39. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategória Z5Category Z5

In: Milan Koman (editor); Vladimír Repáš (editor): 39. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1989/90. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1992. pp. 88–102.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404919

Kategória Z5

ÚLOHY I. KOLA

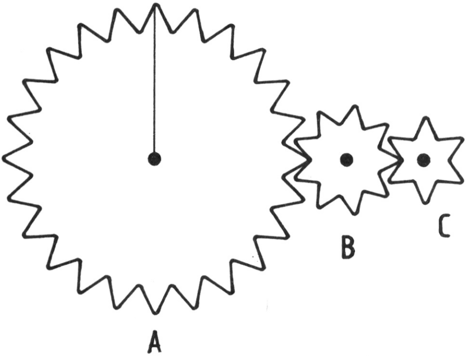
(Riešenia úloh na str. 92)

Z5 – I – 1

Peter a Paľo si boli kúpiť v cukrárni čokoládu. Domov sa však vrátili naprázdno. Peter povedal: „Chýbala mi 1 Kčs.“ Paľo povedal: „Aj ja som mal málo peňazí. Mne chýbalo 9 Kčs. A keď sme dali peniaze dohromady, aj tak sme nemali dosť ani len na jedinú čokoládu.“ „Ste obyčajný nenásytníci a klamári,“ nazlostila sa ich sestra Dana, „spolu ste museli mať dosť peňazí.“ Mala Dana pravdu? Ak áno, odôvodnite, ak nie, koľko mohla stáť čokoláda?

Z5 – I – 2

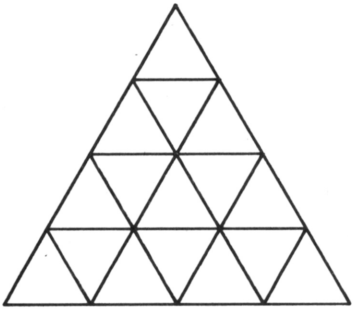
Peter nosil staré náramkové hodinky. Rozobral ich a z troch ozubených koliesok A, B, C zostavil súkolie (obr. 32). Počet zubov na jednotlivých kolieskach je 24, 9, 6. Na najväčšom koliesku je ryskou vyznačená minútová ručička. Koľkokrát musíme otočiť koliesko C, aby sa minútová ručička otočila o 1 hodinu a 45 minút?



Obr. 32

Z5 – I – 3

Koľko trojuholníkov je na obrázku 33?



Obr. 33

Z5 – I – 4

Zostroj body A, B vzdialené od seba 8 cm. Ďalej už nesmieš merať! Môžeš pracovať len s kružidlom a pravítkom bez mierky. Zostroj trojuholník so stranami dĺžky 13 cm, 14 cm, 15 cm. Presne opíš postup konštrukcie.

Z5 – I – 5

Keď k neznámemu štvorcifernému číslu pripočítam jeho desatinu a stotinu, dostanem číslo 4 773. Ktoré je to číslo?

Z5 – I – 6

V zápise

$$200 - 199 + 198 - 197 + \ldots + 6 - 5 + 4 - 3 + 2 - 1) =$$

sú vedľa seba napísané všetky prirodzené čísla od 200 až po 1. Medzi nimi sa striedajú znamienka +, –. Na konci je jedna pravá zátvorka. Kde treba umiestniť chýbajúcu ľavú zátvorku, aby ste dostali výsledok a) 73, b) 72?

ÚLOHY II. KOLA

(Riešenia úloh na str. 100)

Z5 – II – 1

Máme nasledujúcu pravideľnosť 150 čísel 508, 505, 502, 499, 496, ... 4, 1. Z nej vytvoríme výraz

$$508 - 505 + 502 - 499 + 496 - \ldots$$

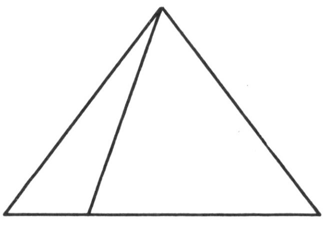
Koľko členov musí mať tento výraz, aby jeho výsledok bol a) 141, b) 142?

