39. ročník matematické olympiády na středních školách

Korespondenční seminář ÚV MO 1989/90

In: Leo Boček (editor); Jiří Binder (editor); Vladimír Burjan (editor); Karel Horák (editor); Pavel Töpfer (editor): 39. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1989/90. 31. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1992. pp. 175–259.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404906

Korespondenční seminář ÚV MO 1989/90

Korespondenční seminář je jednou z forem péče o talentované žáky. Vznikl ve 24. ročníku MO proto, aby bylo možno věnovat individuální péči i těm žákům, kteří neměli možnost navštěvovat speciální školy a pracovat v tamních seminářích. Nyní, kdy existují i krajské korespondenční semináře a kdy speciální školy s třídami zaměřenými na matematiku najdeme v každém kraji, je cílem tohoto semináře zlepšit individuální přípravu všech studentů, kteří prokázali své schopnosti a matematický talent v předchozích ročnících matematické olympiády. Korespondenční seminář tak nadále zůstává důležitou součástí přípravy na mezinárodní matematickou olympiádu.

K účasti v korespondenčním semináři jsme pozvali všechny špičkové řešitele kategorie A spolu s těmi studenty, kteří nějak vynikli v krajských kolech kategorií B a C předchozího ročníku MO. V průběhu 39. ročníku MO jim bylo postupně zasláno 5 sérií poměrně náročných úloh, jejichž texty najdete v úlohové části této ročenky (tentokrát poprvé s řešeními). Došlá řešení pak byla opravena, ohodnocena a s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům semináře. Nejlepšími v celkovém hodnocení byli:

1. *Petr Hliněný*, 4. ročník G M. Koperníka, Bílovec
2. *Vladimír Skalský*, 4. ročník G, T. Ševčenka, Prešov
3. *Štěpán Kasal*, 3. ročník G, Korunní, Praha
4. *Ondřej Kalenda*, 4. ročník G, Korunní, Praha
5. *Martin Dindoš*, 4. ročník G J. Hronce, Bratislava
6. *Martin Čížek*, 4. ročník G, Rožnov p. Radhoštěm
7. *Ján Bajcsy*, 4. ročník G A. Markuša, Bratislava
8. *Vladimír Glasnák*, 3. ročník G, V. Okružná, Žilina
9. *Martin Schnabl*, 4. ročník G, Korunní, Praha

10.–11. *Jan Hannig*, 3. ročník G, Korunní, Praha
10.–11. *Ondrej Šuch*, 4. ročník G A. Markuša, Bratislava

Korespondenční seminář je řízen tajemníkem ÚV MO RNDr. *Karlem Horákem*, CSc., který se staral o výběr úloh a prováděl i redakci komentářů. Opravu pak zajišťovalo několik pracovníků MÚ ČSAV a několik studentů a aspirantů MFF UK Praha (všichni jsou bývalí olympionici).

Úlohy korespondenčního semináře

1.1 Zjistěte, jaká je nejdelší cesta, po které může šachový král obejít celou šachovnici 8×8 tak, že každé pole projde právě jednou a vrátí se na výchozí pole, přičemž jeho cesta spojující středy jednotlivých polí tvoří uzavřenou neprotínající se lomenou čáru.

1.2 Na listu čtverečkovaného papíru $n \times n$ jsou některé čtverečky obarveny jednou z n různých barev. Pravidelným obarvením budeme rozumět takové obarvení čtverečků, při němž v žádném řádku ani sloupci nejsou dva čtverečky stejné barvy. Lze vždy pravidelně „dobarvit“ všechny čtverečky, jestliže už je (pravidelně) obarveno

a) $n^2 - 1$ čtverečků,
b) $n^2 - 2$ čtverečků,
c) n čtverečků?

1.3 Dokažte, že rovnostranný (ne nutně pravidelný) konvexní pětiúhelník obsahuje rovnostranný trojúhelník se stranou téže délky jako strana daného pětiúhelníku.

1.4 Je dán jednotkový čtverec, z něhož odřízneme rohy — čtyři trojúhelníky, jejichž dvě strany tvoří $\frac{1}{3}$ příslušné strany čtverce. Se vzniklým osmiúhelníkem provedeme tutéž operaci: z každého jeho vrcholu odřízneme trojúhelník, jehož dvě strany tvoří vždy $\frac{1}{3}$ příslušných stran osmiúhelníku, atd. Dostaneme tak posloupnost mnohoúhelníků (každý další je zřejmě částí předchozího). Určete obsah průniku všech takovýchto mnohoúhelníků.

1.5 V kruhové aréně o poloměru 10 m pobíhá lev. Pohybem po lomené čáře uběhl celkem 30 km. Dokažte, že součet všech úhlů, o něž se při běhu otočil, je aspoň 2 998 rad.

1.6 Dokažte, že součet

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} 1\,989 + \binom{n}{5} 1\,989^2 + \ldots$$

je pro každé přirozené n dělitelný číslem 2^{n-1}.

1.7 V prostoru je dán trojhran, v němž jsou sestrojeny osy jednotlivých rovinných úhlů. Dokažte, že vzájemné úhly těchto os jsou buď vesměs ostré, nebo vesměs tupé, anebo všechny pravé.

2.1 Stěny jednotkové krychle jsou označeny čísly $1, 2, \ldots, 6$ tak, že součet čísel na protějších stěnách je 7. Krychli budeme přemísťovat z levého spodního rohu šachovnice 50×50 do protějšího rohu tak, že ji budeme otáčet kolem jedné z jejích hran, aby se pohybovala doprava nebo nahoru. Přitom každému poli šachovnice přiřadíme číslo té stěny, která na něm stála. Najděte nejmenší a největší možný součet uvedených 99 čísel.

2.2 Přiřaďme krajním bodům dané úsečky čísla 1, jejímu středu pak přiřadíme jejich součet, tj. 2. V každém následujícím kroku napíšeme mezi každá dvě už napsaná sousední čísla jejich součet. Kolikrát bude mezi čísly, která dostaneme po 1 973. kroku, zapsáno číslo 1 973?

2.3 V rovině jsou dány dva body A, B. Zvolme bod C ležící na ose úsečky AB a sestrojme posloupnost $C_1 = C$, C_2, ..., C_n, C_{n+1}, ..., kde C_{n+1} je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC_n. Pro jakou polohu bodu C bude bod C_n středem úsečky AB (takže C_{n+1} a další body posloupnosti nebudou definovány)? A v jakém případě vyjde $C_n = C$?

2.4 Jsou dána reálná čísla a_1, a_2, ..., a_n a b_1, b_2, ..., b_n, která splňují aspoň jednu z následujících dvou podmínek:

a) jestliže $a_i < a_j$, pak $b_i \leqq b_j$,

b) jestliže $a_i < \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} < a_j$, pak $b_i \leqq b_j$.

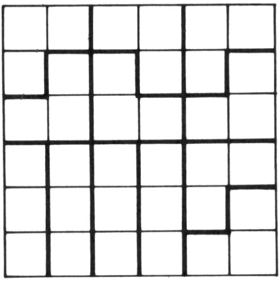
Dokažte, že pak platí

$$n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n) \geqq$$
$$\geqq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

2.5 Předpokládejme, že chceme sestrojit body $M_1, M_2, \ldots, M_n$ v rovině, jestliže jsou dány jejich vzájemné vzdálenosti $r_{ij} = |M_iM_j|$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$. Lze tyto body sestrojit, jestliže víme, že libovolná pětice z uvažovaných n bodů sestrojit jde? Nestačí požadovat možnost sestrojení libovolné čtveřice? Jaké bude nejmenší k v prostoru takové, že možnost sestrojení libovolné k-tice z uvažovaných n bodů zaručí možnost sestrojení všech n bodů (na základě daných čísel r_{ij}, $1 \leqq i, j \leqq n$)?

2.6 V rovině jsou dány dvě přímky m, n a bod O. Sestrojte trojúhelník, jehož výšky leží na daných přímkách m a n a pro který je bod O středem kružnice opsané.

