41. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie B

In: Andrej Blaho (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Jozef Moravčík (editor); Václav Sedláček (editor); Jaromír Šimša (editor); Pavel Töpfer (editor): 41. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1991/1992. 33. mezinárodní matematická olympiáda. 4. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1997. pp. 40–53.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404959

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Jedna z výšek trojúhelníku ABC je menší než každá z jeho stran a tvoří s délkami stran trojúhelníku ABC čtyři za sebou jdoucí přirozená čísla. Určete velikost této výšky.

B – I – 2

Nech $0 < a < c$. Nájdite všetky $x \in \langle a, c \rangle$, pre ktoré platí

$$x(2a - x + 2c)^3 \geqq 27a^2c^2.$$

B – I – 3

Uvnitř trojúhelníku o stranách 3, 4, 5 najděte všechny body, jejichž vzdálenosti od stran tvoří trojici délek stran nějakého trojúhelníku.

B – I – 4

Dokážte, že obvod každého pythagorejského trojuholníka je párne číslo.

B – I – 5

Na listě papíru jsou narýsovány části stran daného trojúhelníku, jehož vrcholy leží mimo. Sestrojte střed kružnice vepsané danému trojúhelníku.

B – I – 6

Koľko existuje celých kladných čísel $x \leqq 1\,992\,000$ takých, že $1\,992\,000$ delí $x^3 - x$?

B – S – 1

Nájdite najväčšie dvojciferné číslo n s tou vlastnosťou, že existuje pytagorejský trojuholník s obsahom n.

B – S – 2

Na listu papíru jsou narýsovány části stran konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ a jeho vrcholy B, D. Vrcholy A, C leží mimo papír. Sestrojte úhlopříčku AC.

B – S – 3

Nechť a, b jsou daná reálná čísla. Potom platí

$$(a+b)^4 \geqq 8(a^3b+ab^3).$$

Dokažte!

B – II – 1

Nájdite všetky pytagorejské trojuholníky, ktorých výška na preponu sa rovná 12.

B – II – 2

Bod T je bodom vonkajšieho dotyku kružnice k s priemerom AT a kružnice h s priemerom BT. Dotyčnica kružnice h vedená bodom A zviera s priamkou AT uhol α a dotyčnica kružnice k vedená bodom B zviera s priamkou AT uhol β.

Dokážte, že

$$3\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha+\sin\beta=1.$$

B – II – 3

Nechť x, y, $z \in (-1,\infty)$ a $x+y+z=3$. Pak

$$\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1} \leqq \frac{3}{2}. \tag{1}$$

Dokažte. Kdy ve vztahu (1) platí rovnost?

B – II – 4

Je dán trojúhelník ABC se stranami $3, 4, 5$. V rovině daného trojúhelníku najděte všechny body X, pro které existuje pravoúhlý trojúhelník se stranami $|XA|$, $|XB|$, $|XC|$.

B – I – 1

Označme n velikost výšky na stranu c, zbývající strany označme a, b. Obsah trojúhelníku ABC lze vyjádřit dvěma způsoby (používáme Herónův vzorec)

$$\frac{cn}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Je tedy

$$\frac{cn}{2} = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}.$$

Ze zadání víme, že $\{a, b, c\} = \{n+1, n+2, n+3\}$, můžeme proto předchozí rovnost upravit na tvar

$$2cn = \sqrt{(3n+6)(n+2)n(n+4)}.$$

Po umocnění a menší úpravě dostaneme

$$4c^2n = 3(n+2)^2(n+4). \qquad (1)$$

Nyní rozlišíme tři situace:

a) Je-li $c = n+1$, pak z (1) po dosazení a úpravě dostaneme

$$n^2 - 16n - 56 = \frac{48}{n}.$$

Výraz na levé straně je pro $n \in \mathbb{N}$ celočíselný, tj. n musí být dělitelem čísla 48. Postupným dosazováním se snadno přesvědčíme, že žádný z množiny dělitelů čísla 48 dané rovnici nevyhovuje.

b) Pro $c = n+2$ dostaneme z (1) lineární rovnici (po dosazení a vydělení výrazem $(n+2)^2$) s kořenem $n = 12$. Tomu odpovídá ostroúhlý trojúhelník se stranami 13, 14 a 15.

c) Je-li $c = n+3$, obdržíme podobně jako v a) rovnici

$$n^2 - 24 = \frac{48}{n},$$

která opět v množině $\mathbb{N}$ nemá řešení.

