42. ročník matematické olympiády na středních školách

---

34. mezinárodní matematická olympiáda

In: Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Jozef Moravčík (editor); Václav Sedláček (editor); Jaromír Šimša (editor); Pavel Töpfer (editor): 42. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1992/1993. 34. mezinárodní matematická olympiáda. 5. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2002. pp. 114–128.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404976

34. mezinárodní matematická olympiáda

Ve dnech 13.–24. července 1993 se v tureckém İstanbulu konala 34. mezinárodní matematická olympiáda. Českou republiku na ní velmi úspěšně reprezentovala šestice studentů tří gymnázií. Jejich výsledky vidíte v následující tabulce:

		Body za úlohu						Body	Cena
Umístění		1	2	3	4	5	6		
102.–110.	Michal Brodský 4. roč. gymnázia Brno, tř. kpt. Jaroše	2	2	1	7	4	3	19	III.
143.–150.	Marcela Hlawiczková 4. roč. gymnázia Třinec	1	7	0	0	7	0	15	III.
122.–132.	Ondřej Klíma 4. roč. gymnázia Brno, tř. kpt. Jaroše	1	0	4	7	1	4	17	III.
52.–58.	Vít Novák 4. roč. gymnázia Praha, Korunní	7	0	4	5	3	6	25	II.
19.–24.	Jana Syrovátková 4. roč. gymnázia Brno, tř. kpt. Jaroše	7	2	7	4	7	5	32	I.
59.–66.	Robert Šámal 2. roč. gymnázia Praha, Korunní	7	2	0	7	5	3	24	II.
	Celkem	25	13	16	30	27	21	132	

Vedoucím české delegace byl jednatel ÚV MO dr. *Karel Horák*, CSc., z Matematického ústavu Akademie věd, který se zúčastnil i zasedání mezinárodní jury. 16. července pak do İstanbulu přijelo naše šestičlenné družstvo vedené doc. dr. *Leo Bočkem*, CSc., z Matematicko-fyzikální fakulty University Karlovy, předsedou ÚV MO. Celkem se 34. MMO zúčastnilo 413 studentů ze 73 zemí (soutěž však dokončilo jen 410 z nich). Podle pravidel byla polovina účastníků oceněna jednou ze tří medailí: za zisk 30–42 bodů byla udělena zlatá medaile (I. cena), za 20–29 bodů stříbrná (II. cena) a za 11–19 bodů bronzová (III. cena).

V neoficiálním pořadí družstev jednotlivých zemí se Česká republika s jednou zlatou, dvěma stříbrnými a třemi bronzovými medailemi umístila se 132 body na 10. místě, což je výsledek, který se nám asi dlouho nepodaří zopakovat!

	I	II	III	body
ČLR	6	0	0	215
Německo	4	2	0	189
Bulharsko	2	4	0	178
Rusko	4	1	1	177
Tchaj-wan	1	4	1	162
Írán	2	3	1	153
USA	2	2	2	151
Maďarsko	3	1	2	143
Vietnam	1	4	1	138
Česká republika	1	2	3	132
Rumunsko	1	2	3	128
Slovensko	1	3	1	126
Austrálie	1	2	3	125
Velká Británie	0	3	3	118
Indie	0	4	1	116
Korea	0	3	3	116
Francie	2	1	1	115
Izrael	1	2	2	113
Kanada	1	1	3	113
Japonsko	0	2	3	98
Ukrajina	0	2	3	96
Rakousko	0	1	4	87
Itálie	1	0	2	86
Turecko	0	1	2	81
Kazachstán	0	1	3	80
Gruzie	0	1	3	79
Kolumbie	0	0	4	79
Arménie	1	1	0	78
Polsko	0	2	1	78
Singapur	0	1	3	75
Lotyšsko	0	2	1	73
Dánsko	0	1	3	72
Hongkong	0	0	4	70
Brazílie	0	0	1	60
Nizozemsko	0	0	1	58
Kuba	0	1	1	56
Belgie	0	0	1	55