2.7 Zjistěte, pro která k se dá čtverec 6×6 zaplnit 12 plátky, z nichž k má tvar úhelníku a $12 - k$ pravoúhelníku (každý obsahuje tři čtverečky — obr. 28).



Obr. 28

3.1 Jsou dána přirozená čísla $1 < k < n$. Určete nejmenší přirozené číslo m tak, aby platilo: Je-li na šachovnici $n \times n$

rozmístěno libovolným způsobem m věží, můžeme jich vybrat k tak, že žádné dvě se nebudou navzájem ohrožovat.

3.2 Pro dané x můžeme hodnotu x^8 určit pomocí tří operací: $x^2 = x \cdot x$, $x^4 = x^2 \cdot x^2$, $x^8 = x^4 \cdot x^4$; podobně lze x^{15} určit pomocí pěti operací (když k uvedeným operacím přidáme ještě $x^{16} = x^8 \cdot x^8$, $x^{15} = x^{16} : x$). Dokažte, že

a) $x^{1\,000}$ je možno určit pomocí 12 operací (násobení a dělení),

b) pro každé přirozené n můžeme určit x^n pomocí nejvýše $\frac{3}{2}\log_2 n + 1$ operací.

3.3 Označme A_iH_i výšku a A_iM_i těžnici ostroúhlého trojúhelníku $A_1A_2A_3$ ($i = 1, 2, 3$). Dokažte, že jeden ze součinů $|H_1M_1| \cdot |A_2A_3|$, $|H_2M_2| \cdot |A_3A_1|$, $|H_3M_3| \cdot |A_1A_2|$ se rovná součtu zbylých dvou. Platí toto tvrzení i pro tupoúhlý či pravoúhlý trojúhelník?

3.4 Do konvexního n-úhelníku $A_1A_2 \dots A_n$ je vepsán n-úhelník $B_1B_2 \dots B_n$, který má obsah P (přitom vrchol B_i leží na straně A_iA_{i+1} pro $i = 1, 2, \dots, n-1$ a vrchol B_n na straně A_nA_1). Zároveň je mnohoúhelníku $A_1A_2 \dots A_n$ opsán n-úhelník $C_1C_2 \dots C_n$, jehož obsah je Q, přičemž $C_1C_2 \parallel B_1B_2$, $C_2C_3 \parallel B_2B_3$, $\dots$, $C_nC_1 \parallel B_nB_1$ (vrchol A_i zase leží na straně $C_{i-1}C_i$ pro $i = 2, \dots, n$ a A_1 na straně C_nC_1). Určete obsah S mnohoúhelníku $A_1A_2 \dots A_n$, popřípadě zjistěte, jaké hodnoty může S nabývat.

3.5 Uvnitř hran EF a FG krychle $ABCDEFGH$ jsou dány dva body K a M tak, že rovina KBM se dotýká koule, která je dané krychli vepsána. Dokažte, že velikost úhlu φ dvou stěn čtyřstěnu $HBKM$ se společnou hranou BH nezávisí na volbě bodů K a M. Najděte velikost tohoto úhlu φ.

3.6 Na dvoře krále Artuše se sešlo n rytířů. Někteří z nich jsou v nepřátelském vztahu, ale každý z rytířů tu má aspoň $\frac{1}{2}n$ přátel. Dokažte, že kouzelník Merlin, rádce krále Artuše, může rozesadit rytíře okolo kulatého stolu tak, aby každý z nich seděl vedle přátel.
Pokud má každý rytíř stejný sudý (samozřejmě nenulový) počet přátel, může Merlin rozesadit rytíře okolo několika (aspoň tří) kulatých stolů tak, aby nikdo neseděl vedle svého nepřítele (různě velkých stolů má dostatek). Dokažte.

3.7 Najděte hodnotu odmocniny

$$\sqrt{0,\underbrace{111\,11\ldots1\,111\,1}_{100}}$$

s přesností na dvě stě platných číslic.

4.1 Najděte kořeny $r_1, r_2, \ldots, r_n$ rovnice

$$x^n + nx^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

víte-li, že platí $r_1^{16} + r_2^{16} + \ldots + r_n^{16} = n$ (n je dané přirozené číslo).

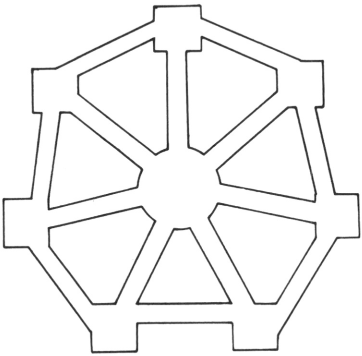
4.2 Daný pravoúhelník R je rozdělen na konečný počet pravoúhelníků R_i, $1 \leqq i \leqq n$, které se navzájem nepřekrývají, přičemž strany každého z nich jsou rovnoběžné se stranami R a každý z pravoúhelníků R_i má aspoň jednu stranu celočíselné délky. Dokažte, že i R má stranu celočíselné délky.

4.3 V rovině jsou dány body $O, A_1, \ldots, A_4$ takové, že každý z trojúhelníků OA_iA_j, $1 \leqq i < j \leqq 4$, má obsah aspoň 1. Dokažte, že pak pro některé dva body A_i, A_j má trojúhelník OA_iA_j obsah nejméně $\sqrt{2}$.

4.4 Předpokládejme, že vrchol A ostroúhlého trojúhelníku ABC má od středu opsané kružnice a od průsečíku výšek stejnou vzdálenost. Určete všechny možné hodnoty úhlu při vrcholu A.

4.5 Dané kružnici je opsán mnohoúhelník. Body dotyku tvoří vrcholy mnohoúhelníku vepsaného dané kružnici. Dokažte, že součin vzdáleností libovolného bodu M na kružnici od stran jednoho z mnohoúhelníků je roven součinu vzdáleností stejného bodu od stran druhého mnohoúhelníku. (Vzdáleností bodu od strany mnohoúhelníku tu rozumíme vzdálenost tohoto bodu od příslušné přímky.)

4.6 Ve městě je jedno kruhové a n čtvercových náměstí, přičemž každé ze čtvercových náměstí je spojeno ulicí s kruho-



Obr. 29

vým a se dvěma čtvercovými (obr. 29). Na každé z $2n$ ulic města je zaveden jednosměrný provoz tak, že na každé náměstí lze přijet a z každého náměstí lze odjet. Dokažte, že z každého náměstí lze dojet na libovolné jiné, aniž bychom narušili zavedená pravidla.

4.7 Označme α, β, γ úhly, které svírá tělesová úhlopříčka AG hranolu $ABCDEFGH$ s hranami AB, AD a AE. Dokažte, že $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

5.1 Jsou dána reálná čísla a, b a přirozené číslo n. Zjistěte, jakých hodnot může nabývat x_0, jestliže reálná čísla x_0, x_1, ..., x_n splňují rovnosti

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = a, \qquad \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = b.$$

5.2 Jsou-li A_1, A_2, ..., A_5 body na povrchu jednotkové koule, jaká je největší hodnota výrazu

$$\min_{1 \leqq i < j \leqq 5} |A_i A_j|\,?$$

Určete všechny konfigurace bodů A_1, A_2, ..., A_5, pro něž se uvedené maximum nabývá.

5.3 Obchodník s koberci potřebuje určit rozměry nového koberce, ale nemůže najít metr. Při ukládání obdélníkového koberce však zjistil, že v každé ze dvou skladovacích místností může nový koberec položit na podlahu tak, že každý roh koberce se dotýká jiné stěny místnosti. Ty mají rozměry 38×55 a 50×55 m. Jak velký je nový koberec?

5.4 Pro jaká přirozená čísla $n \geqq 2$ je nerovnost

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqq p(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)$$

splněna pro libovolná reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jestliže a) $p = 1$, b) $p = \frac{4}{3}$, c) $p = \frac{6}{5}$?

