41. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie A

In: Andrej Blaho (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Jozef Moravčík (editor); Václav Sedláček (editor); Jaromír Šimša (editor); Pavel Töpfer (editor): 41. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1991/1992. 33. mezinárodní matematická olympiáda. 4. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1997. pp. 54–78.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404960

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

Nech $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ je polynóm stupňa $n \geqq 1$, pričom pre každé $0 \leqq$ $\leqq k \leqq n$ platí $a_0 + a_1 + \ldots + a_k \geqq 0$ a súčasne $a_{k+1} + \ldots + a_n \geqq 0$. Potom pre každé $x \geqq 0$ je $p(x) \geqq 0$. Dokážte.

A – I – 2

Nech A', B' sú kolmé priemety bodov A, B do stien BCD a ACD štvorstena $ABCD$. Ak A' je ortocentrom trojuholníka BCD, tak B' je ortocentrom trojuholníka ACD. Dokážte.

A – I – 3

Jestliže všechny zlomky se jmenovatelem nejvýše rovným n, jež leží v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a jsou zapsány v základním tvaru, seřadíme podle velikosti, pak pro každé dva sousední zlomky $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ bude platit $cb - ad = 1$ (čísla 0 a 1 chápeme jako zlomky $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$). Dokažte.

A – I – 4

Vypočítajte všetky prirodzené čísla n, pre ktoré platí rovnosť $\tau(n) +$ $+ 33 = \tau(n^2)$, kde $\tau(a)$ udáva počet nezáporných delitelov prirodzeného čísla a.

A – I – 5

Zjistěte, pro která n má soustava $n+1$ rovnic

$$\begin{aligned} x_0 + 2x_1 &= 1,\\ nx_0 + x_1 + 4x_2 &= n,\\ &\ldots\ldots\\ (n-i+1)x_{i-1} + x_i + 2(i+1)x_{i+1} &= \binom{n}{i},\\ &\ldots\ldots\\ x_{n-1} + x_n &= 1 \end{aligned}$$

řešení v oboru celých nezáporných čísel

A – I – 6

Označme $\mathsf{A} = \{n(t) \colon t > 0\}$ množinu všech reálných čísel $n(t)$, jejichž dekadický zápis má tvar

$$n(t) = 0, a_1(t)a_2(t)a_3(t)\ldots a_k(t)\ldots,$$

kde $a_k(t) = [tk + 5] \pmod{10}$. Najděte nejmenší α takové, že $x < \alpha$ pro každé $x \in \mathsf{A}$.

A – S – 1

Jestliže pro mnohočlen

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

s reálnými kořeny $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí, že $|a_i| = 1$ pro všechna $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, potom $n \leqq 3$. Dokažte.

A – S – 2

V prostoru je dán čtyřstěn $ABCD$, jehož mimoběžné hrany jsou navzájem kolmé. Dokažte, že středy jeho hran leží na jedné kulové ploše.

A – S – 3

Nájdite n, pre ktoré má sústava

$$\begin{aligned} \binom{2}{2}x_1 &= \binom{4}{4}, \\ \binom{3}{2}x_1 + \binom{2}{2}x_2 &= \binom{5}{4}, \\ &\cdots\cdots \\ \binom{n+1}{2}x_1 + \binom{n}{2}x_2 + \ldots + \binom{2}{2}x_n &= \binom{n+3}{4}. \end{aligned}$$

riešenie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ také, že $x_n = 100$.

A – II – 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x(y+z) &= 1, \\ y(z+x) &= 1, \\ z(x+y) &= p \end{aligned}$$

s parametrem p. Proveďte diskusi vzhledem k parametru p.

A – II – 2

Zistite najväčšie štvorciferné číslo n, pre ktoré platí

$$3\,\tau(n) = \tau(n^2),$$

kde $\tau(n)$ označuje počet kladných delitelov čísla n.

A – II – 3

Nech H je priesečník výšok trojuholníka ABC a DH je výška štvorstena $ABCD$. Potom platí

$$\cos|\sphericalangle ADB| : \cos|\sphericalangle BDC| : \cos|\sphericalangle CDA| = \\ = |CD| : |AD| : |BD|.$$

Dokážte.

A – II – 4

Najděte všechny hodnoty parametru p, pro které má mnohočlen

$$x^3 - 3x + p$$

aspoň dva různé celočíselné kořeny.

A – III – 1

Nech $p = (a_1, a_2, \dots, a_{17})$ je ľubovoľné poradie čísel $1, 2, \dots, 17$. Označme k_p najväčší index k taký, že ešte platí nerovnosť

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k < a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{17}.$$

Určte najväčšiu a najmenšiu hodnotu k_p a nájdite súčet čísel k_p odpovedajúcich všetkým rôznym poradiam p.

A – III – 2

Označme a, b, c, d, e, f velikosti hran čtyřstěnu a S jeho povrch. Dokažte, že

$$S \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2\right).$$

A – III – 3

Určete všechna přirozená čísla n, pro která platí rovnosti

$$S(n) = S(2n) = S(3n) = \dots = S(n^2),$$

kde $S(x)$ označuje ciferný součet čísla x (zapsaného v desítkové soustavě).

A – III – 4

Riešte rovnicu

$$\cos 12x = 5 \sin 3x + 9 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x.$$

A – III – 5

Uvažujme funkci f definovanou v intervalu $(0,1)$ jako

$$f(x)=\begin{cases} x, & x \text{ iracionální} \\ \dfrac{p+1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, \end{cases}$$

kde $0<p<q$ jsou nesoudělná celá čísla. Najděte maximum funkce f na intervalu $(\frac{7}{8},\frac{8}{9})$.

A – III – 6

V rovině je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Jeho výška procházející bodem B protíná kružnici s průměrem AC v bodech P, Q a výška procházející bodem C protíná kružnici s průměrem AB v bodech M, N. Dokažte, že body M, N, P, Q leží na jedné kružnici.