	I	II	III	body
Bělorusko	0	1	1	54
Švédsko	0	1	1	51
Maroko	0	0	1	49
Thajsko	0	0	2	47
Argentina	0	1	1	46
Švýcarsko	0	1	1	46
Norsko	0	0	2	44
Nový Zéland	0	0	2	43
Slovinsko	0	0	2	43
Španělsko	0	1	1	43
Makedonie	0	0	3	42
Litva	0	0	0	41
Irsko	0	0	1	39
Portugalsko	0	0	1	35
Ázerbájdžán	0	0	1	33
Filipíny	0	0	1	33
Finsko	0	0	0	33
Chorvatsko	0	0	1	32
Estonsko	0	0	1	31
JAR	0	0	0	30
Trinidad a Tobago	0	0	0	30
Moldavsko	0	0	0	29
Kirgizie	0	0	0	28
Macao	0	0	0	24
Mexiko	0	0	1	24
Mongolsko	0	0	1	24
Island	0	0	0	23
Lucembursko	0	1	0	20
Albánie	0	0	0	18
Severní Kypr	0	0	0	17
Bahrajn	0	0	0	16
Kuvajt	0	0	0	16
Indonézie	0	0	0	15
Bosna a Hercegovina	0	0	1	14
Alžírsko	0	0	0	9
Turkmenistán	0	0	0	9

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Nechť $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, kde $n > 1$ je přirozené číslo. Dokažte, že f nelze rozložit na součin dvou mnohočlenů, z nichž každý má celočíselné koeficienty a stupeň aspoň 1. (*Irsko*)

2. Nechť D je vnitřní bod ostroúhlého trojúhelníku ABC, pro který platí

$$|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| + 90^\circ$$

a

$$|AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC|.$$

a) Spočtěte hodnotu podílu $\dfrac{|AB| \cdot |CD|}{|AC| \cdot |BD|}$.

b) Dokažte, že tečny v bodě C kružnic opsaných trojúhelníkům ACD a BCD jsou na sebe kolmé. (*Velká Británie*)

3. Uvažujme následující hru na nekonečné šachovnici. Na počátku je n^2 kamenů uspořádáno do bloku $n \times n$ sousedících polí, přičemž v každém poli stojí jeden kámen. *Tahem* rozumíme přemístění kamene horizontálním či vertikálním směrem přes jedno obsazené sousední pole na bezprostředně následující pole volné. Přeskočený kámen odstraníme.
Najděte všechna n, pro něž může hra skončit s jediným kamenem na šachovnici. (*Finsko*)

4. Pro body P, Q, R v rovině označme $m(PQR)$ minimum délek výšek trojúhelníku PQR ($m(PQR) = 0$ pro kolineární body P, Q, R).
Jsou-li A, B, C tři body v dané rovině, dokažte, že pro každý bod X této roviny platí

$$m(ABC) \leqq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$

(*Makedonie*)

5. Nechť $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Rozhodněte, zda existuje funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pro niž

$$f(1) = 2,$$
$$f\big(f(n)\big) = f(n) + n \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}$$

a

$$f(n) < f(n+1) \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

(*Německo*)

6. Nechť $n > 1$ je celé číslo. Uvažujme n lampiček $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$ uspořádaných do kruhu. Každá lampička je buď zapnutá, nebo vypnutá. Postupně provádíme kroky $Z_0, Z_1, \ldots, Z_i, \ldots$, přičemž krok Z_j ovlivní pouze stav lampičky L_j (nechává všechny ostatní lampičky nezměněny), a to následovně: Je-li L_{j-1} zapnutá, změní Z_j stav lampičky L_j ze zapnutého na vypnutý, anebo z vypnutého na zapnutý. Je-li L_{j-1} vypnutá, Z_j nechá stav L_j nezměněn. Lampičky jsou číslovány modulo n, to znamená, že $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_0 = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$, atd. Na začátku jsou všechny lampičky zapnuty. Dokažte, že

a) existuje kladné celé číslo $M(n)$ takové, že po $M(n)$ krocích budou všechny lampičky zapnuty,

b) je-li n tvaru 2^k, budou po $n^2 - 1$ krocích všechny lampičky zapnuty,

c) je-li n tvaru $2^k + 1$, budou po $n^2 - n + 1$ krocích všechny lampičky zapnuty. (*Nizozemsko*)

Řešení úloh

1. Předpokládejme, že daný mnohočlen f lze rozložit, tj. že platí $f = gh$, kde g a h jsou mnohočleny s celočíselnými koeficienty stupně aspoň 1 a s koeficientem 1 u nejvyšší mocniny. Protože $f(0) = g(0)h(0) = 3$, je buď $|g(0)| = 1$, nebo $|h(0)| = 1$. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $|g(0)| = 1$.

Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ $(k \geqq 1)$ jsou kořeny rovnice $g(x) = 0$ v oboru komplexních čísel, tj. platí

$$g(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_k). \qquad (1)$$

Je tedy zároveň $|g(0)| = |\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k| = 1$.

