40. ročník matematické olympiády na středních školách

Korespondenční seminář ÚV MO 1990/91

In: Leo Boček (editor); Jiří Binder (editor); Karel Horák (editor); Václav Sedláček (editor); Pavel Töpfer (editor): 40. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1990/1991. 32. mezinárodní matematická olympiáda. 3. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1993. pp. 130–204.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404032

Korespondenční seminář ÚV MO 1990/91

Korespondenční seminář je jednou z forem péče o talentované žáky. Vznikl ve 24. ročníku MO proto, aby bylo možno věnovat individuální péči i těm žákům, kteří neměli možnost navštěvovat speciální školy a pracovat v tamních seminářích. Nyní, kdy existují i krajské korespondenční semináře a kdy speciální školy s třídami zaměřenými na matematiku najdeme v každém kraji, je cílem tohoto semináře zlepšit individuální přípravu všech studentů, kteří prokázali své schopnosti a matematický talent v předchozích ročnících matematické olympiády. Korespondenční seminář tak nadále zůstává důležitou součástí přípravy na mezinárodní matematickou olympiádu.

K účasti v korespondenčním semináři jsme pozvali všechny špičkové řešitele kategorie A spolu s těmi studenty, kteří nějak vynikli v krajských kolech kategorií B a C předchozího ročníku MO. V průběhu 40. ročníku MO jim bylo postupně zasláno 5 sérií poměrně náročných úloh, jejichž texty najdete v úlohové části této ročenky (tentokrát poprvé s řešeními). Došlá řešení pak byla opravena, ohodnocena a s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům semináře. Nejlepšími v celkovém hodnocení byli:

1. *Vladimír Glasnák*, 3. ročník G, V. Okružná, Žilina
2. *Michal Konečný*, 4. ročník G, kpt. Jaroše, Brno
3. *Pavel Růžička*, 4. ročník G, kpt. Jaroše, Brno
4. *Richard K. Kollár*, 4. ročník GAM, Bratislava
5. *Josef Menšík*, 4. ročník G, kpt. Jaroše, Brno

6.–7. *Slavomír Hrinko*, 4. roč. G, Konštantínova, Prešov

6.–7. *Štěpán Kasal*, 3. ročník G, Korunní, Praha

8. *Aleš Kuběna*, 4. ročník G M. Koperníka, Bílovec
9. *Zdeněk Pezlar*, 4. ročník G, Plzeň

Korespondenční seminář je řízen tajemníkem ÚV MO RNDr. *Karlem Horákem*, CSc., který se staral o výběr úloh a prováděl i redakci komentářů. Opravu pak zajišťovalo několik pracovníků MÚ ČSAV a několik studentů a aspirantů MFF UK Praha (všichni jsou bývalí olympionici).

Úlohy korespondenčního semináře

1.1 Je dán kvadratický trojčlen $f(x) = x^2 + 2bx + c$ s celočíselnými koeficienty b a c. Jestliže je $f(n) \geqq 0$ pro všechna celá čísla n, pak je $f(x) \geqq 0$ i pro všechna racionální čísla x. Dokažte.

1.2 Je dána posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, jež splňuje rekurentní vztah

$$a_{n+2} + a_{n-1} = 2(a_{n+1} + a_n), \qquad n \geqq 1.$$

Je-li $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, pak je každý člen uvedené posloupnosti čtvercem celého čísla. Dokažte.

1.3 Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž je nerovnost

$$\left|\sqrt{1 - x^2} - ax - b\right| \leqq \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

splněna pro všechna $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

1.4 Je možno obarvit políčka tabulky $1\,990 \times 1\,990$ černou a bílou barvou tak, aby políčka souměrně sdružená podle středu tabulky měla opačnou barvu a v libovolném sloupci a v libovolném řádku bylo stejně černých i bílých polí?

1.5 Uvnitř strany AB konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ zvolme bod E a průsečík úhlopříček čtyřúhelníku $AECD$ označme F. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABC, CDF a BDE se protínají v jednom bodě.

1.6 Uvažujme kvadratický trojčlen $f(x) = ax^2 + bx + c$, který má kladné koeficienty splňující rovnost $a + b + c = 1$. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jež splňují rovnost $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, platí nerovnost

$$f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \ldots \cdot f(x_n) \geqq 1.$$

1.7 Uvažujme „drátěnou“ krychli o hraně 100, jež je jednotlivými dráty rozdělena na 1 000 000 jednotkových krychliček. Rozhodněte, zda lze celou drátěnou krychli rozložit na jednotlivé trojice navzájem kolmých jednotkových hran se společným vrcholem, přičemž žádné dvě trojice nemají společnou hranu.

2.1 Je dán rovinný úhel s vrcholem A, do něhož jsou vepsány dvě kružnice, jež se protínají v bodě B. Označme C a D jejich body dotyku s jedním ramenem daného úhlu. Dokažte, že přímka AB se dotýká kružnice opsané trojúhelníku BCD.

2.2 Pro která přirozená čísla n je číslo

$$3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6^n$$

složené?

2.3 Označme d nejmenší vzdálenost dvou mimoběžných hran daného čtyřstěnu a h jeho nejmenší výšku. Dokažte, že $2d > h$.

2.4 Všechny strany a úhlopříčky konvexního n-úhelníku se dají obarvit k barvami tak, že neexistuje uzavřená lomená čára spojující vrcholy uvažovaného mnohoúhelníku, jež by byla jednobarevná. Zjistěte, pro jaké největší n je taková situace možná.

2.5 V rovině je dán bod A_0 a n vektorů $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_n$, jež mají nulový součet. Každé pořadí $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ čísel 1, 2, ..., n určuje v dané rovině body A_1, A_2, ..., $A_n = A_0$ tak, že bude $\boldsymbol{a}_{i_1} = \boldsymbol{A_0A_1}$, $\boldsymbol{a}_{i_2} = \boldsymbol{A_1A_2}$, ..., $\boldsymbol{a}_{i_n} = \boldsymbol{A_{n-1}A_n}$. Dokažte, že existuje takové pořadí, pro které budou všechny body A_1, A_2, ..., A_{n-1} ležet uvnitř nebo na ramenech úhlu velikosti $60°$ s vrcholem v bodě A_0.

2.6 Předpokládejme, že x_1, x_2, ..., x_n jsou kladná reálná čísla taková, že $x_1 < x_2$ a x_3, x_4, x_5 jsou vesměs větší než x_2. Dokažte, že pro $\alpha > 0$ platí

$$\frac{1}{(x_1+x_3)^\alpha} + \frac{1}{(x_2+x_4)^\alpha} + \frac{1}{(x_2+x_5)^\alpha} <$$
$$< \frac{1}{(x_1+x_2)^\alpha} + \frac{1}{(x_2+x_3)^\alpha} + \frac{1}{(x_4+x_5)^\alpha}.$$

2.7 V trojúhelníku o obsahu 1 je dáno pět bodů. Dokažte, že mezi nimi existují tři, které určují trojúhelník s obsahem nejvýše $\frac{1}{4}$.

3.1 Číslo 9 se dá napsat jako součet dvou po sobě jdoucích čísel, $9 = 4 + 5$; 9 se dá navíc napsat jako součet (několika) po sobě jdoucích čísel právě dvěma způsoby: $9 = 4+5 = 2+ + 3 + 4$. Zjistěte, zda existuje číslo, které se dá napsat jako součet 1 990 po sobě jdoucích kladných čísel a zároveň se dá napsat jako součet (aspoň dvou) po sobě jdoucích čísel právě 1 990 způsoby.

3.2 Označme T, V, H po řadě těžiště, střed kružnice vepsané a průsečík výšek daného trojúhelníku ABC, jehož žádné dvě strany nejsou shodné. Dokažte, že úhel TVH je tupý.

3.3 Pro dané přirozené číslo k označme $f_1(k)$ součet druhých mocnin číslic v desítkovém rozvoji čísla k a pro $n \geqq 1$ položme

$$f_{n+1}(k) = f_1\left(f_n(k)\right).$$

Najděte hodnotu $f_{1\,991}\left(2^{1\,990}\right)$.

3.4 V trojúhelníku ABC označme V střed kružnice vepsané, B_1 a C_1 středy stran AC a AB a dále označme B_2 průsečík přímek C_1V, AC a C_2 průsečík přímek B_1V, AB. Jak velký je úhel CAB, jsou-li obsahy trojúhelníků AB_2C_2 a ABC shodné?

3.5 V rovině s kartézskou soustavou souřadnic je dán pravoúhelník s vrcholy v mřížových bodech $(0, 0)$, $(m, 0)$, $(0, n)$, (m, n), kde m i n jsou lichá čísla. Pravoúhelník je rozložen na trojúhelníky tak, že

a) každý trojúhelník rozkladu má aspoň jednu „dobrou" stranu takovou, že výška trojúhelníku na tuto stranu má velikost 1; přitom za dobrou stranu považujeme stranu ležící na přímce $x = j$ nebo $y = k$, kde j či k je celé číslo;

b) každá „špatná“ strana (tj. strana trojúhelníku uvažovaného rozkladu, jež není „dobrá“) je společnou stranou dvou trojúhelníků rozkladu.

Dokažte, že v takovém rozkladu existují aspoň dva trojúhelníky, z nichž každý má dvě dobré strany.

3.6 Uvažujme bod P uvnitř pravidelného čtyřstěnu. Čtyři roviny procházející bodem P rovnoběžně se stěnami daného čtyřstěnu ho rozdělí na 14 částí. Označme $v(P)$ celkový objem těch částí, jež nejsou ani čtyřstěnem, ani rovnoběžnostěnem (tj. ty části, jež obsahují hranu, ale ne vrchol daného čtyřstěnu). Určete hodnoty, kterých může funkce v nabývat.

3.7 Dokažte, že každé přirozené číslo $k > 1$ má kladný celočíselný násobek menší než k^4, který se dá napsat v desítkové soustavě pomocí nejvýše čtyř různých číslic.

4.1 V rovině je dán konvexní mnohoúhelník K a kartézská soustava souřadnic tak, že K kromě počátku neobsahuje žádný mřížový bod (tj. bod s celočíselnými souřadnicemi). Přitom pro obsah mnohoúhelníku K v jednotlivých kvadrantech Q_i, $1 \leqq i \leqq 4$, určených osami, platí

$$S(\mathsf{K} \cap \mathsf{Q}_i) = \frac{1}{4} S(\mathsf{K}).$$

Dokažte, že potom $S(\mathsf{K}) < 4$.

4.2 V rovině je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Označme A_1 střed kružnice opsané trojúhelníku BCD, B_1 střed kružnice opsané trojúhelníku ACD, C_1 střed kružnice opsané trojúhelníku ABD a B_1 střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Dokažte, že pak platí:

(a) Buď jsou všechny body A_1, B_1, C_1, D_1 totožné, anebo jsou vesměs různé a pak leží body A_1, C_1 v opačných polorovinách určených přímkou B_1D_1 a podobně i body B_1, D_1 leží v opačných polorovinách určených přímkou A_1C_1. (Odtud plyne konvexita čtyřúhelníku $A_1B_1C_1D_1$.)

(b) Označme analogicky A_2, B_2, C_2, D_2 středy kružnic opsaných trojúhelníkům $B_1C_1D_1$, $A_1C_1D_1$, $A_1B_1D_1$ a $A_1B_1C_1$. Potom jsou čtyřúhelníky $A_2B_2C_2D_2$ a $ABCD$ podobné.

4.3 Dokažte, že nerovnost

$$\frac{1-s^a}{1-s} \leqq \frac{(1+s)^a}{1+s}$$

platí pro každé kladné $s \neq 1$ a libovolné racionální číslo a, $0 < a \leqq 1$.

4.4 Kolmý kužel je rozdělen rovinou na dvě části. Tato rovina se dotýká kružnice na obvodu základny kužele a prochází středem jeho výšky. Určete poměr objemu menší části kužele určené danou rovinou a objemu celého kužele.

4.5 pqr jednotkových krychliček je navlečeno na nit (dírkami podél tělesové úhlopříčky) tak, že dvě sousední se vždy dotýkají alespoň vrcholy. Zjistěte, pro jaká přirozená čísla p, q, r je možno z krychliček sestavit kvádr o rozměrech p, q, r za předpokladu, že obě koncové krychličky se dotýkají, resp. za předpokladu, že nemají žádný společný bod.

4.6 Jestliže n je složené přirozené číslo a p jeho vlastní dělitel, určete dvojkový zápis nejmenšího přirozeného čísla N, pro něž je

$$\frac{(1+2^p+2^{n-p})N-1}{2^n}$$

celé číslo.

4.7 Předpokládejme, že p je kubický mnohočlen s racionálními koeficienty, a označme $q_1, q_2, q_3, \ldots$ posloupnost racionálních čísel, v níž $q_n = p(q_{n+1})$ pro každé přirozené $n \geqq 1$. Dokažte, že existuje $k \geqq 1$ takové, že $q_{n+k} = q_n$ pro každé $n \geqq 1$.

5.1 Na kružnici jsou dány čtyři body A, B, C, D takové, že tětivy AB, CD jsou různoběžné. Jestliže K a H jsou body téže roviny, pro něž jsou úhly KAB, KCD, HBA a HDC všechny pravé, pak přímka KH prochází středem dané kružnice a zároveň i průsečíkem přímek AD, BC (pokud existuje). Dokažte.

5.2 V rovině jsou dány dvě kružnice, jež se vně dotýkají a mají poloměry r a R. Uvažujme všechny možné lichoběžníky $ABCD$, jež jsou oběma kružnicím opsány (tj. každá z daných kružnic se dotýká obou ramen a jedné ze základen uvažovaného lichoběžníku). Najděte nejmenší možnou délku ramene takového lichoběžníku.

5.3 Určete nejmenší číslo tvaru $|36^k - 5^l|$ a nejmenší číslo tvaru $|53^k - 37^l|$, kde k a l jsou přirozená čísla.

5.4 V rovině je dáno n jednotkových vektorů, jejichž součtem je nulový vektor. Dokažte, že vektory je možno uspořádat tak, aby pro každé k, $1 \leqq k \leqq n$, byla velikost součtu prvních k vektorů nejvýše rovna 3. Pokuste se uvedený odhad zlepšit, případně najít analogický odhad za předpokladu, že každý z daných vektorů má velikost nejvýše rovnu 1 (a dohromady dávají nulový součet).

5.5 V rovině je dán čtverec $ABCD$ a na jeho stranách AB, BC jsou dány body P, Q, přičemž $|BP| = |BQ|$. Označme H patu kolmice spuštěné z bodu B na úsečku PC. Dokažte, že úhel DHQ je pravý.

5.6 Je-li délka každé ze stran konvexního šestiúhelníku větší než 1, musí být některá z jeho úhlopříček větší než 2? A jsou-li úhlopříčky AD, BE a CF konvexního šestiúhelníku $ABCDEF$ větší než 2, je délka aspoň jedné jeho strany větší než 1?

5.7 Na kružnici je zapsáno n ($n \geqq 3$) čísel rovných $+1$ nebo -1. Jaký je nejmenší počet dotazů, pomocí nichž lze zjistit součin všech n čísel, jestliže jednotlivá čísla jsou zakryta a pomocí jedné otázky je možno zjistit, jaký je

a) součin čísel na libovolných třech místech;
b) součin čísel na třech po sobě jdoucích místech?

Řešení úloh korespondenčního semináře

1.1 Stačí dokázat, že (globální) minimum funkce f je v bodě $-b$. To vyplývá z rozkladu

$$f(x) = x^2 + 2bx + c = (x + b)^2 + c - b^2,$$

kde $c - b^2$ je konstanta a $(x + b)^2 \geqq 0$ s rovností právě pro $x = -b$.

Protože $-b$ je celé číslo, musí být $f(-b) \geqq 0$. Je-li (globální) minimum nezáporné, jsou i všechny ostatní funkční hodnoty nezáporné na celém definičním oboru, tedy pro všechna reálná čísla včetně racionálních.

1.2 Asi nejjednodušší je ukázat, že $a_n = f_n^2$, kde (f_n) je známá Fibonacciova posloupnost, která je definována vztahy

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,$$

a všechny její členy jsou tudíž celá čísla. Důkaz provedeme indukcí. Pro $n = 0, 1, 2$ vztah $a_n = f_n^2$ platí. Předpokládejme, že platí pro každé $n \leqq k$ $(k \geqq 2)$. Potom

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2(a_k + a_{k-1}) - a_{k-2} = \\ &= 2f_k^2 + 2f_{k-1}^2 - f_{k-2}^2 = \\ &= f_k^2 + f_{k-1}^2 + 2f_k f_{k-1} + f_k^2 + f_{k-1}^2 - \\ &\quad - 2f_k f_{k-1} - f_{k-2}^2 = \\ &= (f_k + f_{k-1})^2 + (f_k - f_{k-1})^2 - f_{k-2}^2 = \\ &= f_{k+1}^2 + f_{k-2}^2 - f_{k-2}^2 = \\ &= f_{k+1}^2. \end{aligned}$$

Dokazovaný vztah platí tedy i pro $n = k + 1$.