A – I – 1

Z vyjádření

$$\begin{aligned} p(x) - p(1) &= a_1(x-1) + a_2(x^2-1) + \ldots + a_n(x^n-1) = \\ &= (x-1)\bigl(a_1 + a_2(x+1) + \ldots + \\ &\quad + a_n(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1)\bigr) = \\ &= (x-1)\bigl((a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \\ &\quad + (a_2 + a_3 + \ldots + a_n)x + \ldots + a_n x^{n-1}\bigr) \end{aligned}$$

a z předpokladů $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqq 0$, $a_2 + a_3 + \ldots + a_n \geqq 0$, …, $a_n \geqq 0$ je zřejmé, že pro $x \geqq 1$ platí

$$p(x) \geqq p(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n \geqq 0.$$

Abychom dokázali, že $p(x) \geqq 0$ pro $x \in (0,1)$, stačí položit $x = \dfrac{1}{y}$. Pak je

$$p(x) = \frac{1}{y^n}(a_n + a_{n-1}y + \ldots + a_0 y^n).$$

Předcházející postup aplikujeme na mnohočlen $a_n + a_{n-1}y + \ldots + a_0 y^n$ a využijeme předpokladů $a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_0 \geqq 0$, $a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots + a_0 \geqq 0$, …, $a_0 \geqq 0$. Pro $x = 0$ je $p(x) = a_0 \geqq 0$.

Jiné řešení. Úlohu lze řešit i matematickou indukcí. Pro $n = 1$ dokazovaná věta zřejmě platí. Mějme $n > 1$ a předpokládejme, že věta platí pro všechny mnohočleny stupně menšího než n. Pro $x \geqq 1$ je

$$p(x) \geqq a_0 + a_1 x + \ldots + (a_{n-1} + a_n)x^{n-1}$$

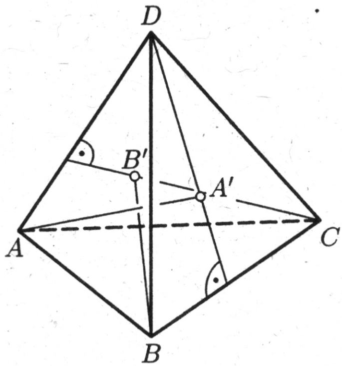
a pro $0 \leqq x \leqq 1$ je

$$\begin{aligned} p(x) &\geqq (a_0 + a_1)x + \ldots + a_n x^n = \\ &= \bigl((a_0 + a_1) + \ldots + a_n x^{n-1}\bigr)x. \end{aligned}$$

Mnohočleny na pravé straně obou nerovností nabývají nezáporných hodnot podle indukčního předpokladu.

A – I – 2

Protože $AA' \perp BC$ a $DA' \perp BC$, platí $BC \perp ADA'$, tedy $BC \perp AD$ (obr. 13).



Obr. 13

Podobně $BB' \perp AD$ a $BC \perp AD$ (jak jsme již dokázali) dává $AD \perp BCB'$, takže $AD \perp B'C$, to znamená, že bod B' leží na výšce trojúhelníku ACD z vrcholu C.

Zaměníme-li C a D, dostaneme, že B' leží na výšce trojúhelníku ACD z vrcholu D.

A – I – 3

Platí-li $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ $(b, d > 0)$, platí i $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Je-li navíc $bc - ad = 1$, je také $b(a+c) - a(b+d) = 1$ a $c(b+d) - d(a+c) = 1$. Vyjdeme tedy od zlomků $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{1}$, to bude první krok. Při druhém kroku přidáme mezi tyto zlomky zlomek $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$, při třetím kroku přidáme mezi tyto zlomky $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$, dostaneme tak konečnou posloupnost $\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$. Tak postupujeme dále, při n-tém kroku přidáme mezi každé dva zlomky $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ zlomek $\frac{a+c}{b+d}$; pokud ovšem bude $b + d \leqq n$. Dostaneme konečnou posloupnost zlomků, jejichž jmenovatelé jsou vesměs přirozená čísla nejvýše rovná n, a budou-li stát v této posloupnosti zlomky $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ vedle sebe, platí pro ně $bc - ad = 1$. Stačí už jenom ukázat, že jsme tím dostali všechny zlomky z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ se jmenovatelem menším než $n + 1$.

Předpokládejme tedy, že zlomek $\frac{p}{q}$ $(q \leqq n)$ v naší posloupnosti není, pak musí ležet mezi dvěma jejími sousedními členy $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, tj. $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$, odkud plyne $bp - aq \geqq 1$, $cq - dp \geqq 1$. Vynásobíme-li první nerovnost d, druhou b a sečteme-li je, dostaneme s využitím vztahu $bc - ad = 1$ nerovnost $q \geqq b + d$. To ale znamená, že $b + d \leqq n$. Pak by ale zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ nemohly být sousedními členy uvažované posloupnosti, protože by mezi nimi ležel ještě zlomek $\frac{a+c}{b+d}$. Tím je dokázáno, že po n-tém kroku obsahuje posloupnost všechny zlomky $\frac{p}{q}$, pro které je $0 \leqq p \leqq q \leqq n$.

A – I – 4

Je-li $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ rozklad čísla n na prvočinitele, je zřejmě

$$\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1),$$

a tedy

$$\tau(n^2) = (2a_1 + 1)(2a_2 + 1) \dots (2a_k + 1).$$

Řešme rovnici

$$\tau(n^2) - \tau(n) = 33,$$

neboli

$$\begin{aligned}&(2^k - 1)a_1 a_2 \dots a_k + \\ &\quad +(2^{k-1} - 1)(a_1 a_2 \dots a_{k-1} + \dots + a_2 a_3 \dots a_k) + \dots + \\ &\quad +(2 - 1)(a_1 + a_2 + \dots + a_k) = 33.\end{aligned}$$

Pro $k = 1$ má tvar $a_1 = 33$, pro $k = 2$ má tvar

$$3a_1 a_2 + a_1 + a_2 = 33$$

a řešením jsou dvojice $(3,3)$, $(8,1)$ a $(1,8)$, pro $k = 3$ má tvar

$$7a_1 a_2 a_3 + 3a_1 a_2 + 3a_1 a_3 + 3a_2 a_3 + a_1 + a_2 + a_3 = 33$$

a řešením jsou trojice $(1,1,2)$, $(1,2,1)$, $(2,1,1)$, pro $k = 4$ má tvar

$$\begin{aligned}&15a_1 a_2 a_3 a_4 + 7(a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4) + \\ &\quad + 3(\dots) + (\dots) = 33\end{aligned}$$

a nemá řešení, neboť pro každou čtveřici přirozených čísel a_1, a_2, a_3, a_4 je levá strana alespoň $15+7\cdot4+3\cdot6+4$. Tím spíše nemá rovnice řešení pro $k>4$.

