40. ročník matematické olympiády na středních školách

32. Mezinárodní matematická olympiáda

In: Leo Boček (editor); Jiří Binder (editor); Karel Horák (editor); Václav Sedláček (editor); Pavel Töpfer (editor): 40. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1990/1991. 32. mezinárodní matematická olympiáda. 3. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1993. pp. 205–216.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404933

32. Mezinárodní matematická olympiáda

se konala ve dnech 12. – 23. července v univerzitním městě Uppsala a v malém městečku Sigtuna ve Švédsku. Zúčastnilo se jí 318 studentů z 56 zemí. Československo se v neoficiálním pořadí družstev umístilo na 11. místě, na prvních pěti místech se umístila družstva SSSR, Číny, Rumunska, Německa a USA. I když jsme v předcházejících letech skončili lépe (v Číně na 8. místě, v roce 1989 v SRN na 6. místě), není možné hodnotit 11. místo před Francií, Polskem, Velkou Británií a dalšími zeměmi negativně. Skutečnost, že jsme se od roku 1985 vždy zařadili mezi prvních 12 zemí svědčí o dobré práci v československé matematické olympiádě i o pěkné úrovni našeho školství.

Mezinárodní matematická olympiáda je především soutěží jednotlivců. Výsledky našich žáků na 32. MMO ukazuje tabulka na další straně.

Vedoucím československé delegace byl doc. dr. *Leo Boček*, CSc. z MFF UK v Praze, zástupce vedoucího byl doc. dr. *Tomáš Hecht*, CSc. z MFF UK v Bratislavě.

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	5	6	Celkem	Cena
21.–23.	Michal Stehlík, 3. roč. gymnázia, Brno, tř. kpt. Jaroše	7	7	3	7	7	7	38	II.
34.–38.	Michal Konečný, 4. roč. gymnázia, Brno, tř. kpt. Jaroše	7	7	5	7	4	7	37	II.
47.–53.	Michal Kubeček, 3. roč. gymnázium, Praha, Korunní	7	4	3	7	7	7	35	II.
58.–60.	Richard Kollár, 3. roč. gymnázia A. Markuša, Bratislava	7	7	3	7	7	2	33	II.
96.–104.	Štěpán Kasal, 4. roč. gymnázia, Praha, Korunní	0	2	3	7	7	7	26	III.
162.–169.	Viliam Búr, 2. roč. gymnázia A. Markuša, Bratislava	0	3	4	0	7	3	17	
	Celkem	28	30	21	35	39	33	186	

Texty soutěžních úloh

(v závorce je vždy uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Je dán trojúhelník ABC, označme I střed kružnice mu vepsané. Osy vnitřních úhlů trojúhelníku ABC ve vrcholech A, B, C protínají protější stranu po řadě v bodech A', B', C'. Dokažte, že

$$\frac{1}{4} < \frac{|AI| \cdot |BI| \cdot |CI|}{|AA'| \cdot |BB'| \cdot |CC'|} \leqq \frac{8}{27}. \qquad \text{(SSSR)}$$

2. Nechť n je přirozené číslo větší než 6 a $a_1, a_2, \ldots, a_k$ všechna ta přirozená čísla, která jsou menší než n a každé je s číslem n nesoudělné. Je-li

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_k - a_{k-1} > 0,$$

je n prvočíslo nebo mocnina čísla 2 s přirozeným exponentem. Dokažte.

(Rumunsko)

3. Nechť $S = \{1, 2, 3, \ldots, 280\}$. Určete nejmenší přirozené číslo n s touto vlastností: Každá n-prvková podmnožina množiny S obsahuje 5 čísel, které jsou po dvou nesoudělná.

(Čína)

4. G je souvislý graf s k hranami. Dokažte, že je možné hrany očíslovat použitím všech čísel $1, 2, 3, \ldots, k$ tak, že pro každý vrchol grafu G platí: Sbíhají-li se v tomto vrcholu dvě nebo více hran, je největší společný dělitel všech jejich čísel roven 1.

[Každý *graf* G se skládá z množiny bodů, tzv. *vrcholů*, a z množiny *hran*, spojujících určité dvojice různých vrcholů. Přitom je každá dvojice různých vrcholů spojena nejvýše jednou hranou. Graf G se nazývá *souvislý*, jestliže ke každé dvojici (x, y) různých vrcholů existuje posloupnost vrcholů $x = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m = y$ tak, že každá dvojice (v_i, v_{i+1}), $(0 \leqq i < m)$ je spojena hranou.]