Jediným řešením tedy je trojúhelník se stranami délek 13, 14 a 15 a výškou 12 na stranu délky 14.

Poznámka. Úlohu lze řešit také na základě Pythagorovy věty diskusí tří různých možností strany proti výšce délky n:

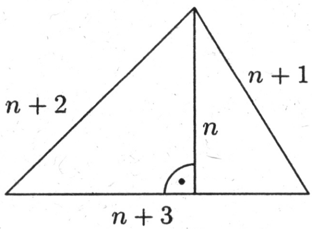
Přísluší-li např. výška nejdelší straně (obr. 8), pak platí

$$\sqrt{(n+2)^2-n^2}+\sqrt{(n+1)^2-n^2}=n+3.$$

Z tohoto vztahu po úpravě a dvojím umocnění postupně dostaneme

$$\begin{aligned}2\sqrt{n+1}+\sqrt{2n+1}&=n+3,\\ 4\sqrt{(n+1)(2n+1)}&=n^2+4,\\ n^2-24&=\frac{48}{n}.\end{aligned}$$

Tato rovnice, jak již víme, nemá řešení v $\mathbb{N}$. Další případy se řeší obdobně.



Obr. 8

B – I – 2

Za daných podmínek zřejmě platí

$$(c-x)\left(1-\frac{a}{x}\right)\geqq 0.$$

Odtud dostáváme

$$a+c-x\geqq\frac{ac}{x}.$$

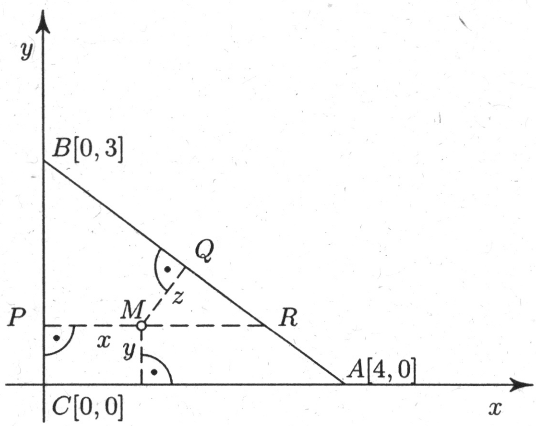
Tento vztah a nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem tří kladných čísel využijeme při úpravách levé strany zadané nerovnice. Je tedy

$$\begin{aligned} x(2a+2c-x)^3 &= x\big(a+c+(a+c-x)\big)^3 \geqq \\ &\geqq \left(a+c+\frac{ac}{x}\right)^3 \geqq \\ &\geqq x\cdot 3^3\cdot a\cdot c\cdot \frac{ac}{x} = 27a^2c^2. \end{aligned}$$

Nerovnice proto platí pro všechna $x \in \langle a, c\rangle$. Platí vždy dokonce ostrá nerovnost, neboť podle předpokladu je $a \neq c$.

B – I – 3

Vzdálenosti libovolného vnitřního bodu M od jednotlivých stran trojúhelníku označme x, y, z (obr. 9). Paty kolmic z bodu M na strany BC,



Obr. 9

AB označme P, Q a R nechť je průsečík přímek PM, AB. Trojúhelníky BCA, MQR, BPR jsou navzájem podobné, tj. mají délky stran v poměru $3:4:5$. Platí tedy

$$|MR| = \frac{5}{3}\,|MQ| = \frac{5}{3}\,z,$$
$$|PR| = \frac{4}{3}\,|BP| = \frac{4}{3}(3-y),$$
$$|MP| = x.$$

Po dosazení těchto vztahů do rovnosti

$$|MP| + |MR| = |PR|$$

zjistíme, že

$$z = \frac{12 - 4y - 3x}{5}. \tag{2}$$

Kladná čísla x, y, z jsou délky stran nějakého trojúhelníku, právě když platí

$$x + y > z \ \wedge \ x + z > y \ \wedge \ y + z > x.$$

Dosazením výrazu (2) do těchto tří vztahů vyjádříme hledanou množinu jako průnik vnitřků polorovin určených nerovnicemi

$$8x + 9y > 12 \ \wedge \ 9y - 2x < 12 \ \wedge \ 8x - y < 12.$$

Množinou je vnitřek trojúhelníku XYZ, jehož vrcholy $X = [\frac{3}{2}, 0]$, $Y = [0, \frac{4}{3}]$, $Z = [\frac{12}{7}, \frac{12}{7}]$ leží uvnitř stran daného trojúhelníku ABC.