5.5 Kružnice je body $A_1, A_2, \ldots, A_n$ rozdělena na n stejných částí, z nichž každá je obarvena nějakou barvou. Řekneme, že dva oblouky dané kružnice (jejich krajní body jsou některé z daných bodů) jsou shodně obarveny, jestliže při nějakém otočení dané kružnice se uvažované oblouky shodují včetně příslušných barev. Dokažte, že platí: Jestliže ke každému bodu A_i, $1 \leqq i \leqq n$, existují dva shodně obarvené oblouky se společným krajním bodem A_i, pak lze celou kružnici rozdělit na několik shodně obarvených oblouků, tj. uvažované obarvení je „periodické".

5.6 Jsou dána čísla $p > 1$, $q > 1$. Na stranách BC, CD pravoúhelníku $ABCD$ jsou dány body P, Q tak, že $|BC| = p|BP|$ a $|CD| = q|QD|$. Pro jaký poměr stran AB a BC bude úhel PAQ největší?

5.7 V rohu šachovnice $n \times n$ stojí šachová figurka, které obvykle říkáme jezdec. První hráč s ní táhne dvakrát po sobě obvyklým způsobem (2 pole v jednom směru rovnoběžném s okrajem šachovnice a 1 pole ve směru kolmém), zatímco druhý hráč táhne jedním prodlouženým tahem (o 3 pole v jednom směru a 1 pole ve směru kolmém). Oba hráči se střídají, přitom první se snaží postavit jezdce do protějšího rohu šachovnice, zatímco druhý mu v tom chce zabránit. Kdo z nich může vyhrát, jestliže je $n \geqq 4$?

1.1 Král může táhnout buď rovnoběžně s některým okrajem šachovnice (rovně), anebo rovnoběžně s některou úhlopříčkou (šikmo). Nejprve dokážeme, že při své cestě musel udělat aspoň 28 rovných tahů.

Všimněme si okrajových polí šachovnice (obr. 30, je jich 28). Při své cestě musel král projít každým z nich. Očíslujme je čísly 1, 2, ..., 28 v tom pořadí, jak je král procházel. Tvrdíme, že pole 1 a 2, 2 a 3, 3 a 4, ..., 28 a 1 jsou sousední (tj. mají společnou hranu).

Skutečně, nebudou-li např. pole 1 a 2 sousední, pak část královy cesty mezi 1 a 2 rozdělí šachovnici na dvě části; každá z nich obsahuje jedno z okrajových polí, sousedících s 2 — nechť jsou to pole i a j, $3 \leqq i < j \leqq 28$.

Při pokračování své cesty z 2 se král časem dostane do i, odtud pak do $i+1$, $i+2$, ..., až by měl posléze dojít do j. Avšak úsek cesty mezi i a j zřejmě musí protnout úsek 1–2, což je spor se zadáním (cesta krále má být neprotínající se křivka). Pole 1 a 2 tedy musí být sousední; podobně 2 a 3, 3 a 4, ..., 28 a 1.

Uvažujme nyní obvyklé černobílé obarvení šachovnice. Pole 1 a 2 jsou sousední, mají tedy různou barvu. Odtud plyne, že během cesty 1–2 musel král udělat aspoň jeden rovný tah — při šikmých tazích se totiž barva políčka nemění. Podobně v částech 2–3, 3–4, ..., 28–1 musel král udělat aspoň jeden rovný tah, tj. udělal celkem aspoň 28 rovných tahů.

Označme r počet rovných, s počet šikmých tahů. Protože král prošel všechna pole, udělal 64 tahů, tedy $r + s = 64$.

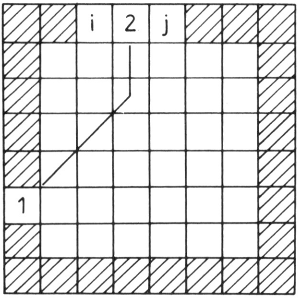
Délka jeho cesty pak bude

$$d = (r + s\sqrt{2})a = (r + (64 - r)\sqrt{2})a = (64\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)r)a,$$

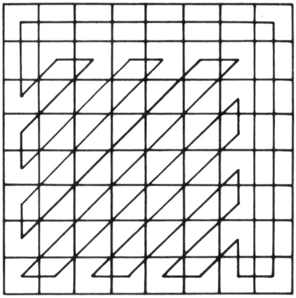
kde a je délka strany políčka šachovnice. Jelikož jsme ukázali, že $r \geqq 28$, je nutně

$$d \leqq (28 + 36\sqrt{2})a.$$

Na obr. 31 je příklad cesty, pro kterou $r = 28$, tj. pro kterou nastává v posledním vztahu rovnost.



Obr. 30

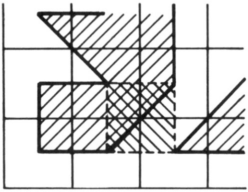


Obr. 31

Maximální délka tedy je $(28 + 36\sqrt{2})a$.

Jiné řešení. Uvažujme mřížové body, které jsou středy příslušných 64 polí dané šachovnice. Navíc budeme předpokládat, že pole této šachovnice mají jednotkovou stranu.

Pokud cesta spojuje dva sousední mřížové body „šikmo", leží právě polovina příslušného čtverečku s úhlopříčkou délky $\sqrt{2}$ uvnitř části omezené uvažovanou (uzavřenou) lomenou čarou (obr. 32), zatímco jeho druhá polovina leží vně.



Obr. 32

Přitom všechny takto sestrojené čtverečky leží uvnitř čtverce 7×7, který celou uzavřenou cestu obsahuje.

Obsah části uvnitř lomené čáry dovedeme spočítat podle známého Pickova vzorce: Obsahuje-li mnohoúhelník s vrcholy v mřížových bodech h mřížových bodů (včetně vrcholů) na hranici a u mřížových bodů uvnitř, je jeho obsah $S = \frac{h}{2} + u - 1$. Obsah příslušné části je tedy 31 a je konstantní bez ohledu na délku odpovídající cesty. Pro počet s „šikmých" tahů odtud plyne $49 - 31 \geqq \frac{s}{2}$, tedy $s \leqq 36$. Obr. 32 ukazuje, že cesta s 36 šikmými tahy vskutku existuje.

1.2 Pro stručnost nazývejme „list čtverečkovaného papíru $n \times n$" šachovnicí. Snadno zjistíme, že v případech b) a c) šachovnici pravidelně dobarvit nelze; stačí vzít $n = 2$ (takže $n^2 - 2 = 2$) a šachovnici 2×2 obarvit jako na obr. 33 (1, 2 jsou dvě různé barvy). Dále ukážeme, že v případě a) šachovnici dobarvit lze.

Předpokládejme, že v šachovnici $n \times n$ je pravidelně obarveno $n^2 - 1$ polí n barvami. Šachovnice má n sloupců, takže každá barva může být použita nejvýše n-krát (jinak by některý sloupec obsahoval dvě pole stejné barvy). Protože je ale celkem obarveno n^2-1 polí, musí se každá barva vyskytovat na šachovnici právě n-krát s výjimkou jediné, která se vyskytuje pouze $(n-1)$-krát; označme tuto barvu B. Ukážeme, že touto barvou lze (pravidelně) dobarvit zbývající pole.

Označme S sloupec a R řádek, ve kterém se neobarvené pole nachází. Stačí zřejmě ukázat, že ani v S, ani v R se barva B nevyskytuje. Dokážeme to pro S (pro R je důkaz analogický).

V každém sloupci je pravidelně obarveno všech n polí n barvami, takže každá barva se tam vyskytuje právě jednou — i barva B. Takových sloupců je celkem $n-1$, takže barva B se v nich vyskytuje $(n-1)$-krát. Přesně tolikrát se ale B vyskytuje na celé šachovnici, takže ve sloupci S se už barva B nevyskytuje.

