41. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie C

In: Andrej Blaho (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Jozef Moravčík (editor); Václav Sedláček (editor); Jaromír Šimša (editor); Pavel Töpfer (editor): 41. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1991/1992. 33. mezinárodní matematická olympiáda. 4. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1997. pp. 27–39.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/404958`

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

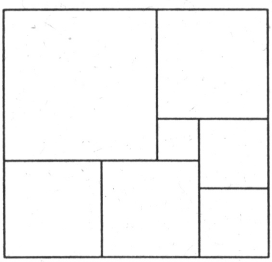
Mezi čísly $6n+2$, kde n je přirozené číslo, neexistuje žádná druhá mocnina přirozeného čísla. Naopak mezi čísly $6n+3$, kde n je přirozené číslo, je nekonečně mnoho druhých mocnin přirozených čísel. Dokažte.

C – I – 2

Kamilka si na tři kartičky napsala po jedné číslici. Potom z nich vytvořila všechna možná trojciferná čísla, která sečetla. Vyšlo jí 3 159. Pak si ale uvědomila, že jedno číslo zapomněla. Které to bylo?

C – I – 3

Obdélník, jehož jedna strana je 13,2 cm, je rozdělen na sedm čtverců podle obr. 1. Zjistěte velikost druhé strany.



Obr. 1

C – I – 4

Vypočtěte objem čtyřstěnu, jehož rovinná síť vyplní čtverec se stranou 10.

C – I – 5

Jsou-li a, b, c velikosti stran trojúhelníku a t_a, t_b, t_c velikosti příslušných těžnic, pak

$$\frac{3}{4} < \frac{t_a + t_b + t_c}{a + b + c} < 1.$$

Dokažte.

C – I – 6

Najděte nejmenší přirozené číslo n tak, aby existovalo právě 45 uspořádaných dvojic (u, v) přirozených čísel, jejichž nejmenší násobek je n.

C – S – 1

Nájdite všetky prirodzené čísla n menšie než 100, pre ktoré je číslo $7n + 4$ druhou mocninou prirodzeného čísla.

C – S – 2

Pro která přirozená čísla p existují přirozená čísla x, y tak, že

$$x + y = p^2,$$
$$10x + y = p^3\,?$$

C – S – 3

Lichobežník je strednou priečkou rozdelený na dva lichobežníky, ktoré majú pomer obsahov rovný q. Určte pomer dĺžok základní lichobežníka. Pre ktoré q má úloha riešenie?

C – II – 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + 2y = 4,$$
$$2xy - 3z^2 = 4.$$

C – II – 2

Dĺžky a, b, c strán trojuholníka sú prirodzené čísla, pre ktoré platí $a + b = 9$, $a + c = 10$. Zo všetkých trojuholníkov takýchto vlastností určte ten, ktorý má najmenší obvod, a ten, ktorý má najväčší obvod.

C – II – 3

Součtem trojciferného čísla A s trojcifernými čísly B, C, jež dostaneme z čísla A cyklickou záměnou číslic, je čtyřciferné číslo, které je dělitelné číslem 72. Určete čísla A, B, C, víte-li, že každé z nich je zapsáno navzájem různými číslicemi.

C – II – 4

Dokážte, že pre každý ostroúhly trojuholník platí

$$\frac{1}{2} < \frac{v_a + v_b + v_c}{a + b + c} < 1,$$

kde a, b, c sú dĺžky strán a v_a, v_b, v_c dĺžky výšok trojuholníka.

C – I – 1

Zjistíme, jaké zbytky při dělení číslem šest dávají druhé mocniny přirozených čísel. Jak ukážeme, zbytek čísla m^2 závisí jen na zbytku celého čísla m. Skutečně, je-li r zbytek při dělení čísla m šesti, pak $r \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ a $m = 6k + r$ pro vhodné celé číslo k. Rozlišme proto šest případů podle hodnoty r:

$$
\begin{aligned}
m = 6k + 0 \;&\Rightarrow\; m^2 = 36k^2 = 6 \cdot 6k^2 + 0 \\
m = 6k + 1 \;&\Rightarrow\; m^2 = 36k^2 + 12k + 1 = 6(6k^2 + 2k) + 1 \\
m = 6k + 2 \;&\Rightarrow\; m^2 = 36k^2 + 24k + 4 = 6(6k^2 + 4k) + 4 \\
m = 6k + 3 \;&\Rightarrow\; m^2 = 36k^2 + 36k + 9 = 6(6k^2 + 6k + 1) + 3 \\
m = 6k + 4 \;&\Rightarrow\; m^2 = 36k^2 + 48k + 16 = 6(6k^2 + 8k + 2) + 4 \\
m = 6k + 5 \;&\Rightarrow\; m^2 = 36k^2 + 60k + 25 = 6(6k^2 + 10k + 4) + 1
\end{aligned}
$$

Vidíme tedy, že při dělení šesti se zbytek čísla m^2 rovná pouze některému z čísel 0, 1, 4 nebo 3, nikdy se nerovná dvěma (ani pěti). Proto žádné celé číslo tvaru $6n + 2$ není druhou mocninou přirozeného čísla. Naše výpočty rovněž potvrzují, že číslo $6n+3$ je pro některé přirozené n druhou mocninou přirozeného čísla, právě když je n tvaru $n = 6k^2 + 6k + 1$, kde k je celé číslo. Pro $k = 0, 1, \ldots$ tak dostáváme nekonečně mnoho čísel tvaru $6n + 3$, jež jsou druhých mocninami přirozených čísel. Jsou to čísla 3^2, 9^2, 15^2 atd.

C – I – 2

Označme číslice na kartičkách a, b, c v takovém pořadí, aby číslo, které Kamilka zapomněla, bylo právě $100a + 10b + c$. Kamilka tedy vypočetla součet pěti čísel

$$
\begin{aligned}
&(100a + 10c + b) + (100b + 10a + c) + (100b + 10c + a) + \\
&+ (100c + 10a + b) + (100c + 10b + a) = 122a + 212b + 221c,
\end{aligned}
$$

takže máme řešit rovnici $122a+212b+221c = 3\,159$ v oboru $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Provedeme následující trik: k oběma stranám rovnice přičteme zapomenuté číslo $100a + 10b + c$,

$$222(a + b + c) = 3\,159 + (100a + 10b + c).$$

Budeme tak hledat celé násobky N čísla 222, tedy $N = 222k$, které leží mezi čísly $3\,159$ a $3\,159 + 1\,000 = 4\,159$ a poté porovnávat, zda je číslo k rovno cifernému součtu „přebytku" $N - 3\,159$.

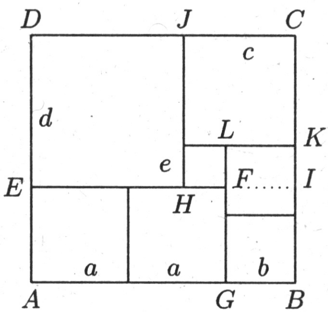
Předně platí $222 \cdot 14 = 3\,108 < 3\,159$ a dále

$$
\begin{aligned}
222 \cdot 15 &= 3\,159 + 171, & 15 &\neq 1 + 7 + 1,\\
222 \cdot 16 &= 3\,159 + 393, & 16 &\neq 3 + 9 + 3,\\
222 \cdot 17 &= 3\,159 + 615, & 17 &\neq 6 + 1 + 5,\\
222 \cdot 18 &= 3\,159 + 837, & 18 &= 8 + 3 + 7.
\end{aligned}
$$

Další násobky už testovat nemusíme, neboť $222 \cdot 19 = 4\,218 > 4\,159$. Kamilka proto zapomněla napsat číslo $100 \cdot 8 + 10 \cdot 3 + 7 = 837$.