Z5 – II – 2

Ak od neznámeho trojciferného čísla odčítam jeho polovicu a jeho štvrtinu, dostanem číslo 148,5. Ktoré je to trojciferné číslo?

Z5 – II – 3

Trojuholník som rozdelil jednou úsečkou tak, že na obrázku 34 boli 3 trojuholníky.



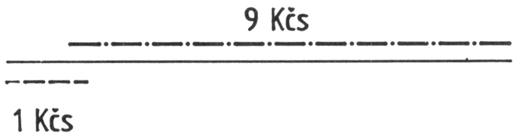
Obr. 34

Možno trojuholník rozdeliť dvomi úsečkami tak, aby na obrázku boli 3 (4, 5, 6, 8) trojuholníky? Ku každej možnosti nakreslite obrázok.

RIEŠENIA ÚLOH I. KOLA

Riešenie úlohy Z5–I–1 (str. 88)

Predpokladajme, že chlapci neklamali a naozaj nemali dosť peňazí. Znázornime si situáciu obrázkom 35. (Úsečka znázorňuje cenu čokolády; – – – čo chýbalo Petrovi; – · – · čo chýbalo Paľovi.)



Obr. 35

Zrejme Paľo musel mať menej ako 1 Kčs, čiže najviac 95 hal. a najmenej 5 hal. Čokoláda teda mohla stáť 9,05 Kčs (potom Peter by mal 8,05 Kčs a Paľo 0,05 Kčs), 9,10 Kčs, atď. až 9,95 Kčs. Dana nemala pravdu. Ani spolu nemuseli mať chlapci dosť peňazí.

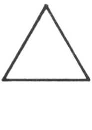
Riešenie úlohy Z5–I–2 (str. 88)

Ak sa má minútová ručička otočiť o 1 hodinu a 45 minút, tak sa koliesko A musí otočiť raz celkom a druhý raz do troch štvrtín. To je spolu o $24 + \frac{3}{4} \cdot 24 = 42$ zubov. Koliesko C sa musí otočiť o ten istý počet zubov; má 6 zubov a teda sa otočí $42 : 6 = 7$krát.

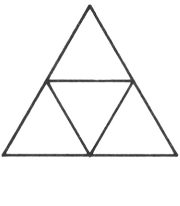
Koliesko C musíme otočiť 7krát.

Riešenie úlohy Z5–I–3 (str. 89)

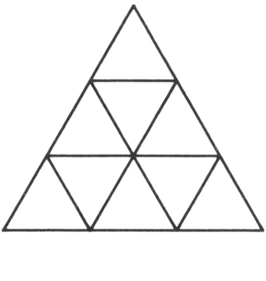
Na obrázku 33 (str. 89) je 16 malých (základných) trojuholníkov (obr. 36a), 7 trojuholníkov tvorených štyrmi základnými trojuholníkmi (obr. 36b), 3 trojuholníky tvorené deviatimi základnými trojuholníkmi (obr. 36c) a 1 veľký „celý“ trojuholník. To je spolu 31 trojuholníkov.



Obr. 36a



Obr. 36b

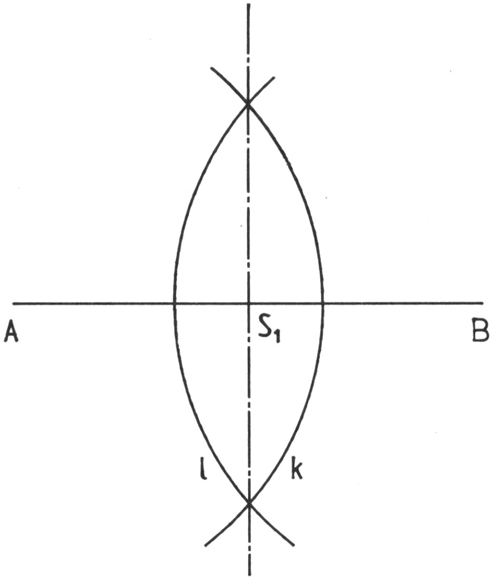


Obr. 36c

Na obrázku 33 je 31 trojuholníkov.

