39. ročník matematické olympiády na základních školách

Category Z8

In: Milan Koman (editor); Vladimír Repáš (editor): 39. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1989/90. (English). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1992. pp. 26–58.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404916

Kategorie Z8

ÚLOHY I. KOLA

(Řešení úloh na str. 30)

Z8 – I – 1

Najděte nejmenší přirozená čísla, kterými musíte postupně násobit čísla

$$3,\ 33,\ 333,\ 3\,333,\ 333\,333\,333\,333,$$

abyste dostali součin zapsaný samými jedničkami.

Z8 – I – 2

Na zahradě jsou 4 stromy. Ze šesti vzdáleností určených dvojicemi těchto stromů jsou dvě rovny 10 m, ostatní čtyři jsou rovny v. Nakreslete plánky všech možných rozmístění a vypočtěte příslušné vzdálenosti v.

Z8 – I – 3

Pro která n ($n = 12, 19, 198, 1\,989$) je možné sestrojit n-úhelník, jehož každé dvě sousední strany jsou navzájem kolmé? Odpověď pro každé n odůvodněte. (Hranicí hledaného n-úhelníku má být uzavřená neprotínající se lomená čára v rovině.)

Z8 – I – 4

Řešte soustavu rovnic pro neznámé a, b, c, d, e, f, g:

$$\begin{aligned}
2 + a + b &= (1 + a)(b + 1) \\
3 + b + c &= (1 + b)(c + 1) \\
4 + c + d &= (1 + c)(d + 1) \\
5 + d + e &= (1 + d)(e + 1) \\
9 + e + f &= (1 + e)(f + 1) \\
10 + f + g &= (1 + f)(g + 1) \\
13 + g + a &= (1 + g)(a + 1)
\end{aligned}$$

Z8 – I – 5

Je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s pravým úhlem při vrcholu A, s úhlem $\beta = 45°$ při vrcholu B a se shodnými stranami AD, DC. Do trojúhelníku ABC a ACD jsou vepsány kružnice. Vypočítejte obsahy kruhů určených těmito kružnicemi.

Z8 – I – 6

Najděte všechna kladná celá čísla a, b, pro něž platí

$$ab + a + b = 1\,989.$$

ÚLOHY II. KOLA

(Řešení úloh na str. 45)

Z8 – II – 1

Je dán obdélník s celočíselnými délkami stran. Zvětšíme-li jednu jeho stranu o 4 a druhou zmenšíme o 5, dostaneme obdélník s dvojnásobným obsahem. Určete strany daného obdélníku. Najděte všechny možnosti.

Z8 – II – 2

Do kružnice je vepsán čtyřúhelník, jehož dvě strany mají délku 5 cm, dvě strany délku 12 cm a jeho úhlopříčky mají různé délky. Vypočtěte délky těchto úhlopříček.

Z8 – II – 3

Napište nejmenší celý kladný násobek čísel 2, 3, 4, 5, 6 a 7, jehož zápis v desítkové soustavě obsahuje pouze nuly a jedničky.

Z8 – II – 4

Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky 5 cm. Na hraně AB leží bod X vzdálený od bodu A 2 cm, na hraně GH leží bod Y vzdálený od bodu G 1 cm. Narýsujte trojúhelník XYE ve skutečné velikosti. Řešte konstrukcí nebo výpočtem.

ÚLOHY III. KOLA

(Řešení úloh na str. 54)

Z8 – III – 1

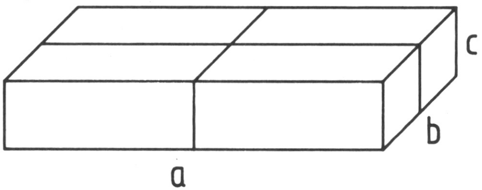
Najděte nejmenší přirozené číslo, které je v desítkové soustavě zapsáno jen pomocí číslic 4 a 7 a je dělitelné číslem 72.

Z8 – III – 2

Sestrojte aspoň jeden rovnoramenný trojúhelník, který má obsah nejméně $5\,cm^2$ a všechny výšky kratší než $3\,cm$. Řešení odůvodněte.

Z8 – III – 3

Bonboniéra s celočíselnými rozměry a, b, c (cm), kde $a >$ $> b > c$, je ovázána provázkem podle obr. 1. Objem krabice



Obr. 1

je $1\,764\,\mathrm{cm}^3$, délka provázku (bez uzlu na ovázání) je 94 cm. Vypočítejte rozměry krabice. Najděte všechna řešení.

Z8 – III – 4

Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou $a = 6\,\mathrm{cm}$ a bod M na prodloužení BF za bod F ve vzdálenosti 6 cm od bodu F. Sestrojte řez krychle rovinou ACM a vypočítejte obsah tohoto řezu.

ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA

Řešení úlohy Z8–I–1 (str. 26)

I. způsob. Budeme hledat nejmenší násobky daných čísel, které jsou zapsány samými jedničkami. Protože čísla 3, 33, 333, 3 333 atd. jsou dělitelná třemi, musí být i hledané násobky dělitelné třemi. Ze znaku dělitelnosti třemi tedy plyne, že to mohou být jen některá z čísel

$$111,\ 111\,111,\ 111\,111\,111,\ 111\,111\,111\,111 \text{ atd.}$$

Snadno zjistíme, že

$$111 = 3 \cdot 37$$
$$111\,111 = 33 \cdot 3\,367$$
$$111\,111\,111 = 333 \cdot 333\,667$$
$$111\,111\,111\,111 = 3\,333 \cdot 33\,336\,667$$
$$\text{atd.}$$

Pro číslo 333 333 333 333 můžeme odhadnout a pak ověřit výpočtem:

$$\underbrace{111\,111\ldots111}_{\text{12 trojic 111}} = \underbrace{333\ldots333}_{\text{12 trojek}} \cdot \underbrace{333\ldots333}_{\text{12 trojek}}\underbrace{666\ldots66}_{\text{11 šestek}}7$$

Snadno ověříme, že nalezená čísla jsou nejmenší možná. Například číslo 111 není násobek čísla 33, neboť $111 = 33 \cdot 3 + 12$. Proto je číslo 111 111 nejmenší násobek čísla 33 zapsaný jen pomocí jedniček.