C – I – 3

Strany a vrcholy čtverců si označíme tak, jak je uvedeno na obr. 2. Mezi délkami a, b, …, e lze podle tohoto obrázku najít řadu závislostí. Tak



Obr. 2

z rovností délek úseček

$$|AG| = |EF|,\ |HI| = |CJ|,\ |BK| = |GL|,\ |HJ| = |ED|$$

plynou po řadě rovnosti

$$
\begin{aligned}
2a &= d + e, & e + b &= c,\\
2b &= a + e, & e + c &= d.
\end{aligned}
$$

Odtud pomocí délky e snadno vyjádříme ostatní:

$$a = \frac{7}{3}e,\ b = \frac{5}{3}e,\ c = \frac{8}{3}e,\ d = \frac{11}{3}e.$$

Podle toho, která ze stran obdélníku $ABCD$ má zadanou velikost 13,2 cm, platí buď $2a + b = 13{,}2$, nebo $a + d = 13{,}2$. Dosadíme-li sem předchozí vyjádření délek a, b, c a d, dostaneme rovnici pro určení neznámé e:

$$2 \cdot \frac{7}{3}e + \frac{5}{3}e = 13{,}2 \qquad \text{resp.} \qquad \frac{7}{3}e + \frac{11}{3}e = 13{,}2.$$

V prvním případě vychází $e = \frac{198}{95}$, ve druhém $e = \frac{11}{5}$. Délka druhé strany obdélníku je tedy v prvním případě rovna

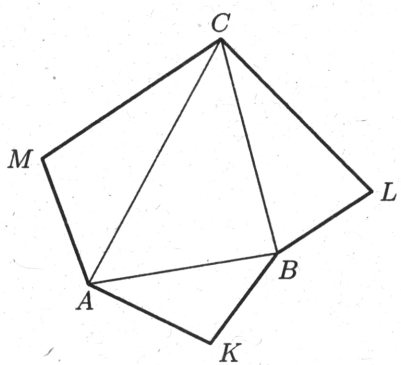
$$a + d = 6e = \frac{1\,188}{95}\ \text{cm},$$

ve druhém

$$2a + b = \frac{19}{3}e = \frac{209}{15}\ \text{cm}.$$

C – I – 4

Síť libovolného čtyřstěnu $ABCV$ rozvinutá do roviny ABC se skládá ze čtyř trojúhelníků (obr. 3), jejichž sjednocení vytvoří „šestiúhelník“



Obr. 3

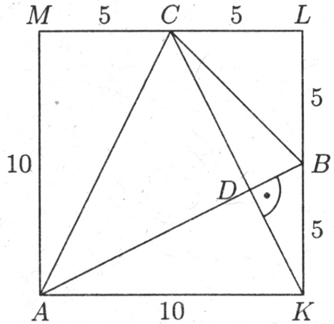
$AKBLCM$, ve kterém platí

$$|AK| = |AM|,\ |BK| = |BL| \ \text{a}\ |CL| = |CM|. \tag{1}$$

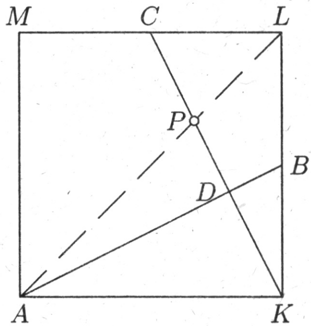
Použití uvozovek v předchozí větě je namístě, neboť některé z dvojic úseček AK, AM nebo BK, BL resp. CL, CM mohou svírat přímý úhel $180°$, tehdy je síť mnohoúhelník s menším počtem stran. V naší úloze je síť čtverec, zvolme označení vrcholů tak, aby $|\sphericalangle KBL| = |\sphericalangle LCM| = 180°$, potom s ohledem na (1) platí

$$|AK| = |AM| = 10, \; |BK| = |BL| = |CL| = |CM| = 5$$

(obr. 4). Protože při otočení čtverce $AKLM$ kol jeho středu o $90°$ přejde úsečka AB v úsečku KC, platí $AB \perp KC$. Označíme-li proto D průsečík



Obr. 4



Obr. 5

přímek AB a KC, je bod D patou stěnové výšky spuštěné z vrcholu V čtyřstěnu $ABCV$ na hranu AB. To ale znamená, že pata P tělesové výšky z vrcholu V na stěnu ABC padne na úsečku KC. Protože $|AC| = |AB|$ a $|VC| = |VB|$, je čtyřstěn $ABCV$ souměrný podle roviny souměrnosti úsečky BC; bod P proto padne i na úhlopříčku AL (obr. 5). Z podobnosti trojúhelníků AKP a LCP plyne, že bod P dělí úsečku KC v poměru $2:1$ od vrcholu K, a tedy

$$|PK| = \frac{2}{3}|KC| = \frac{2}{3}\sqrt{10^2 + 5^2} = \frac{10}{3}\sqrt{5}.$$

