provést i duálním způsobem: v textu všude vzájemně vyměníme přímky a body, průsečíky přímek a spojnice bodů.

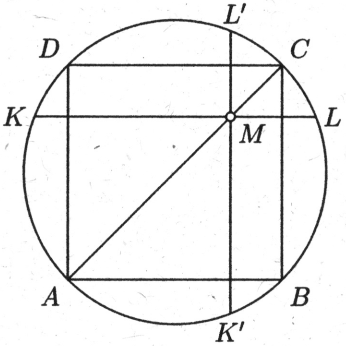
B – S – 1

Vzhledem k tomu, že $\underbrace{199\ldots9}_{n}6 = 2(10^{n+1} - 2)$, je toto číslo dělitelné třinácti, právě když 10^{n+1} dává při dělení třinácti zbytek 2. Při dělení čísel 1, 10, 100, ... třinácti však dostáváme zbytky 1, 10, 9, 12, 3, 4, 1, ... (dále se zbytky periodicky opakují). Žádné z daných čísel tedy není dělitelné třinácti.

Jiné řešení. Dělíme-li číslo 199...9 třinácti obvyklým způsobem, sepisujeme postupně zbytky 6, 4, 10, 5, 7, 1, 6, ... (dále se zbytky periodicky opakují). Poslední krok při dělení čísla 1999...6 třinácti spočívá tedy v tom, že třinácti vydělíme některé z čísel 66, 46, 106, 56, 76 nebo 16. Žádné z nich však není dělitelné třinácti beze zbytku.

B – S – 2

Bodem M veďme ještě tětivu $K'L' \parallel BC$ (obr. 15). Zřejmě je $|KD| =$



Obr. 15

$= |LC| = |L'C|$, takže $|KL'| = |DC|$ (úsečka DC je obraz úsečky KL' v otočení kolem středu kružnice). Je tedy

$$|AB|^2 = |CD|^2 = |KL'|^2 = |KM|^2 + |ML'|^2 =$$
$$= |KM|^2 + |ML|^2.$$

B – S – 3

Existuje právě $\dfrac{n(n-1)}{2}$ dvojic indexů i, k takových, že $1 \leqq i < k \leqq$ $\leqq n$. Pro žádných n čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ neexistuje tedy více než $\dfrac{n(n-1)}{2}$ různých součtů $a_i + a_k$. Na druhé straně, je-li $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, je $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < \ldots < a_1 + a_n < a_2 + a_n < \ldots < a_{n-1} + a_n$, a tedy mezi součty $a_i + a_k$ je vždy alespoň $2n - 3$ různých součtů. Krajní možnosti nastávají např. pro následující n-tice čísel

a) $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n$,

b) $1, 2, 3, \ldots, n$.

V našem případě je $n = 1\,996$.

B – II – 1

Sestavíme tabulku zbytků při dělení čísel 3^n, 5^n, $5^n - 3^n + 2$ sedmi:

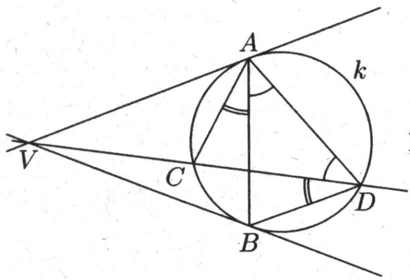
n	0	1	2	3	4	5	6	...
3^n	1	3	2	6	4	5	1	...
5^n	1	5	4	6	2	3	1	...
$5^n - 3^n + 2$	2	4	4	2	0	0	2	...

(Šestice zbytků ve všech třech řádcích se dále periodicky opakují.)

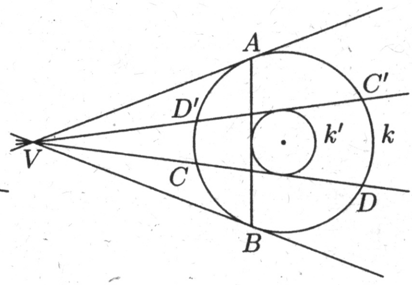
Vidíme, že hledaná přirozená čísla n jsou právě ta, která při dělení šesti dávají zbytek 4 nebo 5, tj. čísla tvaru $n = 6k + 4$ a $n = 6k + 5$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

B – II – 2

Rozbor (obr. 16): Je-li $|AC| = |BD|$, platí pro odpovídající obvodové úhly $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ADC|$. Dále je $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CDB|$, takže $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ADB|$ a pro příslušné tětivy je $|CD| = |AB|$.



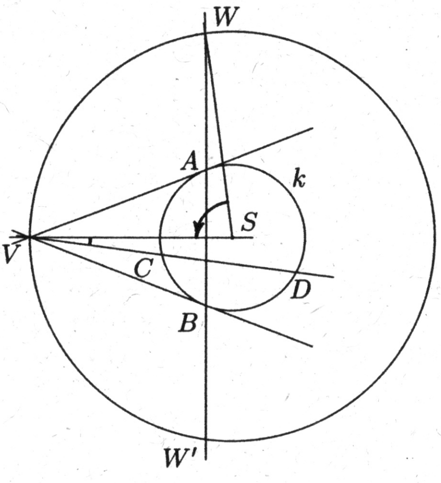
Obr. 16



Obr. 17

Konstrukce 1 (obr. 17): Sestrojíme kružnici k', která je soustředná s kružnicí k a dotýká se tětivy AB. Hledaná sečna kružnice k je tečnou kružnice k' vedenou z bodu V.