Riešenie úlohy Z5–I–4 (str. 90)

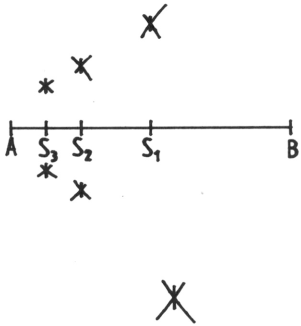
K zostrojeniu trojuholníka stačí poznať úsečky (ich dĺžky) jeho strán. Tieto dostaneme postupným pridávaním vhodných dĺžok, ktoré dostaneme postupným delením úsečky AB na polovice.



Obr. 37

Stred úsečky AB zostrojíme pomocou kružidla a pravítka: z bodov A, B zostrojíme kružnice k, l s rovnakým polomerom väčším ako polovica úsečky AB. Prieniky kružníc

k, l určujú priamku, ktorá je osou úsečky AB. Táto os pretne úsečku AB v jej strede S_1 (obr. 37). Potom podobne zostrojíme os a stred S_2 úsečky AS_1 a os a stred S_3 úsečky AS_2 (obr. 38). Zrejme platí $|AB| = 8\,\text{cm}$, $|AS_1| = 4\,\text{cm}$, $|AS_2| = 2\,\text{cm}$ a $|AS_3| = 1\,\text{cm}$.



Obr. 38

Teraz na polpriamku AB nanesieme pomocou kružidla úsečky AB_1, AB_2, AB_3 tak, že

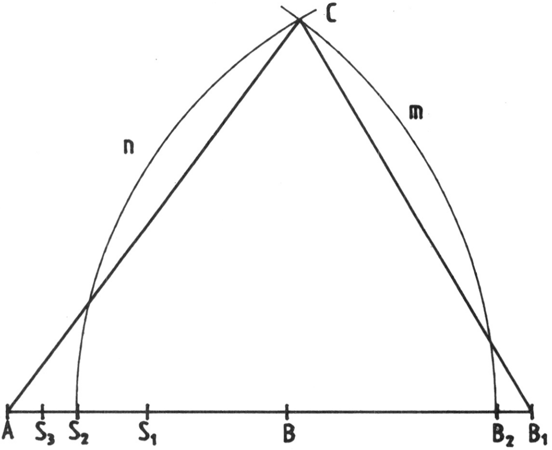
$$|AB_1| = |AB| + |BS_3| = 8\,\text{cm} + 7\,\text{cm} = 15\,\text{cm},$$
$$|AB_2| = |AB| + |BS_2| = 8\,\text{cm} + 6\,\text{cm} = 14\,\text{cm}.$$

Zrejme platí

$$|B_1S_2| = |BB_1| + |BS_2| = 7\,\text{cm} + 6\,\text{cm} = 13\,\text{cm}.$$

Úsečky AB_1, AB_2, B_1S_2 určujú dĺžky strán hľadaného trojuholníka. Takže tento trojuholník vieme zostrojiť. Zostrojíme

kružnicu $m(A, r = |AB_2|)$,
kružnicu $n(B_1, r = |B_1S_2|)$,
bod C ako prienik kružníc m, n $(C \in m \cap n)$,
trojuholník AB_1C.



Obr. 39

Trojuholník ABC je požadovaný trojuholník.

Riešenie úlohy Z5–I–5 (str. 90)

I. spôsob. Označme hľadané číslo A. Potom daný súčet je: $A + 0{,}1A + 0{,}01A = 1{,}11A = 4\,773$, z toho

$$A = 4\,773 : 1{,}11$$

$$A = 4\,300.$$

Neznáme číslo je 4 300.

II. spôsob. Hľadané číslo musí končiť dvomi nulami. Inak by nemohol vzniknúť celočíselný súčet. Teda ak hľadané číslo zapíšeme v tvare $xy00$, tak súčet z úlohy môžme zapísať:

$$\begin{array}{rrrr} x & y & 0 & 0 \\ & x & y & 0 \\ & & x & y \\ \hline 4 & 7 & 7 & 3 \end{array}$$

Z toho priamo dostaneme $y = 3$; $x = 4$.