Protože $f = gh$, jsou čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ $(k \geqq 1)$ kořeny i rovnice $f(x) = x^{n-1}(x + 5) + 3 = 0$, proto

$$\alpha_i^{n-1}(\alpha_i + 5) = -3, \quad 1 \leqq i \leqq k.$$

Součinem těchto vztahů pro $i = 1, 2, \ldots, k$ dostaneme

$$|(\alpha_1 + 5)(\alpha_2 + 5) \ldots (\alpha_k + 5)| = 3^k. \qquad (2)$$

Z vyjádření (1) podle (2) nyní plyne

$$|g(-5)| = |(\alpha_1 + 5)(\alpha_2 + 5) \ldots (\alpha_k + 5)| = 3^k,$$

přitom ale pro mnohočleny g a h s celočíselnými koeficienty máme $3 = f(-5) = g(-5)h(-5)$. Protože $g(-5)$ dělí číslo 3, musí v rovnosti (2) nutně být $k = 1$, a mnohočlen g je tedy lineární.

Jestliže g je lineární dvojčlen s koeficientem 1 u nejvyšší mocniny a s vlastností $|g(0)| = 1$, je $g(x) = x \pm 1$, takže je buď $g(-1) = 0$, nebo $g(1) = 0$. Odtud plyne, že je buď $f(-1) = 0$, nebo $f(1) = 0$. Jak se snadno přesvědčíme, ani jedno z čísel $f(-1)$, $f(1)$ však není nulové.

Rozklad mnohočlenu f na součin dvou netriviálních mnohočlenů s celočíselnými koeficienty není tedy možný.

Jiné řešení. Racionálními kořeny daného mnohočlenu f mohou být jedině čísla ± 1, ± 3, pro liché číslo x je však hodnota $f(x)$ rovněž lichá, takže f nemá žádný racionální kořen. To znamená, že mnohočlen f není dělitelný lineárním dvojčlenem s celočíselnými koeficienty (takový má vždy racionální kořen!).

Předpokládejme, že

$$f(x) = (a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0) \times \\ \times (b_{n-k}x^{n-k} + b_{n-k-1}x^{n-k-1} + \ldots + b_1 x + b_0), \qquad (3)$$

kde a_i $(0 \leqq i \leqq k)$ a b_j $(0 \leqq j \leqq n-k)$ jsou celá čísla, $k \geqq 2$, $n-k \geqq 2$ (je tedy $n \geqq 4$ a $2 \leqq k \leqq n-2$). Porovnáním koeficientů vychází $a_0 b_0 = 3$. Volme označení tak, že a_0 je dělitelné třemi a $|b_0| = 1$. Koeficienty a_i prvního mnohočlenu na pravé straně (3) nemohou být všechny dělitelné třemi (to by byly třemi dělitelné i koeficienty mnohočlenu f), existuje tedy index t $(1 \leqq t \leqq k)$ takový, že $3 \mid a_i$ pro všechna $i < t$ a $3 \nmid a_t$. Protože $t \leqq k \leqq n-2$, je koeficient u x^t mnohočlenu f roven nule:

$$0 = a_t b_0 + (a_{t-1}b_1 + \ldots).$$

Protože výraz v závorce je dle předpokladu dělitelný třemi, ale $3 \nmid |a_t b_0| = |a_t|$, dostáváme spor.

Poznámka. Analogicky druhému řešení můžeme dokázat následující obecnější tvrzení (tvrzení úlohy dostaneme pro $p = 3$ a $k = n-1$):

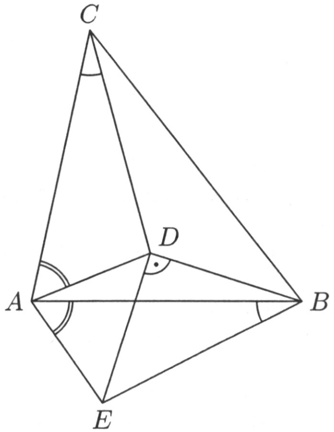
Nechť $f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ je mnohočlen s celočíselnými koeficienty takový, že pro nějaké prvočíslo p jsou koeficienty c_i dělitelné p pro všechna i, $0 \leqq i < k \leqq n$, $p \nmid c_k$ a $p^2 \nmid c_0$. Jestliže se f dá rozložit na součin dvou mnohočlenů s celočíselnými koeficienty, má aspoň jeden z nich stupeň nejvýše $n-k$.