II. způsob. Hledané číslo sestrojíme postupně po jednotlivých číslicích od konce. Postup naznačíme pro číslo 333. Aby byla jednička na místě jednotek, násobíme číslem 7.

$$333 \cdot 7 = 2\,331$$

Aby byla jednička i na místě desítek, musí mít číslo, kterým násobíme, na místě desítek 6.

$$333 \cdot 67 = 22\,311$$

Aby byla jednička i na místě stovek, musí mít číslo, kterým násobíme 333, na místě stovek 6.

$$333 \cdot 667 = 222\,111$$

Dalším výpočtem postupně dostaneme:

$$\begin{aligned} 333 \cdot 3\,667 &= 1\,221\,111 \\ 333 \cdot 33\,667 &= 11\,211\,111 \\ 333 \cdot 333\,667 &= 111\,111\,111 \end{aligned}$$

Tímto postupem odvodíme pro čísla 3, 33, 333, 3 333 výsledky:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 37 &= 111 \\ 33 \cdot 3\,367 &= 111\,111 \\ 333 \cdot 333\,667 &= 111\,111\,111 \\ 3\,333 \cdot 33\,336\,667 &= 111\,111\,111\,111 \end{aligned}$$

Porovnáním výsledků dojdeme snadno k domněnce: Číslo zapsané n trojkami musíme násobit číslem, které dostaneme tak, že před 7 napíšeme $n-1$ šestek a před ně ještě n trojek, tj. číslo

$$\underbrace{333\ldots3}_{n\text{-krát}}\ \underbrace{66\ldots6}_{(n-1)\text{-krát}}\ 7$$

Pro $n = 1, 2, 3, 4$ to platí, pro $n > 4$ to dokážeme.

1. *Důkaz* naznačíme sice na konkrétním případě, pro jednoduchost dokonce jen pro $n = 4$, ale jeho myšlenka má obecnou platnost.

3 333	......	n trojek
· 6 667	......	$(n-1)$ šestek, 1 sedmička
23 331	......	1 dvojka, $(n-1)$ trojek, 1 jednička
199 98	......	1 jednička, $(n-1)$ devítek, 1 osmička
1 999 8		atd.
19 998		
22 221 111	......	n dvojek, n jedniček

$$
\begin{array}{rll}
3\,333 & \ldots\ldots & n \text{ trojek} \\
\cdot\, 3\,333 & \ldots\ldots & n \text{ trojek} \\
\hline
9\,999 & \ldots\ldots & n \text{ devítek} \\
99\,99 & & \text{atd.} \\
999\,9 & & \\
9\,999 & & \\
\hline
11\,108\,889 & \ldots\ldots & (n-1) \text{ jedniček, 1 nula,} \\
 & & (n-1) \text{ osmička, 1 devítka}
\end{array}
$$

Odtud pak dostaneme

$$
\begin{array}{r}
6667 \cdot 3333 = 2222\,1111 \\
3333\,0000 \cdot 3333 = 1110\,8889\,0000 \\
\hline
3333\,6667 \cdot 3333 = 1111\,1111\,1111
\end{array}
$$

2. *Důkaz* bude podstatně jednodušší, ale vyžaduje jistou zkušenost na něj přijít. Věříme, že bude pro naše čtenáře poučný. Ilustraci provedeme opět pro $n = 4$.

Součin $3333\,6667 \cdot 3\,333$ se nezmění, když prvního činitele budeme násobit číslem 3 a druhého činitele naopak dělit číslem 3.

$$
\begin{array}{ccc}
3333\,6667 & \cdot & 3333 \\
\big\downarrow \cdot 3 & & \big\downarrow : 3 \\
1\,0001\,0001 & \cdot & 1111 = 1111\,1111\,1111
\end{array}
$$

Podrobnosti si ověříte snadno sami.

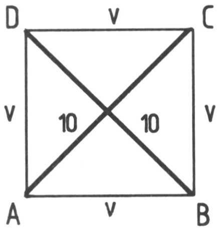
Na základě této úvahy jistě sami snadno najdete čísla, kterými musíte násobit číslo zapsané n trojkami, aby součin byl zapsán samými dvojkami (čtyřkami, pětkami, šestkami atd.)

Pomocná úloha

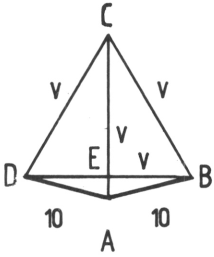
Čím musíte násobit číslo 1 989 (rok konání 39. ročníku MO), aby součin byl zapsán číslem, které končí a) třemi trojkami, b) sedmi sedmičkami. (Můžete řešit i pro jiné letopočty.)