Poznámka. Vztah (2) se dá odvodit i jinými způsoby. Například použitím vzorce z analytické geometrie pro vzdálenost bodu od přímky, nebo z faktu, že součet obsahů trojúhelníků ABM, ACM, BCM se rovná obsahu trojúhelníku ABC.

B – I – 4

Označme c přeponu trojúhelníku a a, b jeho odvěsny. Druhá mocnina obvodu je

$$\begin{aligned} o^2 &= (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = \\ &= 2(c^2 + ab + ac + bc). \end{aligned}$$

To je sudé číslo, takže i o musí být sudé.

B – I – 5

Vepíšeme-li nějakému trojúhelníku ABC kružnici k, pak je její střed S od jeho stran stejně vzdálen a tato vzdálenost je rovna poloměru ϱ kružnice k. Sestrojíme-li k trojúhelníku ABC stejnolehlý trojúhelník $A'B'C'$ se středem S a koeficientem stejnolehlosti $\varkappa$, $0 < \varkappa < 1$, má střed S od stran trojúhelníku $A'B'C'$ shodné vzdálenosti $k\varrho$. Proto i vzdálenosti stran trojúhelníků odpovídajících si v dané stejnolehlosti jsou shodné. Toho využijeme k vyřešení úlohy.

Konstrukce: Uvnitř daného trojúhelníku vedeme ve stejných vzdálenostech rovnoběžky s jeho stranami tak, aby se protly ve vrcholech A', B', C' uvnitř obdélníku tvořeného uvažovaným listem papíru a sestrojíme střed S kružnice vepsané trojúhelníku $A'B'C'$. Ten bude zároveň středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

B – I – 6

Před řešením úlohy připomeňme následující tvrzení: *Jsou-li a, b, c celá čísla a a, b nesoudělná, má diofantovská rovnice*

$$au + bv = c \tag{3}$$

s neznámými $u, v \in \mathbb{Z}$ vždy řešení. Vyhovují-li této rovnici nějaká čísla $u_0, v_0 \in \mathbb{Z}$, dá se množina všech řešení rovnice (3) *vyjádřit ve tvaru*

$$\{(u,v)\colon u = u_0 + bt,\ v = v_0 + at,\ t \in \mathbb{Z}\}. \tag{4}$$

Řešení úlohy. Číslo $1\,992\,000 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 83$ má dělit součin tří po sobě jdoucích nezáporných čísel

$$x^3 - x = (x-1)x(x+1).$$

Pro tři po sobě jdoucí čísla vždy platí, že
a) právě jedno je dělitelné třemi,
b) nejvýše jedno je dělitelné daným číslem větším než 3,
c) sudé je buď prostřední z obou čísel, anebo obě krajní. Jsou-li však obě krajní sudá, je jedno z nich lichým násobkem čísla 2.

Se zřetelem na tato fakta mohou pro činitele $x-1$, x, $x+1$ nastat možnosti, jejichž přehled je uveden v následujících tabulkách.

Tabulka III vznikne z tabulky II záměnou $x-1$ za $x+1$.

Zabývejme se nejprve tabulkou I. Pro první řádek dostáváme tři řešení, neboť $x = 664\,000l \leq 1\,992\,000$, tedy $l = 1, 2, 3$. Ostatní řádky vedou na rovnice typu (3). Například v posledním řádku dosadíme $x = 64l$ do vztahu $x - 1 = 125k$, dostaneme rovnici $64l - 125k = 1$, jejíž kořeny mají tvar $k = k_0 + 64r$, $l = l_0 + 125r$, $r \in \mathbb{Z}$. To vede na $x = x_1 + 64 \cdot 125r$, což dosadíme do vztahu $x + 1 = 83m$. Dostaneme $83m - 8\,000r = 1 + x_1$. Tato rovnice vede nakonec na $x = x_0 + 664\,000t$, $t \in \mathbb{Z}$. Vzhledem k dané