1	
	2

Obr. 33

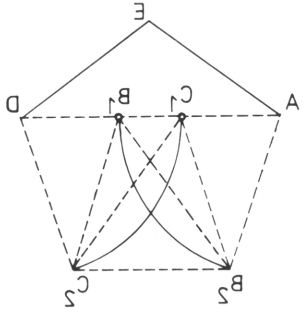
1		2	3	4	5
	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1
3	4	5	6	1	2
4	5	6	1	2	3
5	6	1	2	3	4

1					
					2
				2	
			2		
		2			
	2				

Obr. 34

Kromě příkladu uvedeného v řešení lze uvést i příklad pro obecné n přirozené (obr. 34 pro $n = 6$). Samozřejmě, že obecně nelze šachovnici $n \times n$ dobarvit, ani když počet už obarvených polí leží mezi n a n^2-2. Na druhé straně by bylo zajímavé najít nějaké jednoduché podmínky na dané obarvení, při nichž šachovnici (pravidelně) dobarvit lze! Také platí, že pokud je počet už obarvených polí menší než n, lze šachovnici vždy dobarvit (pokuste se to dokázat!).

1.3 Předpokládejme, že existuje takový konvexní rovnoramenný pětiúhelník $ABCDE$, který požadovaný rovnostranný trojúhelník neobsahuje. Zároveň budeme předpokládat, že $|AB| = 1$. Jeho vrcholy označme např. tak,



Obr. 35

aby úhlopříčka AD byla největší (obr. 35), podle trojúhelníkové nerovnosti pak je

$$|AD| < |AE| + |ED| = 2.$$

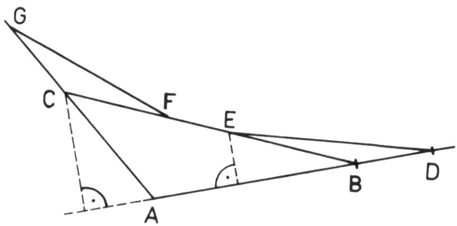
Protože v trojúhelnících ABD, ACD je strana AD nejdelší, musí být úhly proti ní větší než $60°$, je tedy také $|\sphericalangle ABC| > 60°$, $|\sphericalangle BCD| > 60°$.

Protože předpokládáme, že pětiúhelník $ABCDE$ neobsahuje žádný rovnostranný trojúhelník se stranou 1, plyne odtud, že rovnostranné trojúhelníky nad AB, BC, CD

protínají úhlopříčku AD. Sestrojme v polorovině, v níž leží i body B, C, rovnostranné trojúhelníky AB_1B_2, C_1C_2D, kde body B_1, C_1 leží na AD a je $|AB_1| = |C_1D| = 1$.

Za uvedeného předpokladu tedy vychází, že bod B musí ležet uvnitř oblouku B_1B_2 jednotkové kružnice se středem A a analogicky bod C uvnitř oblouku C_1C_2. Uvnitř lichoběžníku $B_2C_2B_1C_1$ ale nenajdeme žádnou úsečku délky 1 (je $|B_1B_2| = |C_1C_2| = 1$ a $|B_2C_2| < 1$). Takový pětiúhelník tedy neexistuje. Uvedený postup lze snadno zobecnit na případ rovnostranného $(2k+1)$-úhelníku.

1.4 Předpokládejme, že v některém okamžiku jsme odřízli trojúhelník ABC. Uvažujme trojúhelníky BDE a CFG, které odřízneme (obr. 36). Pro jejich obsahy platí $S(BDE) = \frac{1}{9}S(ABC)$, protože $|BD| = \frac{1}{3}|AB|$ a výška v_e v trojúhelníku BDE je rovna jedné třetině výšky v_c v trojúhelníku ABC, a podobně je i $S(CFG) = \frac{1}{9}S(ABC)$. V n-tém kroku tedy odřezáváme 2^{n+1} trojúhelníků, jejichž obsahy dávají $\frac{2}{9}$ součtu obsahů trojúhelníků odříznutých v $(n-1)$-ním kroku.



Obr. 36

V prvém kroku odřezáváme 4 trojúhelníky o obsahu $\frac{1}{18}$. Hledaný obsah je tedy

$$S = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n = 1 - \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{5}{7}.$$

1.5 Předpokládejme, že lomená čára, která je dráhou lva, má krajní body X, Y a lomí se po řadě v bodech A_1, A_2, …, A_n. Označme α_i orientovaný úhel otočení lva v bodě A_i. Dráhu lva nyní „narovnáme" do přímky následujícím způsobem:

Pro $i = 1, 2, \ldots, n$ postupně vezmeme bod A_i a celou dráhu lva počínaje bodem A_i otočíme kolem středu A_i o úhel $-\alpha_i$. Při tomto otáčení se bude střed S arény pohybovat po části kružnice se středem A_i, která má délku $d_i = |SA_i| \cdot \cdot |\alpha_i|$. Pro jednoduchost budeme otočenou dráhu lva značit stejně jako před otočením. Po provedení dostaneme dráhu lva jako úsečku XY, která má délku 30 km, a leží na ní po řadě body X, A_1, A_2, …, A_n, Y. Nás však bude hlavně zajímat křivka, kterou při „narovnávání" dráhy opsal bod S, a ta se skládá z oblouků kružnic. Její krajní body mají zřejmě od bodů X, Y vzdálenosti nejvýše 10 m. Pro délku křivky pak srovnáním s délkou úsečky XY snadno zjistíme, že

$$d \geqq 30\,000 - 2 \cdot 10 = 29\,980,$$

$$29\,980 \leqq d = \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} |SA_i| \cdot |\alpha_i| \leqq \sum_{i=1}^{n} 10\,|\alpha_i|,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geqq 2\,998.$$

Součet úhlů otočení lva tedy je alespoň 2 998 rad.

1.6 Označme

$$a_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} 1\,989 + \ldots$$

a

$$b_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} 1\,989 + \ldots .$$

Podle vzorce

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

který platí pro libovolná k, n přirozená, když ovšem klademe $\binom{n}{k} = 0$ pro $n < k$,[1]) dostaneme

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \left(\binom{n}{2} + \binom{n}{3}\right) 1\,989 + \ldots = \\ &= \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{3} 1\,989 + \ldots = a_{n+1} . \end{aligned}$$

Podobně určíme součet

$$\begin{aligned} 1\,989 a_n + b_n &= \binom{n}{0} + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right) 1\,989 + \ldots = \\ &= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{2} 1\,989 + \ldots = b_{n+1} . \end{aligned}$$

---

[1]) Vzhledem k tomu má daný součet jen konečný počet nenulových sčítanců, takže je nekonečný pouze formálně.

Našli jsme tak rekurentní vzorce $a_{n+1} = a_n + b_n$ a $b_{n+1} = 1\,989a_n + b_n$. Jejich úpravou dostaneme

$$b_{n+1} = 1\,989a_n + b_n = 1\,988a_n + a_n + b_n = 1\,988a_n + a_{n+1},$$

takže

$$\begin{aligned} a_{n+1} = a_n + b_n = a_n + a_n + 1\,988a_{n-1} = \\ = 2a_n + 1\,988a_{n-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Matematickou indukcí dokážeme, že součet a_n je dělitelný 2^{n-1}. Pro $n = 1$ je $a_1 = 1$, což je dělitelné $2^{1-1} = 1$ a pro $n = 2$ je $a_2 = 2$, což je dělitelné $2^{2-1} = 2$. Předpokládejme, že 2^{n-2} dělí a_{n-1} a 2^{n-1} dělí a_n pro každé $n \geqq 2$, tj. že existují přirozená čísla k, l tak, že $a_{n-1} = 2^{n-2}k$ a $a_n = 2^{n-1}l$. Podle rekurentního vztahu (2) pak je

$$\begin{aligned} a_{n+1} = 2a_n + 1\,988a_{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1}l + 497 \cdot 2^2 \cdot 2^{n-2}k = \\ = 2^n(l + 497k). \end{aligned}$$

Je tedy a_{n+1} dělitelné 2^n pro každé přirozené n, čímž je důkaz matematickou indukcí hotov.