Řešení úlohy Z8–I–2 (str. 26)

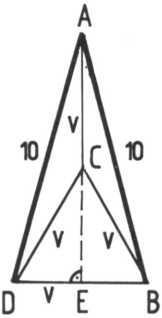
Na plánku znázorníme stromy jako 4 body. Snadno přijdeme na to, že mohou nastat tři možnosti znázorněné na obrázcích 2a, b, c.



Obr. 2a



Obr. 2b



Obr. 2c

V situaci na obrázku 2a obě úsečky délky 10 m nemají žádný společný krajní bod. Čtyřúhelník $ABCD$ je čtverec. To lze odůvodnit různými způsoby. Například tak, že trojúhelníky ACB a ACD jsou rovnoramenné se společnou základnou AC. Proto je přímka BD osou úsečky AC. Podobně přímka AC je osou úsečky BD. Podle Pythagorovy věty je

$$v = 5 \cdot \sqrt{2} \doteq 7{,}1 \text{ (m)}.$$

V situaci na obr. 2b vypočítáme délku v například z pravoúhlého trojúhelníku AED. Odvěsna DE má délku $\frac{v}{2}$. Odvěsna AE má délku

$$|AE| = v - v\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{v}{2}(2 - \sqrt{3}),$$

neboť CE je výška rovnostranného trojúhelníku BCD. Proto je podle Pythagorovy věty

$$\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 (2 - \sqrt{3})^2 = 10^2.$$

Odtud po úpravě vypočítáme v.

$$v = \frac{10}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} \doteq 19{,}3 \text{ (m)}.$$

Konečně v situaci na obrázku 2c vypočítáme délku v z pravoúhlého trojúhelníku AED:

$$|DE| = \frac{v}{2}$$

$$|AE| = v + v\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{v}{2}(2 + \sqrt{3})$$

Podle Pythagorovy věty opět dostaneme

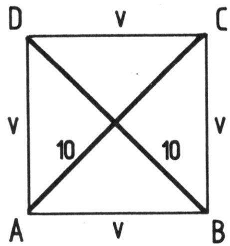
$$\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 (2 + \sqrt{3})^2 = 10^2,$$

a tedy

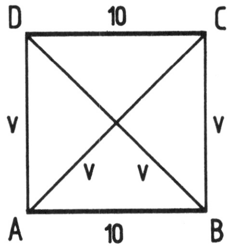
$$v = \frac{10}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \doteq 5{,}2 \text{ (m)}.$$

Zbývá dokázat, že jiná možnost už nemůže nastat. Pro obě úsečky délky 10 m mohou nastat dvě možnosti: buď nemají společný žádný krajní bod, nebo mají společný 1 krajní bod.

Uvažujme první možnost. Nechť úsečky AC a BD mají délku 10 m (obr. 3a, b).



Obr. 3a

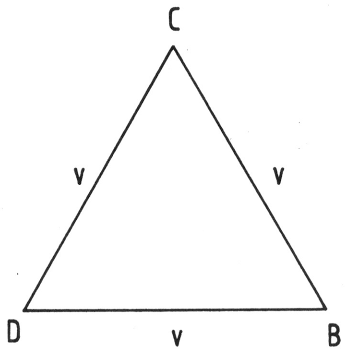


Obr. 3b

Potom trojúhelníky ACD a ACB jsou rovnoramenné (s rameny délky v).

Situace znázorněná na obr. 3a je stejná jako v případě znázorněném na obr. 2a. Situace z obr. 3b nastat nemůže, jak se o tom sami snadno přesvědčíte.

Uvažujme nyní druhou možnost. Nechť délku 10 m mají úsečky AB a AD. Potom tři ze zbývajících čtyř úseček délky v musí být stranou rovnostranného trojúhelníku s vrcholy B, C, D (obr. 4). Bod A musí mít od vrcholů B, D vzdálenost 10 m a od vrcholu C vzdálenost v. Mohou nastat právě dvě možnosti znázorněné na obr. 3a, b.



Obr. 4

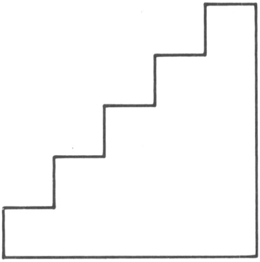
Pomocné úlohy

1. Vypočítejte poloměr kružnice opsané rovnoramennému trojúhelníku se základnou $a = 10$ cm a ramenem $b = 10\sqrt{3}$ cm.

2. K dispozici máte libovolný počet červených a modrých tyček stejné délky. Z osmi z nich můžete sestavit model pravidelného čtyřbokého jehlanu. Kolik takových různých modelů můžete vyrobit? Dva modely jsou různé, když je nemůžete postavit vedle sebe tak, aby všechny odpovídající hrany byly stejné barvy. (Úloha Z6–I–1 z 36. ročníku MO).

Řešení úlohy Z8–I–3 (str. 26)

Mnohoúhelník, jehož každé dvě sousední strany jsou navzájem kolmé, můžeme umístit tak, že se střídají po jeho obvodu vždy „vodorovné“ a „svislé“, příklad je na obrázku 5.



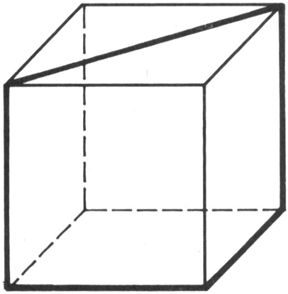
Obr. 5

Takový mnohoúhelník musí mít vždy sudý počet stran. Pro $n = 19$ a 1 989 nemá tedy úloha řešení. Pro $n = 12$ je řešením např. „schodiště“ s pěti schody. Pro $n = 198$ můžeme nakreslit podobné „schodiště“ s devadesáti osmi schody. (Vztah mezi počtem stran a počtem schodů pro libovolné n najděte sami).