$x-1$	x	$x+1$
	$2^6 \cdot 5^3 \cdot 83l$	
5^3k	$2^6 \cdot 83l$	
	$2^6 \cdot 83l$	5^3m
$83k$	$2^6 \cdot 5^3l$	
	$2^6 \cdot 5^3l$	$83m$
$83 \cdot 5^3k$	2^6l	
	2^6l	$83 \cdot 5^3m$
$83k$	2^6l	5^3m
5^3k	2^6l	$83m$

Tabulka I

$x-1$	x	$x+1$
$2^5 \cdot 5^3 \cdot 83k$		
$2^5 \cdot 5^3k$	$83l$	
$2^5 \cdot 5^3k$		$83m$
$2^5 \cdot 83k$	5^3l	
$2^5 \cdot 83k$		5^3m
2^5k	$83 \cdot 5^3l$	
2^5k		$83 \cdot 5^3m$
2^5k	$83l$	5^3m
2^5k	5^3l	$83m$

Tabulka II

periodě můžeme kořen x_0 zvolit v intervalu $\langle 1, 664\,000\rangle$ a z podmínky $x < 1\,992\,000$ zjistíme $t \in \{0, 1, 2\}$. Každý řádek tabulky I tedy vede na tři vyhovující řešení. Obdobně postupujeme i v tabulkách II a III. Tentokrát však vede každý řádek na šest řešení, neboť kořeny příslušných rovnic dávají x tvaru

$$x = x_0 + 332\,000t, \quad x_0 \in \langle 1, 332\,000\rangle\,, \quad t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Dané úloze vyhovuje celkem $9 \cdot 3 + 18 \cdot 6 = 135$ přirozených čísel x.

B – S – 1

Ako je známe (pozri napr. Štefan Znám: *Teória čísel*, časť I., kap. 6) pre odvesny a, b a preponu c ľubovoľného pytagorejského trojúhelníka platí

$$\begin{aligned} a &= k(q^2 - p^2), \\ b &= 2kpq, \\ c &= k(q^2 + p^2), \end{aligned} \tag{1}$$

kde k, p, q sú prirodzené čísla, p, q sú nesúdeliteľné čísla rôznej parity a $q > p$. Pre obsah P tohto pravouhlého trojúhelníka však platí $P = \frac{1}{2}ab$, čiže $P = k^2pq(q^2 - p^2)$. Z toho vyplýva, že úlohe môže vyhovovať len také dvojciferné číslo n, ktoré možno vyjadriť v tvare

$$n = k^2pq(q^2 - p^2), \tag{2}$$

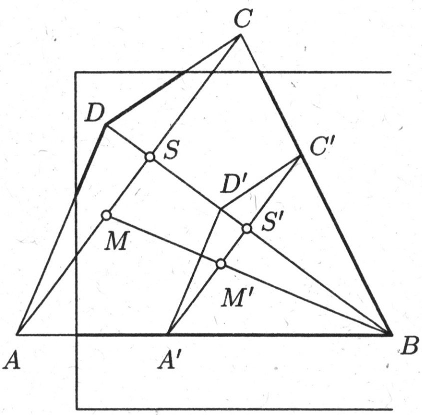
kde k, p, q sú prirodzené čísla uvedených vlastností. Vzhľadom k tomu, že p, q musia mať rôznu paritu, stačí uvažovať len o párnych n. Keďže je $98 = 2 \cdot 7^2$, číslo 98 nevyhovuje. Platí však $96 = 3 \cdot 2^5 = 4^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (2^2 - 1^2)$, z čoho porovnaním s (2) dostaneme $k = 4$, $p = 1$, $q = 2$ a po dosadení do (1) máme

$$a = 4(2^2 - 1^2) = 12,$$
$$b = 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 = 16,$$
$$c = 4(2^2 + 1^2) = 20.$$

Pre plošný obsah P pytagorejského trojúhelníka so stranami 12, 16, 20 skutočne platí $P = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$. Hľadaným číslom je teda číslo 96.