1.3 Budeme využívat známé nerovnosti

$$|a + b| \leqq |a| + |b|, \quad a \leqq |a|, \quad -a \leqq |a|. \tag{1}$$

Označme $f(x) = \sqrt{1 - x^2} - ax - b$ a předpokládejme, že pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platí

$$\left|\sqrt{1 - x^2} - ax - b\right| \leqq \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1). \tag{2}$$

Pro krajní hodnoty $x = 0$ a $x = 1$ pak dostáváme

$$|1 - b| \leqq \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1), \tag{3}$$

$$|a + b| \leqq \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1). \tag{4}$$

Jejich sečtením vyjde

$$|a + 1| \leqq |1 - b| + |a + b| \leqq \sqrt{2} - 1 < 1,$$

odkud $a < 0$.

Hledejme extrémy funkce f. Derivováním máme

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} - a = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} - a.$$

Položíme-li $f'(x) = 0$, dostaneme

$$|x| = \frac{|a|}{\sqrt{1 + a^2}},$$

což nás zajímá pro $x > 0$ a $a < 0$. Z (2) po dosazení x tak máme

$$\left|\sqrt{1 + a^2} - b\right| \leqq \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1). \tag{5}$$

Sečtením (5) a (3) potom vyjde

$$\left|\sqrt{1 + a^2} - 1\right| \leqq \left|\sqrt{1 + a^2} - b\right| + |b - 1| \leqq \sqrt{2} - 1,$$

odkud plyne $\sqrt{1 + a^2} \leqq \sqrt{2}$, tedy $|a| \leqq 1$.

Podobně sečtením (4) a (5) dostaneme

$$\left|\sqrt{1 + a^2} + a\right| \leqq \sqrt{2} - 1.$$

Protože $\sqrt{1+a^2} > |a|$, je vnitřek absolutní hodnoty kladný, tedy

$$\sqrt{1+a^2} \leqq \sqrt{2} - 1 - a,$$

po umocnění

$$1 + a^2 \leqq 2 + 1 + a^2 - 2\sqrt{2} - 2a\sqrt{2} + 2a,$$

tedy $a \leqq -1$. To spolu s předcházející podmínkou $|a| \leqq 1$ dává $a = -1$.

Dosazením do (5) dostaneme $\left|\sqrt{2} - b\right| \leqq \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$, což znamená, že

$$\sqrt{2} - b \leqq \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}, \quad \text{teda} \quad \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + 1\right) \leqq b.$$

Podobně ze (4) plyne $b - 1 \leqq \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$, tedy

$$b \leqq \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + 1\right).$$

Celkem tak máme $b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + 1\right)$.

Na závěr se ještě přesvědčíme, že pro $a = -1$, $b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + 1\right)$ a pro každé $x \in \langle 0, 1\rangle$ platí (2) (to není vůbec samozřejmé).

Protože

$$0 \leqq \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1\right),$$

$$1 - x^2 \leqq x^2 - 2\sqrt{2}x + 2,$$

je

$$\sqrt{1 - x^2} \leqq \sqrt{2} - x,$$

$$\sqrt{1 - x^2} + x - 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right) \leqq \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right),$$

tedy

$$\sqrt{1-x^2} - ax - b \leqq \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

pro $a = -1$, $b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$. Pro $x \in \langle 0, 1\rangle$ dále platí

$$1 - x \leqq \sqrt{1-x^2},$$

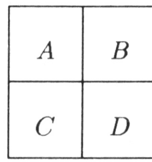
$$-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right) \leqq \sqrt{1-x^2} + x - 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right),$$

tedy

$$-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right) \leqq \sqrt{1-x^2} - ax - b$$

pro $a = -1$, $b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$. Tím je platnost (2) ověřena.

1.4 1. řešení. Rozdělme tabulku na čtyři čtverce 995×995, které označíme A, B, C, D (obr. 26). Pro $X \in \{A, B, C, D\}$ označme b_X (resp. c_X) počet bílých (resp. černých) čtverečků ve čtverci X. Vzhledem k požadované středové antisymetrii je $b_A = c_D$.



Obr. 26

Má-li každý řádek či sloupec obsahovat stejně bílých i černých čtverečků, musí být

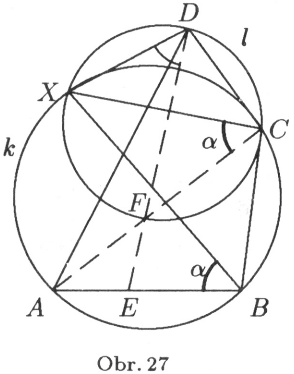
$$b_A + b_B = 995^2 \quad \text{a} \quad b_B + b_D = 995^2.$$

Je tedy $b_A = 995^2 - b_B = b_D$ a $b_A = c_D$. Odtud plyne, že $995^2 = c_D + b_D = 2b_A$, což je spor, neboť číslo 995^2 je liché. Obarvení požadovaných vlastností tedy neexistuje.

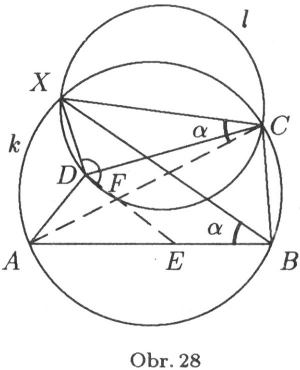
2. řešení. Zachovejme rozdělení na čtverce A, B, C, D. Protože $b_A + c_A = 995^2$ je liché, je $b_A \neq c_A$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $b_A > c_A$, takže $b_D < c_D$. Z rovnosti $b_A + b_B = c_A + c_B$ plyne nerovnost $b_B < c_B$. Pak ale $b_B + b_D < c_B + c_D$, což je spor.

3. řešení. Políčko a_{ij} v tabulce nazveme *vodorovné*, má-li stejnou barvu jako pole $a_{i,1\,991-j}$, a nazveme je *svislé*, pokud má stejnou barvu jako pole $a_{1\,991-i,j}$. Z vlastnosti tabulky plyne, že každé políčko je buď vodorovné, nebo svislé (ale nikdy obojí najednou — dokažte!). Každý řádek obsahuje sudý počet vodorovných bílých, každý sloupec obsahuje sudý počet svislých bílých políček. Celkem tedy je v tabulce $2p \cdot 1\,990$ vodorovných bílých a $2q \cdot 1\,990$ svislých bílých polí. Celkový počet bílých políček $\frac{1}{2}1\,990^2$ by tak byl dělitelný čtyřmi, což není možné.

1.5 (podle P. Vrbackého). Označme k kružnici opsanou trojúhelníku ABC, l kružnici opsanou trojúhelníku DFC a m kružnici opsanou trojúhelníku EBD. Prozatím předpokládejme, že existuje průsečík $X \neq C$ kružnic k a l, který leží v polorovině CDF (obr. 27).



Obr. 27

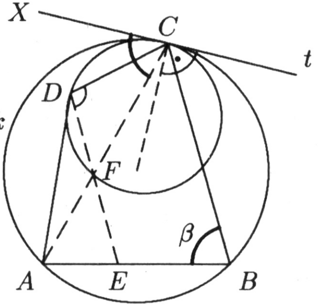


Obr. 28

Označme $\alpha = |\sphericalangle ABX|$. Pak $|\sphericalangle ACX| = |\sphericalangle FCX| = \alpha$ (čtyřúhelník $ABCX$ je tětivový) a $|\sphericalangle FDX| = |\sphericalangle FCX| =$

$= \alpha$ ($FCDX$ je tětivový). To však znamená, že čtyřúhelník $EBDX$ je tětivový, tj. X leží též na kružnici m. (Tento důkaz platí nezávisle na pořadí bodů F a X na kružnici l — je jasné proč?!)

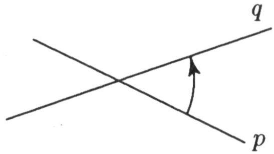
Předpokládejme teď, že průsečík X leží v polorovině opačné k CDF (obr. 28). Označíme-li $\alpha = |\sphericalangle ABX|$, je opět $|\sphericalangle ACX| = |\sphericalangle FCX| = \alpha$, a proto $|\sphericalangle FDX| = \pi - |\sphericalangle FCX| = \pi - \alpha$ ($FCDX$ je tětivový). Odtud dostaneme, že $EBDX$ je tětivový, tedy bod X leží i na kružnici m.



Obr. 29

Pokud $X = D$, je tvrzení triviální. Vynechali jsme případ, kdy k a l mají jediný společný bod C (obr. 29). Nechť $\beta = |\sphericalangle ABC|$. Je-li t společná tečna kružnic k a l, zvolme na ní bod P v polorovině ACD. Potom $|\sphericalangle ACP| = \beta$ (tzv. úsekový úhel odpovídající obvodovému úhlu β na kružnici k). Z toho pro kružnici l plyne, že $|\sphericalangle FDC| = \pi - \alpha$, a proto čtyřúhelník $EBCD$ je tětivový, tj. bod C leží na m.

Poznámky. Diskusi lze podstatně zjednodušit, budeme-li používat *orientovaný úhel* dvou přímek: orientovaným úhlem (p, q) dvou různoběžek p, q (v tomto pořadí!) rozumíme ten úhel, o který se musí přímka p otočit v kladném směru kolem společného průsečíku, aby splynula s přímkou q (obr. 30). Snadno potom zjistíme, že platí následující poněkud kompaktnější verze věty o obvodových úhlech: *Bod $X \notin \{A, B, C\}$ leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC, právě když $(AX, XC) = (AB, BC)$.*



Obr. 30

V dané situaci můžeme předpokládat, že druhý průsečík $X \neq C$ kružnic k a l je různý od bodů B, D (jinak $k = l$ a tvrzení je triviální). Protože body A, B, C, X leží na kružnici k, je $(AB, BX) = (AC, CX) = (FC, CX)$, a podobně pro body C, F, X, D na kružnici l dostaneme $(FC, CX) = (FD, DX) = (ED, DX)$. Je tedy $(EB, BX) = (AB, BX) = (ED, DX)$, což znamená, že body B, D, E, X leží na kružnici.

1.6 Označme $G_n(u_1, \ldots, u_n)$ geometrický průměr čísel $u_1, \ldots, u_n$. Pak platí

$$G_n(u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) \geqq G_n(u_1, \ldots, u_n) + G_n(v_1, \ldots, v_n)$$

(k důkazu tohoto tvrzení stačí sečíst nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro n-tice

$\left(\frac{u_1}{u_1+v_1}, \dots, \frac{u_n}{u_n+v_n}\right)$ a $\left(\frac{v_1}{u_1+v_1}, \dots, \frac{v_n}{u_n+v_n}\right)$), takže můžeme psát

$$\begin{aligned}
G_n(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \\
&= G_n(ax_1^2 + bx_1 + c, \dots, ax_n^2 + bx_n + c) \geqq \\
&\geqq G_n(ax_1^2, \dots, ax_n^2) + G_n(bx_1, \dots, bx_n) + \\
&\quad + G_n(c, \dots, c) = \\
&\quad = a\left(G_n(x_1, \dots, x_n)\right)^2 + bG_n(x_1, \dots, x_n) + c = \\
&\quad = a + b + c = 1,
\end{aligned}$$

neboť $G_n(x_1, \dots, x_n) = 1$. Umocněním dostaneme požadované tvrzení.

Jiný postup. Levou stranu nerovnosti, tj. součin

$$(ax_1^2 + bx_1 + c) \dots (ax_n^2 + bx_n + c),$$

roznásobíme a sloučíme členy, v nichž vystupují a, b, c se stejnou mocninou. Pravou stranu požadované nerovnosti lze napsat ve tvaru $1 = (a + b + c)^n$, což také roznásobíme. Pomocí nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem ukážeme, že koeficient u členu $a^i b^j c^{n-i-j}$ na levé straně nerovnosti je nejméně roven odpovídajícímu koeficientu na straně pravé. Nedostatkem tohoto postupu je náročnost zápisu řešení. (Z toho důvodu uvádíme jen hlavní myšlenku důkazu.)

Tvrzení lze také dokázat matematickou indukcí.

Pro $n = 1$ je tvrzení triviální. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = k$, a dokažme je pro $n = k + 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x_1 \leqq x_2 \leqq \dots \leqq x_{k+1}$.

Protože součin čísel $x_1, \ldots, x_{k+1}$ je roven jedné, je zřejmě $x_1 \leqq 1$, $x_{k+1} \geqq 1$. Ukažme nyní, že $f(x_1)f(x_{k+1}) \geqq f(x_1 x_{k+1})$. Jednoduchou úpravou máme

$$\begin{aligned}
&f(x_1)f(x_{k+1}) - f(x_1 x_{k+1}) = \\
&= (ax_1^2 + bx_1 + c)(ax_{k+1}^2 + bx_{k+1} + c) - \\
&\quad - (a+b+c)(ax_1^2 x_{k+1}^2 + bx_1 x_{k+1} + c) = \\
&= abx_1 x_{k+1}(1 - x_1)(x_{k+1} - 1) + ac(1 - x_1^2)(x_{k+1}^2 - 1) + \\
&\quad + bc(1 - x_1)(x_{k+1} - 1) \geqq 0,
\end{aligned}$$

takže

$$f(x_1)\ldots f(x_k)f(x_{k+1}) \geqq f(x_1 x_{k+1})f(x_2)\ldots f(x_k) \geqq 1$$

dle indukčního předpokladu.

Na závěr uveďme ještě náznak řešení (J. Kolář, J. Menšík), které využívá těch vlastností funkce f, které jsou pro platnost nerovnosti podstatné (nerovnost platí pro mnohem obecnější funkce). Z Cauchyovy nerovnosti pro kladná čísla x_1, x_2 dostaneme

$$\begin{aligned}
&\left((\sqrt{a}x_1)^2 + (\sqrt{b}\sqrt{x_1})^2 + (\sqrt{c})^2\right) \cdot \\
&\quad \cdot \left((\sqrt{a}x_2)^2 + (\sqrt{b}\sqrt{x_2})^2 + (\sqrt{c})^2\right) \geqq \\
&\qquad \geqq (ax_1 x_2 + b\sqrt{x_1 x_2} + c)^2,
\end{aligned}$$

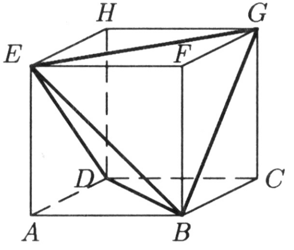
neboli

$$f(x_1)f(x_2) \geqq \left(f\left(\sqrt{x_1 x_2}\right)\right)^2.$$

Odtud snadno dostaneme (přidáme-li k číslům x_i několik jedniček, můžeme předpokládat, že n je tvaru $n = 2^k$ pro $k \geqq 2$)

$$
\begin{aligned}
f(x_1)\dots f(x_n) &\geqq \\
&\geqq \left(f(\sqrt{x_1x_2})\right)^2 \dots \left(f(\sqrt{x_{n-1}x_n})\right)^2 \geqq \\
&\geqq \left(f(\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4})\right)^4 \dots \\
&\quad \dots \left(f(\sqrt[4]{x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n})\right)^4 \geqq \dots \geqq \\
&\geqq \left(f(\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n})\right)^n = \left(f(1)\right)^n = 1.
\end{aligned}
$$

1.7 (podle Š. Kasala). Krychli označíme $ABCDEFGH$ (obr. 31). Odřízneme z ní čtyři rohy, a to tak, že roviny řezu

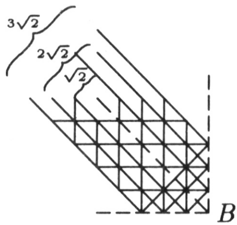


Obr. 31

jsou BDE, BDG, EGB, EGD. Každý odříznutý čtyřstěn lze vyplnit požadovanými trojicemi — důkaz je zřejmý z náčrtků na obr. 32. Uprostřed zbývá čtyřstěn $BDEG$; dokažme, že jej lze vyplnit „hvězdičkami“ ✶ sestavenými ze dvou trojic (se společným vrcholem). Všimněme si, že jeho vodorovné řezy (tj. ty rovnoběžné s podstavou $ABCD$)

vypadají postupně tak jako na obr. 33. V každé této „vrstvě“ lze hrany jednotkových krychliček zjevně rozdělit do „křížků“ $+$. Doplníme-li „křížky“ na „hvězdičky“, lze nahlédnout (představíme-li si dvě vrstvy nad sebou), že tím vyčerpáme přesně všechny hrany ležící ve čtyřstěnu $BDEG$. Tím je důkaz hotov — krychli jsme rozložili požadovaným způsobem.