Pomocná úloha

Kolik obrazců můžete sestavit z 12 zápalek, jestliže smíte klást zápalky pouze tak, že dvě sousední zápalky jsou buď navzájem kolmé, nebo leží v jedné přímce? Kolik stran mají tyto obrazce? Určete mezi nimi obrazce s nejmenším a největším obsahem.

Poznámka k úloze Z8–I–3. Obdobnou úlohu můžeme řešit i v prostoru. Je zajímavé, že úloha má jiné řešení. Počínaje



Obr. 6

číslem $n = 5$ můžeme sestrojit pro každé n mnohoúhelník, který má každé dvě sousední strany navzájem kolmé. Pro $n = 5$ je to například pětiúhelník z obrázku 6. Je sestrojen na povrchu krychle. Není to však rovinný útvar. Není těžké sestrojit podobné n-úhelníky pro ostatní $n > 5$.

Řešení úlohy Z8–I–4 (str. 27)

Jednoduchou úpravou dostaneme soustavu jednoduššího tvaru.

$$
\begin{aligned}
1 &= ab \\
2 &= bc \\
3 &= cd \\
4 &= de \\
8 &= ef \\
9 &= fg \\
12 &= ga
\end{aligned}
\tag{S}
$$

Je vidět, že žádné z čísel a, b, c, d, e, f, g nemůže být nula. Dále můžeme postupovat různými způsoby. Ukážeme si dva.

I. způsob. Z první rovnice vypočítáme $b = \frac{1}{a}$. Po dosazení do druhé rovnice vypočítáme $c = 2a$. Po dosazení do třetí rovnice vyjde $d = \frac{3}{2a}$. Postupným dosazováním do dalších rovnic dostaneme

$$e = \frac{8}{3}a, \; f = \frac{3}{a}, \; g = 3a, \; a^2 = 4.$$

Z poslední rovnice $a^2 = 4$ vychází $a = 2$ nebo $a = -2$. Odtud již snadno vypočítáme ostatní neznámé.

$$a = 2, \; b = \frac{1}{2}, \; c = 4, \; d = \frac{3}{4}, \; e = \frac{16}{3}, \; f = \frac{3}{2}, \; g = 6$$

a čísla k nim opačná.

Zkouška výsledek potvrdí. Dosaďte do původní soustavy sami.

II. způsob. Vynásobíme všechny rovnice soustavy mezi sebou a dostaneme:

$$(abcdefg)^2 = 2^8 \cdot 3^4$$

(Každá neznámá se vyskytla vždy ve dvou rovnicích soustavy (S).) Odtud dostaneme:

$$abcdefg = \pm 2^4 \cdot 3^2.$$

Dělíme-li tuto rovnici 1., 3. a 5. rovnicí soustavy (S), dostaneme ihned $g = \pm 6$. Podobně vypočítáme ostatní neznámé. Proveďte sami.

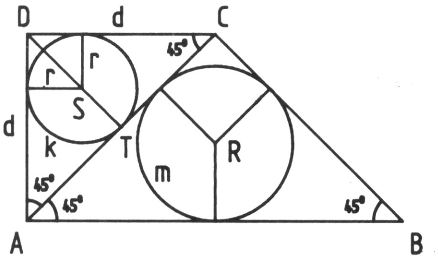
Pomocná úloha

Řešte soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} a+b&=4 \\ b+c&=1 \\ c+d&=0 \\ d+e&=5 \\ e+a&=4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a+b+c&=2 \\ b+c+d&=1 \\ c+d+e&=5 \\ d+e+a&=4 \\ e+a+b&=3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a+b+c+d&=4 \\ b+c+d+e&=-4 \\ c+d+e+a&=-3 \\ d+e+a+b&=-1 \\ e+a+b+c&=0 \end{aligned}$$

Řešení úlohy Z8–I–5 (str. 27)

Daný lichoběžník je znázorněn na obrázku 7, kde je zvoleno označení $|AD| = |DC| = d$ a poloměry vepsaných kružnic r a R.



Obr. 7

Trojúhelník ABC je podle věty *uu* podobný trojúhelníku ACD. Poměr podobnosti

$$P: \quad \triangle ACD \to \triangle ABC$$

je zřejmě

$$|AC| : |AD| = d\sqrt{2} : d = \sqrt{2} : 1 = \sqrt{2}.$$

Proto pro poloměry R, r vepsaných kružnic platí $R : r = \sqrt{2} : 1$ neboli $R = r\sqrt{2}$ a pro obsahy ohraničené těmitc kružnicemi dostaneme

$$\pi R^2 = \pi\left(r\sqrt{2}\right)^2 = 2\pi r^2.$$

Je tedy obsah většího kruhu dvakrát větší než obsah menšího kruhu. Proto stačí vypočítat obsah menšího kruhu. Podle obrázku 7 je:

$$|DT| = |DS| + |ST| = r\sqrt{2} + r = r\,(\sqrt{2} + 1)$$

$$|DT| = d\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Porovnáním vypočítáme

$$r = \frac{d}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}.$$

Obsah menšího kruhu je

$$S_r = \pi\, r^2 = \frac{\pi\, d^2}{2(3 + 2\sqrt{2})} \doteq 0{,}27 d^2.$$

Obsah většího kruhu je

$$S_R = 2 \cdot S_r = \frac{\pi\, d^2}{3 + 2\sqrt{2}} \doteq 0{,}54\, d^2.$$

Pomocné úlohy

1. Do rovnostranného trojúhelníku ABC je vepsán kruh K. Další kruh L se dotýká stran AB, AC a kruhu K (vně). Obsah kruhu L je $2\,\mathrm{cm}^2$. Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC. (Úloha Z8–I–1 z 37. ročníku MO).