B – S – 2

Rozbor (pozri obr. 10). V rovnoľahlosti so stredom B a vhodným koefi-



Obr. 10

cientom $0 < k < 1$ zodpovedá konvexnému štvoruholníku $ABCD$ štvoruholník $A'BC'D'$ ($A'D' \parallel AD$ a $C'D' \parallel CD$), ktorý sa už celý nachádza vo vnútri obdĺžnika predstavujúceho daný list papiera. Bodu $S \in AC \cap BD$ v tejto rovnoľahlosti zodpovedá bod $S' \in A'C' \cap BD'$, pričom $BD' = BD$ a $A'C' \parallel AC$.

Z toho plynie nasledujúca *konštrukcia.* Vo vnútri úsečky DB zvolíme bod D' tak, aby body $A' \in p = AB$ ($A'D' \parallel AD$), $C' \in q = BC$ ($C'D' \parallel$ $\parallel CD$) ležali vo vnútri uvažovaného obdĺžnika. Označme $S' \in A'C' \cap BD$

a zvoľme vo vnútri úsečky $A'S'$ (resp. vo vnútri úsečky $S'C'$) ľubovoľne bod M'. Bodom D vedieme rovnobežku s priamkou $D'M'$ a jej priesečník s polpriamkou BM' označme M. Rovnobežka s priamkou $A'C' = M'S'$ idúca bodom M je priamka AC.

Dôkaz správnosti konštrukcie vyplýva zo základných vlastností rovnoľahlosti. Je zrejmé, že úloha má riešenie vždy, a to jediné.

B – S – 3

Najskôr dokážeme, že pre každé dve čísla a, b platí $(a+b)^4 \geqq 8(ab^3+a^3b)$. Podľa binomickej vety platí

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

ale tiež

$$0 \leqq (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4,$$

čiže

$$a^4 + 6a^2b^2 + b^4 \geqq 4(a^3b + ab^3).$$

Preto platí

$$(a+b)^4 \geqq 4(a^3b + ab^3) + 4(a^3b + ab^3) \geqq 8(a^3b + ab^3),$$

ako bolo treba dokázať.

B – II – 1

Ako je známe, pre odvesny a, b a preponu c ľubovoľného pytagorejského trojuholníka platí

$$a = k(q^2 - p^2), \qquad b = 2kpq, \qquad c = k(q^2 + p^2), \tag{1}$$

kde k, p, q sú prirodzené čísla, p, q sú nesúdeliteľné čísla rôznej parity a $q > p$. Ak výška v_c na preponu c sa rovná 12, potom pre plošný obsah P uvažovaného trojuholníka platí jednak $P = \frac{1}{2} \cdot 12c = 6c$ a jednak $P = \frac{1}{2}ab$. Vzhľadom na (1) z toho vyplýva, že

$$k^2pq(q^2 - p^2) = 6k(q^2 + p^2),$$

čiže

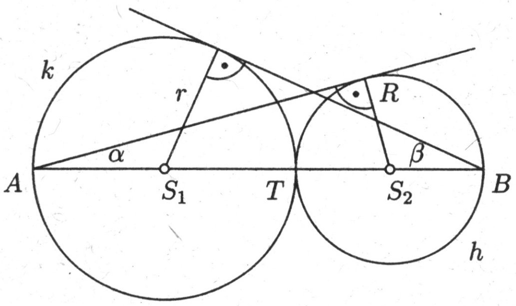
$$k = \frac{6(q^2 + p^2)}{pq(q^2 - p^2)}. \tag{2}$$

Z toho, že čísla p a q sú nesúdeliteľné, vyplýva, že musia byť nesúdeliteľné aj čísla q^2+p^2, p a čísla q^2+p^2, q. Preto číslo k z (2) môže byť prirodzené len vtedy, keď súčin pq delí 6. Vzhľadom na predpoklady o číslach p, q prichádzajú do úvahy len dvojice a) $p = 1$, $q = 2$; b) $p = 1$, $q = 6$; c) $p = 2$, $q = 3$. Dosadením do pravej strany (2) sa ľahko presvedčíme, že prirodzené k dostaneme len pre $p = 1$, $q = 2$ ($k = 5$). Ak tieto hodnoty dosadíme do (1), dostaneme $a = 15$, $b = 20$, $c = 25$. Z toho, že v pravouhlom trojuholníku platí $ab = v_c c$, dostávame, že $v_c = \dfrac{ab}{c} = \dfrac{15 \cdot 20}{25} = 12$.