Obr. 32



Obr. 33

2. řešení (dle M. Konečného). Danou krychli umístíme do kartézské souřadné soustavy tak, aby počátek byl v některém vrcholu krychle a souřadnicové osy obsahovaly některé tři hrany krychle. Body (a, b, c), kde $a, b, c \in \{0, 1, \ldots, 100\}$, označíme $K_{a,b,c}$ a nazveme je *uzly*. Množiny uzlů tvaru

$$D_{x,y} = \{K_{x,y,z} \colon z \in \{0, 1, \ldots, 100\}\} \tag{1}$$

nazveme *řadami ve směru* z; podobně definujeme řady ve směru x a y. Konečně označme $\mathsf{G} = \{K_{a,b,c} \colon a + b + c$ je dělitelné $101\}$.

Všimněme si, že v každé řadě leží právě jeden uzel z množiny G. Skutečně, např. v řadě (1) probíhá součet $x + y + z$ množinu $\{x+y, x+y+1, \ldots, x+y+100\}$, což je 101 po sobě jdoucích přirozených čísel; je tedy mezi nimi právě jedno, které je dělitelné 101.

Uvažujme nyní uzel $K \notin \mathsf{G}$. V řadě ve směru z, která bod K obsahuje, leží podle posledního odstavce právě jeden uzel patřící do G — označme ho K'; zřejmě $K' \neq K$. Přiřaďme nyní bodu K jednotkovou hranu ve směru osy z, která z něj vychází, a to ve směru ke K'. Podobně přiřadíme hrany ve směrech os y a x. Tím jsme každému uzlu $K \notin \mathsf{G}$ přiřadili trojici navzájem kolmých jednotkových hran se společným vrcholem K. Dokážeme, že tyto trojice tvoří kýžený rozklad dané drátěné krychle. Předně je jasné, že každá hrana je použita nejvýše jednou: kdyby jednotková hrana AB byla přiřazena uzlu A i uzlu B, musel by někde v jejím vnitřku ležet bod z G, což není možné. Navíc není žádná hrana AB vynechána: právě v jednom směru AB nebo BA najdeme uzel $L \in \mathsf{G}$; je-li nyní např. A dále od L než B (případně může být $L = B$), pak byla hrana přiřazena bodu A. Sestrojený rozklad krychle na trojice jednotkových hran tedy splňuje podmínky ze zadání.

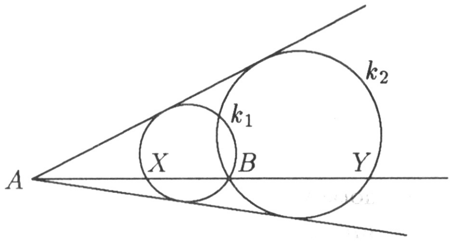
Na závěr poznamenejme, že oba způsoby lze použít i na krychli $n \times n \times n$; druhý z nich funguje dokonce i pro vícerozměrné krychle.

2.1 (podle J. Koláře). Využijeme toho, že kružnice k_1 a k_2 (obr. 34) jsou stejnolehlé podle středu A. Můžeme tedy napsat

$$\frac{|AX|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AY|},$$

takže

$$|AB|^2 = |AX||AY|. \tag{1}$$



Obr. 34

Pro mocnosti bodu A ke kružnicím k_1 a k_2 platí

$$|AX||AB| = |AC|^2,$$
$$|AB||AY| = |AD|^2,$$

vynásobením dostaneme

$$|AX||AY||AB|^2 = |AC|^2|AD|^2,$$

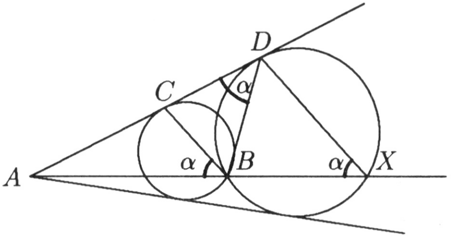
dosazením z (1) po odmocnění vyjde

$$|AB|^2 = |AC||AD|. \tag{2}$$

Body A, C, D jsou kolineární a A leží vně kružnice l. Protože mocnost bodu A ke kružnici l je (podle (2)) rovna $|AB|^2$, musí být AB tečna kružnice l. (Kdyby nebyla, existoval by druhý průsečík X přímky AB a kružnice l, tedy $|AX| \neq |AB|$, a pomocí mocnosti dostaneme $|AC||AD| = |AB||AX| \neq |AB|^2 = |AC||AD|$, což je spor.)

Kružnice l je opsaná trojúhelníku BCD a přímka AB je tedy její tečnou. Protože $|AB| = |AB'|$, platí vztah (2), a tedy i dokazované tvrzení platí i pro body B', C, D a díky symetrii i pro zbylé kombinace C', D', B a C', D', B'.

Jiný způsob řešení využívá obvodových a úsekových úhlů (M. Konečný, obr. 35). Označme $\alpha = |\sphericalangle CBA|$ a X obraz bodu B ve stejnolehlosti se středem A, která převádí menší z obou kružnic na větší. Stejnolehlost zachovává velikost úhlů, tedy $|\sphericalangle DXA| = \alpha$.



Obr. 35

Úsekový úhel CDB oblouku DB větší kružnice má také velikost α. Je tedy $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle CDB|$, to ale znamená, že CBA je úsekový úhel k oblouku CB kružnice opsané trojúhelníku BCD a přímka AB je tečna této kružnice (postup pro druhý průsečík B' vepsaných kružnic je stejný).

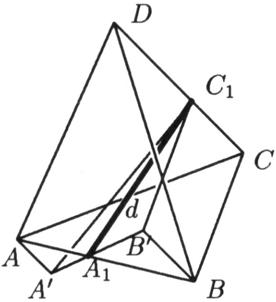
2.2 Nejprve dané číslo rozložíme na součin

$$3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6^n = (3^n - 2^n)(3^{n+1} + 2^{n+1}).$$

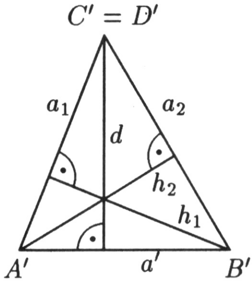
Pro $n = 1$ je výraz roven 13, což je prvočíslo. (Tento krok mnozí z vás zapomněli udělat a soustředili se pouze na případ $n > 1$ — znamenalo to ztrátu půl bodu.)

Pro $n > 1$ jsou výrazy v obou závorkách větší než 1 (v druhé závorce je to zřejmé a výraz v první závorce lze pro $n \geqq 2$ napsat jako $3^n - 2^n = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i 2^{n-1-i} > 1$), jejich součin je tedy složené číslo.

2.3 (M. Kordoš). Označme AB a CD ty mimoběžné hrany, které mají nejmenší vzdálenost d (obr. 36) a promítněme čtyřstěn do roviny kolmé na CD (obr. 37).



Obr. 36



Obr. 37

Výšky v trojúhelníku $A'B'C'$ jsou obrazy příčky mimoběžek a dvou tělesových výšek a *zachovávají* jejich *skutečné velikosti* d, h_1 a h_2. Označme $|A'B'| = a'$, $|A'C'| = a_1$, $|B'C'| = a_2$ délky jeho stran a předpokládejme, že

$$2d \leqq h_1, \quad 2d \leqq h_2. \tag{1}$$

Obsah P trojúhelníku můžeme vyjádřit třemi způsoby jako

$$P = \frac{1}{2}a_1 h_1 = \frac{1}{2}a_2 h_2 = \frac{1}{2}a' d.$$

Po dosazení z nerovností (1) dostaneme

$$2a_1 \leqq a', \quad 2a_2 \leqq a',$$

takže

$$a_1 + a_2 \leqq a'.$$

To je ale spor s trojúhelníkovou nerovností.

Proto alespoň jedna z výšek h_1, h_2 je menší než $2d$, tedy i nejmenší výška h je menší než $2d$.

Jiné řešení (Z. Pezlar). Nechť nejkratší vzdálenost mimoběžných hran je příčka mimoběžek AB a CD. Její průsečíky s přímkami AB a CD označme po řadě A_1, C_1 (obr. 37). Předpokládejme, že

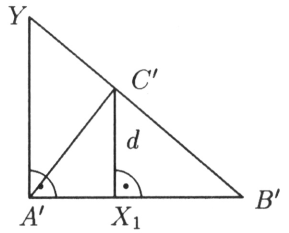
$$|CC_1| \geqq |DC_1| \tag{2}$$

(sem lze začlenit i případy, kdy bod C_1 leží mimo úsečku CD za bodem D). Uvažujme rovinu ϱ rovnoběžnou se stěnou ABC a procházející středem tělesové výšky z vrcholu D na stěnu ABC (označme ji h_D). Vzdálenost rovin ABC a ϱ je tedy $\frac{1}{2}h_D$. Bod C_1 leží (podle (2)) v poloprostoru určeném ϱ a bodem D. Proto je nutně

$$d = |A_1C_1| > \frac{1}{2}\, h_D,$$

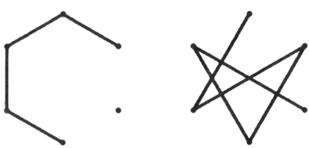
čímž je důkaz hotov.

Poznámka. Nerovnost $2d < h$ dostaneme v 1. řešení přímo z následující úvahy: Je-li d vzdálenost hran AB, CD, výška $C'X_1$ trojúhelníku $A'B'C'$ na stranu $A'B'$ má velikost d (další dvě výšky jsou tělesovými výškami daného čtyřstěnu), a je-li např. $|A'X_1| < |B'X_1|$, je také (obr. 38) $|A'Y| < 2d$ a v pravoúhlém trojúhelníku $A'B'Y$ je zřejmě výška z vrcholu A' menší než odvěsna $A'Y$.

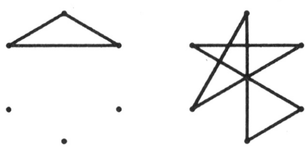


Obr. 38

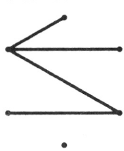
2.4 Největší nejasnosti se týkaly pojmu uzavřená lomená čára. V případě šestiúhelníku je na obr. 39 lomená čára, na obr. 40 uzavřená lomená čára, zatímco útvar na obr. 41 není lomená čára. Ani útvar na obr. 42 není lomená čára, ale jedna jeho podmnožina je uzavřená lomená čára. Z obrázků je také patrno, že uzavřená lomená čára nemusí spojovat všechny vrcholy n-úhelníku.



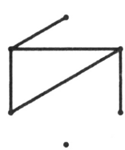
Obr. 39



Obr. 40



Obr. 41



Obr. 42

Protože většina řešitelů ovládá terminologii teorie grafů, přeformulujeme úlohu do přirozenější podoby. Nejprve stručně uvedeme příslušné pojmy: strany a úhlopříčky konvexního n-úhelníku se nazývají hrany úplného grafu o n vrcholech; uzavřená lomená čára složená z hran grafu se nazývá kružnice; souvislý graf bez kružnic se nazývá strom; graf, jehož každá komponenta souvislosti je strom, se nazývá les.

Úloha tedy zní: Pro každé k určete maximální n tak, že hrany úplného grafu o n vrcholech lze obarvit k barvami tak, že každý graf určený hranami stejné barvy je les.

Řešení. Nejprve dokážeme jednoduché lemma.

LEMMA. Každý les o m vrcholech má nejvýše $m-1$ hran. (Toto je notoricky známé tvrzení a víceméně stačí odkaz na literaturu. Většina půlbodových ztrát je důsledkem chyb v důkazu tohoto lemmatu.)

DŮKAZ. Indukcí podle m. Pro $m = 1$ tvrzení zřejmě platí.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $m \geqq 1$, a uvažujme les o $m + 1$ vrcholech. Každý les obsahuje vrchol stupně menšího než 2 — v opačném případě uvažme cestu $v_0 v_1 v_2 \dots$ definovanou rekurzivně tak, že v_{k+1} je vrchol spojený hranou s v_k a různý od v_{k-1}. Protože počet vrcholů je konečný, existují indexy $i < j$ tak, že $v_j = v_i$ a v_i, v_{i+1}, ..., $v_j = v_i$ je kružnice.

Nechť v_{m+1} je tedy vrchol stupně menšího než 2. Graf vzniklý odstraněním tohoto vrcholu je les o m vrcholech a podle indukčního předpokladu má nejvýše $m - 1$ hran, uvažovaný graf o $m + 1$ vrcholech má nejvýše $m - 1 + 1 = = m = (m + 1) - 1$ hran.

Předpokládejme, že požadované obarvení existuje. Podle uvedeného lemmatu je každou barvou obarveno nejvýše $n-1$ hran, celkem tedy graf obsahuje nejvýše $k(n-1)$ obarvených hran. Protože úplný graf má $\binom{n}{2}$ hran (a každá je obarvena), je

$$\binom{n}{2} \leqq k(n-1),$$

odkud plyne nerovnost

$$n \leqq 2k.$$

Dokážeme matematickou indukcí, že pro $n = 2k$ požadované obarvení existuje. Pro $k = 1$ obarvíme snadno jedinou hranu barvou b_1. Předpokládejme tedy, že pro nějaké $k \geqq 1$ a graf s $n = 2k$ vrcholy obarvení existuje, a uvažujme graf s $n = 2k+2$ vrcholy. Vezměme jeho podgraf s vrcholy $v_1, \ldots, v_{2k}$ obarvený k barvami tak, že každá barva indukuje les. Uvažme dva nové vrcholy v_{2k+1}, v_{2k+2} a hrany incidentní s těmito vrcholy obarvěme takto:

hranu	$v_i v_{2k+1}$	barvou	b_i,	$i \in \{1, 2, \ldots, k\}$,
hranu	$v_{k+i} v_{2k+2}$	barvou	b_i,	$i \in \{1, 2, \ldots, k\}$,

hrany $v_{k+i} v_{2k+1}$, $v_i v_{2k+2}$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, a hranu $v_{2k+1} v_{2k+2}$ barvou b_{k+1}.

Je snadné se přesvědčit, že v barvách $b_1, \ldots, b_k$ nevznikly kružnice a podobně barva b_{k+1} indukuje strom.

Někteří řešitelé na tento důležitý krok zapomněli. Většinou uváděli konstrukce, ze kterých nebylo zcela patrno, že barvy jsou použity disjunktně.

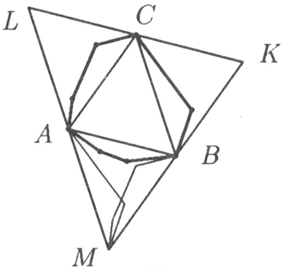
Jiné řešení. Dokážeme jen, že pro $n = 2k$ požadované obarvení existuje.

Označme $A_1, A_2 \ldots, A_{2k}$ vrcholy pravidelného $2k$-úhelníku a obarvěme jednou barvou lomenou čáru $A_1A_{2k}A_2A_{2k-1}\ldots A_kA_{k+1}$. Další barvou obarvíme lomenou čáru, kterou dostaneme otočením kolem středu daného $2n$-úhelníku o úhel $\frac{\pi}{k}$, atd.

Není těžké se přesvědčit, že takto bude každá strana či úhlopříčka obarvena právě jednou z k barev a že nevznikne žádná jednobarevná uzavřená lomená čára.

2.5 Leží-li všechny body na jedné přímce (vektory jsou rovnoběžné), zvolíme za A_0 krajní bod a není co dokazovat. V jiném případě uspořádáme vektory podle velikosti orientovaného úhlu, který svírají s vektorem $\boldsymbol{a}_1$, čímž dostaneme konvexní m-úhelník pro $m \leqq n$, protože dva po sobě jdoucí vektory musí svírat úhel menší než $180°$, jinak by součet všech vektorů nemohl být nulový.

V tomto konvexním m-úhelníku vyberme tři vrcholy A, B, C tak, aby obsah tohoto trojúhelníku byl mezi všemi takovými trojúhelníky maximální. Je-li KLM trojúhelník takový, že AB, AC, BC jsou jeho střední příčky, pak všechny vrcholy m-úhelníku leží uvnitř trojúhelníku KLM (obr. 43), jinak by ABC nebyl maximální, a navíc žádny z vrcholů neleží uvnitř ABC. Odtud plyne, že pokud vezmeme postupně vektory ležící mezi AB, potom mezi CA a nakoniec mezi BC, dosáhneme tímto přeuspořádáním toho, že všechny body leží v trojúhelníku ABM podobném trojúhelníku ABC. Aspoň jeden jeho úhel je nejvýše $60°$, a volbou označení A_0 pro tento vrchol úspěšně končíme.