Závěr: Úloze vyhovují právě ta čísla n, která mají rozklad na prvočinitele $n=p^{33}$, $n=p_1^3p_2^3$, $n=p_1^8p_2$ nebo $n=p_1^2p_2p_3$.

A – I – 5

Pro $n=1$ dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x_0+2x_1&=1,\\ x_0+x_1&=1, \end{aligned}$$

která má jediné řešení $x_0=1$, $x_1=0$.

Pro $n=2,3$ dostaneme soustavy rovnic, které mají také právě jedno řešení, ne však v oboru celých čísel, pouze v oboru racionálních čísel. Stejný výsledek dostaneme i pro $n=5$, případně i pro některá další přirozená čísla. To nás vede k domněnce, že soustava nemá pro $n>1$ řešení v oboru celých čísel.

Předpokládejme naopak, že soustava má v oboru celých čísel řešení $x_0,x_1,\ldots,x_n$. Pravé strany rovnic jsou kombinační čísla, koeficienty mocnin q^r v rozvoji dvojčlenu $(1+q)^n$. Vynásobíme tedy první rovnici číslem 1, druhou zatím neurčeným číslem q, třetí číslem q^2 atd., poslední číslem q^n a všechny získané rovnice sečteme. Na pravé straně dostaneme $(1+q)^n$, na levé bude součet

$$\begin{aligned} &(1+qn)x_0+[2+q+(n-1)q^2]x_1+\ldots+\\ &\qquad+[2i+q+(n-i)q^2]q^{i-1}x_i+\ldots+[2n+q]q^{n-1}x_n. \end{aligned}$$

Zvolíme-li $q=\sqrt{2}$, rovnají se všechny výrazy v hranatých závorkách výrazu $\sqrt{2}(1+n\sqrt{2})$, takže pak platí

$$\begin{aligned} (1+n\sqrt{2})\left[x_0+x_1\sqrt{2}+2x_2+2x_3\sqrt{2}+\ldots+\left(\sqrt{2}\right)^n x_n\right]&\\ =\left(1+n\sqrt{2}\right)^n&, \end{aligned}$$

stejně tak pro $q=-\sqrt{2}$ dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} (1-n\sqrt{2})\left[x_0-x_1\sqrt{2}+2x_2-2x_3\sqrt{2}+\ldots+\left(-\sqrt{2}\right)^n x_n\right]&\\ =\left(1-n\sqrt{2}\right)^n&. \end{aligned}$$

Vynásobíme-li obě rovnice, dostaneme

$$(1-2n^2)\left[x_0+4x_0x_2-2x_1^2+\ldots+(-1)^n\cdot 2^n x_n^2\right]=(-1)^n.$$

V hranaté závorce je podle předpokladu celé číslo, to znamená, že číslo $1-2n^2$ dělí číslo 1. Odtud plyne, že $n=1$, pro $n>1$ nemá daná soustava celočíselné řešení.

A – I – 6

Zřejmě $\alpha \leqq 1$, neboť $n(t) \leqq 1$ pro každé reálné $t>0$. Hledané α (jde o supremum) sestrojíme „po číslicích" zleva doprava: Jeho první číslice c_1 za desetinnou čárkou bude rovna největší ze všech prvních číslic $a_1(t)$ pro $t>0$. Druhá číslice c_2 bude největší z druhých číslic $a_2(t)$ všech těch t, která mají $a_1(t)=c_1$ atd. Ještě si uvědomme, že se stačí omezit na $t \in (0,10\rangle$. Snadno zjistíme, že

$$\begin{aligned}
&a_1(t)=9 \text{ pro } t\in\langle 4,5),\ \text{tedy } c_1=9,\\
&a_2(t)\leqq 4 \text{ pro } t\in\langle 4,5),\\
&a_2(t)=4 \text{ pro } t\in\left\langle \frac{9}{2},5\right),\ \text{tedy } c_2=4,\\
&a_3(t)=9 \text{ pro } t\in\left\langle \frac{14}{3},5\right),\ \text{tedy } c_3=9 \text{ atd.}
\end{aligned}$$

Dostáváme tak zmenšující se intervaly typu $\left\langle \dfrac{5m-1}{m},5\right)$, které obsahují právě ta $t\in(0,10\rangle$, pro něž desetinný rozvoj $n(t)$ začíná číslicemi $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Vzhledem k tomu, že tyto intervaly vždy obsahují čísla libovolně blízká k 5, budeme postupně dostávat $c_m=9$ pro lichá m a $c_m=4$ pro sudá m. Hledané číslo je tedy $\alpha=0{,}949\,494\ldots=\frac{94}{99}$. Přitom pro žádné $t>0$ není $n(t)=\alpha$, jde o pěkný příklad suprema, které není maximem.

A – S – 1

Roznásobením jednotlivých dvojčlenů dostaneme známé algebraické vztahy mezi kořeny algebraické rovnice a jejími koeficienty

$$a_0 = (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i,$$
$$\dots\dots$$
$$a_{n-2} = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \sum_{i<j} x_i x_j,$$
$$a_{n-1} = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = -\sum_{i=1}^{n} x_i$$

a samozřejmě $a_n = 1$.