(USA)

5. Nechť P je libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC. Dokažte, že aspoň jeden z úhlů PAB, PBC, PCA je menší nebo roven $30°$.

(Francie)

6. Nekonečná posloupnost $x_0, x_1, x_2, \ldots$ reálných čísel se nazývá ohraničená, existuje-li konstanta C tak, že $|x_i| \leqq \leqq C$ pro všechna $i \geqq 0$.

Nechť a je libovolné reálné číslo větší než 1. Sestrojte ohraničenou nekonečnou posloupnost reálných čísel x_0, x_1, x_2, ... tak, aby pro každou dvojici různých, celých a nezáporných čísel i, j platilo

$$|x_i - x_j|\,|i - j|^a \geqq 1.$$

(Nizozemí)

Řešení úloh

1. Označme S obsah trojúhelníku ABC, r poloměr mu vepsané kružnice, a, b, c délky jeho stran a u, v, w příslušné výšky. Pak je

$$\frac{|CI|}{|CC'|} = \frac{w - r}{w} = 1 - \frac{r}{w} = 1 - \frac{rc}{2S}$$

a analogicky pro

$$\frac{|BI|}{|BB'|}, \quad \frac{|AI|}{|AA'|}.$$

Užitím nerovnosti mezi geometrickým a aritmetickým průměrem těchto hodnot dostáváme

$$\frac{|AI| \cdot |BI| \cdot |CI|}{|AA'| \cdot |BB'| \cdot |CC'|} = \left(1 - \frac{rc}{2S}\right)\left(1 - \frac{rb}{2S}\right)\left(1 - \frac{ra}{2S}\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{27}\left(3 - \frac{r(a + b + c)}{2S}\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{27}\left(3 - \frac{2S}{2S}\right)^3 = \frac{8}{27},$$

čímž je dokázána pravá nerovnost. K důkazu levé nerovnosti použijeme ještě tuto úpravu:

$$1-\frac{rc}{2S}=\frac{r(a+b+c)-rc}{2S}=\frac{r(a+b)}{r(a+b+c)}=\frac{a+b}{a+b+c},$$

podobně

$$1-\frac{rb}{2S}=\frac{a+c}{a+b+c},\quad 1-\frac{ra}{2S}=\frac{b+c}{a+b+c}.$$

Máme tedy dokázat, že $4(a+c)(b+c)(a+b)>(a+b+c)^3$. To je však přímým důsledkem nerovností

$$(a+b-c)c^2>0,\quad (b+c-a)a^2>0,$$
$$(c+a-b)b^2>0,\quad 2abc>0,$$

jejich sečtením dostaneme dokazovanou levou nerovnost.

2. Je zřejmě $a_1=1, a_k=n-1$. Rozlišme nyní tři případy:

a) $a_2=2$, potom $a_j=j$ pro $j=1,2,\dots,n-1$. Pak není číslo n dělitelné žádným menším přirozeným číslem, je tedy n prvočíslo.

b) $a_2=3$, potom $a_j=2j-1, j=1,2,\dots,\frac{1}{2}n$. To znamená, že n není dělitelné žádným lichým přirozeným číslem, je tedy n mocninou čísla 2.

c) $a_2>3$, pak jsou čísla 2, 3 s číslem n soudělná, je tedy $n=6m$, m přirozené a větší než 1. Označme $a_2-a_1=$ $=d>2$. Je pak $n-1=a_k=1+(k-1)d$, to znamená, že číslo a_2-1 dělí číslo $n-2$. Číslo a_2 není dělitelné třemi, je tedy $a_2=3l+1$ nebo $3l+2$. V prvním případě dělí číslo $3l$ číslo $n-2$, takže je $n-2$ dělitelné třemi. Avšak číslo n je rovněž dělitelné třemi, což je spor. V druhém případě je $a_1 = 1$, $a_2 = 3l + 2$, takže $a_3 = 6l + 3$, což je opět spor, protože čísla $a_3 = 3(2l + 1)$ a $n = 6m$ mají být nesoudělná.

Pro přirozené číslo n zbývají tedy pouze možnosti uvedené pod body a), b), což jsme měli dokázat.