Úsečka DK je výška na přeponu trojúhelníku ABK, proto

$$|DK| = \frac{|AK| \cdot |KB|}{|AB|} = \frac{10 \cdot 5}{5\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

Můžeme proto určit velikost $|PD| = |PK| - |DK| = \frac{4}{3}\sqrt{5}$, a tedy i tělesovou výšku

$$|PV| = \sqrt{|VD|^2 - |PD|^2} = \sqrt{|DK|^2 - |PD|^2} =$$
$$= \sqrt{20 - \frac{16}{9} \cdot 5} = \frac{1}{3}\sqrt{100} = \frac{10}{3}.$$

Obsah S trojúhelníku ABC získáme odečtením od obsahu čtverce $AKLM$ obsahů tří trojúhelníků AKB, BLC a CMA:

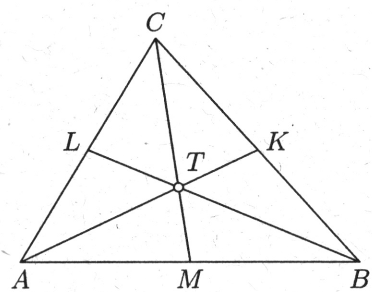
$$S = 100 - 25 - \frac{25}{2} - 25 = \frac{75}{2}.$$

Proto je hledaný objem čtyřstěnu roven

$$\frac{1}{3} S \cdot |PV| = \frac{1}{3} \cdot \frac{75}{2} \cdot \frac{10}{3} = \frac{125}{3}.$$

C – I – 5

Označme K, L, M středy stran po řadě protilehlých vrcholům A, B, C daného trojúhelníku a T jeho těžiště (obr. 6). Podle trojúhelníkové



Obr. 6

nerovnosti v trojúhelníku BCT platí

$$|BC| < |BT| + |CT|, \quad \text{tj.} \quad a < \frac{2}{3}t_b + \frac{2}{3}t_c.$$

Podobně z trojúhelníků ABT a CAT usoudíme, že

$$c < \frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b \quad \text{a} \quad b < \frac{2}{3}t_c + \frac{2}{3}t_a.$$

Sečtením těchto tří nerovností dostaneme

$$a + b + c < \frac{4}{3} \cdot (t_a + t_b + t_c),$$

což je vlastně levá dokazovaná nerovnost. Dále si všimněme, že podle trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku KMA platí

$$|AK| < |KM| + |AM|, \quad \text{tj.} \quad t_a < \frac{b}{2} + \frac{c}{2},$$

podobně z trojúhelníků LKB a MLC plyne

$$t_b < \frac{c}{2} + \frac{a}{2} \quad \text{a} \quad t_c < \frac{a}{2} + \frac{b}{2}.$$

Sečtením těchto tří nerovností dostaneme

$$t_a + t_b + t_c < 2\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) = a + b + c,$$

a to je vlastně pravá dokazovaná nerovnost.

C – I – 6

Je-li $p, q, r, \ldots$ posloupnost všech prvočíselných dělitelů hledaného čísla n, pak rozklad n na prvočinitele má tvar $n = p^a q^b r^c \ldots$, kde exponenty a, b, c, … jsou celá kladná čísla. Libovolní dva dělitelé čísla n pak mají tvar

$$n = p^d q^e r^f \ldots \quad \text{a} \quad n = p^g q^h r^i \ldots,$$

kde d, e, f, …, g, h, i, … jsou celá *nezáporná* čísla. Navíc je číslo n je nejmenší společný násobek těchto čísel u a v, právě když platí soustava rovností

$$a = \max(d, g),\ b = \max(e, h),\ c = \max(f, i),\ \ldots.$$

Výběry možných dvojic (d, g), (e, h), (f, i), … jsou tedy navzájem nezávislé, např. pro dvojici (d, g) máme možnosti