Je to zobecnění tzv. *Eisensteinova kritéria*, které dostaneme pro $k = n$ a které říká, že mnohočlen s koeficientem 1 u nejvyšší mocniny, jehož všechny ostatní koeficienty jsou dělitelné prvočíslem p, přičemž absolutní člen je dělitelný jen p, a nikoli p^2, je nerozložitelný ve třídě mnohočlenů s celočíselnými koeficienty.

2. a) V polorovině opačné k ABC uvažujme bod E takový, že DEB je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu D. Platí tak $|BD| = |DE|$. Protože $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| + 90°$, je $|\sphericalangle ADE| =$ $= |\sphericalangle ACB|$. Podle zadání

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AD|}{|DE|},$$

odkud plyne, že trojúhelníky ABC a AED jsou podobné, a proto $|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle CAB|$ (obr. 36). Odečtením $|\sphericalangle DAB|$ od obou stran předešlé rovnosti dostáváme rovněž $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle BAE|$.



Obr. 36

Z uvedené podobnosti trojúhelníků ABC a AED vychází

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AC|}{|AD|}.$$

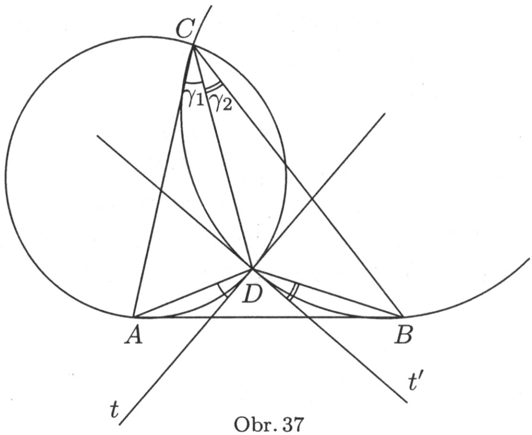
Ze shodnosti úhlů CAD a BAE a předešlé rovnosti dále plyne, že i trojúhelníky ADC a AEB jsou podobné. Platí tedy

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|CD|},$$

a tudíž

$$\frac{|AB| \cdot |CD|}{|AC| \cdot |BD|} = \frac{|BE|}{|BD|} = \sqrt{2}.$$

b) Označme t a t' tečny ke kružnicím opsaným trojúhelníkům ACD a BCD v bodě D (obr. 37). Ze shodnosti vyznačených obvodových a úse-



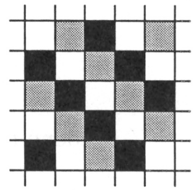
Obr. 37

kových úhlů γ_1 a γ_2 příslušných tětivě AD kružnice ADC a tětivě BD kružnice BDC dostáváme pro velikost úhlu φ, který svírají přímky t a t',

$$\varphi = |\sphericalangle ADB| - (\gamma_1 + \gamma_2) = |\sphericalangle ADB| - |\sphericalangle ACB| = 90^\circ.$$

Protože tečny k oběma opsaným kružnicím v bodě C jsou s tečnami t a t' souměrně sdružené podle osy společné tětivy CD, je tvrzení b) dokázáno.

3. Zvolme kartézský souřadný systém v rovině nekonečné šachovnice tak, že jednotlivá pole v něm mají celočíselné souřadnice a n^2 kamenů zabírá všechny mřížové body (x, y), kde $1 \leqq x \leqq n$, $1 \leqq y \leqq n$. Každý tah má vliv na obsazení tří polí sousedících horizontálně či vertikálně. Obarvíme-li pole šachovnice třemi barvami (obr. 38) tak, že stejnou barvu budou mít pole, jejichž součet souřadnic $x + y$ dává stejný zbytek modulo 3, vidíme, že po každém tahu se celkový počet obsazených polí každé barvy změní o jednu (ve dvou případech klesne, v jednom vzroste).

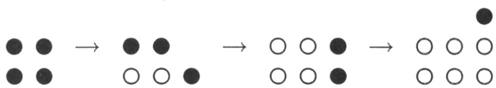


Obr. 38

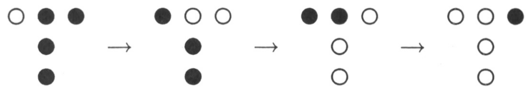
Označme a_0, a_1, a_2 počet obsazených polí té které barvy. Na počátku je počet obsazených polí roven n^2. Je-li n násobek tří, je počet obsazených polí každé barvy stejný ($a_0 = a_1 = a_2 = \frac{1}{3}n^2$), takže všechna tři čísla mají stejnou paritu (jsou všechna sudá, nebo všechna lichá). Jak jsme už ukázali, po každém tahu se parita každého z čísel a_0, a_1, a_2 změní na opačnou, a protože konečné pozici odpovídá trojice čísel $0, 0, 1$ s různou paritou, je zřejmé, že pro n dělitelné třemi nelze této konečné pozice žádnou posloupností tahů dosáhnout.