Jiné řešení. Označme

$$S_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3}1\,989 + \binom{n}{5}1\,989^2 + \dots$$

a $a = 1 + \sqrt{1\,989}$, $b = 1 - \sqrt{1\,989}$. Rozvinutím podle binomické věty vyjde

$$a^n - b^n = 2\sqrt{1\,989}\,S_n. \tag{3}$$

Dále využijeme rovnost

$$a^{n+2} - b^{n+2} = (a+b)(a^{n+1} - b^{n+1}) - ab(a^n - b^n).$$

Protože $a + b = 2$, $ab = 1 - 1\,989 = -1\,988$, plynou z (3) rovnosti

$$2\sqrt{1\,989}\,S_{n+2} = 2 \cdot 2\sqrt{1\,989}\,S_{n+1} + 1\,988 \cdot 2\sqrt{1\,989}\,S_n,$$
$$S_{n+2} = 2S_{n+1} + 1\,988S_n = 2S_{n+1} + 4 \cdot 497S_n.$$

Pro $n = 1, 2$ dané tvrzení snadno ověříme, pro vyšší n je dokážeme matematickou indukcí stejně jako v předchozím řešení.

1.7 (Podle P. Hliněného, 4. ročník GMK, Bílovec.) Ze vzorce pro skalární součin vektorů

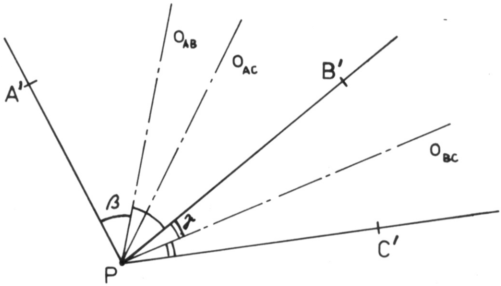
$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\alpha$$

vyplývá, že jejich úhel α je ostrý (pravý, tupý) právě tehdy, když skalární součin je kladný (nulový, záporný). Zvolme na hranách trojhranu jednotkové vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}$ jsou pak zřejmě směrové vektory os jednotlivých rovinných úhlů trojhranu. Vzájemné skalární součiny jsou

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} + 1,$$
$$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} + 1,$$
$$(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} + 1,$$

jsou tedy všechny stejné, a proto jsou vzájemné úhly os buďto všechny ostré, nebo pravé, nebo tupé.

Jiné řešení (podle M. Zamazala, 3. ročník G, Brno, kpt. Jaroše). Je-li trojhran tvořen polopřímkami PA, PB, PC, označme příslušné osy úhlů o_{AB}, o_{AC}, o_{BC}. Uvažujme kolmý průmět celé situace do roviny $o_{AB}o_{BC}$ (průměty označujeme čárkou). Obě polopřímky PA', PB' svírají s osou o_{AB} stejný úhel β (obr. 37). Podobně PB', PC' svírají s osou



Obr. 37

o_{BC} úhel γ. Úhel os o_{AB}, o_{BC} je $\beta + \gamma$. Je-li $\beta + \gamma < \frac{\pi}{2}$, je $|\sphericalangle A'PC'| < \pi$ (jako na obr. 37) a průmět osy o_{AC} leží uvnitř úhlu $A'PC'$. Úhly všech os jsou zřejmě ostré. Je-li $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, je úhel $A'PC'$ přímý. Je-li odchylka PB od průmětu rovna $-\alpha$, mají PA, PC od průmětu obě stejnou odchylku α. Proto osa o_{AC} je kolmicí na průmětnu. Tedy úhly všech os jsou pravé.

Ve zbývajícím případě jsou úhly všech os přirozeně tupé.

2.1 (Podle M. Stehlíka, 2. ročník G, Brno, kpt. Jaroše.) Napišme si nejprve čísla na šachovnici do posloupnosti v tom pořadí, v jakém vznikala. Ukážeme, že mezi dvěma po sobě jdoucími výskyty čísla a se vždy vyskytne číslo $7 - a$ ($1 \leqq a \leqq 6$). Skutečně, uvažujme některé políčko, na němž je například číslo 1, a táhněme z tohoto políčka např. doprava. Tím se dostanou čísla 1 a 6 na levou, resp. na pravou stěnu krychle. Nyní při libovolném počtu tahů nahoru tam čísla 1 a 6 zůstanou, tj. budou se otiskovat pouze čísla 2, 3, 4, 5 (v nějakém pořadí). Chceme-li ještě někdy otisknout znovu číslo 1, musíme táhnout aspoň jednou doprava — tím otiskneme číslo 6, tj. mezi dvěma výskyty čísla 1 se musí vyskytovat číslo 6. Podobně to dopadne, půjdeme-li z původního políčka s číslem 1 nahoru. Stejná úvaha platí i pro libovolná jiná čísla a, $7-a$ ($1 \leqq a \leqq 6$).

Označme p_a počet výskytů čísla a. Z právě dokázaného tvrzení plyne, že čísla p_a a p_{7-a} se liší nejvýše o jedničku. Součet všech 99 čísel otisknutých na šachovnici bude

$$\begin{aligned} s &= p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6 = \\ &= \frac{7}{2}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\bigl(5(p_6 - p_1) + 3(p_5 - p_2) + (p_4 - p_3)\bigr). \end{aligned}$$

Avšak $p_1 + \ldots + p_6 = 99$ a rozdíly $p_6 - p_1$, $p_5 - p_2$, $p_4 - p_3$ mohou nabývat pouze hodnot 0, 1, -1, nutně tedy

$$s \leqq \frac{7}{2} \cdot 99 + \frac{1}{2}(5 + 3 + 1) = 351$$

a

$$s \geqq \frac{7}{2} \cdot 99 + \frac{1}{2}(-5 - 3 - 1) = 342.$$

Snadno nahlédneme, že těchto součtů lze skutečně dosáhnout. Stačí jít nejprve 49krát nahoru a pak 49krát doprava. Bude-li na začátku krychle stát na stěně s číslem 6, vpředu mít 5 a vpravo 4, bude $s = 351$, bude-li krychle stát na 1, vpředu mít 2 a vpravo 3, bude $s = 342$. Hledané extrémy tedy jsou $s_{\max} = 351$, $s_{\min} = 342$.

2.2 Především si všimněme, že v n-tém kroku a později vznikají už pouze čísla větší než n (za první krok tu považujeme vznik čísla 2). Snadno to odvodíme matematickou indukcí. To znamená, že 1 973 mohlo vzniknout stejně jen v prvních 1 972 krocích. Stačí tedy spočítat všechny výskyty čísla 1 973 (ve všech krocích) při číslování úsečky. To nám umožní následující tvrzení: Jsou-li a, b dvě nesoudělná přirozená čísla, pak se při postupném číslování úsečky vyskytnou vedle sebe (v tomto pořadí) právě jednou.

Dokážeme ho matematickou indukcí podle součtu $s = a + b$. Pro $s = 2$ je jedinou možností $a = b = 1$, takže tvrzení platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna $2 \leqq s \leqq N - 1$, a uvažujme nesoudělná čísla $a > b$ se součtem N. Pak čísla a, b budou (v tomto pořadí) v nějakém kroku sousední, právě když v předchozím kroku jsou sousední čísla $a-b$, b. Avšak $(a-b)+b = a \leqq N-1$, takže podle indukčního předpokladu dojde k takové situaci během číslování úsečky právě jednou. Tím je dokázáno i celé tvrzení.

Nyní si stačí uvědomit, že číslo 1 973 vznikne v nějakém kroku právě tehdy, pokud v předchozím kroku byla vedle sebe čísla k a $1973 - k$, $1 \leqq k \leqq 1972$. Protože 1 973 je prvočíslo, jsou k a $1973 - k$ nesoudělná pro každé k od 1 do 1 972. Podle právě dokázaného tvrzení se tedy vyskytnou obě čísla vedle sebe právě jednou. Tím dostáváme celkem 1 972 výskytů čísla 1 973, což je hledaný výsledek.

Jiné řešení (podle P. Mederlyho, 2. ročník GAM, Bratislava). Zadání trochu pozměníme: krajním bodům původní úsečky přiřadíme zlomky $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$ a středu úsečky, jejímž krajním bodům jsme přiřadili čísla $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$, přiřadíme $\dfrac{a+c}{b+d}$. Zlomky nekrátíme, ani kdyby to bylo možné. Jmenovatele těchto zlomků tvoří původně konstruovanou posloupnost čísel. Hledáme tedy zlomky tvaru $\dfrac{k}{1\,973}$, kde $1 \leqq k \leqq 1\,972$.