Obr. 43

2.6 Nejprve dokažme pomocné tvrzení. Označme $f_d(x) = x^{-\alpha} - (x+d)^{-\alpha}$, kde x, α, $d > 0$. Potom funkce f_d je klesající. Skutečně, je

$$f_d(x) = \frac{1}{x^\alpha} \cdot \overbrace{\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{d}{x}\right)^\alpha}\right)}^{g(x)};$$

přitom jak $\dfrac{1}{x^\alpha}$, tak i $g(x)$ jsou klesající a navíc kladné. Avšak součin kladných klesajících funkcí je opět klesající funkce, takže i f_d je klesající.

Nyní vlastní řešení úlohy. Označme

$$\begin{aligned}
&F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \\
&\quad = (x_4 + x_5)^{-\alpha} + (x_2 + x_3)^{-\alpha} + (x_1 + x_2)^{-\alpha} - \\
&\qquad - (x_1 + x_3)^{-\alpha} - (x_2 + x_4)^{-\alpha} - (x_2 + x_5)^{-\alpha};
\end{aligned}$$

máme tedy dokázat, že platí $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) > 0$. Položme na chvíli $d = x_3 - x_2 > 0$. Potom

$$\begin{aligned}
F(&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) - F(x_2, x_2, x_3, x_4, x_5) = \\
&= \big((x_1 + x_2)^{-\alpha} - (x_1 + x_3)^{-\alpha}\big) - \\
&\quad - \big((x_2 + x_2)^{-\alpha} - (x_2 + x_3)^{-\alpha}\big) = \\
&= \big((x_1 + x_2)^{-\alpha} - (x_1 + x_2 + d)^{-\alpha}\big) - \\
&\quad - \big((x_2 + x_2)^{-\alpha} - (x_2 + x_2 + d)^{-\alpha}\big) = \\
&= f_d(x_1 + x_2) - f_d(x_2 + x_2),
\end{aligned}$$

což je ale podle pomocného tvrzení kladné číslo (jelikož $x_1 < x_2$); je tedy

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) > F(x_2, x_2, x_3, x_4, x_5).$$

Avšak

$$\begin{aligned}
F(&x_2, x_2, x_3, x_4, x_5) = \\
&= (x_4 + x_5)^{-\alpha} + (x_2 + x_2)^{-\alpha} - \\
&\quad - (x_2 + x_4)^{-\alpha} - (x_2 + x_5)^{-\alpha} = \\
&= \big((x_2 + x_2)^{-\alpha} - (x_2 + x_5)^{-\alpha}\big) - \\
&\quad - \big((x_4 + x_2)^{-\alpha} - (x_4 + x_5)^{-\alpha}\big) = \\
&= f_h(x_2 + x_2) - f_h(x_4 + x_2),
\end{aligned}$$

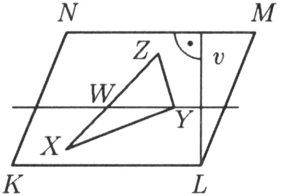
kde $h = x_5 - x_2 > 0$, takže podle pomocného tvrzení je $F(x_2, x_2, x_3, x_4, x_5) > 0$. Tím je důkaz hotov.

2.7 (M. Konečný). Na úvod poznamenejme, že tři body na úsečce považujeme za trojúhelník s nulovým obsahem — jinak by tvrzení úlohy neplatilo. Dokažme nejprve lemma.

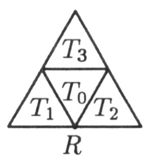
LEMMA. Leží-li v rovnoběžníku $KLMN$ trojúhelník XYZ, platí pro jejich obsahy nerovnost $S(XYZ) \leqq \leqq \frac{1}{2}S(KLMN)$.

DŮKAZ. Označme x, y, z vzdálenosti bodů X, Y, Z od přímky KL; bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $x \leqq y \leqq z$ (obr. 44). Bodem Y veďme rovnoběžku s KL a označme W její průsečík s přímkou XZ. Potom

$$\begin{aligned} S(XYZ) &= S(XYW) + S(ZYW) = \\ &= \frac{1}{2}\,|WY|(y-x) + \frac{1}{2}\,|WY|(z-y) = \\ &= \frac{1}{2}\,|WY|(z-x) \leqq \frac{1}{2}\,|KL|v = \frac{1}{2}\,S(KLMN). \end{aligned}$$



Obr. 44

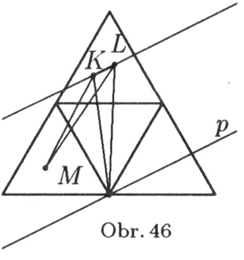


Obr. 45

Nyní k samotné úloze. Daný trojúhelník rozdělme středními příčkami na čtyři trojúhelníky — nazvěme je T_0, T_1, T_2, T_3 podle obr. 45. Pokud v T_0 leží některé tři z daných pěti bodů, určují trojúhelník s obsahem nejvýše $S(T_0) = = \frac{1}{4}$ a jsme hotovi. Leží-li v T_0 právě dva z daných bodů, leží např. v T_1 jeden ze zbývajících tří; díky tomu v rovnoběžníku $T_0 \cup T_1$ leží tři z daných bodů a dle lemmatu trojúhelník jimi určený má obsah nejvýše $\frac{1}{2}\,S(T_0 \cup T_1) = = \frac{1}{4}$. Pokud v T_0 je právě jeden daný bod, musí podle

Dirichletova principu v některém T_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, ležet aspoň dva ze čtyř zbývajících — nechť je to v T_1; pak opět v rovnoběžníku $T_0 \cup T_1$ leží tři z daných bodů a trojúhelník jimi určený má opět obsah nejvýše $\frac{1}{4}$.

Zbývá případ, kdy v T_0 není žádný z daných bodů. Leží-li pak v některém z trojúhelníků T_1, T_2, T_3 aspoň tři dané body, určují opět trojúhelník o obsahu nejvýše $S(T_i) = \frac{1}{4}$ a jsme hotovi.



Obr. 46

Stačí tedy už jen vyšetřit případ, kdy v T_0 není žádný bod a ve zbylých třech trojúhelnících T_i jsou po řadě 2, 2 a 1 z daných bodů. Nechť např. v T_3 jsou dva — nazvěme je K, L (obr. 46). Veďme bodem R rovnoběžku p s přímkou KL; ta zřejmě může rozetínat nejvýše jeden z trojúhelníků T_1, T_2 — nechť např. nerozetíná T_1. V T_1 leží aspoň jeden z daných bodů — označme ho M. Potom ale M leží v pásu mezi rovnoběžkami p a KL, a jeho vzdálenost od KL je tedy nejvýše rovna vzdálenosti bodu R od přímky KL. Proto

$$S(KLM) \leqq S(KLR).$$

Ale podle lemmatu $S(KLR) \leqq \frac{1}{2}S(T_3 \cup T_0) = \frac{1}{4}$. Tím je důkaz hotov.

3.1 Součet n za sebou jdoucích čísel začínajících p je

$$\begin{aligned} p + (p+1) + \ldots + (p+n-1) = np + \frac{n(n-1)}{2} &= \\ = \frac{n(n+2p-1)}{2}&, \end{aligned} \tag{1}$$

takže součet 1 990 za sebou jdoucích čísel je

$$995(1\,989 + 2p). \tag{2}$$

Hledané číslo C je proto tohoto tvaru.

Podle (1) pro každou dvojici A, B, $A < B$, dělitelů čísla $2C = AB$ (vyjma dvojice $1, 2C$) existuje rozklad na příslušný počet sčítanců, kterých je A anebo $\frac{1}{2}A$ podle parity A (a obráceně). Proto $2C$ musí mít $2(1\,990 + 1)$ dělitelů (z (2) víme, že C je liché).

Je-li $D = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \ldots p_n^{i_n}$ rozklad čísla D na prvočinitele, je počet jeho dělitelů $(i_1 + 1)(i_2 + 2) \ldots (i_n + 1)$. Protože $2 \cdot 1\,991 = 2 \cdot 11 \cdot 181$, má číslo $2C$ tři prvočinitele a ty musí mít exponenty 1, 10, 180.

Z (2) vidíme, že C je liché a má dělitele 5 a 199, protože $995 = 5 \cdot 199$. Proto exponent u 2 v čísle $2C$ je 1 a pro C zůstávají možnosti $C_1 = 5^{10} \cdot 199^{180}$ a $C_2 = 5^{180} \cdot 199^{10}$.

3.2 Nejprve dokážeme lemma.

Lemma. Jestliže v trojúhelníku ABC platí $\alpha > \beta$, pak bod H_C leží na polopřímce V_CA a bod T_C na polopřímce V_CB.

DŮKAZ. Jestliže $\alpha < 90°$, pak

$$|\sphericalangle H_C CA| = 90° - \alpha < 90° - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\gamma}{2} = |\sphericalangle V_C CA|.$$

Tedy H_C leží na polopřímce $V_C A$ (pro $\alpha \geqq 90°$ je to zřejmé). Označme A' bod souměrný s vrcholem A podle přímky CV_C. Bod A' leží uvnitř úsečky BC. Trojúhelníky $AV_C C$ a $A'V_C C$ mají stejný obsah, který je menší než obsah trojúhelníku $V_C BC$. Je tedy $|AV_C| < |V_C B|$ a odtud plyne, že T_C leží na polopřímce $V_C B$.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že platí $\alpha > \beta > > \gamma$. Nechť trojúhelník ABC je ostroúhlý, tedy $\alpha < 90°$ (obr. 47). Z lemmatu plyne, že bod H (stejně jako H_C) leží v polorovině $CV_C A$ a bod H (stejně jako H_A) leží v polorovině $AV_A B$. Bod H tedy leží uvnitř trojúhelníku AVV_C. Podobně z lemmatu plyne, že bod T leží v trojúhelníku $VV_A C$. Úhel TVH je tedy větší než úhel CVA. A protože

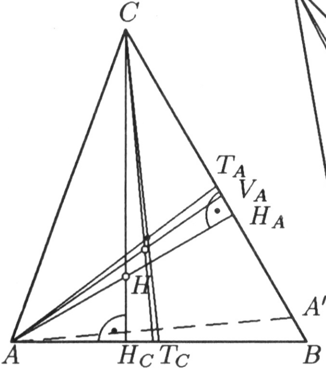
$$|\sphericalangle CVA| = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90° + \frac{\beta}{2},$$

je úhel TVH tupý.

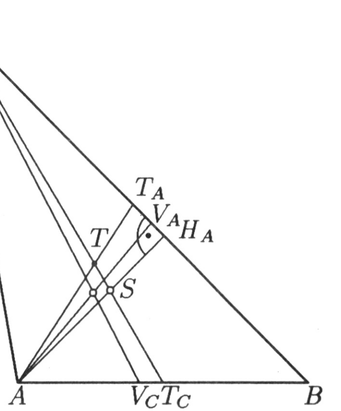
Nyní předpokládejme, že trojúhelník ABC je tupoúhlý nebo pravoúhlý, tedy $\alpha \geqq 90°$. Označme S průsečík úsečky CT_C s úsečkou AH_A. Z lemmatu vyplývá, že bod V leží v trojúhelníku TSA (obr. 48). Platí tedy

$$|\sphericalangle TVH| > |\sphericalangle TSH| = |\sphericalangle CSA| > |\sphericalangle CH_A A| = 90°.$$

Opět jsme dokázali, že úhel TVH je tupý.



Obr. 47



Obr. 48

Jiné řešení. Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a E střed úsečky OH. Z vlastností význačných bodů trojúhelníku plyne, že je $\boldsymbol{OH} = 3\boldsymbol{OT}$, přičemž podle Eulerova vzorce (viz např. Úlohy MMO, str. 83, nebo ŠMM, sv. 57 Nerovnosti v trojúhelníku) platí $|\boldsymbol{OV}|^2 = R^2 - 2rR$, kde r a R jsou poloměry kružnice vepsané a opsané, a $|\boldsymbol{VE}| = \frac{1}{2}R - r$. Odtud plyne, že

$$\boldsymbol{VH} = 2\boldsymbol{VE} - \boldsymbol{VO}, \quad \boldsymbol{VT} = \frac{2\boldsymbol{VE} - \boldsymbol{VO}}{3},$$

takže

$$\boldsymbol{VH} \cdot \boldsymbol{VT} = \frac{1}{3}(4\boldsymbol{VE} \cdot \boldsymbol{VE} - \boldsymbol{VO} \cdot \boldsymbol{VO}) = -\frac{2}{3}r(R - 2r) < 0.$$

Proto je $\cos|\sphericalangle TVH| < 0$ a úhel TVH je tupý.

3.3 Při překladu této úlohy z anglického originálu došlo bohužel k chybě. Místo „součet druhých mocnin číslic“ mělo být „druhá mocnina součtu číslic“. Tím se středně obtížná úloha změnila v problém, jehož korektní matematické řešení nikdo nenalezl.

Většina řešitelů si pomohla programem na počítači, což jaksi do matematického semináře nepatří (bílou vránou byl A. Kuběna, který vše spočítal ručně). Těm, kteří použitím výpočetní techniky opovrhují, prozrazujeme, že $f_{1\,991}(2^{1\,990}) = 16$.

3.4 (Z. Pezlar). Jestliže tři body roviny X, Y, Z neleží v přímce, pak každý bod T roviny lze psát ve tvaru

$$T = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z, \qquad \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1,$$

a podobně každý bod T přímky XY lze vyjádřit jako

$$T = \alpha_1 X + \alpha_2 Y, \qquad \sum_{i=1}^{2} \alpha_i = 1.$$

Nyní k vlastnímu řešení. Označme průsečík přímky CV se stranou AB jako X. Je známo (a lze to dokázat pomocí podobnosti trojúhelníků anebo jednoduchým použitím sinové věty), že

$$\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{b}{a}$$

(viz např. H. J. Bartsch, Matematické vzorce, SNTL, Praha, 1983, s. 311).

Protože

$$V = \beta C + (1-\beta)X \qquad \text{a} \qquad (a+b)X = aA + bB,$$

je

$$V = \alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a}{b}.$$

Podobně dostaneme, že

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{b}{c},$$

tedy

$$(a+b+c)V = aA + bB + cC.$$

Zvolme pro zjednodušení počátek soustavy souřadné v bodě A, tedy

$$(a+b+c)V = bB + cC.$$

Zřejmě $B_1 = \frac{1}{2}C$, $C_1 = \frac{1}{2}B$, a pro jistá k a l je $B_2 = kC$, $C_2 = lB$, tj. $|AB_2| = kb$, $|AC_2| = lc$. Protože $B_2 \in C_1V$, je

$$B_2 = \kappa V + (1-\kappa)C_1$$

a podobně

$$C_2 = \lambda V + (1-\lambda)B_1.$$

Po dosazení vyjde

$$kC = \frac{\kappa}{a+b+c}(bB + cC) + \frac{1-\kappa}{2}B,$$
$$lB = \frac{\lambda}{a+b+c}(bB + cC) + \frac{1-\lambda}{2}C,$$

odkud porovnáním koeficientů dostaneme

$$\kappa = \frac{a+b+c}{a-b+c}, \qquad \lambda = \frac{a+b+c}{a+b-c}$$

a

$$k = \frac{c}{a-b+c}, \qquad l = \frac{b}{a+b-c}.$$

Pro zmíněné obsahy platí

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha, \qquad S_{AB_2C_2} = \frac{1}{2}bkcl\sin\alpha.$$

Oba obsahy se zřejmě rovnají, právě když $kl = 1$, neboli

$$\frac{c}{a-b+c} = \frac{a+b-c}{b},$$

$$bc = a^2 - (b-c)^2,$$

$$b^2 + c^2 - bc = a^2.$$

Ale podle kosinové věty

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2,$$

takže $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ a $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Z postupu je zřejmé, že $S_{ABC} = S_{AB_2C_2}$ právě tehdy, jestliže $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

3.5 Nejprve ukážeme, že počet trojúhelníků se dvěma dobrými stranami je vždy sudý. Sestrojme graf, jehož uzly odpovídají trojúhelníkům rozkladu, přičemž dva uzly spojíme hranou, právě když příslušné trojúhelníky sdílejí špatnou stranu. Podle předpokladu b) je stupeň uzlu roven počtu špatných stran příslušného trojúhelníku, takže všechny uzly mají stupeň 1 nebo 2. Výsledný graf je disjunktní sjednocení kružnic a cest, přičemž každá cesta má dva uzly stupně 1, odpovídající dvěma trojúhelníkům se dvěma dobrými stranami (podle A. Kuběny).

Nyní ukážeme, že výše uvedený graf obsahuje alespoň jednu cestu (elegantní důkaz je vypůjčen od J. Menšíka).

Předpokládejme *naopak*, že každý trojúhelník obsahuje *právě jednu* dobrou stranu. V takovém případě můžeme sestrojit lomenou čáru L, která spojuje středy „špatných" stran, a skládá se tedy ze středních příček trojúhelníků rovnoběžných s jejich dobrými stranami. Pro čáru L platí následující tvrzení (dokažte si je sami):

(1) Každá úsečka čáry L náleží přímce $x = j + \frac{1}{2}$ nebo $y = k + \frac{1}{2}$ pro nějaké celé j, $0 \leqq j \leqq m - 1$, či celé k, $0 \leqq k \leqq n - 1$.