K důkazu sporu v případě c) jsme potřebovali, aby posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_k$ byla aspoň tříčlenná. Není tomu tak pro $n = 6$, což je však podle předpokladu vyloučené. Předpokládejme, že $n > 6$ a že $a_2 = n - 1$. To znamená, že je n dělitelné každým prvočíslem menším než $n - 1$, nechť jsou to prvočísla $2, 3, 5, \ldots, p$ $(2 < 3 < 5 < \cdots < p)$. Kdyby $n-1$ nebylo prvočíslem, existoval by jeho prvočíselný dělitel r, ten by byl menší než $n-1$ a dělil by tedy i číslo n, což je spor. Musí být tedy $n - 1$ prvočíslo následující po prvočíslu p. Je tedy $n = 2^{r_2} \cdot 3^{r_3} \cdot \ldots \cdot p^{r_p}$, kde $r_i \geqq 1$, takže $q = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p - 1 \leqq 2^{r_2} \cdot 3^{r_3} \cdot \ldots \cdot p^{r_p} - 1 = n - 1$. Číslo q není dělitelné žádným z prvočísel menších než $n - 1$, je ale menší než n, musí být tedy dělitelné prvočíslem $n - 1$, a proto se přímo rovná číslu $n - 1$, tj. $r_i = 1$ pro $i = 2, 3, \ldots, p$, $n = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p$. Číslo $q + 4 = n + 3 = 3(2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p + 1)$ není dělitelné žádným z prvočísel $2, 5, \ldots, p, n-1$, musí být proto mocninou tří, takže $n = 3^l - 3 = 3(3^{l-1} - 1)$, $n - 1 = 3^l - 4$. Je-li l sudé, je $n - 1 = 3^{2s} - 4 = (3^s - 2)(3^s + 2)$. Víme, že $n - 1$ je prvočíslo, proto $s = 1$, $n = 6$, což je ve sporu s předpokladem $n > 6$. Je-li l liché, je $n = 3(3^{2s} - 1) = 3(3^s - 1)(3^s + 1)$. Pak je ale n dělitelné čtyřmi, což je ve sporu s tím, že $n = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p$. Je tedy vždy $k \geqq 3$.

3. Označme A_2 množinu všech sudých čísel množiny S, podobně A_3, A_5 a A_7 množinu všech násobků tří, pěti a sedmi z množiny S. Zřejmě se počet $|A_2|$ všech prvků množiny A_2 rovná 140, $|A_3| = 93$, $|A_5| = 56$, $|A_7| = 40$. Dále je $|A_2 \cap A_3| = 46$, protože $A_2 \cap A_3$ je množina všech těch čísel z S, která jsou dělitelná šesti. Podobně $|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = 4$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = 1$. Podle principu inkluze a exkluze platí pro počet $|A|$ množiny $A = A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7$ vztah

$$|A| = |A_2| + |A_3| + |A_5| + |A_7| - |A_2 \cap A_3| - \cdots + \\ + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| + \cdots - |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7|,$$

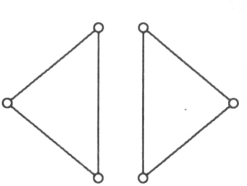
takže $|A| = 216$. Zvolíme-li v A libovolně pět čísel, musejí dvě z nich patřit do jedné z množin A_2, A_3, A_5, A_7, a jsou tedy nutně soudělná. Tím jsme dokázali, že hledané n je větší než 216. Ukážeme, že $n = 217$. Za tím účelem rozdělíme množinu S na dvě disjunktní množiny B, C tak, že do množiny B budou patřit všechna čísla složená, a do množiny C číslo 1 a všechna prvočísla. To znamená, že do B patří všechna čísla z A kromě čísel 2, 3, 5 a 7, dále patří do B tyto násobky jedenácti: 11^2, $11 \cdot 13$, $11 \cdot 17$, $11 \cdot 19$, $11 \cdot 23$, a tyto násobky třinácti: 13^2, $13 \cdot 17$, $13 \cdot 19$. Vidíme, že množina B obsahuje $216 - 4 + 8 = 220$ čísel, do množiny C patří 60 čísel (číslo 1 a 59 prvočísel, jak bychom mohli vyčíst z tabulky prvočísel). Vezmeme nyní libovolnou množinu $T \subset S$, která má 217 prvků. Ukážeme, že množina T obsahuje 5 čísel, jež jsou po dvou nesoudělná. Obsahuje-li množina T pět čísel z C, tvoří těchto pět čísel takovou pětici. V opačném případě obsahuje T nejvýše 4 prvky z C a tedy aspoň 213 prvků z B. Jinak řečeno — množina B obsahuje nejvýše sedm prvků, které nepatří do T. Můžeme také říci, že z každých osmi složených čísel menších než 281 patří aspoň jedno do množiny T. Dál stačí dokonce uvažovat jen 40 čísel z B, která jsou součinem dvou prvočísel, a sdružit je do osmi pětic tak, aby v každé pětici byla čísla po dvou nesoudělná, například takto:

$$
\begin{array}{lllll}
\{2\cdot 47, & 3\cdot 43, & 5\cdot 41, & 7\cdot 37, & 11\cdot 23\}, \\
\{2\cdot 43, & 3\cdot 41, & 5\cdot 37, & 7\cdot 31, & 11\cdot 19\}, \\
\{2\cdot 41, & 3\cdot 37, & 5\cdot 31, & 7\cdot 29, & 11\cdot 17\}, \\
\{2\cdot 37, & 3\cdot 31, & 5\cdot 29, & 7\cdot 23, & 11\cdot 13\}, \\
\{2\cdot 31, & 3\cdot 29, & 5\cdot 23, & 7\cdot 19, & 13\cdot 17\}, \\
\{2\cdot 29, & 3\cdot 23, & 5\cdot 19, & 7\cdot 17, & 13\cdot 19\}, \\
\{2\cdot 23, & 3\cdot 19, & 5\cdot 17, & 7\cdot 13, & 11^2\}, \\
\{2\cdot 19, & 3\cdot 17, & 5\cdot 43, & 7\cdot 11, & 13^2\}.
\end{array}
$$

Kdyby žádná z těchto pětic nebyla obsažena v T, existovalo by v každé pětici číslo nepatřící do T. Dostali bychom tak osm složených čísel z S, která by nepatřila do T. To je však spor s výše odvozenou vlastností množiny T. Výsledek je tedy $n = 217$.

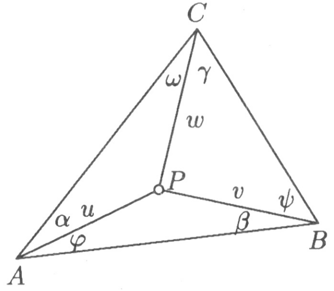
Tato úloha měla na 32. MMO zvláštní osud. Jistě jste si povšimli, že vybrání 40 součinů a jejich rozdělení do osmi pětic je možné provést mnoha způsoby. Všichni soutěžící z družstva KLDR to však měli provedeno stejným způsobem, a to tak, jak bylo uvedeno ve vzorovém řešení předloženém čínskou delegací. Po dlouhém jednání mezinárodní poroty bylo družstvo KLDR diskvalifikováno. Naši žáci vyřešili první část úlohy, tedy dokázali, že $n > 216$. Nikdo z nich však *nedokázal druhou, podstatnější část, že $n = 217$. O to víc je třeba ocenit všechny ty soutěžící z dalších zemí, kteří dosáhli za tuto těžkou úlohu plný počet, tj. 7 bodů.*

4. Vyjdeme z některého vrcholu grafu po některé cestě grafu, přešlé hrany číslujeme čísly 1, 2, ..., a to tak dlouho, až dojdeme do vrcholu, z něhož už nevede žádná neočíslovaná hrana. Pro všechny prošlé vrcholy je podmínka úlohy splněna, neboť z prvního vrcholu vychází hrana číslo 1, z dalších vrcholů vycházejí hrany očíslované dvěma za sebou jdoucími přirozenými čísly, a totéž platí i pro poslední vrchol. (Jde o vrchol, z něhož vychází jen jedna hrana, nebo je to vrchol, kterým jsme již prošli.) Nejsou-li všechny hrany očíslované, existuje cesta v grafu, která tuto hranu obsahuje, přičemž žádná hrana této cesty není ještě očíslovaná a cesta vychází z některého vrcholu, který jsme již prošli. Jednotlivé hrany grafu opět očíslujeme po řadě dalšími, zatím nepoužitými čísly. Všechny vrcholy prošlé při této cestě opět splňují podmínky úlohy. Takto pokračujeme, až vyčerpáme všechny hrany a všechna přirozená čísla l, pro která je $l \leq k$. Poznamenejme, že v případě nesouvislého grafu není možné hrany očíslovat požadovaným způsobem, stačí vzít graf z obr. 61.