Pro druhou mocninu součtu kořenů dané rovnice tedy platí

$$1 = |a_{n-1}|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j = $$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2a_{n-2},$$

takže

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 - 2a_{n-2} = 3.$$

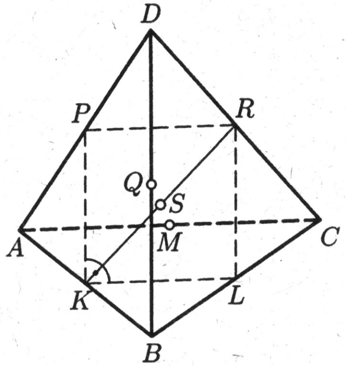
Z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro nezáporná čísla x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2 ovšem plyne

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt[n]{a_0^2} = 1,$$

neboli $n \leqq 3$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

A – S – 2

Označme K, L, M středy hran AB, BC, CA a P, Q, R středy hran AD, BD, CD. Každá ze spojnic dvou středů hran je rovnoběžná s některou hranou čtyřstěnu (je střední příčkou příslušné trojúhelníkové stěny,



Obr. 14

obr. 14), proto jsou $KLRP$, $KQRM$ a $MLQP$ rovnoběžníky. Protože mimoběžné hrany jsou navzájem kolmé, jsou uvedené čtyřúhelníky pravoúhelníky, a tak např. body K, L, R, P leží na kružnici se středem S ve středu úsečky KR a průměrem $|KR|$. Podobně ale leží na kružnici se středem S a průměrem $|KR|$ i body K, Q, R, M (protože jsme v prostoru, nemusí se ovšem jednat o tutéž kružnici). Odtud plyne, že všech šest uvedených bodů leží na kulové ploše se středem S a poloměrem $|SR|$.

A – S – 3

Z první rovnice dostaneme $x_1 = 1$, dosazením do druhé rovnice vyjde $x_2 = 2$. Z třetí rovnice vypočteme $x_3 = 3$.

Předpokládejme, že jsme již vypočetli, že $x_i = i$ pro $i = 1, 2, \dots, k-1$. Hodnotu x_k vypočteme z k-té rovnice, která má tvar

$$\binom{k+1}{2}x_1 + \binom{k}{2}x_2 + \ldots + \binom{3}{2}x_{k-1} + \binom{2}{2}x_k = \binom{k+3}{4}.$$

Dosadíme-li za x_i číslo i ($i = 1, 2, \dots, k-1$), dostaneme

$$x_k\binom{k+1}{2} + 2\binom{k}{2} + 3\binom{k-1}{2} + \ldots + (k-2)\binom{4}{2} + \\ + (k-1)\binom{3}{2}x_k = \binom{k+3}{4}.$$

Opakovaným použitím vztahu $\binom{r+1}{s+1} = \binom{r}{s} + \binom{r}{s+1}$ dostaneme

$$\begin{aligned}\binom{k+3}{4} &= \binom{k+2}{3} + \binom{k+2}{4} = \\ &= \binom{k+2}{3} + \binom{k+1}{3} + \binom{k+1}{3} + \binom{k}{3} + \ldots + \binom{3}{3}.\end{aligned}$$

Rozložíme-li obdobně každý sčítanec na pravé straně, dostaneme

$$\begin{aligned}\binom{k+3}{4} = \binom{k+1}{2} + 2\binom{k}{k} + 3\binom{k-1}{2} + \ldots + \\ + (k-1)\binom{3}{2} + k\binom{2}{2},\end{aligned}$$

takže $x_k = k$. Tím je dokázáno, že $x_i = i$ pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, řešením úlohy je tedy $n = 100$.

Jiné řešení. První rovnici ponecháme, od každé další odečteme předcházející. Využitím vztahu $\binom{r}{s} - \binom{r}{s-1} = \binom{r-1}{s-1}$, dostaneme ekvivalentní soustavu

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= 1\\
2x_1 + \qquad x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= \binom{4}{3}\\
3x_1 + \qquad 2x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad &= \binom{5}{3}\\
\cdots\cdots\cdots\quad&\\
(n-1)x_1 + (n-2)x_2 + \ldots + 2x_{n-2} + \ x_{n-1} \qquad &= \binom{n+1}{3}\\
nx_1 + (n-1)x_2 + \ldots \qquad + 2x_{n-1} + x_n &= \binom{n+2}{3}
\end{aligned}$$

Zopakujeme-li uvedený postup ještě jednou, dostaneme další ekvivalentní soustavu

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 1\\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad &= 3\\
\cdots\cdots\cdots\quad&\\
x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1} \qquad &= \binom{n}{2}\\
x_1 + x_2 + \ldots \qquad + x_{n-1} + x_n &= \binom{n+1}{2}
\end{aligned}$$

Odtud už snadno dostaneme jediné řešení dané soustavy $x_i = i$ pro $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Řešením úlohy je tedy $n = 100$.

A – II – 1

Z dané soustavy spočteme

$$xy = 1 - \frac{p}{2}, \quad yz = \frac{p}{2}, \quad zx = \frac{p}{2}.$$

Je-li $p = 0$, je $xy = 1$, $yz = xz = 1$, takže $z = 0$. Soustavě rovnic vyhovují všechny trojice (x, y, z), pro které je $z = 0$, $x \neq 0$ a $y = \dfrac{1}{x}$.

Je-li $p \neq 0$, je $xyz \neq 0$ a $x = y$, přičemž $x^2 = 1 - \frac{p}{2}$. Soustava tedy nemá řešení pro $p > 2$, ale ani pro $p = 2$ (bylo by $x = y = 0$).

Pro $p < 2$ ($p \neq 0$) vyhovují dané soustavě právě dvě trojice reálných čísel

$$x = y = \sqrt{1 - \frac{p}{2}}, \quad z = \frac{p}{2\sqrt{1 - \frac{p}{2}}}$$

a

$$x = y = -\sqrt{1 - \frac{p}{2}}, \quad z = -\frac{p}{2\sqrt{1 - \frac{p}{2}}}.$$

A – II – 2

Je-li $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ rozklad čísla n na prvočinitele, je zřejmě

$$\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1),$$

a tedy

$$\tau(n^2) = (2a_1 + 1)(2a_2 + 2) \dots (2a_k + 1).$$

Rovnice

$$\tau(n^2) = 3\tau(n),$$

nemá zřejmě pro $k = 1$ žádné nezáporné řešení a_1. Pro $k = 2$ ji můžeme zapsat ve tvaru

$$3(a_1 + 1)(a_2 + 1) = (2a_1 + 1)(2a_2 + 1),$$

neboli

$$(a_1 - 1)(a_2 - 1) = 3.$$

Proto je $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, anebo obráceně. Pro $k = 2$ tak dostáváme řešení $n = p^2q^4$.