Stejně jako v předchozím řešení snadno zjistíme, že každý z uvedených jmenovatelů vzniklých po n-tém kroku je větší než n, a navíc každý z čitatelů vzniklých naopak v prvních n krocích je nejvýše roven n.

Dále si všimněme, že leží-li zlomek $\dfrac{a}{b}$ nalevo od $\dfrac{c}{d}$, je $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$. To ověříme indukcí: V prvním kroku je $\dfrac{0}{1} < \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{1}$, z nerovnosti $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ potom snadným výpočtem vyplývá, že $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$. A odtud hned plyne, že zlomků tvaru $\dfrac{k}{1\,973}$ je v uvažované posloupnosti nejvýše 1 972, přičemž každý se může vyskytnout nejvýše jednou.

Dále platí, že jsou-li v některém kroku $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ sousední zlomky, je $bc - ad = 1$. To ověříme rovněž indukcí. Konečně platí následující tvrzení: Jsou-li $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ sousední a $\dfrac{p}{q} \in \left(\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}\right)$, pak $q \geqq b + d$. To plyne z toho, že pro $\dfrac{c}{d} > \dfrac{p}{q}$ je

$\frac{c}{d} - \frac{p}{q} = \frac{A}{dq}$, přičemž $A \geqq 1$, tedy $\frac{c}{d} - \frac{p}{q} \geqq \frac{1}{dq}$. Podobně je i $\frac{p}{q} - \frac{a}{b} \geqq \frac{1}{bq}$. Dostaneme tak nerovnost

$$\frac{1}{bd} = \frac{bc - ad}{bd} = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \left(\frac{c}{d} - \frac{p}{q}\right) + \left(\frac{p}{q} - \frac{a}{b}\right) \geqq \frac{1}{dq} + \frac{1}{bq},$$

neboli

$$q \geqq b + d.$$

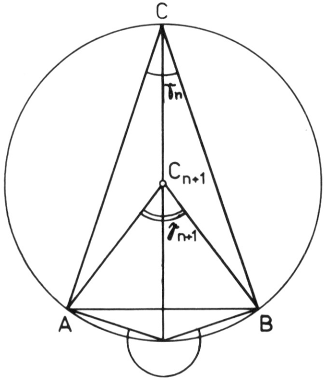
Tím je poslední tvrzení dokázáno.

Toto tvrzení zaručuje, že po 1 973. kroku žádný z intervalů $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$, kde $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ jsou libovolné dva dosud sestrojené sousední zlomky, neobsahuje zlomek tvaru $\frac{k}{1\,973}$. Po 1 973. kroku je totiž $b + d > 1\,973$, protože jeden ze zlomků $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ musel vzniknout v tomto kroku.

Protože 1 973 je prvočíslo, nemůže žádné z čísel $\frac{k}{1\,973}$ $(1 \leqq k \leqq 1\,972)$ splynout s některým dosud utvořeným zlomkem. Proto každý z těchto 1 972 zlomků je členem sestrojené posloupnosti. Protože jsme už ukázali, že se víc než jednou vyskytnout nemůže, vyskytne se právě jednou, a číslo 1 973 se jako jmenovatel objeví 1 972krát.

Poznámka. Když si ještě všimneme toho, že takto tvořené zlomky jsou vesměs v základním tvaru, snadno zjistíme, jaká je odpověď na otázku, kolikrát se v uvedené posloupnosti objeví libovolné přirozené číslo n.

2.3 (Podle O. Kalendy, 4. ročník GWP, Praha.) Všechny body C_n leží na ose úsečky AB. Přiřaďme bodu C_n úhel $\gamma_n = |\sphericalangle AC_nB|$, přičemž pro C_n nad AB bereme konvexní a pro C_n pod AB nekonvexní úhel (obr. 38).



Obr. 38

Definujme relaci $\alpha \sim \beta$, právě když $\alpha = \beta + 2k\pi$ pro k celé. Pak platí $\gamma_{n+1} \sim 2\gamma_n$. To plyne následovně z věty o obvodovém úhlu: Je-li C_n i C_{n+1} nad AB, je $\gamma_{n+1} = 2\gamma_n$. Je-li C_n i C_{n+1} pod AB, je $2\pi - \gamma_{n+1} = 2(2\pi - \gamma_n)$, tedy $\gamma_{n+1} = 2\gamma_n - 2\pi$. Je-li C_n pod a C_{n+1} nad AB, je $2\pi - \gamma_{n+1} = 2(2\pi - \gamma_n)$, tedy $\gamma_{n+1} = 2\gamma_n - 2\pi$. Je-li C_n nad a C_{n+1} pod AB, je $\gamma_{n+1} = 2\gamma_n$.

To znamená, že je

$$\gamma_n \sim 2\gamma_{n-1} \sim 2^2\gamma_{n-2} \sim \ldots \sim 2^{n-1}\gamma_1, \tag{1}$$

a protože relace $\sim$ je tranzitivní (tj. je-li $\alpha \sim \beta$ a $\beta \sim \gamma$, je i $\alpha \sim \gamma$), plyne odtud vztah

$$\gamma_n \sim 2^{n-1}\gamma_1, \qquad \text{neboli} \qquad 2^{n-1}\gamma_1 = \gamma_n + 2k\pi$$

pro nějaké celé k. C_n je pak středem úsečky AB, právě když $\gamma_n = \pi$, tj. právě když je $\gamma_1 \in (0, \pi\rangle$ tvaru

$$\gamma_1 = \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}} \quad \text{pro} \quad k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1. \qquad (2)$$

Je-li $C_n = C_1$, je $\gamma_n \sim \gamma_1$, zároveň ale podle (1) je $\gamma_n \sim 2^{n-1}\gamma_1$, takže $\gamma_1 \sim 2^{n-1}\gamma_1$. Odtud dostáváme, že $2^{n-1}\gamma_1 = \gamma_1 + 2k\pi$, neboli

$$\gamma_1 = \frac{2k\pi}{2^{n-1}} \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1} - 2.$$

To platí pro $n > 2$. Pro $n = 1$ vyhovuje libovolný bod C osy úsečky AB, pro $n = 2$ bod C neexistuje (kdyby $C_2 = C_1 = C$, byl by poloměr kružnice opsané $|C_2C_1| = 0$).

Obráceně, je-li $\gamma_1 = \dfrac{2k\pi}{2^{n-1} - 1}$, pak $\gamma_n \sim 2^{n-1}\gamma_1 = \dfrac{2^n k\pi}{2^{n-1} - 1} = 2k\pi + \dfrac{2k\pi}{2^{n-1} - 1} \sim \gamma_1$. Je tedy $C_n = C$, právě když $n = 1$ a C je libovolný bod osy úsečky AB, nebo když $n > 2$ a $\gamma_1 = \dfrac{2k\pi}{2^{n-1} - 1}$, kde $k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1} - 2$. (Hodnotu $k = 0$ neuvažujeme, protože $\gamma_1 > 0$.)

2.4 Nejdříve si uvědomme, že podmínka b) má silnější předpoklad než a), ale stejné tvrzení, proto splňuje-li nějaká dvojice indexů (i, j) podmínku a), splňuje i b).

Označme $A = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, požadovanou nerovnost pak můžeme ekvivalentně zapsat jako

$$b_1(a_1 - A) + b_2(a_2 - A) + \ldots + b_n(a_n - A) \geqq 0. \qquad (1)$$

Označíme-li $b = \max\{b_i\,;\, a_i < A\} = b_{i_0}$, platí

$$b_i(a_i - A) \geqq b(a_i - A) \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2)$$

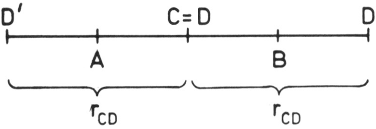
To je zřejmé pro $a_i - A \leqq 0$, zatímco pro $a_i - A > 0$ je $a_{i_0} < A < a_i$, takže podle podmínky b) dostaneme $b = b_{i_0} \leqq b_i$. Sečtením nerovností (2) pro všechna $i = 1$, $2, \ldots, n$ dostáváme

$$b_1(a_1 - A) + \ldots + b_n(a_n - A) \geqq b(a_1 + \ldots + a_n - nA) = 0,$$

tím je nerovnost (1) dokázána.