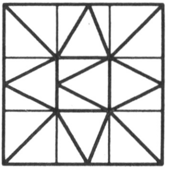
(2) Čára L se skládá z neprotínajících se cyklů, které odpovídají cyklům v grafu z první části řešení.

(3) Uvnitř každého čtverce 1×1 má L délku 1 a nabývá jednoho z těchto šesti tvarů .

(4) Celková délka čáry je mn, tedy lichá.

(5) Délka každého cyklu čáry L je sudá. [K důkazu použijte např. šachovnicové obarvení čtverců, každý uzavřený cyklus prochází stejným počtem bílých a černých čtverců.]

Tvrzení úlohy plyne z (4) a (5).

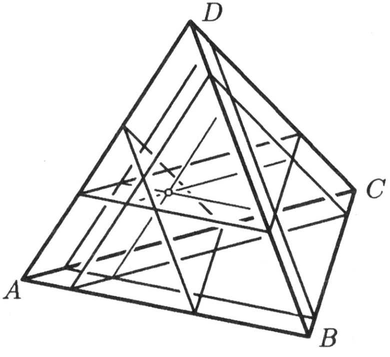


Na závěr si ukažme protipříklad při výkladu pojmu „dobrá strana" = strana ležící na přímce $x = j$, resp. $y = k$ a navíc taková, že příslušná výška je 1 — v takovém případě je ovšem pojem špatné strany závislý na konkrétním trojúhelníku. (Každá špatná strana náleží dvěma trojúhelníkům, ale v druhém trojúhelníku nemusí být nutně špatná.)

3.6 Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že hrana daného čtyřstěnu $ABCD$ má délku 1; jeho tělesová výška je pak $h = \sqrt{\frac{2}{3}}$ a objem $V = \frac{1}{12}\sqrt{2}$. Označme ah, bh, ch, dh vzdálenosti bodu P od stěn čtyřstěnu $ABCD$ (ah je vzdálenost od stěny naproti vrcholu A atd.). Jak známo, platí $a + b + c + d = 1$, což plyne z toho, že objem čtyřstěnu $ABCD$ je součtem objemů čtyřstěnů $PBCD$, $PACD$, $PABD$, $PABC$, neboli

$$\frac{1}{6}hS = \frac{1}{6}ahS + \frac{1}{6}bhS + \frac{1}{6}chS + \frac{1}{6}dhS,$$

kde S je plocha (kterékoliv) stěny daného čtyřstěnu.



Obr. 49

Čtrnáct částí, na něž je rozložen $ABCD$ (obr. 49), lze rozdělit do tří skupin. *Za prvé* jsou mezi nimi čtyři pravidelné čtyřstěny se společným vrcholem P a podstavami ležícími po řadě ve stěnách BCD, ACD, ABD, ABC. Jejich tělesové výšky jsou po řadě ah, bh, ch, dh; délky jejich hran jsou tedy po řadě a, b, c, d a součet jejich objemů je roven

$$V(a^3 + b^3 + c^3 + d^3).$$

Za druhé jsou mezi nimi čtyři rovnoběžnostěny — každý z nich má jeden vrchol v některém z bodů A, B, C, D, zatímco protějším vrcholem je P. Všimněme si např. rovnoběžnostěnu s vrcholem v A. Jeho stěny jsou rovnoběžníky, které mají u vrcholu A a P úhel $60°$, druhé dva úhly $120°$. Své tři hrany, vycházející z vrcholu P, má tento rovnoběžnostěn společné se třemi ze čtyř pravidelných čtyřstěnů z předešlé skupiny (nakreslete si obrázek!); délky těchto hran jsou tedy b, c, d. Odtud snadno nahlédneme, že objem tohoto rovnoběžnostěnu je

$$\frac{\sqrt{3}}{2}bc \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}d = \frac{\sqrt{2}}{2}bcd = 6V \cdot bcd.$$

Podobnou úvahu lze provést i pro ostatní tři rovnoběžnostěny. Do *třetí skupiny* patří zbývajících 8 částí, které nás zajímají. Součet jejich objemů musí být tedy roven

$$v(P) = V - V\,(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - 6V\,(bcd + acd + abd + abc).$$

Tento vzorec upravíme (dvojím) použitím vztahu $a + b + {} + c + d = 1$,

$$\begin{aligned} v(P) &= V\,\big((a + b + c + d)^3 - (a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - \\ &\qquad - 6(bcd + acd + abd + abc)\big) = \\ &= V\,3\big(a^2(b + c + d) + b^2(a + c + d) + \\ &\qquad + c^2(a + b + d) + d^2(a + b + c)\big) = \\ &= 3V\,\big(a^2(1 - a) + b^2(1 - b) + \\ &\qquad + c^2(1 - c) + d^2(1 - d)\big). \end{aligned} \tag{1}$$

Protože $a^2(1-a) = -a(a^2-a+\frac{1}{4})+\frac{1}{4}a = -a(a-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}a$ a podobné vztahy platí i pro b, c, d, lze poslední výraz dále upravit na

$$\begin{aligned} v(P) = 3V \Bigg(& -a\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 - b\left(b-\frac{1}{2}\right)^2 - \\ & -c\left(c-\frac{1}{2}\right)^2 - d\left(d-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\Bigg). \end{aligned} \tag{2}$$

Odtud je ihned vidět, že $v(P) \leqq \frac{3}{4}V$. Protože P leží *uvnitř* čtyřstěnu $ABCD$, jsou a, b, c, d kladná čísla, takže rovnost by mohla nastat pouze pro $a = b = c = d = \frac{1}{2}$; to však není možné ($a + b + c + d = 1$). Nerovnost tedy platí dokonce ostře. Zároveň zřejmě $v(P) > 0$, takže celkem

$$0 < v(P) < \frac{3}{4}V$$

pro všechny vnitřní body P čtyřstěnu $ABCD$.

Ukážeme, že všechny hodnoty v tomto intervalu se nabývají. Blíží-li se bod P vrcholu A, je $a \to 1, b, c, d \to 0$ a podle (2) tedy $v(P) \to 0$. Blíží-li se P ke středu T hrany CD, je $a, b \to 0$, $c, d \to \frac{1}{2}$, a tak podle (2) $v(P) \to \frac{3}{4}V$. Probíhá-li bod P všechny vnitřní body úsečky AT, proběhne $v(P)$ celý interval $(0, \frac{3}{4}V)$. Hledaným oborem hodnot funkce $v(P)$ je tedy interval $(0, \frac{3}{4}V)$.

Jiné řešení (V. Glasnák). Funkce $f(x) = x(1-x)$ je konkávní na $\mathbb{R}$; podle Jensenovy nerovnosti proto platí

$$\sum_{i=1}^{4} m_i f(x_i) \leqq f\left(\sum_{i=1}^{4} m_i x_i\right),$$

pokud m_i, $i = 1, 2, 3, 4$, jsou nezáporná čísla se součtem 1. Pro $m_1 = x_1 = a$, $m_2 = x_2 = b$, atd. dostáváme

$$a^2(1-a) + b^2(1-b) + c^2(1-c) + d^2(1-d) \leqq$$
$$\leqq f(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \leqq \frac{1}{4},$$

protože $f(x) = x(1-x) = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 \leqq \frac{1}{4}$ pro libovolné $x \in \mathbf{R}$. Dosazením do (1) dostáváme

$$v(P) \leqq \frac{3}{4}$$

a další postup je již stejný.

3.7 Označme n celé nezáporné číslo, pro které platí

$$10^n \leqq k^4 < 10^{n+1},$$

a označme M množinu všech celých nezáporných čísel, jejichž zápis v desítkové soustavě má nejvýše n cifer a obsahuje pouze číslice 0 a 1. Počet prvků množiny M je 2^n.

Je-li $2^n \leqq k$, platí $2^{4n} \leqq k^4 < 10^{n+1}$, tedy $16^n < 10^{n+1}$, odkud postupně plyne $1{,}6^n < 10$, $n \leqq 4$, $k^4 < 10^5$, $k < 18$, a násobek $1 \cdot k$ lze zapsat dokonce pomocí nejvýše dvou cifer.

Je-li $2^n > k$, existují podle Dirichletova principu čísla x, $y \in \mathsf{M}$, $x > y$, která dávají stejný zbytek při dělení číslem k. Číslo $x - y$ je tedy kladné, dělitelné k a menší než $10^k \leqq \leqq k^4$. Avšak z obvyklého algoritmu pro odčítání plyne, že dekadický zápis tohoto čísla může obsahovat pouze cifry 0, 1, 8, 9: rozdíly při odčítání dvou cifer budou buď $1-0$, $1-1$, $0-0$, $10-1$ (bez „přenosu"), anebo $1-1$, $10-1$, $11-2$,

$10-2$ (při přenosu jednotky z předešlého sloupce). Uvedený rozdíl $x-y$ tedy splňuje všechny podmínky ze zadání, čímž je důkaz hotov.

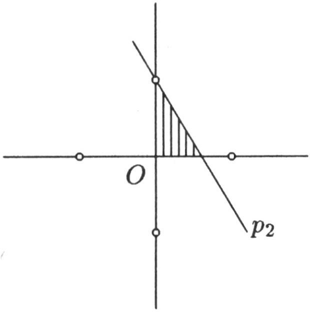
4.1 (podle M. Volaufa). Použijeme důležité LEMMA: *Je-li* K *konvexní množina a P bod, který do ní nepatří, pak existuje přímka procházející bodem P taková, že* K *leží v jedné polorovině určené přímkou p.*

Je-li K konvexní mnohoúhelník, je důkaz této vlastnosti zřejmý: Zvolíme libovolný bod Q uvnitř K a sestrojíme průsečík T úsečky PQ s hranicí K (ten musí být jediný). Za hledanou přímku můžeme pak volit prodloužení té strany K, které náleží bod T (je-li T vrcholem K, můžeme si libovolně vybrat ze dvou možných stran).

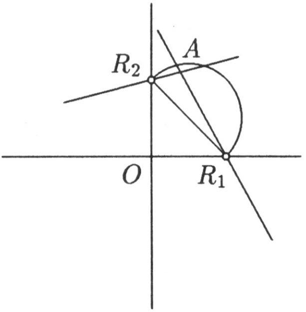
Užitím uvedeného lemmatu pro body $R_1 = [1,0]$, $R_2 = [0,1]$, $R_3 = [-1,0]$, $R_4 = [0,-1]$ dostaneme po řadě čtyři přímky p_1, p_2, p_3, p_4, které ohraničují konvexní útvar obsahující K ve svém vnitřku.

Předpokládejme, že některá z přímek p_i protíná jednu z os *uvnitř* intervalu $\langle -1,1\rangle$ (obr. 50). Pak jedna z částí $\mathsf{K} \cap \cap\, \mathsf{Q}_j$ je obsažena v trojúhelníku o obsahu nejvýše $\frac{1}{2}$, tedy $S(\mathsf{K}) \leqq 4\cdot\frac{1}{2} = 2 < 4$.

Není-li tomu tak, omezují přímky p_1, p_2, p_3, p_4 konvexní čtyřúhelník, který má v každém kvadrantu jeden vrchol. Součet vnitřních úhlů je $360°$, existuje tedy alespoň jeden úhel o velikosti nejméně $90°$. Pokud příslušný vrchol A leží např. v Q_1 (obr. 51), pak leží uvnitř Thaletovy kružnice nad průměrem R_1R_2, anebo na ní. Obsah trojúhelníku R_1AR_2 je největší, je-li $A = [1,1]$. Celý čtyřúhelník OR_1AR_2 pak má obsah 1. Je tedy $S(\mathsf{K}\cap\mathsf{Q}_1) \leqq 1$, přitom je ovšem jasné,



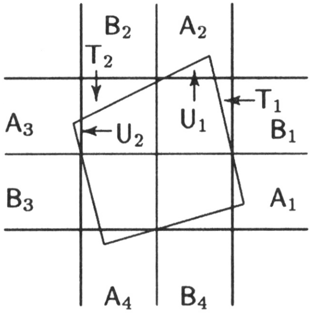
Obr. 50



Obr. 51

že nemůže být $S(\mathsf{Q}_i) = 1$ pro všechna $i = 1, 2, 3, 4$. Proto $S(\mathsf{K}) < 4$.

Jiný postup: Pro čtyřúhelník $ABCD$ omezený přímkami p_i dokážeme (obr. 52):



Obr. 52

Bod A leží buď v oblasti B_1, nebo A_2. Je-li např. v A_2, pak $B \in \mathsf{A}_3, C \in \mathsf{A}_4, D \in \mathsf{A}_1$. Obsah čtyřúhelníku $ABCD$ vznikne z obsahu čtverce $R_1R_2R_3R_4$ odečtením obsahů trojúhelníků T_1, T_2, T_3, T_4 a přičtením obsahů U_1, U_2, U_3, U_4. Ukáže se, že pro jejich obsahy platí $S(\mathsf{U}_i) < S(\mathsf{T}_{i+1})$ $(\mathsf{T}_5 = \mathsf{T}_1)$, a proto obsah $ABCD$ je menší než obsah $R_1R_2R_3R_4$, tj. je menší než 4.

4.2 (a) Předpokládejme, že některé dva z bodů A_1, B_1, C_1, D_1 splynou — nechť např. $A_1 = B_1$. Pak ovšem bod A leží na kružnici opsané trojúhelníku BCD, tj. body A, B, C, D leží na jedné kružnici, a proto $A_1 = B_1 = C_1 = D_1$. Podobně lze postupovat i v případě, že splynou některé jiné dva z bodů A_1, B_1, C_1, D_1. Tím je dokázána první část tvrzení. Nadále budeme předpokládat, že body A_1, B_1, C_1, D_1 jsou navzájem různé.

Dokažme nyní, že body A_1, C_1 leží v opačných polorovinách určených přímkou B_1D_1. Rozlišíme dva případy:

1. $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BCD| < \pi$. Protože čtyřúhelník $ABCD$ je konvexní, takže body A a C leží v opačných polorovinách určených přímkou BD, plyne odtud, že bod C leží *vně* kružnice opsané trojúhelníku ABD, takže $|C_1C| > |C_1A|$. Podobně A leží vně kružnice opsané trojúhelníku BCD, takže $|A_1C| < |A_1A|$. Body A_1 a C_1 musí proto ležet v opačných polorovinách určených osou o_{AC} přímky AC.
2. $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BCD| > \pi$. Nyní bod C leží *uvnitř* kružnice opsané trojúhelníku ABD a A leží uvnitř kružnice opsané trojúhelníku BCD. Odtud plyne $|C_1C| < |C_1A|$ a $|A_1C| > |A_1A|$, takže body A_1, C_1 opět leží v opačných polorovinách určených osou o_{AC}.

(Pro $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BCD| = \pi$ je čtyřúhelník $ABCD$

tětivový a $A_1 = B_1 = C_1 = D_1$; tento případ jsme však vyloučili.)

Ze zadání plyne, že B_1 a D_1 leží na o_{AC}. Je tedy $o_{AC} = B_1D_1$ a důkaz je hotov. Podobně lze ukázat, že body B_1 a D_1 leží v opačných polorovinách určených přímkou A_1C_1.

(b) Pokud body A_1, B_1, C_1, D_1 splynou, je tvrzení triviální; můžeme proto předpokládat, že jsou navzájem různé, a tvoří tedy — podle části (a) — konvexní čtyřúhelník. Z konstrukce plyne, že A_1B_1 je osa strany CD, proto $A_1B_1 \perp CD$. Ze stejného důvodu je $C_2D_2 \perp A_1B_1$, tedy $CD \parallel C_2D_2$. Podobně $AB \parallel A_2B_2$, $BC \parallel B_2C_2$, $DA \parallel D_2A_2$. Protože B_1D_1 je osa úhlopříčky AC a A_2C_2 je osa úhlopříčky B_1D_1, je rovněž $AC \parallel A_2C_2$; stejně tak $BD \parallel B_2D_2$. Odtud již plyne, že čtyřúhelníky $ABCD$ a $A_2B_2C_2D_2$ jsou podobné. (Skutečně, označíme-li např. S, S_2 průsečíky úhlopříček čtyřúhelníků $ABCD$, resp. $A_2B_2C_2D_2$, pak z těchto rovnoběžností plyne

$$\triangle ABS \sim \triangle A_2B_2S_2,\ \triangle BCS \sim \triangle B_2C_2S_2,$$
$$\triangle CDS \sim \triangle C_2D_2S_2,\ \triangle DAS \sim \triangle D_2A_2S_2,$$

a tedy i $ABCD \sim A_2B_2C_2D_2$.)