2. Je dán dutý válec V s kruhovou podstavou o průměru d a výšce v; $d = v = 10\,\mathrm{cm}$. Do tohoto válce je vepsána koule K s průměrem d. Najděte poloměr největší koule L, která se dotýká koule K vně a podstavy i pláště válce V. (Úloha Z8–II–3 ze 37. ročníku MO.)

Řešení úlohy Z8–I–6 (str. 27)

I. způsob. Úlohy tohoto typu často řešíme tak, že trojčlen na levé straně rovnice doplníme tak, aby se dal rozložit na součin. Proto přičteme k oběma stranám rovnice číslo 1. Na levé straně pak vznikne součin dvou dvojčlenů.

$$ab + a + b + 1 = 1\,990$$
$$(a + 1)(b + 1) = 1\,990$$

Číslo 1 990 rozložíme na součin dvou činitelů větších než 1 (neboť a, b mají být celá kladná čísla).

$$1\,990 = 2 \cdot 995 = 5 \cdot 398 = 10 \cdot 199$$

Výsledky udává tabulka:

a	1	4	9	198	397	994
b	994	397	198	9	4	1

II. způsob. Z dané rovnice vypočítáme např. a:

$$a(b+1) = 1\,989 - b$$
$$a = \frac{1\,989 - b}{b+1} \qquad (b+1 \neq 1)$$

Nyní provedeme úpravu připomínající převod nepravého zlomku na smíšené číslo:

$$a = \frac{1\,990 - (b+1)}{b+1} = \frac{1\,990}{b+1} - 1$$

Čitatele jsme upravili tak, abychom mohli daný výraz rozepsat na dva zlomky, z nichž jeden můžeme krátit $b+1$. V našem případě jsme v čitateli přičetli k menšenci i menšiteli číslo 1. Vidíme, že $b+1$ musí být dělitelem čísla 1 990 a zároveň musí být větší než 1 (aby $b > 0$). Dostaneme možnosti:

$$b + 1 = 2,\ 5,\ 10,\ 199,\ 398,\ 995,\ 1\,990$$

Další postup je už zřejmý. Výsledky jsou stejné jako při řešení úlohy prvním způsobem.

Pomocné úlohy

1. Určete všechna přirozená čísla a, b, pro která má výraz

$$\frac{1\,989}{1 \cdot ab + 9 \cdot a + 8 \cdot b + 9}$$

celočíselnou hodnotu.

2. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku jsou vyjádřeny přirozenými čísly a jedna odvěsna má délku 15. Zjistěte všechny pravoúhlé trojúhelníky s uvedenými vlastnostmi. (Úloha Z8–I–2 z 35. ročníku MO).

ŘEŠENÍ ÚLOH II. KOLA

Řešení úlohy Z8–II–1 (str. 28)

Délky stran daného obdélníku označme a, b. Nový obdélník má délky stran $a+4$, $b-5$. Podle podmínky úlohy pro jeho obsah platí:

$$2ab = (a+4)(b-5)$$

Po úpravě dostaneme:

$$ab - 4b + 5a = -20 \tag{R}$$

Dále můžeme postupovat různými způsoby; ukážeme dva.

I. způsob. Trojčlen na levé straně rovnice (R) doplníme a rozložíme na součin:

$$ab - 4b + 5a - 20 = -40$$
$$(a-4)\cdot(b+5) = -40$$

Řešení najdeme rozkladem čísla -40 na dva činitele. Vzhledem k tomu, že musí být $a > 0$, $b > 0$, vyplývají pro tyto činitele podmínky:

$$\begin{array}{ll} a > 0 & b > 0 \\ a - 4 > -4 & b + 5 > 5 \end{array}$$

Jsou dvě možnosti:

$$(-2) \cdot 20 = (-1) \cdot 40 = -40$$

Zkouškou ověříme, že v 1. případě mají obdélníky obsahy 30 a 60, v 2. případě 105 a 210.

II. způsob. Z rovnice (R) vypočítáme např. a.

$$a(b+5) = 4b - 20$$
$$a = \frac{4b-20}{b+5}$$

Zlomek upravíme tak, abychom mohli aspoň částečně krátit dvojčlenem $b + 5$.

$$a = \frac{4(b+5) - 40}{b+5} = 4 - \frac{40}{b+5}$$

Odtud vidíme, že $b + 5$ musí dělit číslo 40 a zároveň musí být $b + 5 > 0$. (Proč?) Dostaneme možnosti

$$b + 5 = 8,\ 10,\ 20,\ 40$$

neboli

$$b = 3,\ 5,\ 15,\ 35.$$

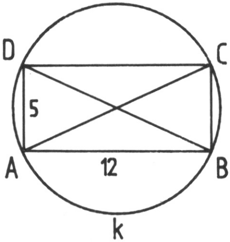
Odtud plyne

$$a = -1,\ 0,\ 2,\ 3.$$

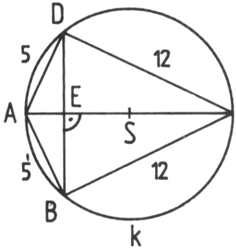
Protože a musí být kladné, dostáváme právě dvě řešení, která se shodují s výsledky získanými při prvním způsobu řešení.