III. spôsob. Označme hľadané číslo $xyzt$. Potom

$$\begin{array}{rrrrrr} x & y & z & t & & \\ & x & y & z, & t & \\ & & x & y, & z & t \\ \hline 4 & 7 & 7 & 3, & 0 & 0 \end{array}$$

Z toho priamo dostaneme $t = 0$; $z = 0$; $y = 3$; $x = 4$.

Riešenie úlohy Z5–I–6 (str. 90)

Ak ľavú zátvorku umiestnime tesne za znamienko +, čiže pred niektoré párne číslo, výsledok neovplyvníme. Vždy bude 100. Ľavú zátvorku teda treba umiestniť medzi znamienko — a niektoré *nepárne* číslo. V ďalšom budeme tento poznatok využívať.

I. spôsob — skusmo. Zvoľme si konkrétne nepárne číslo. Napr. 15. Potom môžme súčet písať:

$$
\begin{aligned}
&200 - 199 + 198 - 197 + \ldots + 16 - \\
&- (15 + 14 - 13 + \ldots - 1) = \\
= &(200 - 199) + (198 - 197) + \ldots + (18 - 17) + \\
&+ (16 - 15) - (14 - 13 + \ldots - 1)
\end{aligned}
$$

Daných 200 čísel, alebo tiež 100 dvojíc susedných čísel sme rozdelili do troch zátvoriek. V tretej je 14 čísel, čiže 7 dvojíc, v druhej je 1 dvojica a teda v prvej musí byť 92 dvojíc. Rozdiel čísel v každej z týchto dvojíc je 1. Teda celkový výsledok nášho pokusu je $92 + 1 - 7 = 86$.

Potrebujeme dostať menší výsledok. Posuňme teda ľavú zátvorku viac doľava. (Tým sa zväčší tretia zátvorka a budeme odčítať väčšie číslo.) Umiestnime ju napr. pred číslo 21. Dostaneme

$$
\begin{aligned}
&200 - 199 + \ldots + 22 - (21 + 20 - \ldots - 1) = \\
= &(200 - 199 + \ldots + 24 - 23) + \\
&+ (22 - 21) - (20 - 19 + \ldots + 2 - 1) = \\
= &89 + 1 - 10 = 80.
\end{aligned}
$$

V tretej zátvorke je teraz o tri dvojice čísel viac, v prvej potom o tri dvojice čísel menej, výsledok je teda o 6 menší. Ak by sme presunuli zátvorku ešte viac doľava pred číslo 23, pribudla by v tretej zátvorke jedna dvojica a v prvej zátvorke by jedna dvojica ubudla. Výsledok by sa zmenšil o 2. Vidíme teda, že výsledok bude vždy párny.

Odpoveď na otázku a): Nech umiestnime ľavú zátvorku kdekoľvek, nemôžeme dostať výsledok 73.

Odpoveď na otázku b): Zátvorku treba umiestniť pred číslo 29. (Videli sme totiž, že posunutie zátvorky o dve čísla doľava znamená zmenšenie výsledku o 2.

II. spôsob — náročnejší. (Pre starších a skúsenejších riešiteľov.) Ako už vieme, zátvorku treba umiestniť pred niektoré nepárne číslo. Pri výpočte využijeme, že zápis obsahuje 100 „susedných" dvojíc. Označme požadovaný výsledok V a číslo za ľavou zátvorkou a (a je nepárne!). Potom:

$$
\begin{aligned}
&200 - 199 + \ldots + \underline{a+1} - (\underline{a} + \underline{a-1} - \ldots - 1) = \\
&= [200 - 199 + \ldots + \underline{a+3} - (\underline{a+2})] + (\underline{a+1} - \underline{a}) - \\
&\quad - (\underline{a-1} - (\underline{a-2}) + \ldots + 2 - 1) = \\
&= \left(99 - \frac{a-1}{2}\right) + 1 - \frac{a-1}{2} = 101 - a.
\end{aligned}
$$

Teda platí $101 - a = V$, z toho $a = 101 - V$ (a je nepárne).

Pre $V = 73$ dostávame $a = 28$, to však nie je nepárne číslo; požiadavka sa nedá splniť. Pre $V = 72$ dostávame $a = 29$.