Obr. 61

5. Označme φ, ψ, ω úhly PAB, PBC, PCA (obr. 62) a předpokládejme, že každý z nich je větší než $30°$. Dále



Obr. 62

označme α, β, γ velikosti úhlů CAP, ABP, BCP a u, v, w délky úseček PA, PB, PC. Podle sinové věty je

$$\frac{u}{v} = \frac{\sin\beta}{\sin\varphi}, \quad \frac{w}{u} = \frac{\sin\gamma}{\sin\psi}, \quad \frac{w}{u} = \frac{\sin\alpha}{\sin\omega},$$

takže

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \sin\varphi \sin\psi \sin\omega.$$

Kdyby byl některý z úhlů α, β, γ, φ, ψ, ω větší, nebo roven $150°$, byl by jeden z úhlů trojúhelníku ABC větší než $150°$, aspoň jeden ze zbývajících by musel být menší než $30°$, takže by nemohly být úhly φ, ψ, ω větší než $30°$. Jelikož je tedy $\varphi, \psi, \omega \in (30°, 150°)$, je $\sin\varphi \sin\psi \sin\omega > \frac{1}{8}$. Proto je

$$\frac{1}{8} < \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \leqq \left(\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3}\right)^3 \leqq$$

$$\leqq \left(\sin\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right)^3,$$

takže

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} > 30^\circ.$$

Je tedy $\varphi + \psi + \omega > 90^\circ$, $\alpha + \beta + \gamma > 90^\circ$, ale $\alpha + \beta + \gamma + {} + \varphi + \psi + \omega = 180^\circ$, což je spor.

6. Uvedeme nejdříve řešení, které podal náš soutěžící *Štěpán Kasal.* Vychází z nerovnosti

$$\frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \cdots + \frac{1}{n^a} < \frac{a}{a-1},$$

která platí pro každé $a > 1$ a každé přirozené číslo n. K důkazu se použije nevlastního integrálu z funkce $y = x^{-a}$ přes interval $\langle 1, +\infty)$. Uvažujme interval $\mathsf{J} = \langle 0, \frac{2a}{a-1} \rangle$ a definujme $x_0 = 0$. Další členy posloupnosti x_0, x_1, ... definujeme v J rekurentně. Předpokládejme, že jsme již definovali členy x_0, x_1, ..., x_n tak, aby vyhovovaly podmínce úlohy. Pro další člen x_{n+1} má platit

$$|x_{n+1} - x_k| \geqq \frac{1}{(n+1-k)^a} \quad \text{pro} \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

tedy

$$x_{n+1} \notin \left(x_k - \frac{1}{(n+1-k)^a}, x_k + \frac{1}{(n+1-k)^a} \right) = \mathsf{J}_{n,k}.$$

Uvažujme tedy množinu

$$\mathsf{M}_n = \mathsf{J} - \bigcup_{k=0}^{n} \mathsf{J}_{n,k}.$$

Je to množina neprázdná, protože součet délek intervalů $\mathsf{J}_{n,0}$, $\mathsf{J}_{n,1}$, ..., $\mathsf{J}_{n,n}$ je

$$\frac{2}{(n+1)^a} + \frac{2}{n^a} + \cdots + \frac{2}{1^a},$$

a tedy menší než délka intervalu J, takže je M_n neprázdná. Kromě toho jsou intervaly $\mathsf{J}_{n,k}$ otevřené, takže M_n je uzavřená. Položíme-li $x_{n+1} = \min \mathsf{M}_n$, splňuje posloupnost x_0, x_1, x_2, ... podmínky úlohy.

Ve vzorovém řešení nizozemské delegace, která úlohu navrhla, je hledaná posloupnost dána explicitně takto: Každé přirozené číslo i vyjádříme v dvojkové soustavě,

$$i = b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + \cdots + b_k 2^k,$$

pak položme

$$x_i = \frac{2^a - 1}{2^a - 2}\left(b_0 + \frac{b_1}{2^a} + \frac{b_2}{2^{2a}} + \cdots + \frac{b_k}{2^{ka}}\right).$$

Je pak

$$0 \leqq x_i < \frac{2^a - 1}{2^a - 2}\left(1 + \frac{1}{2^a} + \cdots\right) = \frac{2^a}{2^a - 2},$$

takže x_i tvoří posloupnost omezenou. Podobně, i když trochu složitěji se dokáže, že pro $i \neq j$ je

$$|x_i - x_j| \geqq \frac{1}{|i-j|^a}.$$