4.3 Pro $a = 1$ platí rovnost. Pro $0 < a < 1$ využijeme Bernoulliho nerovnost

$$(1+x)^b \leqq 1 + bx, \tag{1}$$

která platí pro $x \geqq 1$, $0 < b < 1$.

Rozebereme dva případy. Nechť nejdříve $0 < s < 1$. Položme v (1) $x = s-1$ (platí tedy $x > -1$) a nechť $b = 1-a$

(takže $0 < b < 1$). Dostaneme tak nerovnost

$$s^b \leqq 1 + b(s-1)$$

a odtud máme

$$(1+b)s^b \leqq (1+b)\big(1+b(s-1)\big) = 1+bs+b^2(s-1) < 1+bs,$$

protože $s < 1$. Vynásobíme-li tuto nerovnost s^a, dostaneme (je $s^a s^b = s$)

$$s^a + bs^{1+a} > (1+b)s, \tag{2}$$

znovu využijeme Bernoulliho nerovnost (1) pro $x = s$

$$(1+s)^b \leqq 1 + bs,$$

odkud podle (2) plyne

$$(1+s)^{-b} - \frac{1-s^a}{1-s} \geqq \frac{1}{1+bs} - \frac{1-s^a}{1-s} =$$
$$= \frac{s^a + bs^{1+a} - (1+b)s}{(1+bs)\cdot(1-s)} > 0.$$

Z poslední nerovnosti po dosazení $1-a$ za b dostáváme

$$(1+s)^{-b} > \frac{1-s^a}{1-s}, \quad \text{čili} \quad \frac{(1+s)^a}{1+s} > \frac{1-s^a}{1-s},$$

což jsme chtěli dokázat.

Uvažujme teď $s > 1$. Zavedeme substituci $s = \dfrac{1}{t}$ (je $0 < t < 1$) a můžeme využít už dokázanou nerovnost z první části. Je tedy

$$\frac{1-s^a}{1-s} = \frac{1-t^{-a}}{1-\frac{1}{t}} = t^{1-a}\cdot\frac{1-t^a}{1-t} <$$
$$< t^{1-a}\cdot\frac{(1+t)^a}{1+t} = \frac{(1+\frac{1}{t})^a}{1+\frac{1}{t}} = \frac{(1+s)^a}{1+s}.$$

Tím je důkaz úplný.

Uvedené řešení nevyužívá vůbec předpokladu, že a je racionální číslo (nerovnost samozřejmě platí pro libovolné reálné a, $0 < a \leqq 1$).

Jiné řešení. Předpokládejme, že a je racionální číslo, tedy $a = \frac{k}{n}$, kde $0 < k \leqq n$ jsou celá čísla, a položme $s = t^n$ pro $t > 0$. Máme dokázat nerovnost

$$\frac{1-t^k}{1-t^n} = \frac{1+t+\ldots+t^{k-1}}{1+t+\ldots+t^{n-1}} \leqq (1+t^n)^{\frac{k}{n}-1},$$

což je ekvivalentní nerovnosti

$$(1+t+\ldots+t^{k-1})^n(1+t^n)^{n-k} \leqq (1+t+\ldots+t^{n-1})^n. \quad (3)$$

Tato nerovnost zřejmě platí pro $k = n$. Stačí tedy dokázat, že levá strana nerovnosti (3) je rostoucí funkcí k, neboli že pro $0 < k < n$ platí

$$1+t^n \leqq \left(\frac{1+t+\ldots+t^k}{1+t+\ldots+t^{k-1}}\right)^n \equiv A^n. \quad (4)$$

Protože $A > 1$, je ale

$$\begin{aligned} A^n - t^n &= (A-t)(A^{n-1} + A^{n-2}t + \ldots + t^{n-1}) \geqq \\ &\geqq (A-t)(1+t+\ldots+t^{n-1}) = \\ &= \frac{1}{1+t+\ldots+t^{k-1}} \cdot (1+t+\ldots+t^{n-1}) > 1, \end{aligned}$$

což dává nerovnost (4).

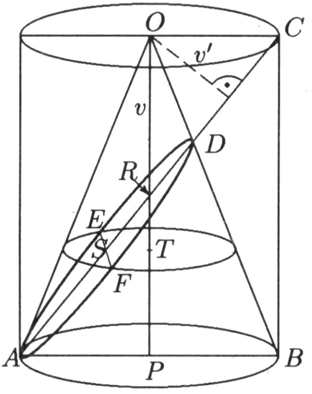
4.4 Průnik dané roviny ϱ s kuželem tvoří podle věty Quételetovy-Dandelinovy[1]) elipsu. Označme a, b délky jejích poloos, S její střed, $v = |PO|$ výšku daného kužele a $r = |PA|$ poloměr jeho podstavy (obr. 53). Objem kužele pak je

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v,$$

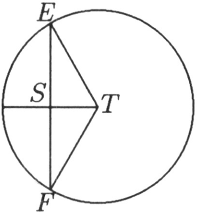
zatímco objem části, která obsahuje jeho vrchol O, bude

$$V' = \frac{1}{3}\pi a b v',$$

kde v' je vzdálenost vrcholu O od roviny ϱ, tj. vzdálenost O od přímky AC.



Obr. 53



Obr. 54

[1]) Kolektiv: *Aplikovaná matematika.* Praha, SNTL 1977, str. 963.

Z podobnosti trojúhelníků $ABD \sim COD$ plyne

$$|AD| = 2|CD|,$$

takže

$$a = |AS| = \frac{1}{2}\,|AD| = \frac{1}{3}\,|AC|.$$

Označme π rovinu rovnoběžnou s podstavou kužele, jež obsahuje vedlejší osu elipsy EF. Protože $|AS| = \frac{1}{3}|AC|$, leží tato rovina ve třetině výšky kužele, a její průnik s pláštěm kužele je tedy tvořen kružnicí o poloměru $\frac{2}{3}r$ (obr. 54). Z podobnosti $\triangle RST \sim \triangle RAP$ plyne, že $|ST| = \frac{1}{3}r$. Odtud

$$b = \sqrt{(\tfrac{2}{3}r)^2 - (\tfrac{1}{3}r)^2} = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Zbývá vypočítat v'; ze vzorce pro obsah trojúhelníku OAC však plyne

$$|OC| \cdot v = 2S(OAC) = |AC| \cdot v',$$

takže

$$v' = \frac{rv}{|AC|}.$$

Celkem tedy dostáváme

$$V' = \frac{1}{3}\pi abv' = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{3}\,|AC| \cdot \frac{r}{\sqrt{3}} \cdot \frac{rv}{|AC|} = \frac{\pi r^2 v}{9\sqrt{3}},$$

a proto

$$\frac{V'}{V} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Protože $\frac{1}{3\sqrt{3}} < \frac{1}{2}$, je V' objem menší části kužele, a hledaný poměr je tedy roven $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

4.5 Připomeňme, že posloupnost uzlů $v_0, v_1, \ldots, v_n$ se nazývá *eulerovský tah*, pokud $v_i v_{i+1}$ je hrana pro každé $i = 0, 1, \ldots, n-1$ a pokud každá hrana grafu se v tahu vyskytne právě jednou (uzly se mohou na tahu opakovat). Tah je *uzavřený*, pokud $v_0 = v_n$. Známá Eulerova věta praví, že v souvislém grafu existuje uzavřený eulerovský tah, právě když všechny uzly mají sudý stupeň, a existuje neuzavřený tah, právě když právě dva uzly mají lichý stupeň. (Důkaz lze provést indukcí podle počtu hran nebo nalézt v každé základní učebnici teorie grafů.)

Uvědomme si, že pro správné vyřešení úlohy je třeba dokázat implikace

(1) $(p = 2 \vee q = 2 \vee r = 2) \Leftrightarrow D$,

(2) (alespoň 2 čísla sudá) $\Leftrightarrow D$,

(3) (alespoň 2 čísla lichá a $p \neq 2$, $q \neq 2$, $r \neq 2 \wedge pqr \neq 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow N$

a také

(4) $(p = 2 \vee q = 2 \vee r = 2) \Leftrightarrow \neg N$,

(5) (alespoň 2 čísla sudá) $\Leftrightarrow \neg N$,

(6) (alespoň 2 čísla lichá a $p \neq 2$, $q \neq 2$, $r \neq 2) \Leftrightarrow \neg D$,

kde jsme pro stručnost jako D označili výrok „kvádr lze složit tak, že koncové krychličky se dotýkají“, a jako N výrok „kvádr lze složit tak, že koncové krychličky se nedotýkají“, a $\neg$ značí negaci.

Umístěme kvádr $p \times q \times r$ v souřadné soustavě tak, aby vrcholy jednotkových krychliček byly mřížové body a vrcholy kvádru měly souřadnice $(0,0,0)$, $(p,0,0)$, ..., (p,q,r).

Uvažme nyní čtyři grafy:

G_1 s uzly $\{(x,y,z)\colon 0 \leqq x \leqq p, 0 \leqq y \leqq q, 0 \leqq z \leqq r, (x \equiv y \equiv z \equiv 0 \pmod 2) \vee (x \equiv y \equiv z \equiv 1 \pmod 2)\}$,

G_2 s uzly $\{(x,y,z)\colon 0 \leqq x \leqq p, 0 \leqq y \leqq q, 0 \leqq z \leqq r, (x \equiv 1 \pmod 2 \wedge y \equiv z \equiv 0 \pmod 2) \vee (x \equiv 0 \pmod 2 \wedge y \equiv z \equiv 1 \pmod 2)\}$,

G_3 s uzly $\{(x,y,z)\colon 0 \leqq x \leqq p, 0 \leqq y \leqq q, 0 \leqq z \leqq r, (x \equiv z \equiv 0 \pmod 2 \wedge y \equiv 1 \pmod 2) \vee (x \equiv z \equiv 1 \pmod 2 \wedge y \equiv 0 \pmod 2)\}$,

G_4 s uzly $\{(x,y,z)\colon 0 \leqq x \leqq p, 0 \leqq y \leqq q, 0 \leqq z \leqq r, (x \equiv y \equiv 0 \pmod 2 \wedge z \equiv 1 \pmod 2) \vee (x \equiv y \equiv 1 \pmod 2 \wedge z \equiv 0 \pmod 2)\}$.

Pro každý graf G_i platí, že (x,y,z) a (x',y',z') jsou spojeny hranou, právě když zároveň $|x-x'| = 1$, $|y-y'| = 1$ a $|z-z'| = 1$.

FAKT 1. *Hrany grafů G_i, $i = 1, 2, 3, 4$, odpovídají tělesovým úhlopříčkám jednotkových krychliček, a proto lze-li alespoň jeden z grafů G_i nakreslit jedním (uzavřeným) tahem, lze kvádr složit (tak, že se koncové krychličky dotýkají).*

FAKT 2. *Lze-li kvádr složit, pak nit provlečená krychličkami vytvoří eulerovský tah pro jeden z grafů G_i. Tento fakt je třeba dokázat, a to jednak, že všechny části nitě patří témuž G_i (indukcí dle nitě), jednak, že celý graf G_i je nakreslen (každá hrana G_i patří krychličce, a každá krychlička má jedinou tělesovou úhlopříčku, jež tvoří hranu G_i).*

FAKT 3. *Pro $i = 1, 2, 3, 4$ má každý uzel grafu G_i sudý stupeň, s výjimkou (případně) vrcholů kvádru. (Vnitřní* *vrcholy kvádru mají stupeň 8, vnitřní vrcholy stěn stupeň 4 a vrcholy ležící na hranách stupeň 2.)*

FAKT 4. *Graf G_i lze nakreslit jedním (resp. jedním uzavřeným) tahem, právě když nejvýše dva vrcholy kvádru jsou (resp. žádný jeho vrchol není) vrcholem G_i. (Uvědomte si, že každý G_i je souvislý a použijte Eulerovu větu.)*

DŮKAZ IMPLIKACE (2). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $p \equiv q \equiv 0 \pmod 2$. Potom žádný vrchol kvádru není vrcholem grafu G_2, dle faktu 4 lze G_2 nakreslit uzavřeným tahem a dle faktu 1 platí D.

DŮKAZ IMPLIKACE (3). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $p \equiv q \equiv 1 \pmod 2$. Potom graf G_1 má právě dva uzly kvádru, a to $[0,0,0]$, $[p,q,r]$, pokud r je liché, a $[0,0,0]$, $[0,0,r]$, pokud r je sudé. Kvádr tedy složit lze, navíc první krychlička obsahuje vrchol $[0,0,0]$ a poslední buď vrchol $[p,q,r]$, nebo $[0,0,r]$, takže se nedotýkají, neboť $pqr \neq 1$ a $p \neq 2$, $q \neq 2$, $r \neq 2$.

DŮKAZ IMPLIKACE (1). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $p = 2$; vzhledem k (2) stačí implikaci dokázat pro $q \equiv r \equiv 1 \pmod 2$. Pak ale G_1 obsahuje pouze dva vrcholy kvádru, a to $[0,0,0]$, $[2,0,0]$, podle faktu 4 a faktu 1 kvádr složit lze, a navíc koncové krychličky se dotýkají stěnou s vrcholy $[1,0,0]$, $[1,1,0]$, $[1,1,1]$, $[1,0,1]$.

DŮKAZ IMPLIKACE (5). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $p \equiv q \equiv 0 \pmod 2$. Pak G_2 a G_3 neobsahují žádný vrchol kvádru, takže je nelze nakreslit neuzavřeným eulerovským tahem, a proto v každém složení kvádru podle G_2 či G_3 se koncové krychličky dotýkají.

Graf G_1 obsahuje naopak aspoň 4 vrcholy kvádru ($[0,0,0]$, $[p,0,0]$, $[0,q,0]$, $[p,q,0]$), takže není eulerovský.

Podobně G_4 není eulerovský pro r liché, zatímco pro r sudé má všechny stupně sudé, tudíž nejde nakreslit neuzavřeným tahem.

DŮKAZ IMPLIKACE (4). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $p = 2$, a vzhledem k (5) nechť $p \equiv r \equiv$ $\equiv 1 \pmod 2$. Pak každý z grafů G_i obsahuje dva vrcholy kvádru, vždy vrcholy o vzdálenosti 2, které ve složeném kvádru odpovídají dotýkajícím se koncovým krychličkám.

DŮKAZ IMPLIKACE (6). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $p \equiv q \equiv 1 \pmod 2$. Potom každý z grafů G_i obsahuje právě dva vrcholy kvádru (pro r liché jsou to protější vrcholy, pro r sudé vrcholy spojené hranou délky r) a ve složení kvádru podle G_i se koncové krychličky nedotýkají.

Všimněte si zajímavé vlastnosti řešení. Pro každou trojici parametrů (p, q, r) platí buď D, nebo N, ale nikdy D i N současně. Na tom je založeno následující řešení:

Jiné řešení. Použijeme konstrukci grafů G_i, $i = 1, 2, 3, 4$, fakta 1–4 a navíc následující fakt.

FAKT 5. *Každý kvádr lze složit.*

DŮKAZ. Kvádr má 8 vrcholů, každý z nich náleží právě jednomu z grafů $G_1, \ldots, G_4$. Proto aspoň jeden z těchto grafů obsahuje nejvýše dva vrcholy kvádru, a tedy jej lze nakreslit jedním tahem. Podle tohoto tahu pak lze kvádr složit (netvrdíme nic o dotýkání koncových krychliček).

DŮKAZ IMPLIKACE (6). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $p \equiv 0 \pmod 2$, a tedy i $p > 2$. Předpokládejme, že kvádr je složen tak, že koncové krychličky se dotýkají. Uvažme rovinu $\varrho = \{(x, y, z)\colon x = t\}$, $0 < t <$

$< p$, $t \notin \mathbb{Z}$, která neprotíná žádnou koncovou krychličku. Obě krychličky pak leží ve stejném poloprostoru určeném rovinou ϱ, takže nit má s ϱ sudý počet průsečíků. Vrstva, kterou prochází rovina ϱ, má však $qr \equiv 1 \pmod 2$ krychliček a uvnitř každé z nich právě jeden průsečík nitě s ϱ. To je spor.

DŮKAZ IMPLIKACE (5). Jestliže lze kvádr složit tak, že koncové krychličky se nedotýkají, pak existuje vrstva, která tyto krychličky odděluje. Je-li ϱ rovina rovnoběžná s touto vrstvou, jež prochází jejím středem, má nit s ϱ lichý počet průsečíků, proto má tato vrstva lichý počet krychliček, takže alespoň dva rozměry kvádru jsou liché.

DŮKAZ IMPLIKACE (4). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $p = 2$, a vzhledem k (5) můžeme předpokládat, že $q \equiv r \equiv 1 \pmod 2$. Předpokládejme, že kvádr lze složit tak, že koncové krychličky se nedotýkají. Opět existuje vrstva, která tyto krychličky odděluje (viz předchozí odstavec). Protože $p = 2$, je tato rovina rovnoběžná s hranou délky p, a tudíž obsahuje pq (resp. pr) $\equiv 0 \pmod 2$ krychliček; to je spor.