Není-li n dělitelné třemi, popíšeme postup, kterým lze vždy požadované konečné pozice dosáhnout. Tím bude úloha vyřešena.

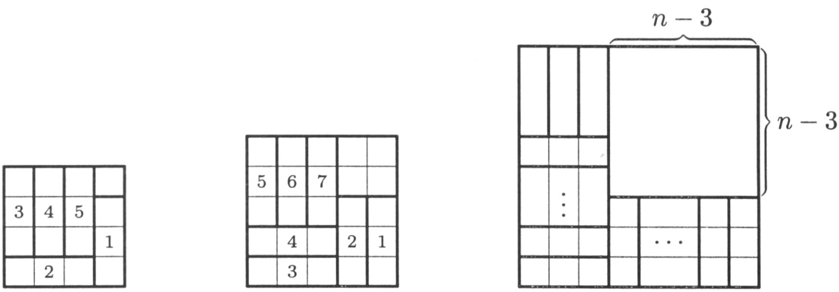
Pro $n = 1$ jsme hotovi. Pro $n = 2$ dosáhneme konečné pozice následující posloupností tahů:



Nyní ukážeme, jak zredukovat čtyři obsazená pole z pětice polí tvaru „T“ na jediné obsazené pole, přičemž uvolníme trojici sousedních polí:



Pomocí tohoto postupu (ne nutně v uvedené orientaci) zredukujeme pro $n = 4$ počet obsazených polí na 1, pro $n = 5$ na 2^2 a obecně pro $n \geqq 6$ na čtverec $(n-3) \times (n-3)$ (obr. 39). Pro $n = 4$ a $n = 5$ postupujeme odebíráním trojic ve vyznačeném pořadí, pro $n \geqq 6$ postupujeme analogicky od pravého dolního rohu a skončíme vodorovnou trojicí v levém horním rohu. Odtud plyne naše tvrzení matematickou indukcí.



Obr. 39

Závěr. Hra může skončit s jediným kamenem na šachovnici, právě když n není dělitelné třemi.

4. V případě, že body A, B, C jsou kolineární, je tvrzení zřejmé.

Pro libovolné body P, Q, R uvažované roviny označme $M(PQR)$ maximum délek stran trojúhelníku PQR a $S(PQR)$ dvojnásobek jeho obsahu. Pak zřejmě platí

$$m(PQR) = \frac{S(PQR)}{M(PQR)}.$$

Dále si všimněme, že pro libovolný bod Z trojúhelníku PQR platí

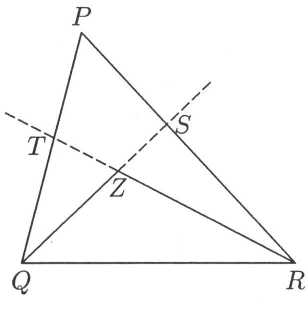
$$M(ZQR) \leqq M(PQR).$$

Označíme-li totiž S a T průsečíky polopřímek QZ a RZ s protějšími stranami PR a PQ trojúhelníku PQR (obr. 40), bude zřejmě (spojnice vrcholu s libovolným bodem protější strany není nikdy delší než delší z obou sousedních stran!)

$$|QZ| \leqq |QS| \leqq \max(|QP|, |QR|),$$
$$|RZ| \leqq |RT| \leqq \max(|QR|, |RP|),$$

takže

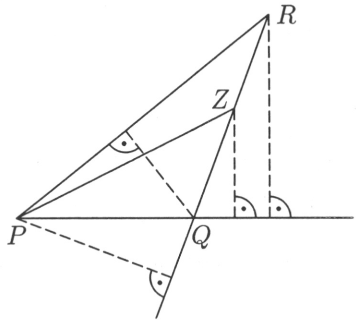
$$\begin{aligned} M(ZQR) = \max(|QR|, |RZ|, |ZQ|) &\leqq \\ \leqq \max(|PQ|, |QR|, |RP|) &= M(PQR). \end{aligned}$$