Pro $k \geqq 3$ má uvedená rovnice tvar

$$\begin{aligned}(2^k - 3)a_1a_2\ldots a_k &+ \\ + (2^{k-1} - 3)(a_1a_2\ldots a_{k-1} + \ldots + a_2a_3\ldots a_k) + \ldots &= \\ = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + 2,&\end{aligned}$$

přičemž první dva členy na levé straně jsou nejméně $5 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k > a_1 + a_2 + \ldots + a_k + 2$; rovnice nemá tedy pro $k \geqq 3$ žádné celočíselné řešení.

Z nerovnosti $(pq^2)^2 < 10^4$ plyne $pq^2 < 100$ a snadno zjistíme, že největším číslem tohoto tvaru je $99 = 11 \cdot 3^2$. Hledané n tedy je $n = 99^2 = 9\,801$.

Jiné řešení. (Podle *Josefa Menšíka*, gymnázium v Brně, tř. kpt. Jaroše.) Rovnici

$$\tau(n^2) = 3\tau(n)$$

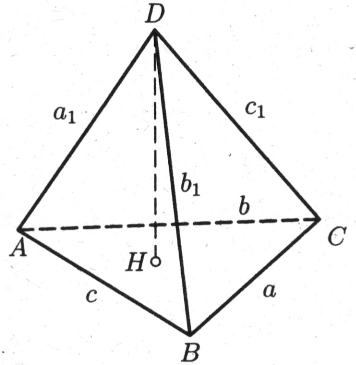
můžeme napsat ve tvaru

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1)\ldots(a_k + 1) = (2a_1 + 1)(2a_2 + 2)\ldots(2a_k + 1).$$

Protože pravá strana uvedené rovnice je lichá, jsou všechna čísla a_1, $a_2, \ldots, a_k$ vesměs sudá, takže vidíme, že číslo n je úplný kvadrát. Největší takové čtyřciferné číslo je 99^2. Snadno se přesvědčíme, že $n = 99^2$ dané rovnici vyhovuje.

A – II – 3

Označme a, b, c strany trojúhelníku ABC a $a_1 = |AD|$, $b_1 = |BD|$,



Obr. 15

$c_1 = |CD|$ zbylé hrany čtyřstěnu $ABCD$ (obr. 15). Podle kosinové věty pro trojúhelníky ABD a BCD platí

$$\cos|\sphericalangle ADB| = \frac{a_1^2 + b_1^2 - c^2}{2a_1 b_1},$$
$$\cos|\sphericalangle BDC| = \frac{b_1^2 + c_1^2 - a^2}{2b_1 c_1},$$

takže

$$\frac{\cos|\sphericalangle ADB|}{\cos|\sphericalangle BDC|} = \frac{(a_1^2 + b_1^2 - c^2)c_1}{(b_1^2 + c_1^2 - a^2)a_1}.$$

Zřejmě stačí ukázat, že poslední výraz je roven c_1/a_1. (Cyklickou záměnou obdržíme další dvě rovnosti.)

Je-li $v = |DH|$ uvažovaná výška čtyřstěnu $ABCD$ a BB_1 výška trojúhelníku ABC, dostaneme několikerým použitím Pythagorovy věty

$$\begin{aligned} c_1^2 - a_1^2 &= (v^2 + |CH|^2) - (v^2 + |AH|^2) = \\ &= |CH|^2 - |AH|^2 = |CB_1|^2 - |AB_1|^2 \end{aligned}$$

a zároveň

$$a^2 - c^2 = |CB_1|^2 - |AB_1|^2.$$

Odtud ovšem plyne

$$b_1^2 + c_1^2 - a^2 = a_1^2 + b_1^2 - c^2.$$

Tím je důkaz hotov.

Dopustili jsme se ovšem malého zjednodušení vynecháním případu, kdy je úhel ADB pravý, a tedy $\cos|\sphericalangle ADB| = 0$. Pak je $b_1^2 + c_1^2 - a^2 = a_1^2 + b_1^2 - c^2 = 0$, takže pravý je i úhel BDC. Stejně bychom dokázali, že je pravý i úhel CDA. Jde o čtyřstěn, jehož každé dvě z hran DA, DB, DC jsou kolmé a všechny tři hodnoty kosinů na levé straně dokazované rovnosti se rovnají nule. Chápeme-li ji jako rovnosti

$$\frac{\cos|\sphericalangle ADB|}{|CD|} = \frac{\cos|\sphericalangle BDC|}{|AD|} = \frac{\cos|\sphericalangle CDA|}{|BD|},$$

platí i v tomto zvláštním případě.

Jiné řešení. (Podle *Josefa Menšíka*, gymnázium v Brně, tř. kpt. Jaroše.) Tvrzení úlohy můžeme zapsat pomocí vektorů jako

$$\boldsymbol{AD} \cdot \boldsymbol{BD} = \boldsymbol{BD} \cdot \boldsymbol{CD} = \boldsymbol{CD} \cdot \boldsymbol{AD}.$$

Přitom je

$$\boldsymbol{AD} \cdot \boldsymbol{BD} = (\boldsymbol{AH} + \boldsymbol{HD}) \cdot (\boldsymbol{BH} + \boldsymbol{HD}) = \boldsymbol{AH} \cdot \boldsymbol{BH} + \boldsymbol{HD} \cdot \boldsymbol{HD},$$

neboť z kolmosti HD k rovině ABC plyne rovnost $\boldsymbol{AH} \cdot \boldsymbol{HD} = \boldsymbol{HD} \cdot \boldsymbol{BH} = 0$. Zřejmě tedy stačí dokázat rovnosti

$$\boldsymbol{AH} \cdot \boldsymbol{BH} = \boldsymbol{BH} \cdot \boldsymbol{CH} = \boldsymbol{CH} \cdot \boldsymbol{AH}.$$

Protože vektory $\boldsymbol{AC}$ a $\boldsymbol{BH}$ jsou navzájem kolmé, platí

$$\boldsymbol{AH} \cdot \boldsymbol{BH} = (\boldsymbol{AC} + \boldsymbol{CH}) \cdot \boldsymbol{BH} = \boldsymbol{CH} \cdot \boldsymbol{BH}.$$

Druhou rovnost dokážeme obdobně.