2.5 (Podle P. Hliněného, 4. ročník GMK, Bílovec.) Vyřešíme úlohu nejdříve na přímce, pak v rovině a nakonec v prostoru. Ukážeme, že nejmenší číslo k je rovno $N + 3$, kde $N = 1, 2, 3$ je dimenze prostoru.

Nejprve ukážeme, že pro body ležící v přímce nestačí sestrojitelnost trojic. Mějme čtyři body A, B, C, D, kde $r_{AB} = 1$, $r_{BC} = \frac{1}{2}$, $r_{AC} = \frac{1}{2}$, $r_{AD} = \frac{1}{2}$, $r_{BD} = \frac{1}{2}$, $r_{CD} = 1$. Jde o úsečku AB a o její jakoby dvojnásobný střed C, D. Vzdálenost r_{CD} je vzdálenost středu úsečky od jeho obrazu v souměrnosti podle A, popřípadě B (obr. 39). Celá čtveřice není sestrojitelná, ale všechny trojice sestrojit lze. Nyní ukážeme, že sestrojitelnost čtveřic stačí.

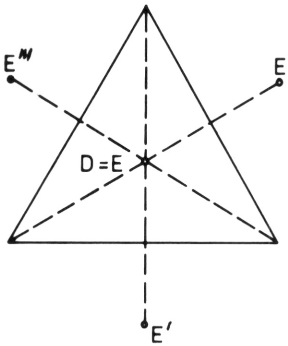


Obr. 39

Jsou-li dány dva různé body na přímce, existuje nejvýše jeden bod, který má od těchto bodů předem zadané vzdálenosti. Jsou-li vzdálenosti daných n bodů navzájem všechny nulové, jsou tyto body sestrojitelné. V opačném případě vybereme body A, B, pro které je r_{AB} nenulové a sestrojíme je kdekoli na přímce ve vzájemné vzdálenosti r_{AB}. Každý další bod X má předepsány takové vzdálenosti r_{AX}, r_{BX}, že je sestrojitelný. Přitom tento bod je určen jednoznačně. Sestrojme tedy jediným možným způsobem všechny další body. Ty už budou řešením úlohy. Kdyby totiž některé dva z dalších bodů X, Y neměly správnou vzdálenost, nebyla by čtveřice A, B, X, Y sestrojitelná.

Rozeberme teď úlohu v rovině — nejdříve na příkladu ukážeme, že sestrojitelnost čtveřic nestačí. Použijeme rovnostranný trojúhelník ABC (obr. 40) a jeho „dvojnásobný“ střed D, E (tím jsou dány vzdálenosti bodů D, E od vrcholů A, B, C). Vzdálenost r_{DE} je pak dána jako vzdálenost středu trojúhelníku ABC od jeho obrazu v souměrnosti podle AB (BC, CA). Každou čtveřici sestrojit lze, celou pětici ne. Nyní ukažme, že sestrojitelnost pětic stačí.

Podobně jako na přímce existuje v rovině nejvýše jeden bod, který má předem zadané vzdálenosti od tří daných bodů neležících v přímce (mají-li tři kružnice dva společné průsečíky, leží jejich středy na přímce). Jestliže každé tři



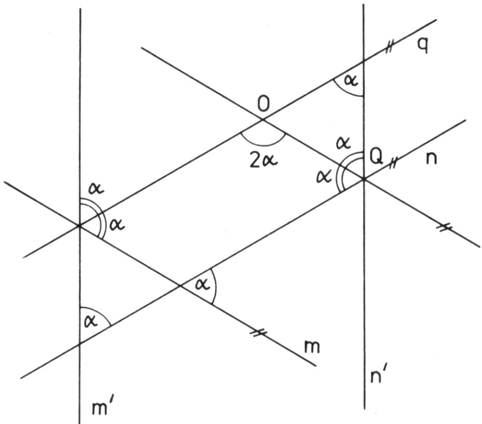
Obr. 40

z daných n bodů leží po sestrojení v přímce, úloha se redukuje na přímku, kde podle předešlého stačí i sestrojitelnost čtveřic. V opačném případě vybereme tři body A, B, C, které po sestrojení neleží v přímce. Sestrojme k bodům A, B, C jednoznačně každý z dalších uvažovaných bodů. Získané body jsou řešením. Kdyby totiž některé z dalších bodů X, Y neměly správnou vzdálenost r_{XY}, nebyla by pětice A, B, C, X, Y sestrojitelná.

A konečně případ prostoru. Důkaz je úplně analogický, proto jen stručně. Sestrojitelnost pětic nestačí, protože stačí vzít pravidelný čtyřstěn $ABCD$ s „dvojnásobným" středem E, F, přičemž r_{EF} bude vzdálenost středu od jeho obrazu v souměrnosti podle rovin ABC (ABD, ACD, BCD). Každou pětici sestrojit lze, ale celou šestici ne. Sestrojitelnost šestic je už postačující, protože pokud každé čtyři body leží po sestrojení v jedné rovině, redukuje se úloha do menší dimenze, a jinak sestrojíme nějakou čtveřici A, B, C, D, která neleží v rovině, a ukážeme, že všechny další body jsou touto čtveřicí jednoznačně určeny. Každé dva X, Y z nich budou mít správnou vzdálenost r_{XY}, jinak by odpovídající šestice A, B, C, D, X, Y nebyla sestrojitelná.

2.6 (Podle P. Hliněného, 4. ročník GMK, Bílovec.) Předpokládejme, že trojúhelník ABC vyhovuje podmínkám úlohy a že A leží na přímce m a B na přímce n (přímky m, n musí být různoběžky). Označme p osu souměrnosti bodů B, C, ta prochází bodem O a je rovnoběžná s m. Protože $B \in n$, musí bod C ležet na obraze n' přímky n podle osy p. Podobně leží C na obraze m' přímky m podle osy q. Odtud plyne postup konstrukce: bod C najdeme jako průsečík přímek m', n' a zbytek trojúhelníku sestrojíme snadno, protože známe střed O i poloměr $|OC|$ kružnice opsané.

Konstrukce přímek m', n' je jednoznačná. První zádrhel může nastat, když jsou přímky m', n' rovnoběžné (obr. 41).



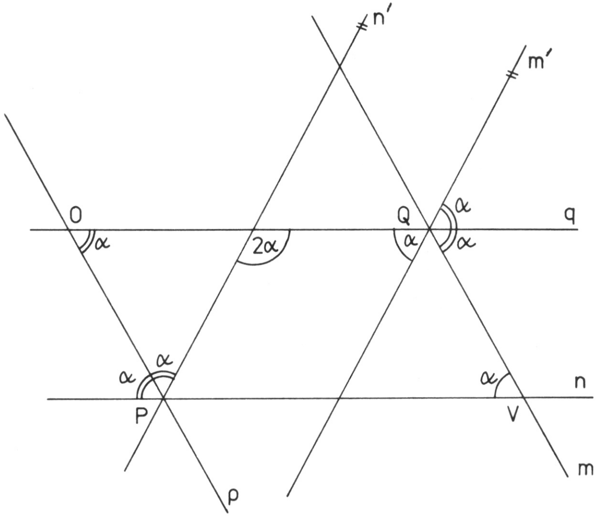
Obr. 41

Pokud bod O leží v ostrém úhlu přímek m, n, dostáváme pro úhel těchto přímek vztah $2\alpha + \alpha = \pi$, tj. $\alpha = \frac{2}{3}\pi$. Stejný výsledek dostaneme, pokud bod O leží v tupém úhlu těchto přímek. Proto konstrukci nelze jednoznačně provést jen tehdy, je-li úhel přímek m, n roven $\frac{2}{3}\pi$. Tento případ rozebereme zvlášť na závěr.