Řešení úlohy Z8–II–2 (str. 28)

Shodné strany hledaných čtyřúhelníků mohou být buď sousední, nebo protější; obr. 8a, b.



Obr. 8a



Obr. 8b

V prvním případě dostaneme obdélník, ale ten má shodné úhlopříčky, což odporuje podmínkám úlohy. Zbývá druhý případ (obr. 8b). Trojúhelníky ABC a ADC jsou podle věty (sss) shodné, a tedy souměrně sdružené podle společné strany AC. V této souměrnosti jsou body A, C samodružné a obrazem bodu B je bod D. Kružnice k je proto v této souměrnosti samodružná, proto její střed leží na ose AC. Podle Thaletovy věty jsou trojúhelníky ACB a ACD pravoúhlé.

Podle Pythagorovy věty z obou pravoúhlých trojúhelníků ABC a ADC dostaneme

$$|AC|^2 = 5^2 + 12^2$$

neboli

$$|AC| = 13\,\text{cm}.$$

Délku druhé úhlopříčky BD vypočítáme jako dvojnásobek výšky v pravoúhlého trojúhelníku ACD k přeponě AC. Využijeme vzorce pro obsah trojúhelníku

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12\,\text{cm}^2$$

a

$$S = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot v\,\text{cm}^2.$$

Odtud porovnáním pravých stran vyjde

$$v = \frac{60}{13}\,\text{cm} \doteq 4{,}6\,\text{cm}.$$

Úhlopříčka BD má tedy délku

$$|BD| = \frac{120}{13}\,\text{cm} \doteq 9{,}2\,\text{cm}.$$

Poznámka. Výšku v lze vypočítat také pomocí podobnosti trojúhelníků ABE a ABC, ze které plyne

$$\frac{v}{2} : 5 = 12 : 13.$$

Řešení úlohy Z8–II–3 (str. 28)

Aby číslo bylo násobkem každého z čísel 2, 3, 4, 5, 6, 7, musí být násobkem jejich nejmenšího společného násobku, tj. násobkem čísla $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$. Odtud vidíme, že musí být sudým násobkem čísla 10. Protože má být zapsáno jen pomocí číslic 0 a 1, musí mít na místě jednotek a desítek 0. Na místě stovek však musí mít 1, jinak by bylo dělitelné osmi a nebylo by nejmenším číslem s požadovanou vlastností. (Číslo desetkrát menší by bylo také dělitelné čísly 2, 3, 4, 5, 6, 7.) Hledané číslo má tedy tvar ...100.

Protože má být hledané číslo násobkem 3, musí být počet jedniček v jeho zápisu také násobkem 3. Budeme nejdříve zkoumat čísla zapsaná třemi jedničkami. Uvedeme je podle velikosti od nejmenšího.

$$\begin{aligned} 11\,100 : 7 &= 1\,585 \text{ (zb. 5)} \\ 110\,100 : 7 &= 15\,728 \text{ (zb. 4)} \\ 101\,100 : 7 &= 14\,442 \text{ (zb. 6)} \\ 1\,001\,100 : 7 &= 143\,014 \text{ (zb. 2)} \\ 1\,010\,100 : 7 &= 144\,300 \end{aligned}$$

Hledané číslo je tedy 1 010 100.

Poznámka. Při vyšetřování dělitelnosti čísel číslem 7 lze využít i méně známý znak dělitelnosti číslem 7. Seznámíme vás s ním.

Znak dělitelnosti číslem 7

Dané číslo rozdělíme od pravé strany na skupiny po dvou číslicích. Například:

$$2 \mid 03 \mid 11 \mid 24$$

Čísla zapsaná těmito skupinami násobíme odprava postupně čísly 1, 2, 4, 1, 2, 4 *atd. Tyto součiny pak sečteme. Je-li součet násobkem* 7, *je i dané číslo násobkem* 7. *V opačném případě* *není násobkem* 7. V našem příkladu tedy počítáme:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & | & 03 & | & 11 & | & 24 & & \\ \downarrow\cdot 1 & & \downarrow\cdot 4 & & \downarrow\cdot 2 & & \downarrow\cdot 1 & & \\ 2 & + & 12 & + & 22 & + & 24 & = & 60 \end{array}$$

Dostali jsme číslo, které není násobkem 7, a tedy ani dané číslo není násobkem 7. (Ověřte to sami dělením.)

Důkaz tohoto znaku dělitelnosti naznačíme na našem příkladu, ale použitá úvaha má obecnou platnost. Číslo 2 031124 rozložíme podle sudých mocnin čísla 10.

$$2\ 03\ 11\ 24 = 2 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^4 + 11 \cdot 10^2 + 24 \qquad \text{(R)}$$

Nyní sudé mocniny čísla 10 rozložíme na nejblíže menší násobek 7 a zbytek.

$$\begin{aligned} 10^6 &= 7 \cdot 142\,857 + 1 \\ 10^4 &= 7 \cdot 1\,428 + 4 \\ 10^2 &= 7 \cdot 14 + 2 \end{aligned}$$

Rozklad (R) můžeme tedy přepsat do tvaru:

$$\begin{aligned} 2\ 03\ 11\ 24 = 2 \cdot (7 \cdot 142\,857 + 1) + 3 \cdot (7 \cdot 1\,428 + 4) + \\ + 11 \cdot (7 \cdot 14 + 2) + 24 \end{aligned}$$