Konstrukce 2 (obr. 18): Hledanou sečnu procházející bodem V dostaneme jako obraz přímky AB ve vhodném otočení kolem středu S kružnice k: Sestrojíme kružnici se středem S a poloměrem $|SV|$, její průsečíky s přímkou AB označíme W, W'. Úhel otočení je pak $\sphericalangle WSV$, resp. $\sphericalangle W'SV$ a $|\sphericalangle SVC| = 90° - |\sphericalangle WSV|$.

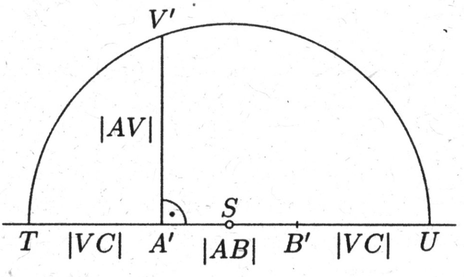


Obr. 18

Konstrukce 3: Využijeme mocnost bodu V ke kružnici k. Předpokládejme, že $|VC| \leqq |VD|$, potom je (obr. 19)

$$|VA|^2 = |VC| \cdot |VD| = |VC|(|VC| + |CD|) = \\ = |VC|(|VC| + |AB|).$$

Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník $A'B'V'$ s odvěsnami $|A'B'| = |AB|$, $|A'V'| = |AV|$. Střed strany $A'B'$ označme S a průsečíky kružnice $(S, |SV'|)$ s přímkou $A'B'$ označme T, U tak, aby $|TA'| < |UA'|$. Pak je $|TA'| = |VC|$.



Obr. 19

DŮKAZ. Podle Eukleidovy věty o výšce je

$$|V'A'|^2 = |TA'| \cdot |A'U| = |TA'|(|A'B'| + |B'U|) = \\ = |TA'|(|A'B'| + |TA'|),$$

tj.

$$|VA|^2 = |TA'|(|TA'| + |AB|).$$

Pro $|VC| > |VD|$ postupujeme obdobně. Přitom zjistíme, že v tomto případě vyjde $|VC| = |UA'|$.

Konstrukce 4 (podle prof. *Málka* z gymnázia Kyjov): Úsečky AB a CD jsou souměrně sdružené podle některé přímky, jež prochází středem S kružnice k. Obraz W bodu V v příslušné osové souměrnosti najdeme jako průsečík přímky AB s kružnicí o středu S a poloměru $|SV|$. Body C a D pak sestrojíme jako obrazy bodu A a B v osové souměrnosti podle osy úsečky VW.

Úloha má vždy dvě řešení.

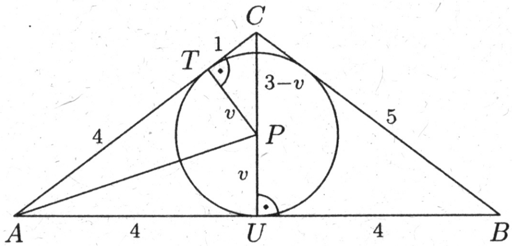
B – II – 3

Připusťme, že pro některé číslo r má daná rovnice dva celočíselné kořeny a, b. Dělení levé strany rovnice mnohočlenem $(x-a)(x-b)$ vyjde beze zbytku a výsledný podíl bude tvaru $x - c$ pro vhodné reálné číslo c. Číslo c musí být ovšem celé, neboť $a+b+c = 1\,996$. Všechna tři čísla a, b, c nemohou být lichá, když je jejich součet sudý. Jejich součin je však liché číslo 1 995, což není možné. Rovnice může mít tedy nanejvýš jeden celočíselný kořen.

B – II – 4

Označme U patu výšky z vrcholu V ve stěně ABV. Protože $VU \perp AB$ a $VP \perp AB$, je přímka AB kolmá na rovinu VUP, takže je také $PU \perp AB$. Je tedy $|\sphericalangle VUP| = 45°$ a trojúhelník VUP je pravoúhlý a rovnoramenný s rameny VU, VP, takže $v = |VP| = |PU|$. Zopakujeme-li stejnou úvahu i pro boční stěny BCV a CAV, zjistíme, že bod P je středem kružnice vepsané podstavě ABC a velikost v výšky VP její poloměr. Úlohu jsme tak převedli na výpočet poloměru kružnice vepsané trojúhelníku ABC (obr. 20). Z pravoúhlého trojúhelníku CUB dostaneme $|CU| = 3$ a v pravoúhlém trojúhelníku PTC pak máme $|CT| = 1$ (je

$|CT| = |CA| - |AT| = |CA| - |AU|)$, $|PT| = v$ a $|CP| = 3 - v$, odkud $1 + v^2 = (3 - v)^2$, takže $v = \frac{4}{3}$.



Obr. 20