Obr. 40

Leží-li nyní bod Z na některé straně trojúhelníku PQR, řekněme QR (obr. 41), pak rozhodně nejsou délky výšek trojúhelníku PQZ z vrcholů P a Z větší než odpovídající délky výšek trojúhelníku PQR z vrcholů

P a R; a pokud je nejkratší výškou trojúhelníku PQR zbývající výška



Obr. 41

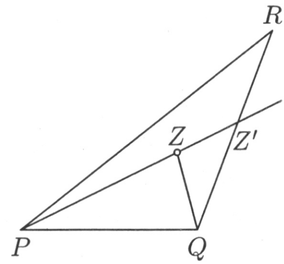
z vrcholu Q, musí být úhel QPR ostrý. V tom případě pro délku poslední výšky trojúhelníku PQZ platí

$$|PQ| \sin |\sphericalangle QPZ| \leqq |PQ| \sin |\sphericalangle QPR|,$$

takže je v každém případě

$$m(PQZ) \leqq m(PQR).$$

Poslední nerovnost snadno zobecníme pro libovolný bod Z trojúhelníku PQR (obr. 42): je-li Z vnitřní bod trojúhelníku PQR a Z' průsečík



Obr. 42

spojnice PZ s protější stranou QR, je podle právě dokázané nerovnosti

$$m(PQZ) \leqq m(PQZ') \leqq m(PQR). \tag{1}$$

Uvedené poznatky nyní využijeme k vyřešení úlohy.

a) Nechť X je bod trojúhelníku ABC (obr. 43).

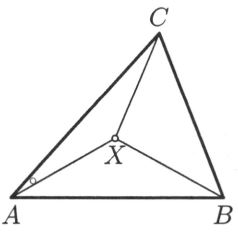
V tomto případě platí pro obsahy trojúhelníků ABC, ABX, AXC a XBC

$$\begin{aligned}
S(ABC) &= S(ABX) + S(AXC) + S(XBC) = \\
&= m(ABX)M(ABX) + m(AXC)M(AXC) + m(XBC)M(XBC) \leqq \\
&\leqq \big(m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)\big)M(ABC),
\end{aligned}$$

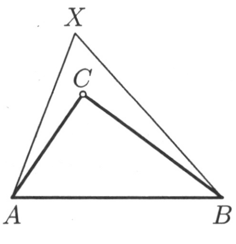
odkud po vydělení kladným číslem $M(ABC)$ plyne dokazovaná nerovnost.

b) Nechť X je vnějším bodem trojúhelníku ABC, přičemž jeden z vrcholů trojúhelníku ABC (označme ho např. C) leží uvnitř trojúhelníku určeného zbývajícími dvěma vrcholy a bodem X (tedy uvnitř trojúhelníku ABX, obr. 44). V tom případě je podle (1)

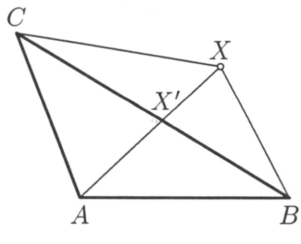
$$m(ABC) \leqq m(ABX) \leqq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$



Obr. 43



Obr. 44



Obr. 45

c) Zbývá případ, kdy jsou body A, B, C, X vrcholy konvexního čtyřúhelníku. Volme označení vrcholů např. tak, že $ABXC$ je konvexní (obr. 45) a označme X' průsečík úhlopříček AX a BC.

Podle (1) pro bod X' platí $m(ABX') \leqq m(ABX)$ a $m(AX'C) \leqq \leqq m(AXC)$, zatímco $m(X'BC) = 0$. Užitím výsledku části a) tak dostáváme

$$\begin{aligned}
m(ABC) &\leqq m(ABX') + m(AX'C) + m(X'BC) \leqq \\
&\leqq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC),
\end{aligned}$$

což je opět nerovnost, kterou jsme chtěli dokázat.

Poznámka. Není těžké uvážit, že rovnost v dokázané nerovnosti nastane v případě rovnostranného trojúhelníku ABC pro všechny body X v trojúhelníku (tj. včetně jeho hranice), pro rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož základna AB je menší než rameno AC, pro všechny body X základny AB a pro $X = C$ a pro všechny ostatní trojúhelníky jen pro body $X \in \{A, B, C\}$.