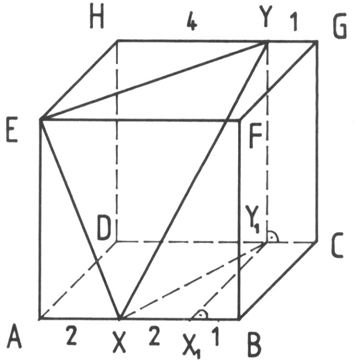
Rozklad upravíme na dva sčítance, z nichž jeden bude násobek 7.

$$\begin{aligned} 2\ 03\ 11\ 24 = [7 \cdot (2 \cdot 142\,857 + 3 \cdot 1\,428 + 11 \cdot 14)] + \\ + (\boxed{2} \cdot 1 + \boxed{3} \cdot 4 + \boxed{11} \cdot 2 + \boxed{24}) \end{aligned}$$

(Všimněte si, že skupiny v rámečkách jsou skupiny, na které jsme rozdělili dané číslo.) Protože první sčítanec je násobek 7, je dané číslo násobkem 7, právě když je i druhý sčítanec násobkem 7. Ale druhý sčítanec dostaneme tak, jak je popsáno ve znaku dělitelnosti. Zkuste si sami na několika příkladech ověřit znak dělitelnosti sedmi.

Řešení úlohy Z8–II–4 (str. 28)

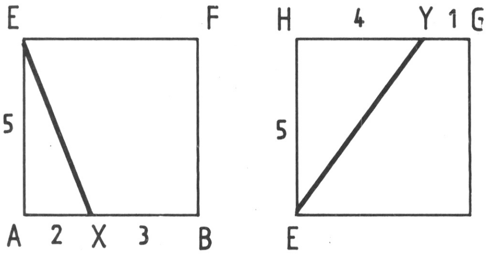
I. způsob — grafickou konstrukcí. Daná krychle i s trojúhelníkem EXY je znázorněna na obr. 9.



Obr. 9

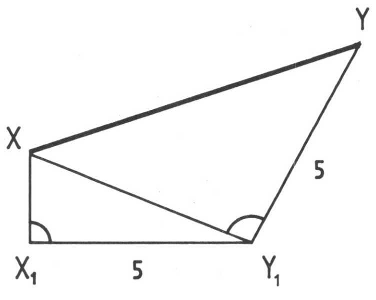
Strany EX a EY trojúhelníku EXY leží ve stěnách $ABFE$ a $EFGH$. Jejich skutečné délky zjistíme na obrázku 10 (str. 52).

Nyní zbývá strana XY. Na obrázku 9 vyznačíme dva pomocné pravoúhlé trojúhelníky XYY_1 a XY_1X_1. Bod Y_1 je



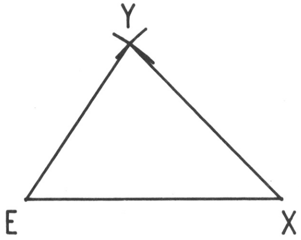
Obr. 10

patou kolmice z bodu Y na hranu DC a bod X_1 je patou kolmice z bodu Y_1 na hranu AB. Délku strany XY zjistíme tak, že postupně sestrojíme trojúhelníky XX_1Y_1 a XY_1Y (obr. 11). Využijeme toho, že přepona prvního trojúhelníku XX_1Y_1 je zároveň odvěsnou druhého trojúhelníku XY_1Y. Trojúhelník EXY nyní můžeme sestrojit ze tří stran.



Obr. 11

(Konstrukce (*sss*) — obr. 12)



Obr. 12

II. způsob — konstrukce na základě výpočtu. Vypočítáme délky stran EX a EY trojúhelníku EXY podle obrázku 9 nebo 10 z pravoúhlých trojúhelníků AEX a EHY. Dostaneme:

$$|EX| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}, \quad |EY| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

Délku třetí strany XY vypočítáme ve dvou krocích z pravoúhlých trojúhelníků XX_1Y_1 a XY_1Y (obr. 9 a 11).

$$|XY_1| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}, \quad |XY| = \sqrt{29 + 5^2} = \sqrt{54}$$

Z vypočítaných délek stran můžeme trojúhelník EXY sestrojit. Pokud délky zaokrouhlíme, například

$$|EX| = \sqrt{29} \doteq 5{,}4, \; |EY| = \sqrt{41} \doteq 6{,}4, \; |XY| = \sqrt{54} \doteq 7{,}3$$

je konstrukce (z teoretického hlediska) jen přibližná.

Řešení úlohy Z8–III–1 (str. 29)

Hledané číslo má být dělitelné číslem 72, a tedy i 9 a 8. Proto musí být jeho ciferný součet násobek devíti a poslední trojčíslí násobek osmi. Nejdříve budeme vyšetřovat čísla s ciferným součty 9, 18, 27, ..., která se dají zapsat pomocí 4 a 7. Budeme rozkládat tyto násobky devíti na sčítance jedné nebo více čtyřek a jedné nebo více sedmiček.

9 nelze rozložit na sčítance 4 a 7.

$18 = 7 + 7 + 4$, ale čísla 774, 747, 477 nejsou násobky osmi.

$27 = 7 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$ (jiná možnost není). Z trojciferných čísel sestavených z číslic 7, 4, 4 je násobkem osmi jen 744. Číslo 444 744 je tedy násobek 72. Zbývá dokázat, že je nejmenší.

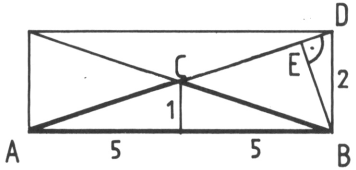
$36 = 7 + 7 + 7 + 7 + 4 + 4$ (jiná možnost rozkladu není). Z těchto číslic však dostaneme větší číslo než 444 744.