DŮKAZ IMPLIKACÍ (1)–(3) nyní plyne přímo z (4)–(6) a faktu 5.

4.6 (A. Kuběna). Především existuje právě jedno takové $N \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ s požadovanou vlastností (kdyby existovala dvě $N_1 \neq N_2$, byl by součin $(1 + 2^p + 2^{n-p})(N_1 - N_2)$ dělitelný číslem 2^n, což nejde). Hledejme tedy zbytkovou třídu čísla N.

Zřejmě platí

$$(1 + 2^p + 2^{n-p})N \equiv (1 + 2^p)(1 + 2^{n-p})N \pmod{2^n}.$$

Víme ale, že $n = mp \geqq 2p$, takže $2n - 2p \geqq n$; je tedy

$$(1 + 2^{n-p})(1 - 2^{n-p}) = 1 - 2^{2n-2p} \equiv 1 \pmod{2^n}. \quad (1)$$

Zároveň ovšem platí

$$(2^p + 1)\big(1 - 2^p + 2^{2p} - \ldots + (-1)^{m-1}2^{n-p}\big) = 1 \pm 2^n \equiv$$
$$\equiv 1 \pmod{2^n}.$$

Odtud vidíme, že

$$N \equiv (1 - 2^{n-p})\big(1 - 2^p + 2^{2p} - \ldots + (-1)^{m-1}2^{n-p}\big) \pmod{2^n}.$$

Jednoduchým výpočtem snadno zjistíme, že číslo

$$N = 1 - 2^p + 2^{2p} - \ldots + (-1)^{m-1}2^{n-p} - 2^{n-p} + 2^n$$

splňuje požadavek $0 < N < 2^n$. Abychom dostali vyjádření čísla N v dvojkové soustavě, rozlišíme dva případy:

Je-li $m = \frac{n}{p}$ sudé, je

$$\begin{aligned} N = 2^n - 2^{n-p} - 2^{n-p} + 2^{n-2p} - \\ - 2^{n-3p} + \ldots + 2^{2p} - 2^p + 1) = \\ = 2^{n-p}(2^p - 2) + 2^{n-3p}(2^p - 1) + \\ + \ldots + 2^p(2^p - 1) + 1, \end{aligned}$$

takže N má v dvojkovém zápisu n číslic rozdělených do p-tic takto:

$$\underbrace{11\ldots10}_{p} \quad \underbrace{00\ldots0}_{p} \quad \underbrace{11\ldots1}_{p} \quad \ldots \quad \underbrace{11\ldots1}_{p} \quad \underbrace{00\ldots01}_{p}.$$

Je-li $m = \frac{n}{p}$ liché, vyjde

$$N = 2^n - 2^{n-p} + 2^{n-p} - 2^{n-2p} + 2^{n-3p} - \\ - 2^{n-4p} + \ldots + 2^{2p} - 2^p + 1 = \\ = 2^{n-p}(2^p - 1) + 2^{n-2p}(2^p - 1) + \\ + 2^{n-4p}(2^p - 1) + \ldots + 2^p(2^p - 1) + 1.$$

Dvojkový zápis N je tedy opět složen z n číslic po p-ticích

$$\underbrace{11\ldots1}_{p}\ \underbrace{11\ldots1}_{p}\ \underbrace{00\ldots0}_{p}\ \underbrace{11\ldots1}_{p}\ \ldots \\ \underbrace{00\ldots0}_{p}\ \underbrace{11\ldots1}_{p}\ \underbrace{00\ldots01}_{p}.$$

4.7 Protože p je kubický mnohočlen, platí $|p(x)/x| \to \infty$ pro $|x| \to \infty$, existuje tedy přirozené $M > |q_1|$ takové, že $|p(x)| \geqq |x|$ pro všechna x taková, že $|x| \geqq M$. To ale znamená, že pro žádné n nemůže být $q_n \geqq M$, protože pak by bylo $|q_{n-1}| = |p(q_n)| \geqq |q_n| \geqq M$, a jak snadno ověříme matematickou indukcí, i $|q_1| \geqq |q_2| \geqq \ldots \geqq |q_n| \geqq M$.

Předpokládejme nejprve, že $(q_k)_{k \geqq 1}$ je posloupnost celých čísel. Podle předchozího výsledku to ale znamená, že taková posloupnost nabývá jen konečného počtu $N \leqq 2M + 1$ hodnot. Pro každé $m \geqq 1$ tedy najdeme k_m, $1 \leqq k_m \leqq N$, takové, že $q_m = q_{m+k_m}$. Protože i odpovídajících hodnot k_m je jen konečný počet, je jasné, že pro vhodné k platí rovnost $q_m = q_{m+k}$ pro nekonečný počet $m \geqq 1$. Pro libovolné $n < < m$ pak ovšem máme

$$q_n = p(q_{n+1}) = \ldots = p_{m-n}(q_m) = \\ = p_{m-n}(q_{m+k}) = \ldots = p(q_{n+k+1}) = q_{n+k},$$

kde $p_1(x) = p(x)$ a $p_{j+1}(x) = p(p_j(x))$ pro $j \geqq 1$. Odtud hned plyne, že $q_{n+k} = q_n$ pro každé $n \geqq 1$.

Za předpokladu, že q_k jsou celá čísla, je tvrzení úlohy dokázáno. Předpokládejme teď, že $q_k = \dfrac{r_k}{s_k}$ jsou racionální čísla (r_k a s_k jsou nesoudělná celá čísla) a že kubický mnohočlen p má tvar

$$p(x) = \frac{1}{e}\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right), \tag{1}$$

kde a, b, c, d a $e > 0$ jsou celá čísla. Uvažujme prvočíslo q, které dělí jmenovatel s_k některého členu posloupnosti (q_k). Ukážeme, že mocniny daného prvočísla q, v nichž dělí jednotlivé jmenovatele, jsou shora ohraničeny, tj. že pro každé takové q existuje μ takové, pro něž $q^{\mu+1}$ nedělí žádný ze jmenovatelů s_k.

Předpokládejme naopak, že tomu tak není. Je-li tedy $a = Aq^\alpha$, $b = Bq^\beta$, $c = Cq^\gamma$, $d = Dq^\delta$, $e = Eq^\varepsilon$ a $s_i = m_i q^{\mu_i}$, kde A, B, C, D, E a m_i jsou celá čísla s q nesoudělná, a k libovolné takové, že $\mu_k > \mu_1$. Potom můžeme psát

$$\begin{aligned} q_{k-1} &= p(q_k) = p\left(\frac{r_k}{s_k}\right) = \\ &= \frac{1}{e}\left(Aq^\alpha \frac{r_k^3}{q^{3\mu_k} m_k^3} + Bq^\beta \frac{r_k^2}{q^{2\mu_k} m_k^2} + \right. \\ &\quad \left. + Cq^\gamma \frac{r_k}{q^{\mu_k} m_k} + Dq^\delta\right) = \\ &= \frac{1}{Em_k^3 q^{3\mu_k - \alpha + \varepsilon}}\left(Ar_k^3 + Bm_k r_k^2 q^{\mu_k + \beta - \alpha} + \right. \\ &\quad \left. + Cm_k^2 r_k q^{2\mu_k + \gamma - \alpha} + Dm_k^3 q^{3\mu_k + \delta - \alpha}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Nyní stačí vybrat k tak, aby čitatel r_{k-1} byl s q nesoudělný a aby bylo $\mu_{k-1} > \mu_k$; tomu snadno vyhovíme (za předpokladu, že μ_k nejsou shora ohraničeny) volbou μ_k, pro něž

$$\mu_k > \mu_1,\ 2\mu_k > \alpha,\ \mu_k > \alpha - \beta,\ 2\mu_k > \alpha - \gamma,\ 3\mu_k > \alpha - \delta.$$

Je jasné, že takto postupně dostaneme $\mu_k < \mu_{k-1} < \ldots < < \mu_1$, což odporuje volbě μ_k.

Je-li tedy teď q_i ten prvek posloupnosti (q_k), jehož jmenovatel obsahuje dané prvočíslo q v nejvyšší mocnině $\mu > 0$, je buď $i = 1$, anebo vyjde ze vztahu (2), že $3\mu - \alpha + \varepsilon \leqq \mu$, tj. $\alpha \geqq 2\mu + \varepsilon > 0$. Vidíme, že každé takové prvočíslo q dělí buď q_1, anebo koeficient a mnohočlenu p. Prvočísel q, jež dělí jmenovatele jednotlivých členů posloupnosti (q_k), je tudíž jen konečný počet a jejich mocniny jsou ohraničeny jedním číslem. Odtud plyne, že existuje společný jmenovatel Q všech q_k, a pro každé $k \geqq 1$ můžeme psát $q_k = \dfrac{Q_k}{Q}$.

Pro libovolné $k \geqq 1$ je tedy

$$\begin{aligned}\frac{Q_{k-1}}{Q} &= q_{k-1} = p(q_k) = p\left(\frac{Q_k}{Q}\right) = \\ &= \frac{1}{e}\left(a\frac{Q_k^3}{Q^3} + b\frac{Q_k^2}{Q^2} + c\frac{Q_k}{Q} + d\right) = \\ &= \frac{1}{Q}P(Q_k)\end{aligned}$$

pro kubický mnohočlen

$$P(x) = \frac{1}{Q^2 e}\left(ax^3 + (bQ)x^2 + (cQ^2)x + dQ^3\right).$$

Tento kubický mnohočlen splňuje rovněž předpoklady úlohy s posloupností (Q_k) celých čísel, která je podle předchozího výsledku periodická. Je tedy i posloupnost (q_k) periodická a důkaz je hotov.

Uvedeme ještě stručně řešení, které celý uvedený postup skrývá v šikovném použití věty o racionálních kořenech mnohočlenu (zde doporučujeme ke studiu výbornou knížku I. Korce *Úlohy o velkých číslech*, ŠMM č. 61).

Jiné řešení (stručně). Z předchozího řešení už víme, že členy posloupnosti (q_k) leží v ohraničeném intervalu. Předpokládejme, že mnohočlen p má tvar (1) a $q_1 = \frac{r}{s}$, kde r, s jsou nesoudělná celá čísla. Ukážeme, že pro $N = sa$ je Nq_k celé číslo pro každé $k \geqq 1$.

To je jasné pro $k = 1$. Předpokládejme, že Nq_k je pro nějaké $k \geqq 1$ celé, a protože $q_k = p(q_{k+1})$, je Nq_{k+1} kořenem mnohočlenu

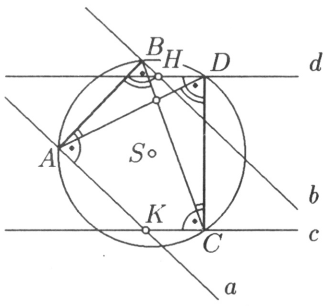
$$\begin{aligned}\frac{e}{a}N^3\left(p\left(\frac{x}{N}\right) - q_k\right) = x^3 + (sb)x^2 + (s^2ac)x &+ \\ + \left((s^3a^2d) - (s^2ae)(Nq_k)\right)&\end{aligned}$$

s celočíselnými koeficienty. Podle zmíněné věty má tento mnohočlen jedině celočíselné racionální kořeny (to plyne z toho, že jmenovatel každého racionálního kořenu musí dělit koeficient u nejvyšší mocniny neznámé), takže Nq_{k+1} je celé číslo. Podle principu matematické indukce je Nq_k celé pro každé $k \geqq 1$.

Protože mezi čísly v absolutní hodnotě menšími než M je pouze $2M|N| - 1$ celočíselných násobků $\frac{1}{N}$, je zřejmé, že posloupnost (q_k) má pouze konečný počet hodnot. Dále postupujeme jako v předchozím řešení.

5.1 Označme a, b kolmice k přímce AB vztyčené v bodech A, B a c, d kolmice k přímce CD vztyčené v bodech C, D (obr. 55). Zřejmě $K = a \cap c$, $H = b \cap d$.

Nechť S je střed dané kružnice. Protože úsečka AB je tětivou této kružnice, mají přímky a a b od S stejnou vzdálenost; jinými slovy, označíme-li κ středovou symetrii podle bodu S, platí $\kappa(a) = b$. Podobně $\kappa(c) = d$. Odtud plyne $\kappa(a \cap c) = b \cap d$, neboli $\kappa(K) = H$, takže body K, S a H leží na jedné přímce. Tím je dokázáno první tvrzení.



Obr. 55

Označme P průsečík přímek AD a BC (pokud existuje). Bod P může ležet uvnitř, vně i na dané kružnici. Leží-li na ní, je $P = B = D = H$ a tvrzení triviálně platí. Ve zbývajících dvou případech vždy $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CPD|$ a navíc, podle věty o obvodových úhlech, $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle CDP|$ a $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle DCP|$. Odtud plyne, že trojúhelníky ABP

a CDP jsou podobné. Musí tedy platit

$$\frac{\text{vzdálenost } P \text{ od } a}{\text{vzdálenost } P \text{ od } b} = \frac{\text{vzdálenost } P \text{ od } c}{\text{vzdálenost } P \text{ od } d}.$$

Existuje tudíž stejnolehlost κ' se středem v P taková, že

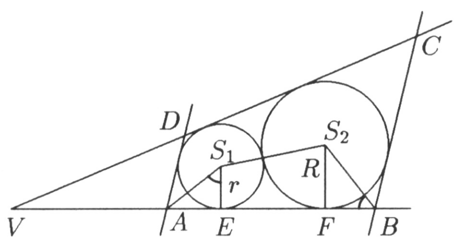
$$\kappa'(a) = b \quad \text{a} \quad \kappa'(c) = d.$$

Pak ale opět

$$\kappa'(K) = \kappa'(a \cap c) = b \cap d = H,$$

takže body K, H a P leží na jedné přímce.

5.2 Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $R \geqq r$. Nechť $ABCD$ je nějaký lichoběžník splňující podmínky úlohy. Vrcholy označme tak, aby BC byla základna a $|BC| \geqq |AD|$. Přímky, na nichž leží ramena AB a CD, jsou zřejmě společné tečny k daným kružnicím, jež neprocházejí body dotyku (obr. 56). Podle Pythagorovy věty platí



Obr. 56

$$|EF|^2 = |S_1S_2|^2 - (R-r)^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr,$$

takže $|EF| = 2\sqrt{Rr}$. Protože

$$|\sphericalangle FBS_2| = \frac{1}{2}\,|\sphericalangle FBC| = \frac{1}{2}\,(\pi - |\sphericalangle EAD|) =$$
$$= \frac{\pi}{2} - |\sphericalangle EAS_1| = |\sphericalangle ES_1A|,$$

plyne z podobnosti příslušných pravoúhlých trojúhelníků rovnost

$$\frac{|FB|}{R} = \frac{r}{|AE|}.$$

Zavedeme-li označení $|AE| = a$, bude délka ramene AB rovna

$$\begin{aligned} |AB| &= |AE| + |EF| + |FB| = \\ &= a + 2\sqrt{Rr} + \frac{Rr}{a} = \\ &= \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{a}}\right)^2 + 4\sqrt{Rr} \geqq 4\sqrt{Rr}, \end{aligned} \tag{1}$$

přičemž rovnost může nastat jen pro $a = \sqrt{Rr}$.

Jestliže $R = r$, lze najít lichoběžník s libovolným kladným a. Speciálně tedy existuje lichoběžník s $a = \sqrt{Rr}$, a jeho rameno AB má tedy nejmenší možnou délku $4\sqrt{Rr}$.

Jestliže $R > r$, může a probíhat pouze interval $0 < a < |VE|$, kde V je průsečík přímek AB a CD. Z podobnosti $\triangle VES_1 \sim \triangle VFS_2$ plyne

$$\frac{|VE|}{r} = \frac{|VE| + |EF|}{R},$$

odkud

$$|VE| = \frac{r}{R-r}\,|EF| = \frac{2r\sqrt{Rr}}{R-r}.$$

Z předchozí rovnosti vidíme, že $a = \sqrt{Rr} < |VE|$, právě když $R < 3r$; pro $R < 3r$ tedy opět existuje lichoběžník s $a = \sqrt{Rr}$ a jeho rameno má díky (1) minimální možnou délku $4\sqrt{Rr}$. Zbývá vyšetřit případ, kdy $R \geqq 3r$, a tedy $\sqrt{Rr} \geqq |VE|$. Všimněme si, že funkce $a \mapsto \sqrt{a} - \sqrt{Rr/a}$ je pro kladná a rostoucí (když se a zvětší, $\sqrt{a}$ se zvětší a $\sqrt{Rr/a}$ se zmenší); kromě toho je záporná pro $a < \sqrt{Rr}$ a kladná pro $a > \sqrt{Rr}$. Protože v uvedeném případě je $0 < a < |VE| \leqq \sqrt{Rr}$, plyne odtud nerovnost

$$\sqrt{a} - \sqrt{\frac{Rr}{a}} < \sqrt{|VE|} - \sqrt{\frac{Rr}{|VE|}} \leqq 0,$$

takže

$$\begin{aligned} |AB| &= \left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{Rr}{a}}\right)^2 + 4\sqrt{Rr} > \\ &> \left(\sqrt{|VE|} - \sqrt{\frac{Rr}{|VE|}}\right)^2 + 4\sqrt{Rr} = \\ &= \frac{(R+r)^2}{2r(R-r)}\sqrt{Rr}. \end{aligned}$$

Rovnost zde nemůže nikdy nastat; když se však a bude blížit k $|VE|$ (to znamená, že A se blíží k V), bude se levá strana nerovnosti v limitě blížit pravé straně.