5. Ukážeme, že funkce f daných vlastností existuje.

Na základě hodnoty $f(1) = 2$ dostaneme opakovaným použitím vztahu $f\bigl(f(n)\bigr) = f(n) + n$ rovnosti

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1) + 1 = 2 + 1 = 3,\\ f(3) &= f(2) + 2 = 3 + 2 = 5,\\ f(5) &= f(3) + 3 = 5 + 3 = 8,\\ f(8) &= f(5) + 5 = 8 + 5 = 13,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Předpokládejme, že $n \geqq 3$ a že máme již definovány hodnoty $f(1)$, $f(2), \dots, f(n-1)$ tak, že současně platí

$$f(1) < f(2) < \dots < f(n-1).$$

Položme

$$\begin{aligned} g(n) &= \max\{k \colon 1 \leqq k < n, f(k) \leqq n\}, \qquad (1)\\ f(n) &= n + g(n). \end{aligned}$$

Protože $f(2) = 3 \leqq n$, je množina na pravé straně (1) neprázdná, takže definice funkce g má dobrý smysl. Navíc z předpokladu $f(1) < f(2) < \dots < f(n-1)$ plyne, že je $g(n) \geqq g(n-1)$, a tedy $f(n) > f(n-1)$. Užitím principu matematické indukce zjistíme, že takto definovaná funkce f je rostoucí.

Zbývá ještě ověřit, že funkce f splňuje pro všechna $n \in \mathbb{N}$ podmínku $f\bigl(f(n)\bigr) = f(n) + n$. Protože f je rostoucí funkce a $f(1) = 2$, platí $f(n) > n$. Odtud již plyne

$$g\bigl(f(n)\bigr) = \max\{k \colon 1 \leqq k < f(n), f(k) \leqq f(n)\} = n,$$

a proto $f\bigl(f(n)\bigr) = f(n) + g\bigl(f(n)\bigr) = f(n) + n$.

Nalezená funkce f má tedy všechny požadované vlastnosti.

Jiné řešení. Zkusme funkci f hledat mezi lineárními funkcemi tvaru $f(n) = \alpha n$. Z rovnosti $f\big(f(n)\big) = f(n) + n$ vychází

$$\alpha^2 n = \alpha n + n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Koeficient α tedy splňuje kvadratickou rovnici $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$, která má kladný kořen $\alpha = \frac{1}{2}\big(1 + \sqrt{5}\big)$. Funkce $n \mapsto \alpha n$ není ovšem celočíselná, zkusíme ji proto zaokrouhlit:

Nechť $\alpha = \frac{1}{2}\big(1 + \sqrt{5}\big)$. Položme

$$f(n) = \left\lfloor \alpha n + \frac{1}{2} \right\rfloor \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Protože α je iracionální číslo, bude pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platit

$$|f(n) - \alpha n| < \frac{1}{2} \tag{3}$$

a speciálně

$$\big|f\big(f(n)\big) - \alpha f(n)\big| < \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Spočtěme dále rozdíl (využijeme přitom rovnost $\alpha^2 - \alpha = 1$)

$$\begin{aligned} f\big(f(n)\big) - f(n) - n &= f\big(f(n)\big) - f(n) - (\alpha^2 - \alpha)n = \\ &= \big(f\big(f(n)\big) - \alpha f(n)\big) + (\alpha - 1)\big(f(n) - \alpha n\big). \end{aligned}$$

Odtud podle (3) a (4) plyne

$$\big|f\big(f(n)\big) - f(n) - n\big| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\alpha - 1) = \frac{1}{2}\alpha < 1.$$

Protože na levé straně stojí absolutní hodnota celého čísla, je rovna nule, tj.

$$f\big(f(n)\big) = f(n) + n.$$

Konečně rovnost $f(1) = 2$ plyne z definice (2) díky tomu, že $\frac{3}{2} < \alpha <$ < 2.

Poznámka. Z uvedených řešení je vidět, že funkce f není podmínkami úlohy určena jednoznačně.

6. Uvažujme posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nul a jedniček takovou, že pro $j \geqq 0$ je $a_j = 1$, právě když po provedení Z_j je lampička L_j zapnutá (v daném okamžiku j tak zapisujeme pouze stav lampičky L_j, protože v dalších $n-1$ krocích se její stav nebude měnit). Výsledek operace Z_j můžeme charakterizovat kongruencí

$$a_j = a_{j-n} + a_{j-1} \pmod 2. \tag{1}$$

Pravidlo (1) platí pro každé $j \geqq n$ a bude platit i pro $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, jestliže položíme

$$a_{-n} = a_{-n+1} = a_{-n+2} = \ldots = a_{-2} = a_{-1} = 1,$$

což odpovídá počátečnímu stavu, kdy jsou všechny lampičky zapnuty.