$45 = 7 + 7 + 7 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$ (jiná možnost rozkladu není). Z těchto číslic dostaneme ještě větší číslo.

Čísla s ciferným součty 54, 63, ... jsou všechna větší než nalezené číslo 444 744. Nejmenší hledané číslo je tedy 444 744.

Řešení úlohy Z8–III–2 (str. 29)

Snadno zjistíme, že stačí sestrojit rovnoramenný trojúhelník, který má základnu dostatečně dlouhou. Čím delší je jeho základna, tím jsou kratší jeho výšky. Úloha má proto nekonečně mnoho řešení. Jedno je na obr. 13, kde pro jednoduchost vycházíme z obdélníku o stranách dlouhých 10 cm a 2 cm. Trojúhelník má obsah 5 cm^2 a výšku ke straně AB dlouhou 1 cm. Výška k ramenu AC je rovna délce úsečky EB, ale to je odvěsna pravoúhlého trojúhelníku BED, a proto je kratší než přepona BD, tzn. $|EB| < |BD| = 2$ cm. Výšku BE je možno také vypočítat. Výpočet proveďte sami.

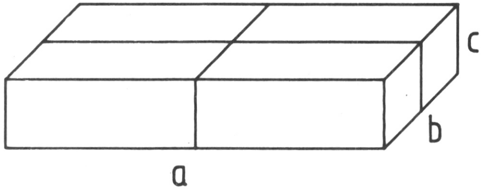


Obr. 13

Řešení úlohy Z8–III–3 (str. 29)

Z podmínek pro objem krabice a délku provázku dostaneme (obr. 14, str. 56):

$$abc = 1\,764$$
$$a + b + 2c = 47 \quad \text{(polovina délky provázku)} \qquad \text{(R)}$$



Obr. 14

Číslo 1 764 musíme rozložit na činitele a, b, c ($a > b > c$) tak, aby platila rovnost (R). Nejdříve rozložíme číslo 1 764 na součin prvočísel:

$$1\,764 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$$

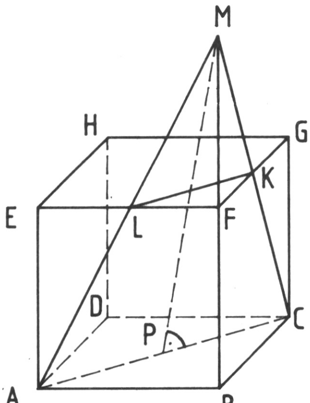
Odtud vhodným sdružením činitelů dostaneme možnosti pro a, b, c. Z rovnosti (R) plyne, že a, $b < 47$. Proto pro a, b, c mohou nastat pouze možnosti uvedené v tabulce, ve které zároveň vyhodnotíme, zda je splněna podmínka (R).

a	42	42	42	28	28	21	21	18
b	21	14	7	21	9	12	14	14
c	2	3	6	3	7	7	6	7
$a + b + 2c$	67	62	61	55	51	47	47	46
Platí (R)	ne	ne	ne	ne	ne	ano	ano	ne

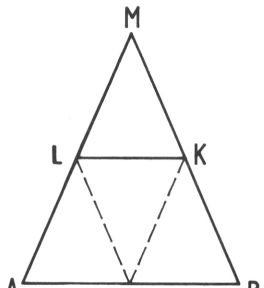
Jsou dvě řešení: 21 cm, 12 cm, 7 cm,
21 cm, 14 cm, 6 cm.

Řešení úlohy Z8–III–4 (str. 30)

Situace je znázorněna na obr. 15. Protože je F středem úsečky BM, jsou úsečky FL a FK střední příčky trojúhelníků ABM a BCM. Z toho plyne, že i LK je střední příčka trojúhelníku ACM. Proto je čtyřúhelník $ACKL$ lichoběžník. Jeho obsah můžeme počítat různými způsoby. Zde využijeme toho, že se rovná $\frac{3}{4}$ obsahu trojúhelníku ACM. Je to zřejmé z obr. 16, kde trojúhelník ACM je rozdělen středními příčkami na čtyři shodné trojúhelníky, z nichž tři tvoří lichoběžník $ACKL$.



Obr. 15



Obr. 16

Úsečka AC (obr. 15) je úhlopříčka čtverce o straně $a =$ $= 6\,\text{cm}$, proto je

$$|AC| = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

Z trojúhelníku ABM dostaneme pomocí Pythagorovy věty

$$|AM| = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5a^2} = \sqrt{5 \cdot 36} = 6\sqrt{5}.$$

Výška trojúhelníku ACM se rovná odvěsně pravoúhlého trojúhelníku APM. Podle Pythagorovy věty je tedy

$$|MP|^2 = |AM|^2 - \left(\frac{1}{2}|AC|\right)^2 = (6\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{2})^2.$$

Po úpravě dostaneme

$$|MP|^2 = 9^2 \cdot 2, \quad |MP| = 9\sqrt{2}.$$

Obsah trojúhelníku ACM je

$$S_T = \frac{1}{2}|AC| \cdot |MP| = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 9\sqrt{2} = 54$$

a obsah lichoběžníku $ACKL$ je

$$S_L = \frac{3}{4}S_T = \frac{3}{4} \cdot 54 = \frac{1}{2} \cdot 81.$$

Obsah lichoběžníku je $\frac{1}{2} \cdot 81\,\mathrm{cm}^2 = 40{,}5\,\mathrm{cm}^2$.