$$(0, a),\ (1, a),\ \ldots,\ (a, a),\ (a, a-1),\ \ldots,\ (a, 1),\ (a, 0),$$

tj. právě $(2a+1)$ možností. Existuje tedy právě $(2a+1)(2b+1)(2c+1)\dots$ uspořádaných dvojic (u, v) zkoumané vlastnosti. (Všimněte si, že určený počet závisí na exponentech a, b, c, ..., nikoliv na hodnotách prvočísel p, q, r, ... v rozkladu čísla n.) Požadovaná rovnost

$$45 = (2a + 1)(2b + 1)(2c + 1)\dots$$

představuje rozklad čísla 45 na několik celých činitelů větších než 1, tedy jeden ze součinů 45, $15 \cdot 3$, $9 \cdot 5$ nebo $5 \cdot 3 \cdot 3$ (na pořadí činitelů nebereme ohled). To znamená, že číslo n má jeden z tvarů

$$p^{22}, \quad p^7q^1, \quad p^4q^2, \quad p^2q^1r^1.$$

Nejmenší představitelé těchto čtyř typů jsou čísla 2^{22}, $2^7 \cdot 3$, $2^4 \cdot 3^2$ a $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ (za p, q, r dosazujeme nejmenší prvočísla, přitom vždy k menšímu prvočíslu přiřazujeme větší exponent). Nejmenší je poslední z těchto čísel, tj. číslo 60.

C – S – 1

Hledáme všechna přirozená čísla $n < 100$ taková, že $7n + 4 = m^2$ pro vhodné přirozené m. Možné zbytky při dělení čísla m číslem 7 bychom mohli zjistit stejnou metodou jako v úloze C–I–1, ukažme si však kratší postup: Upravíme-li rovnici na tvar $7n = (m - 2)(m + 2)$, ihned vidíme, že prvočíslem 7 musí být dělitelné jedno z čísel $(m - 2)$ nebo $(m + 2)$. Číslo m je tedy buďto tvaru $7k + 2$, nebo $7k - 2$. Platí

$$m = 7k + 2 \Rightarrow m^2 = 49k^2 + 28k + 4 = 7k(7k + 4) + 4,$$
$$m = 7k - 2 \Rightarrow m^2 = 49k^2 - 28k + 4 = 7k(7k - 4) + 4,$$

tedy hledaná čísla n jsou tvaru $k(7k + 4)$ nebo $k(7k - 4)$. Dosadíme-li sem postupně $k = 1, 2, \dots$, dostaneme všechna hledaná čísla 3, 11, 20, 36, 51, 75, 96 (další čísla jsou již větší než 100).

C – S – 2

Dosadíme-li vyjádření $x = p^2 - y$ z první rovnice do rovnice druhé, dostaneme

$$10(p^2 - y) + y = p^3, \quad \text{odkud} \quad y = \frac{1}{9}p^2(10 - p),$$

takže $x = p^2 - y = \frac{1}{9}p^2(p-1)$. Mají-li být obě čísla x a y přirozená, musí platit $1 < p < 10$. Postupným dosazením $p = 2, 3, \ldots, 9$ se snadno přesvědčíme, že ve skutečnosti vyhovují pouze hodnoty $p = 3$, 6 a 9.

C – S – 3

Označíme-li a, c délky základen a v výšku hledaného lichoběžníku, pak délka jeho střední příčky je rovna $\dfrac{a+c}{2}$ a oba lichoběžníky vzniklé dělením mají tutéž výšku $\frac{1}{2}v$. Podle zadání platí

$$\left(\frac{\left(a+\dfrac{a+c}{2}\right)\cdot\dfrac{v}{2}}{2}\right) : \left(\frac{\left(\dfrac{a+c}{2}+c\right)\cdot\dfrac{v}{2}}{2}\right) = q.$$

Protože poměr nalevo je roven $(3a+c):(a+3c)$, můžeme např. délku a vyjádřit s pomocí délky c a poměru q. Vychází

$$a = \frac{3q-1}{3-q}\cdot c, \qquad \text{odkud} \qquad \frac{a}{c} = \frac{3q-1}{3-q}.$$

Tím je poměr délek základen určen. Protože tento poměr může být libovolné kladné číslo různé od jedné, zbývá najít všechna $q > 0$, pro která je

$$\frac{3q-1}{3-q} > 0.$$

V každém ze tří případů

$$0 < q < \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} < q < 3 \quad \text{a} \quad q > 3$$

snadno rozhodneme o znaménku zkoumaného zlomku, který je roven 1 jedině pro $q = 1$; zjistíme tak, že hledané hodnoty q tvoří množinu $(\frac{1}{3}, 1) \cup \cup (1, 3)$.