Vektor $\boldsymbol{v}_j = (a_{j-n}, \ldots, a_{j-1})$ charakterizuje stav lampiček v okamžiku j (bezprostředně před provedením operace Z_j), $\boldsymbol{v}_0 = (1, 1, \ldots, 1)$. Protože existuje jen konečný počet takových vektorů nul a jedniček (totiž 2^n), existují celá čísla $j \geqq 0$ a $m \geqq 1$ taková, že $\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_{j+m}$.

Uvědomme si, že ze složek vektoru $\boldsymbol{v}_j = (a_{j-n}, \ldots, a_{j-1})$ dokážeme pomocí vztahu (1) určit složky vektoru $\boldsymbol{v}_{j-1} = (a_{j-n-1}, \ldots, a_{j-2})$ — stačí pomocí (1) spočítat jedinou neznámou souřadnici:

$$a_{j-n-1} = a_{j-1} - a_{j-2} \pmod 2$$

(jinými slovy přiřazení $\boldsymbol{v}_{j-1} \mapsto \boldsymbol{v}_j$ je invertibilní). Z rovnosti $\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_{j+m}$ tak rovnou plyne $\boldsymbol{v}_{j-1} = \boldsymbol{v}_{j+m-1}, \ldots, \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_m$. Číslo $M(n) = m$ má tedy požadovanou vlastnost a).

Použijeme-li rovnost (1) opakovaně na sčítance na její pravé straně, dostaneme postupně

$$\begin{aligned}
a_j &= a_{j-n} + a_{j-1} = \\
&= (a_{j-2n} + a_{j-n-1}) + (a_{j-1-n} + a_{j-2}) = \\
&= a_{j-2n} + 2a_{j-n-1} + a_{j-2} \pmod 2, \\
a_j &= (a_{j-3n} + a_{j-2n-1}) + 2(a_{j-2n-1} + a_{j-n-2}) + \\
&\quad + (a_{j-2-n} + a_{j-3}) = \\
&= a_{j-3n} + 3a_{j-2n-1} + 3a_{j-n-2} + a_{j-3} \pmod 2.
\end{aligned}$$

Dostáváme tak vzorec

$$a_j = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} a_{j-(r-i)n-i} \pmod 2, \tag{2}$$

který platí pro všechna j a r taková, že index $j-(r-i)n-i$ je aspoň $-n$, tj. pro $j \geqq (r-1)n$, a který snadno zdůvodníme indukcí pomocí rovnosti (1) a vzorce $\binom{r+1}{i} = \binom{r}{i-1} + \binom{r}{i}$ pro $0 < i < r+1$.

Vzorec (2) se velmi zjednoduší pro $r = 2^k$, protože kombinační čísla tvaru $\binom{2^k}{i}$ jsou pro všechna $i \in \{1, \ldots, 2^k - 1\}$ sudá. To je snadno vidět např. z vyjádření

$$\binom{2^k}{i} = 2^k \frac{2^k-1}{1} \cdot \frac{2^k-2}{2} \cdot \frac{2^k-i+1}{i-1} \cdot \frac{1}{i},$$

v němž žádný ze zlomků $\dfrac{2^k-t}{t}$ po zkrácení neobsahuje mocninu dvojky, a přitom $2^k/i \geqq 2$.

Pro $r = n = 2^k$ a $j \geqq (n-1)n$ můžeme tedy psát

$$a_j = a_{j-n^2} + a_{j-n} = a_{j-n^2} + (a_j - a_{j-1}) \pmod 2$$

neboli

$$a_{j-n^2} = a_{j-1},$$

což znamená, že posloupnost (a_j) je periodická s periodou n^2-1. Tím je dokázáno tvrzení b).

Je-li konečně $n = 2^k + 1$, využijeme vzorec (5) pro $r = n - 1 = 2^k$, takže pro libovolné $j \geqq (n-2)n$ platí

$$a_j = a_{j-n^2+n} + a_{j-n+1} = a_{j-n^2+n} + (a_{j+1} - a_j) \pmod 2$$

neboli (je $x = -x \pmod 2$)

$$a_{j-n^2+n} = a_{j+1},$$

což znamená, že posloupnost (a_j) je periodická s periodou n^2-n+1. Tím je dokázáno tvrzení c).