Jiné řešení. Protože výška DH je kolmá k podstavě ABC, je speciálně $DH \perp AC$ a zároveň $BH \perp AC$, takže hrana AC je kolmá na rovinu BDH. Odtud plyne, že hrany AC a BD jsou navzájem kolmé, to znamená, že oba vrcholy A i C mají týž kolmý průmět P na přímku BD. Potom

$$\cos|\sphericalangle ADB| = \pm\frac{|DP|}{|AD|} \quad \text{a} \quad \cos|\sphericalangle BDC| = \pm\frac{|DP|}{|CD|},$$

přičemž v obou rovnostech platí stejné znaménko (podle toho, zda P leží na polopřímce DB, anebo na polopřímce k ní opačné). Odtud ale plyne rovnost

$$\cos|\sphericalangle ADB| : \cos|\sphericalangle BDC| = |CD| : |AD|.$$

Zbylou rovnost dokážeme analogicky.

A – II – 4

Je-li m celočíselný kořen daného mnohočlenu, je $p = 3m - m^3$ a rovnice

$$x^3 - 3x + 3m - m^3 = (x-m)(x^2 + mx + m^2 - 3) = 0$$

by měla mít ještě další celočíselný kořen $x \neq m$. To ale znamená, že diskriminant

$$D = m^2 - 4(m^2 - 3) = 12 - 3m^2$$

kvadratického trojčlenu v druhé závorce musí být druhou mocninou celého čísla. Je tudíž $3m^2 \leqq 12$, neboli $|m| \leqq 2$. Z pěti možných celých čísel m nevyhovuje uvedené podmínce pouze číslo $m = 0$, pro ostatní vyjde $p = \pm 2$.

A – III – 1

Je-li $p = (a_1, a_2, \ldots, a_{17})$ uvažované pořadí a k_p příslušný index, pak zřejmě platí

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_p} < a_{k_p+1} + \ldots + a_{17} &= \\ &= 153 - \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_p}\right), \end{aligned}$$

takže

$$1 + 2 + \ldots + k_p \leqq \sum_{i=1}^{k_p} a_i \leqq 76,$$

odkud plyne, že je $k_p(k_p+1) \leqq 152$, neboli $k_p \leqq 11$.

Podobně dostaneme nerovnost

$$153 - \left(a_{k_p+1} + \ldots + a_{17}\right) < a_{k_p+1} + \ldots + a_{17},$$

takže

$$77 \leqq \sum_{i=k_p+1}^{17} a_i \leqq (k_p + 1) + \ldots + 17 = 153 - \frac{1}{2}k_p(k_p + 1).$$

Odtud vyjde odhad $k_p \geqq 5$. Snadno nahlédneme, že pro pořadí $a = (1, 2, \ldots, 17)$ vyjde $k_a = 11$ a pro pořadí $z = (17, 16, \ldots, 2, 1)$ zase $k_z = 5$.

Uvažujme dvě navzájem opačná pořadí

$$p = (a_1, a_2, \ldots, a_{17}), \quad q = (a_{17}, a_{16}, \ldots, a_1).$$

Protože $a_1 + a_2 + \ldots + a_{17} = 1 + 2 + \ldots + 17 = 153$ je liché číslo, platí zároveň

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_p} < a_{k_p+1} + \ldots + a_{17},$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_p+1} > a_{k_p+2} + \ldots + a_{17}.$$

To ale znamená, že je $k_p + k_q = 16$ pro libovolná navzájem opačná pořadí p, q. Rozdělíme-li všech 17! možných pořadí sedmnácti čísel do $\frac{1}{2}17!$ dvojic navzájem opačných pořadí, plyne odtud, že hledaný součet je $8 \cdot 17!$.

A – III – 2

Pro obsah P trojúhelníku o stranách a, b, c dostaneme podle Heronova vzorce

$$P^2 = \frac{1}{16}\left(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4\right) =$$
$$= \frac{1}{16}\left((a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)\right).$$

Podle Cauchyovy nerovnosti je

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \leqq 3(a^4 + b^4 + c^4),$$

takže

$$P^2 \leqq \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2,$$
$$P \leqq \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2).$$

Pro povrch S uvažovaného čtyřstěnu odtud plyne

$$\begin{aligned} S \leqq \frac{\sqrt{3}}{12}\big(a^2+b^2+c^2+b^2+e^2+f^2+ \\ +c^2+f^2+d^2+a^2+d^2+e^2\big) = \\ = \frac{\sqrt{3}}{6}\big(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2\big). \end{aligned}$$

Protože pro pravidelný čtyřstěn nastane rovnost, nedá se koeficient $\frac{1}{6}\sqrt{3}$ v dokázané nerovnosti zmenšit.

A – III – 3

Je-li $n = c_1 \cdot 10^{p-1} + c_2 \cdot 10^{p-2} + \ldots + c_p$ ($c_1 \neq 0$) rozvoj p-ciferného přirozeného čísla n v desítkové soustavě, budeme stručně psát $n = |c_1|c_2| \ldots |c_p|$. Jelikož je $c_1 \neq 0$, je $n \geqq 10^{p-1}$. Číslo 10^{p-1} zřejmě podmínce úlohy nevyhovuje, vyloučíme-li triviální případ $p = 1$. Stačí tedy uvažovat jen ta p-ciferná čísla, která jsou větší než 10^{p-1}. Zkusíme porovnat ciferný součet $c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_p$ čísla n a čísla $m = \big(10^{p-1}+1\big)n$. Je

$$\begin{array}{rr} 10^{p-1}n = & |c_1|c_2|\ldots|c_{p-1}|c_p|\,0\,|\,0\,|\ldots|\,0\,| \\ n = & |c_1|c_2|c_3|\ldots|c_p| \\ \hline m = & |d_0|d_1|d_2|\ldots|d_{p-1}|d_p|c_2|c_3|\ldots|c_p| \end{array}$$