Zjistili jsme tedy, že když $R < 3r$, je nejmenší možná délka ramene rovna $4\sqrt{Rr}$. Když $R \geqq 3r$, nejmenší možná délka ramene neexistuje (nenabývá se); existuje pouze infimum všech možných délek, a to je rovno $\frac{(R+r)^2}{2r(R-r)}\sqrt{Rr}$.

5.3 (podle Z. Pezlara). Uvažujme výraz $v = 36^k - 5^l$. Je

$$v \equiv -(6-1)^l \equiv (-1)^{l+1} \pmod 6$$
$$v \equiv (35+1)^k \equiv 1 \pmod 5,$$

tedy

$$v \equiv 1 \quad \text{nebo} \quad v \equiv 11 \pmod{30}. \tag{1}$$

Protože $36 - 25 = 11$, stačí uvažovat už jen $|v| < 11$, což podle (1) dává $v = 1$. To by ale muselo být $36^k - 5^l = 1$, neboli $5^l = (6^k - 1)(6^k + 1)$, takže $6^k - 1 = 5^i$ a $6^k + 1 = 5^j$, odkud plyne $2 = 5^j - 5^i$, což zjevně nemůže nastat (stačí probrat jednotlivé možnosti mod 5). Minimální hodnota $|v|$ je tedy $11 = |36 - 5^2|$.

Nyní uvažujme $v = 53^k - 37^l$. Pak

$$v \equiv (52+1)^k - (36+1)^l \equiv 0 \pmod 4$$
$$v \equiv (54-1)^k - (36+1)^k \equiv (-1)^k - 1 \pmod 9,$$

tedy

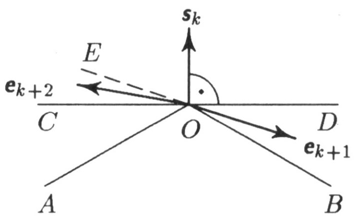
$$v \equiv 0 \quad \text{nebo} \quad v \equiv 16 \pmod{36}. \tag{2}$$

Protože $53 - 37 = 16$, stačí dál uvažovat jen $|v| < 16$, což podle (2) dává $v = 0$. Pak ale $53^k = 37^l$, což ale zjevně neplatí, neboť $(53, 37) = 1$. Minimální hodnota $|v|$ je tudíž $16 = |53 - 37|$.

5.4 Především si uvědomme, že vektory, jejichž součtem je nulový vektor, nemohou při umístění do jednoho bodu všechny ležet jen v jedné z polorovin určených přímkou procházející společným počátkem (pokud ovšem neleží všechny v jedné přímce). Tento jednoduchý postřeh budeme často používat.

Umístěme všechny vektory do počátku kartézské soustavy souřadnic a předpokládejme, že pro $k \geqq 1$ vektor $\boldsymbol{s}_k = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{e}_i$ splňuje nerovnost $|\boldsymbol{s}_k| \leqq 1$. Pokud mezi zbývajícími jednotkovými vektory některý svírá s vektorem $\boldsymbol{s}_k$ úhel alespoň 120° (leží tedy v úhlu AOB, obr. 57), zřejmě pro takový vektor $\boldsymbol{e}_{k+1}$ platí

$$|\boldsymbol{s}_{k+1}| = |\boldsymbol{s}_k + \boldsymbol{e}_{k+1}| \leqq 1.$$

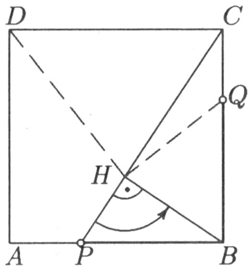


Obr. 57

Pokud v úhlu AOB žádný vektor neleží, musí některý z vektorů ležet v polorovině CDB, kde CD je přímka kolmá na $\boldsymbol{s}_k$ procházející počátkem; tedy v jednom z úhlů BOD nebo AOC leží některý z daných vektorů. Označme jako $\boldsymbol{e}_{k+1}$ ten vektor, který svírá s $\boldsymbol{s}_k$ největší úhel (bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že leží např. v úhlu BOD). Označíme-li E ten bod, pro který $\boldsymbol{OE} = -\boldsymbol{e}_{k+1}$, musí i v úhlu EOA ležet jeden z daných vektorů. Ten označíme e_{k+2}. Protože oba takto vybrané vektory $\mathbf{e}_{k+1}$ a $\mathbf{e}_{k+2}$ svírají úhel aspoň $120°$, je jasné, že je $|\mathbf{e}_{k+1}+\mathbf{e}_{k+2}| \leqq 1$ a zároveň $|\mathbf{s}_k + \mathbf{e}_{k+1} + \mathbf{e}_{k+2}| \leqq 1$, protože součet obou vektorů $\mathbf{e}_{k+1} + \mathbf{e}_{k+2}$ leží v úhlu AOB; současně ale platí $|\mathbf{s}_k + \mathbf{e}_{k+1}| < \sqrt{2}$ (rovnost nemůže nastat, protože to by pak musely všechny vektory ležet v polorovině opačné k CDA obsahující vektor $\mathbf{s}_k$).

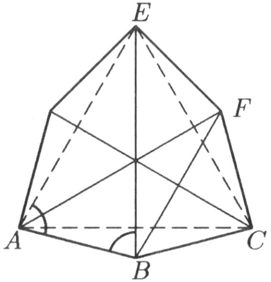
Je jasné, že uvedeným postupem lze dané vektory uspořádat tak, že velikost jejich součtu nikdy nedosáhne $\sqrt{2}$.

5.5 (podle Š. Kasala). Uvažujme zobrazení $\mathcal{H}$ složené z otočení se středem v H o orientovaný úhel PHB (který je pravý) a stejnolehlosti se středem v H a koeficientem $\frac{|BC|}{|PB|}$ (obr. 58). Potom jistě platí, že $\mathcal{H}$ zobrazí trojúhelník PHB na trojúhelník BHC ($\mathcal{H}(B) = C$), a navíc pro $\mathcal{H}(p) = p'$ je $p \perp p'$. Bod Q se tedy zobrazí na nějaký bod přímky CD. Protože $\frac{|CD|}{|BQ|} = \frac{|CB|}{|PB|}$ a zároveň souhlasí i orientace obou úseček, je $\mathcal{H}(Q) = D$, tedy $\mathcal{H}(HQ) = HD$. Odpovídající si úsečky v zobrazení $\mathcal{H}$ jsou navzájem kolmé, je tedy $HQ \perp HD$, takže úhel DHQ je pravý.

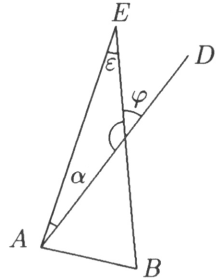


Obr. 58

5.6 Na první otázku je záporná odpověď, což ukážeme na tomto příkladu: Vytvořme šestiúhelník $ABCDEF$ z rovnostranného trojúhelníku ACE o straně 2 přidáním shodných rovnoramenných trojúhelníků ABC, CDE a EFA (se základnami AC, CE, EA). Výšku těchto trojúhelníků zvolme tak, aby platilo $|AD| = |CF| = |EB| = 2$ (obr. 59). Všechny strany takového šestiúhelníku mají velikost $|AB| = a > 1$, všechny úhlopříčky kromě BD, DF, FB mají velikost 2.



Obr. 59



Obr. 60

Snadno ukážeme, že $|BD| = |DF| = |FB| < 2$. V trojúhelníku ABD je $|\sphericalangle DAB| < \alpha < |\sphericalangle ABD|$, a proto $|BD| < |AD| = 2$.

Dokonce můžeme šestiúhelník zmenšit v podobnosti tak, aby délka strany zůstala větší než jedna $\left(\text{např. v poměru } \frac{a - \frac{a-1}{2}}{a}\right)$, ale všechny úhlopříčky měly délku menší než dvě.

Na druhou otázku je odpověď kladná. Uveďme řešení dle M. Konečného.

Předpokládejme naopak, že $|AD| > 2$, $|BE| > 2$, $|CF| > > 2$, ale všechny strany mají délku nejvýše 1. Jsou-li φ, ε, α úhly podle obr. 60, pak $d(B, AE) \leqq |AB| \leqq 1$, takže $\sin\varepsilon = = \frac{d(B,AE)}{|EB|} < \frac{1}{2}$; podobně dostaneme i nerovnost $\sin\alpha < \frac{1}{2}$, tedy $\varepsilon < 30°$, $\alpha < 30°$, a proto $\varphi = \alpha + \varepsilon < 60°$.

Obdobně dokážeme, že i druhé dvě dvojice úhlopříček AD, CF a BE, CF svírají úhel menší než $60°$. To je ale spor, neboť součet těchto tří úhlů je $180°$.

5.7 Označme čísla na kružnici po řadě $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dotaz je tříprvková množina $\mathsf{T} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, odpovědí na dotaz T je součin $s_{\mathsf{T}} = \prod_{i\in\mathsf{T}} a_i$. Chceme-li dokázat, že k určení součinu $s = \prod_{i=1}^{n} a_i$ stačí a je potřeba p dotazů, musíme dokázat dvě věci:

(I) Existuje systém tříprvkových množin $\mathcal{T} \subset \{\mathsf{T} : \mathsf{T} \subset \subset \{1, 2, \ldots, n\}, |\mathsf{T}| = 3\}$ takový, že $|\mathcal{T}| \leqq p$, a zároveň pro každé dvě n-tice $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n) \in \in \{-1, 1\}^n$, kde $\prod_{i\in\mathsf{T}} a_i = \prod_{i\in\mathsf{T}} b_i$ pro všechna $t \in \mathcal{T}$, platí

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} b_i.$$

(II) Pro každý systém dotazů $\mathcal{T} \subset \{\mathsf{T} : \mathsf{T} \subset \{1, 2, \ldots, n\}, |\mathsf{T}| = 3\}$ takový, že $|\mathcal{T}| < p$, existují dvě n-tice $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n) \in \{-1, 1\}^n$, pro něž

$$\prod_{i\in\mathsf{T}} a_i = \prod_{i\in\mathsf{T}} b_i$$

pro každé $\mathsf{T} \in \mathcal{T}$, ale

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \neq \prod_{i=1}^{n} b_i.$$

Nejjednodušší způsob, jak zařídit část (I), je najít takový systém $\mathcal{T}$, že

$$\prod_{\mathsf{T} \in \mathcal{T}} \prod_{i \in \mathsf{T}} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i. \tag{1}$$

Položíme-li $t_i = \left|\{\mathsf{T} : a_i \in \mathsf{T} \in \mathcal{T}\}\right|$, pak

$$\prod_{\mathsf{T} \in \mathcal{T}} \prod_{i \in \mathsf{T}} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i^{t_i},$$

což je rovno $\prod_{i=1}^{n} a_i$, pokud $t_i \equiv 1 \pmod 2$ pro každé i, tj. pokud každé číslo a_i leží v lichém počtu dotazů. Je možná překvapující, že tento jednoduchý postup vede vždy k minimálnímu počtu dotazů.

Řešení. Úplná odpověď je vyjádřena tabulkou

	$n \equiv 0 \pmod 3$	$n \equiv 1 \pmod 3 \wedge n > 4$	$n = 4$	$n \equiv 2 \pmod 3$
(a)	$\frac{n}{3}$	$\frac{n+2}{3}$	4	$\frac{n+4}{3}$
(b)	$\frac{n}{3}$	n	4	n

$n \equiv 0 \pmod 3$. Aby bylo lze jednoznačně určit součin všech čísel, musí se každé číslo vyskytnout alespoň v jednom dotazu (jinak stačí změnit znaménko u čísla, jež se v žádném dotazu nevyskytuje). Proto je vždy potřeba alespoň $p \geqq \frac{n}{3}$ dotazů. Je-li n dělitelné třemi, splňuje systém dotazů $\mathcal{T} = \{\{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \dots, \{n-2, n-1, n\}\}$ podmínku (I), a tedy $p = \frac{n}{3}$ jak v případě (a), tak i v případě (b).

(b), $n \not\equiv 0 \pmod 3$. Jsou-li povoleny pouze dotazy na čísla jdoucí po sobě, je maximální možný systém dotazů

$$\mathcal{T}_{\max} = \{\{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \dots, \{n,1,2\}\}.$$

Je-li $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\max}$, $|\mathcal{T}| < |\mathcal{T}_{\max}|$, je bez újmy na obecnosti $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}' = \mathcal{T}_{\max} \setminus \{\{1,2,3\}\}$. Ukážeme, že pro $\mathcal{T}'$ (a tudíž i pro $\mathcal{T}$) platí tvrzení z (II): za jednu n-tici zvolíme např. $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$, v druhé položíme

$$b_i = \begin{cases} +1 & \text{pro } i = 4, 7, \dots, n, \\ -1 & \text{jinak,} \end{cases}$$

pokud $n \equiv 1 \pmod 3$, a

$$b_i = \begin{cases} +1 & \text{pro } i = 3, 6, \dots, n-2 \text{ a } i = 1, \\ -1 & \text{jinak,} \end{cases}$$

je-li $n \equiv 2 \pmod 3$.

V obou těchto případech je

$$\prod_{i \in \mathsf{T}} a_i = \prod_{i \in \mathsf{T}} b_i = 1$$

pro každé $\mathsf{T} \in \mathcal{T}'$, ale

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = 1 \neq -1 = \prod_{i=1}^{n} b_i.$$

Proto je nutně potřeba $p \geqq n = |\mathcal{T}_{\max}|$ dotazů.

Ovšem n dotazů stačí, protože pro $\mathcal{T}_{\max}$ je

$$\prod_{\mathsf{T} \in \mathcal{T}_{\max}} \prod_{i \in \mathsf{T}} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i^3 = \prod_{i=1}^{n} a_i .$$

(a), $n \equiv 1 \pmod 3$. Pro $n = 4$ je každý dotaz typu (b), a podle již dokázaného je $p = 4$.

Pro $n > 4$ potřebujeme $p \geqq \frac{n}{3}$, tedy $p \geqq \frac{n+2}{3}$ dotazů, přičemž tento počet dotazů stačí. Systém $\mathcal{T} = \big\{\{1,2,3\}, \{1,4,5\}, \{1,6,7\}, \{8,9,10\}, \dots, \{n-2, n-1, n\}\big\}$ má mohutnost $\frac{n+2}{3}$ a splňuje

$$\prod_{\mathsf{T} \in \mathcal{T}} \prod_{i \in \mathsf{T}} a_i = a_1^3 \prod_{i=2}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i .$$

(a), $n \equiv 2 \pmod 3$. Opět potřebujeme alespoň $\lceil \frac{n}{3} \rceil = \frac{n+1}{3}$ dotazů, abychom se na každé číslo dotázali alespoň jednou. Tentokrát však tento počet nestačí. Mějme totiž systém $\mathcal{T}$ mohutnosti $\frac{n+1}{3}$. Aby pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ existovalo $\mathsf{T} \in \mathcal{T}$ obsahující i, bez újmy na obecnosti musí být (jinak pozice přečíslujeme) $\mathcal{T} = \big\{\{1,2,3\}, \{1,4,5\}, \{6,7,8\}, \dots, \{n-2, n-1, n\}\big\}$. Pak ale n-tice

$$a_i = +1 \qquad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n,$$

$$b_i = \begin{cases} -1 & \text{pro } i = 1, 2, 4, \\ +1 & \text{jinak} \end{cases}$$

splňují

$$\prod_{i \in \mathsf{T}} a_i = \prod_{i \in \mathsf{T}} b_i = 1$$

pro každé $\mathsf{T} \in \mathcal{T}$, ale

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = 1 \neq -1 = \prod_{i=1}^{n} b_i.$$

Tudíž je třeba $p \geqq \frac{n+4}{3}$ dotazů. Tento počet dotazů stačí, viz např. $\mathcal{T} = \big\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{6,7,8\},\ldots,$ $\{n-2,n-1,n\}\big\}$, kterýžto systém splňuje (1).