C – II – 1

Dosadíme-li vyjádření $x = 4 - 2y$ z první rovnice do rovnice druhé, dostaneme

$$2(4-2y)y - 3z^2 = 4 \quad \text{neboli} \quad 3z^2 = -4y^2 + 8y - 4.$$

Všimněme si, že $-4y^2 + 8y - 4 = -4(y-1)^2 \leqq 0$ pro každé reálné y. Protože na druhé straně $3z^2 \geqq 0$ pro každé reálné z, musí platit $z^2 = (y-1)^2 = 0$, a tedy $z = 0$ a $y = 1$. Nakonec určíme $x = 4 - 2y = 2$. Jediné řešení dané soustavy je trojice $(x, y, z) = (2, 1, 0)$.

C – II – 2

Podle trojúhelníkové nerovnosti platí $c < a + b$, takže musí být $c \leqq 8$, což spolu s rovností $a + c = 10$ vede k odhadu $a \geqq 2$. Protože $b + c = (9 - a) + (10 - a)$, plyne z další trojúhelníkové nerovnosti $a < b + c$ nerovnost $a < 19 - 2a$, odkud $a \leqq 6$. Máme tedy tyto možnosti:

a	2	3	4	5	6
$b = 9 - a$	7	6	5	4	3
$c = 10 - a$	8	7	6	5	4
obvod	17	16	15	14	13

Nejmenší obvod má trojúhelník o stranách 3, 4, 6, největší obvod trojúhelník o stranách 2, 7, 8.

C – II – 3

Jsou-li a, b, c cifry hledaného čísla A (zleva doprava), pak $A = 100a + 10b + c$ a čísla B, C mají tvar

$$B = 100b + 10c + a \quad \text{a} \quad C = 100c + 10a + b.$$

Číslo

$$A + B + C = 111(a + b + c) = 3 \cdot 37(a + b + c)$$

je dělitelné číslem $72 = 3 \cdot 24$, právě když číslo 24 dělí součet $a + b + c$. Protože a, b, c jsou po dvou různé cifry, platí

$$a + b + c \leqq 9 + 8 + 7 = 24,$$

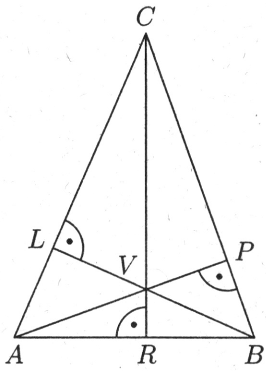
takže musí být

$$a + b + c = 24.$$

Navíc poslední rovnost platí, jen když $\{a, b, c\} = \{7, 8, 9\}$. Až na pořadí je pak trojice A, B, C rovna buď trojici 987, 879, 798, nebo trojici 978, 789, 897.

C – II – 4

Označme P, Q, R paty výšek spuštěných po řadě z vrcholů A, B, C daného ostroúhlého trojúhelníku a V — jeho ortocentrum (obr. 7). Protože



Obr. 7

přepona je nejdelší stranou každého pravoúhlého trojúhelníku, dostaneme z trojúhelníků APC, BQA a CRB nerovnosti

$$v_a < b,\ v_b < c \ \text{ a } \ v_c < a$$

a jejich sečtením pravou dokazovanou nerovnost. Protože ortocentrum V je vnitřním bodem úseček AP, BQ a CR, platí

$$v_a > |AV|,\ v_b > |BV| \ \text{ a } \ v_c > |CV|.$$

Pak ale z trojúhelníkových nerovností

$$|AV| + |BV| > |AB|,\ |BV| + |CV| > |BC|,$$
$$|CV| + |AV| > |CA|$$

ihned plynou odhady

$$v_a + v_b > c,\ v_b + v_c > a,\ v_c + v_a > b,$$

jejichž sečtením dostaneme

$$2(v_a + v_b + v_c) > a + b + c,$$

tj. levou dokazovanou nerovnost.