Riešenie úlohy Z5–II–1 (str. 91)

Uvažujme čiastočné výsledky určené prvým, prvými dvomi, prvými tromi, prvými štyrmi, atď. číslami vo výraze:

$$508 - 505 + 502 - 499 + 496 - 493 + 490 - \ldots$$

Sú to:

$$508 \quad 3 \quad 505 \quad 6 \quad 502 \quad 9 \quad 499 \quad \ldots$$

Vidíme, že v tejto postupnosti sú:

Na nepárnych miestach čísla, ktoré dostaneme postupným odčítavaním trojky od čísla 508. Sú to čísla, ktoré dávajú pri delení tromi zvyšok 1.

Na párnych miestach sú násobky troch.

a) Číslo 141 je 47-násobok troch, teda výraz musí obsahovať 47 dvojíc, čo je 94 čísel.

b) Číslo 142 nie je násobok troch. Preto musíme vziať v danom výraze nepárny počet čísel (počnúc odľava).

Dostaneme čísla 508, 505, 502, 499, … t.j. čísla, ktoré vzniknú postupným odčítaním čísla 3 od 508.

Koľkokrát musíme teda odčítať trojku od 508, aby sme dostali 142? Rozdiel 508 – 142 je 366, teda od 508 musíme odčítať 122krát trojku (366 : 3 = 122), aby sme dostali 142. Takže musíme použiť 122 dvojíc, naznačených vo výraze

$$508 - \underline{505 + 502} - \underline{499 + 496} - \underline{493 + 490} - \ldots,$$

čo je 244 čísel. Spolu s číslom 508 je to 245 čísel. Teda daný výraz by mal obsahovať 245 čísel. Ale v danej postupnosti je len 170 čísel, takže takýmto spôsobom číslo 142 nemôžeme dostať.

a) Výraz musí obsahovať 94 čísel.

b) Taký výsledok pri daných výrazoch nikdy nedostaneme.

Riešenie úlohy Z5–II–2 (str. 91)

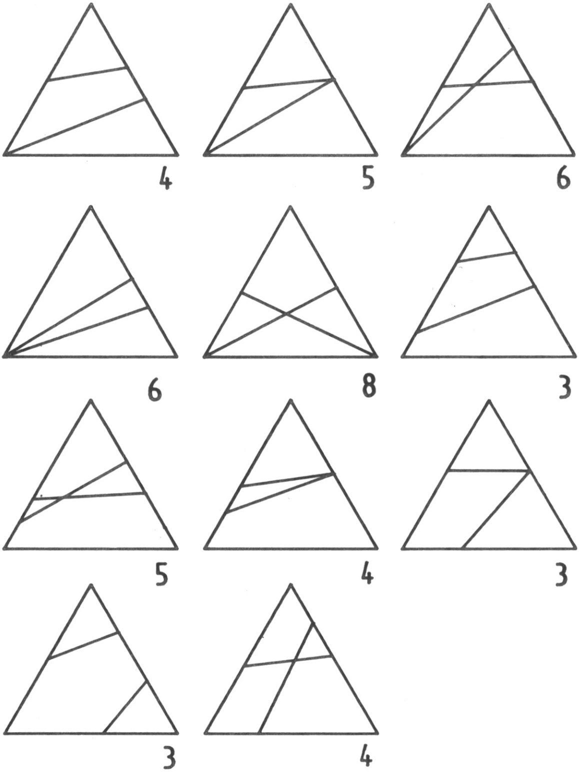
Ak od neznámeho čísla odčítame polovicu a štvrtinu, ostane nám štvrtina tohto čísla. Teda neznáme číslo je štvornásobkom čísla 148,5.

Hľadané trojciferné číslo je číslo 594.

Riešenie úlohy Z5–II–3 (str. 91)

Úsečka, ktorá delí trojuholník, buď ide, alebo nejde z vrcholu tohto trojuholníka. Sú teda tieto možnosti delenia (obr. 40, str. 102). (Čísla v obrázku určujú, na koľko častí je trojuholník rozdelený.)

Z obrázku 40 vidíme, že trojuholník možno dvomi úsečkami rozdeliť na 3, 4, 5, 6, 8 častí. Na iný počet častí trojuholník daným spôsobom rozdeliť nemôžme.



Obr. 40