Je-li $c_p + c_1 \leqq 9$, je $d_p = c_p + c_1$, $d_{p-1} = c_{p-1}, \ldots, d_1 = c_1$, $d_0 = 0$ a $S(m) = 2(c_1 + c_2 + \ldots + c_p) \neq S(n)$. Je-li $c_p + c_1 \geqq 10$, je $d_p = c_p + c_1 - 10$, a pokud $c_{p-1} \leqq 8$, je $d_{p-1} = c_{p-1} + 1$, $d_{p-2} = c_{p-2}, \ldots, d_1 = c_1$, $d_0 = 0$, $S(m) = 2S(n) - 9$, $S(n) \geqq 10$, takže opět je $S(m) \neq S(n)$. Aby $S(m) = S(n)$, musí být nutně $c_{p-1} = 9$. Podobně bychom dokázali, že musí být $c_{p-2} = \ldots = c_2 = c_1 = 9$. Protože $c_p \geqq 1$ a n musí být dělitelné devíti (to plyne ze vztahu $S(2n) = S(n)$), je i $c_p = 9$. Aby tedy číslo n splňovalo podmínku $S(m) = S(n)$, musí být nutně $n = 10^p - 1$ nebo $n = 1$.

Ukážeme, že tato čísla splňují podmínku úlohy. V případě $n = 1$ je to zřejmé, zvolme tedy $n = 10^p - 1$, tedy $S(n) = 9p$, $p \geqq 1$ a nechť k je libovolné přirozené číslo menší než 10^p. Nechť je $k = |b_1|b_2|\dots|b_p|$ zápis čísla k v desítkové soustavě, přičemž nevylučujeme případ $b_1 = 0$ nebo $b_1 = b_2 = 0$ atd., tedy nevylučujeme případy, kdy je k číslo q-ciferné a $q < p$. Budeme však nejdříve předpokládat, že k není dělitelné deseti, tj. $b_p \neq 0$. Je pak $kn = k \cdot 10^p - k$,

$$\begin{array}{rl}
k \cdot 10^p = & |b_1|b_2|\dots\dots|b_p|\overbrace{0|0|\dots\dots|0}^{p}| \\
-k = & -|b_1|b_2|\dots\dots|b_p| \\
\hline
kn = & |b_1|\dots|b_{p-1}|b_p - 1|9 - b_1|\dots|9 - b_{p-1}|10 - b_p|,
\end{array}$$

takže $S(kn) = 9p = S(n)$. Pokud je $b_p = 0$, je $k = 10^r l$, $r \geqq 1$, a l není dělitelné deseti. Podle předcházejícího je $S(ln) = S(n)$ a zřejmě $S(10^r ln) = S(n)$. Tím je důkaz dokončen, úloze vyhovují právě čísla 1, 9, 99, 999, …

Jiné řešení. Předpokládejme, že p-ciferné číslo n vyhovuje dané soustavě rovnic a že $\overline{c_1c_2\dots c_p}$ je jeho zápis v desítkové soustavě, takže $S(n) = c_1 + c_2 + \dots + c_p$. Protože $n \geqq 10^{p-1}$, ale $S(10^{p-1}) = 1 \neq 2 = S(2 \cdot 10^{p-1})$, je $n \geqq 10^{p-1} + 1$. Číslo $n(10^{p-1} + 1) \leqq n^2$ má v desítkové soustavě zápis

$$10^{p-1}n + n = \overline{c_1c_2\dots c_p\underbrace{00\dots0}_{p-1}} + \overline{c_1c_2\dots c_p} =$$
$$= \overline{(\overline{c_1c_2\dots c_p} + c_1)c_2c_3\dots c_p}.$$

Odtud plyne rovnost

$$S\big((10^{p-1} + 1)n\big) = S(\overline{c_1c_2\dots c_p} + c_1) + c_2 + c_3 + \dots + c_p,$$

takže

$$S(\overline{c_1c_2\dots c_p} + c_1) = c_1.$$

Číslo $\overline{c_1c_2\dots c_p} + c_1$ není p-ciferné (jinak by začínalo číslicí c_1 nebo číslicí $c_1 + 1$, takže by bylo $S(\overline{c_1c_2\dots c_p} + c_1) > c_1$). Platí tedy $10^p \leqq \overline{c_1c_2\dots c_p} + c_1$, zároveň ovšem je $\overline{c_1c_2\dots c_p} \leqq 99\dots9 = 10^p - 1$. Dohromady tak dostáváme nerovnosti

$$10^p \leqq \overline{c_1c_2\dots c_p} + c_1 \leqq 10^p + 8.$$

Díky této nerovnosti snadno zjistíme, že nemůže být $c_1 \leqq 8$, neboť $89\ldots9+8 < 10^p$; je tedy $c_1 = 9$ a $S(\overline{c_1c_2\ldots c_p}+9) = 9$. Protože rovnice $S(x) = 9$ má v intervalu $\langle 10^p, 10^p+8\rangle$ jediné řešení $x = 10^p+8$, vychází

$$n = \overline{c_1c_2\ldots c_p} = 10^p + 8 - 9 = 10^p - 1.$$

Zbývá ověřit, že nalezené číslo $n = 10^m - 1$ vyhovuje pro libovolné přirozené m všem rovnostem úlohy. Pro $k \leqq n$ označme $\overline{c_1c_2\ldots c_p}$ dekadický zápis čísla $k-1$. Potom

$$\begin{aligned} kn &= k(10^m - 1) = (k-1)10^m + (10^m - k) = \\ &= \overline{c_1c_2\ldots c_p\underbrace{00\ldots0}_{m}} + \\ &+ \overline{\underbrace{99\ldots9}_{m-p}(9-c_1)(9-c_2)\ldots(9-c_p)}, \end{aligned}$$

neboť $10^m - k = (10^m - 1) - (k-1) = \underbrace{99\ldots9}_{m} - \overline{c_1c_2\ldots c_p}$. Je tedy

$$kn = \overline{c_1c_2\ldots c_p\underbrace{99\ldots9}_{m-p}(9-c_1)(9-c_2)\ldots(9-c_p)},$$

a proto

$$\begin{aligned} S(kn) &= c_1 + c_2 + \ldots + c_p + 9(m-p) + \\ &+ (9-c_1) + (9-c_2) + \ldots + (9-c_p) = 9m. \end{aligned}$$