Úlohe teda vyhovuje jediný pytagorejský trojuholník so stranami $a = 15$, $b = 20$, $c = 25$.

B – II – 2

Označme r polomer kružnice k a R polomer kružnice h (obr. 11). Potom



Obr. 11

je

$$\sin\alpha = \frac{R}{R+2r}, \qquad \sin\beta = \frac{r}{r+2R}.$$

Preto platí

$$\begin{aligned}3\sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha + \sin\beta &= \frac{3Rr}{(R+2r)(r+2R)} + \frac{R}{R+2r} + \frac{r}{r+2R} = \\ &= \frac{3Rr + Rr + 2R^2 + Rr + 2r^2}{(R+2r)(r+2R)} = 1,\end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať.

B – II – 3

Pre každé tri kladné reálne čísla a, b, c vyplýva z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom, že

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqq 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} = 9.$$

Pre $a = x+1$, $b = y+1$, $c = z+1$ z tohto vzťahu dostaneme

$$\big((x+1)+(y+1)+(z+1)\big)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right) \geqq 9,$$

odkiaľ vzhľadom na podmienku $x+y+z=3$ vyplýva, že

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1} \geqq \frac{3}{2}.$$

Platí však

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1} = \\
&\qquad = \left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\left(1-\frac{1}{y+1}\right)+\left(1-\frac{1}{z+1}\right) \leqq \\
&\qquad \leqq 3-\frac{3}{2} = \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

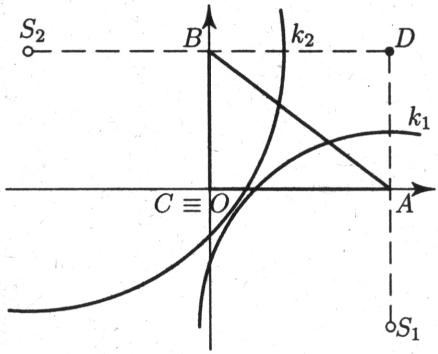
čo už je nerovnosť, ktorej správnosť sme mali dokázať.

V nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom platí rovnosť práve vtedy, keď platí $a = b = c$. Z toho vyplýva, že vo vzťahu (1) platí rovnosť práve vtedy, keď $x+1 = y+1 = z+1$ čiže $x = y = z = 1$ (vzhľadom na podmienku $x+y+z=3$).

B – II – 4

Je zrejmé, že pravouhlý trojuholník so stranami $|XA|$, $|XB|$, $|XC|$ existuje práve vtedy, keď nastane niektorý z týchto prípadov:

1) $|XA|^2 + |XB|^2 = |XC|^2$,
2) $|XA|^2 + |XC|^2 = |XB|^2$,
3) $|XB|^2 + |XC|^2 = |XA|^2$.



Obr. 12

Ak v rovine zvolíme karteziánsku súradnicovú sústavu tak, že platí (obr. 12) $C = [0,0]$, $A = [4,0]$, $B = [0,3]$, $X = [x,y]$, potom $|XA|^2 = (x-4)^2 + y^2$, $|XB|^2 = x^2 + (y-3)^2$, $|XC|^2 = x^2 + y^2$ a v jednotlivých uvedených prípadoch dostaneme

1) $(x-4)^2 + y^2 + x^2 + (y-3)^2 = x^2 + y^2$, čiže

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 0.$$

Tejto rovnici vyhovuje jediný bod $D = [4,3]$.

2) $(x-4)^2 + y^2 + x^2 + y^2 = x^2 + (y-3)^2$, čiže

$$(x-4)^2 + y^2 + 6y = 9,$$

odkiaľ po doplnení na úplný štvorec dostaneme

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 18.$$

To je rovnica kružnice k_1 so stredom $S_1 = [4,-3]$ a polomerom $r_1 = 3\sqrt{2}$.

3) $x^2 + (y-3)^2 + x^2 + y^2 = (x-4)^2 + y^2$, čiže $x^2 + 8x + (y-3)^2 = 16$, odkiaľ opäť po doplnení na úplný štvorec dostaneme

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 32,$$

čo je rovnica kružnice k_2 so stredom $S_2 = [-4,3]$ a polomerom $r_2 = 4\sqrt{2}$.

Záver. Podmienkam úlohy vyhovujú teda všetky body $X \in M = k_1 \cup k_2 \cup \{D\}$.