A – III – 4

Levá strana rovnice

$$\cos 12x - 5\sin 3x = 9\,\mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{cotg}^2\, x.$$

splňuje pro libovolné reálné číslo x nerovnost

$$\cos 12x - 5\sin 3x \leqq 6, \tag{1}$$

pravá

$$9\,\mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{cotg}^2\, x \geqq 6, \tag{2}$$

neboť pro každé kladné u platí $u + \dfrac{1}{u} \geqq 2$, a tedy

$$9 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = 3\left((\sqrt{3} \operatorname{tg} x)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{tg} x} \right)^2 \right) \geqq 6.$$

Danou rovnici splňují tedy právě ta x, pro něž v obou nerovnostech (1) a (2) nastane rovnost. To znamená, že

$$\cos 12x = 1, \qquad \sin 3x = -1, \qquad |\operatorname{tg} x| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Z těchto podmínek vychází, že

$$x = k\frac{\pi}{6}, \qquad 3x = (4l - 1)\frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad x = (6m \pm 1)\frac{\pi}{6},$$

kde k, l, m jsou celá čísla. Společným řešením jsou čísla

$$x = (12k + 11)\frac{\pi}{6} \quad \text{a} \quad x = (12k + 7)\frac{\pi}{6},$$

kde $k \in \mathbb{Z}$ je libovolné celé číslo.

A – III – 5

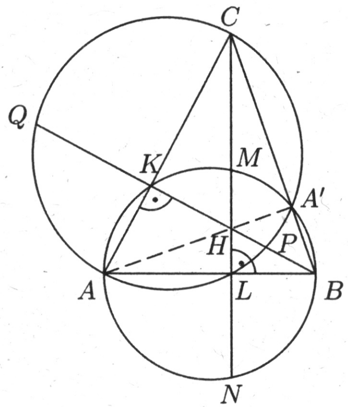
V intervalu $(\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$ leží číslo $\frac{15}{17}$, pro které je $f(\frac{15}{17}) = \frac{16}{17} > \frac{8}{9}$. Podle řešení úlohy A–I–3 neleží v intervalu $(\frac{7}{8}, \frac{15}{17})$ žádné racionální číslo $\frac{p}{q}$ se jmenovatelem $q < 25$ a podobně interval $(\frac{15}{17}, \frac{8}{9})$ neobsahuje žádné racionální číslo $\frac{p}{q}$ se jmenovatelem $q < 26$. Pro každé racionální číslo $\frac{p}{q}$ z intervalu $(\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$, $\frac{p}{q} \neq \frac{15}{17}$, tedy platí $q \geqq 26$, a proto je

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} + \frac{1}{q} < \frac{8}{9} + \frac{1}{26} < \frac{16}{17}.$$

Protože pro každé iracionální číslo $x \in (\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$ je $f(x) = x < \frac{8}{9}$, je hledané maximum $\frac{16}{17}$.

A – III – 6

Označme K patu výšky z bodu B na stranu AC, L patu výšky z bo-



Obr. 16

du C na stranu AB. Z Eukleidovy věty pro pravoúhlý trojúhelník APC (obr. 16) dostaneme rovnost

$$|AP|^2 = |AK| \cdot |AC| = |AB| \cdot |AC| \cos \alpha.$$

Stejný výsledek dostaneme i pro velikost $|AM|^2$ z Eukleidovy věty pro pravoúhlý trojúhelník ABM,

$$|AM|^2 = |AL| \cdot |AB| = |AB| \cdot |AC| \cos \alpha.$$

Je tedy $|AP| = |AQ| = |AM| = |AN|$, takže body M, N, P, Q leží na kružnici se středem ve vrcholu A daného trojúhelníku.

Jiné řešení. Zřejmě AC je osa úsečky PQ, AB je osa úsečky MN. Odtud plyne, že $|AM| = |AN|$ a $|AP| = |AQ|$. (Pokud tedy leží body M, N, P, Q na kružnici, je jejím středem bod A.

Protože P leží na výšce z bodu B, je $\boldsymbol{PB} \cdot \boldsymbol{AC} = 0$. Z Thaletovy věty dále plyne rovnost $\boldsymbol{AP} \cdot \boldsymbol{PC} = 0$. Analogicky dostaneme $\boldsymbol{CN} \cdot \boldsymbol{AB} = 0$

a $\boldsymbol{AM} \cdot \boldsymbol{MB} = 0$. Je tedy

$$\begin{aligned}
|AP|^2 &= \boldsymbol{AP} \cdot \boldsymbol{AP} = \boldsymbol{AP} \cdot \boldsymbol{AP} + \boldsymbol{AP} \cdot \boldsymbol{PC} = \boldsymbol{AP} \cdot \boldsymbol{AC} = \\
&= \boldsymbol{AP} \cdot \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{PB} \cdot \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{AB} \cdot \boldsymbol{AC}, \\
|AM|^2 &= \boldsymbol{AM} \cdot \boldsymbol{AM} = \boldsymbol{AM} \cdot \boldsymbol{AM} + \boldsymbol{AM} \cdot \boldsymbol{MB} = \boldsymbol{AM} \cdot \boldsymbol{AB} = \\
&= \boldsymbol{AM} \cdot \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{MC} \cdot \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC} \cdot \boldsymbol{AB},
\end{aligned}$$

takže $|AN| = |AM| = |AP| = |AQ|$. Tím je důkaz tvrzení úlohy hotov.

Jiné řešení. Označme H průsečík výšek trojúhelníku ABC a A' patu výšky vedené bodem A. Pro mocnost bodu H ke každé z obou uvažovaných kružnic platí

$$|HA| \cdot |HA'| = |HM| \cdot |HN|$$

a zároveň

$$|HA| \cdot |HA'| = |HP| \cdot |HQ|.$$

Odtud ovšem plyne, že body M, N, P, Q leží na kružnici.