Další zádrhel může nastat, pokud se přímky m', n' protnou v bodě O. To nastane, právě když je bod O průsečíkem i přímek m, n. Pokud náhodou přímky m', n' nesplynou (to nastane, jak snadno zjistíme, opět pro úhel přímek m, n rovný $\frac{2}{3}\pi$), bude bod O jejich jediným průsečíkem. V tom případě nedostaneme trojúhelník, protože nemůže být $C = O$.

Protože je obtížné zjišťovat, kdy kružnice se středem O a poloměrem $|OC|$ protne přímky m, n v hledaných bodech A, B tak, abychom dostali trojúhelník, sestrojíme hledané vrcholy jinak: bod A leží na průsečíku přímky m s přímkou b, která prochází vrcholem C a je kolmá na přímku n. Analogicky sestrojíme i bod B. Protože je jasné, že přímky m a b mohou být rovnoběžné, jen když jsou m a n kolmé, vyšetříme tento případ zvlášť. V tomto případě vyjde, že vrchol C je průsečíkem přímek m a n, takže úloha má nedegenerované řešení, jen když bod O neleží na žádné z přímek m, n.

Nyní ještě vyšetříme případ, kdy přímky m, n svírají úhel $\frac{2}{3}\pi$. Snadno zjistíme (obr. 42), že pokud bod O leží v tupém úhlu přímek m, n, rovnoběžky m', n' nikdy nesplynou; úloha tedy nemůže mít řešení. Pro polohu bodu O v ostrém úhlu přímek m, n splynou přímky m', n', právě když $VQOP$ bude kosočtverec (obr. 42), neboli bod O bude ležet na ose úhlu přímek m, n. Jsou-li přímky m', n' totožné, lze kte-

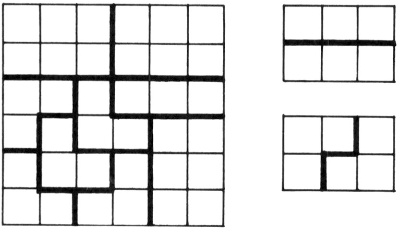


Obr. 42

rýkoli jejich bod zvolit jako bod C (pokud O je průsečík m, n, pak nemůže být $C = O$) a podle popsané konstrukce k němu vždy sestrojit zbývající vrcholy A, B. Úloha pak má nekonečně mnoho řešení.

Úloha má tedy právě jedno řešení, pokud jsou přímky m, n různoběžné (nesplývají) a nesvírají úhel $\frac{2}{3}\pi$, bod O není jejich průsečíkem, a je-li přímka m kolmá na n, neleží bod O na žádné z přímek m, n. Úloha má nekonečně mnoho řešení, pokud přímky m, n svírají úhel $\frac{2}{3}\pi$ a bod O leží na ose jejich ostrého úhlu. V ostatních případech úloha nemá žádné řešení.

2.7 Správná odpověď zní, že to jde pro všechna $k \neq 1$ a $k \neq 3$. Případy sudého k jsou jasné, trochu překvapivá je existence zaplnění pro $k = 5, 7, 9, 11$. Příslušné zaplnění je znázorněno na obr. 43. (Obdélník 2×3 je možno vyplnit buď dvěma pravoúhelníky, nebo dvěma úhelníky. V závislosti na vyplnění obdélníků A, B, C tak dostáváme požadovaný typ zaplnění celého čtverce.)



Obr. 43

Uvažujme $k = 1$. Předpokládejme, že existuje zaplnění s právě jedním úhelníkem; bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je umístěn takto . Vyplňme jednotlivé čtverečky ve čtverci čísly 0, 1, 2 podle obr. 44. Součet všech čísel ve čtverci je 36, je tedy dělitelný třemi. Rovněž součet čísel v každém pravoúhelníku 1×3 je dělitelný třemi. Žádnému úhelníku typu však neodpovídá součet dělitelný třemi, a proto zaplnění nemůže obsahovat právě jen jeden úhelník.

Uvažujme teď případ $k = 3$. Při očíslování podle obr. 45 dávají úhelníky a součet 2 (mod 3) a úhelníky a součet 1 (mod 3). Proto každý ze tří úhelníků je typu nebo , nebo je každý typu či . To ovšem platí i po otočení o $90°$, a tedy v původním čtverci je každý úhelník typu či , nebo je každý úhelník typu či . Odtud

0	1	2	0	1	2
2	0	1	2	0	1
1	2	0	1	2	0
0	1	2	0	1	2
2	0	1	2	0	1
1	2	0	1	2	0

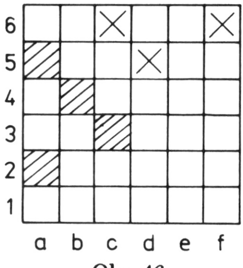
Obr. 44

0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2

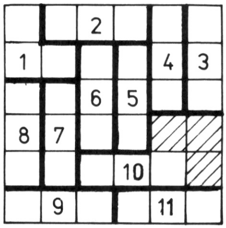
Obr. 45

plyne, že všechny tři úhelníky jsou stejného typu; bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jsou typu .

Vraťme se k očíslování na obr. 45. Každý pravoúhelník obsahuje po jednom z čísel 0, 1, 2, a proto mezi úhelníky je právě jeden s čísly 0, 1, 1, právě jeden s čísly 1, 2, 2 a právě jeden s čísly 2, 0, 0. Uvažme polohu toho s čísly 2, 0, 0. Jeho rohový čtvereček leží v jednom ze čtverečků vyznačených na obr. 46, přitom vzhledem k symetrii podle



Obr. 46



Obr. 47

diagonály $a1 - f6$ stačí uvažovat jen polovinu čtverce nad touto úhlopříčkou. Z vyznačených polí však nelze použít pole $c6$, $f6$ (úhelník by čněl ven ze čtverce) a $d5$ (čtvereček $e6$ by pak nešlo pokrýt). Na obr. 47 je vyznačeno, proč nelze použít ani čtvereček $a5$ (použití pravoúhelníků je pak totiž vynuceno, a to v pořadí uvedeném na obrázku). Podobně se ukáže, že i případy čtverečků $a2$, $b4$, $c3$ vedou ke sporu.

Poznámka. Uvědomte si, že pro důkaz případu $k = 1$ jsme stejně dobře mohli použít i obr. 42.

Případ $k = 3$ plyne (po provedení první úvahy) z následujícího tvrzení: Obdélník velikosti $3n \times 3m$ nelze zaplnit pravoúhelníky 1×3 a úhelníky . Zkuste toto tvrzení dokázat nebo vyvrátit.

3.1 (Podle P. Růžičky, 2. ročník G, Brno, kpt. Jaroše, a A. Kuběny, 3. ročník GMK, Bílovec.) Nejmenší hledaný počet věží je $m(n, k) = n(k-1)+1$. Předně, pokud je věží méně než $m(n, k)$, lze je umístit do $k-1$ řad šachovnice. Potom z nich ovšem nelze požadovaným způsobem vybrat k věží. Ukažme dále, že pro alespoň $m(n, k)$ věží to již lze.

Očíslujme řádky a sloupce šachovnice čísly 1 až n. Jednotlivá pole šachovnice očíslujme tak, že poli v i-té řadě a j-tém sloupci přiřadíme číslo $i - j \pmod n$ (tedy číslo mezi 0 a $n-1$). Nyní si stačí uvědomit následující jednoduché skutečnosti:

1. Každým číslem mezi 0 a $n-1$ je označeno právě n polí.
2. Věže na polích označených týmž číslem se neohrožují.
3. Pokud je věží alespoň $m(n, k)$, existuje podle Dirichletova principu k věží, které jsou na polích označených týmž číslem, a proto se neohrožují.

Jiná možnost je použít matematickou indukci. Nejsnazší je postupovat indukcí podle k.

Pro $k = 1$ je tvrzení triviální.

Nechť $k \leqq n-1$ a tvrzení platí pro $k-1$. Pak podle

Dirichletova principu existuje řádek r, ve kterém je alespoň k věží (zároveň samozřejmě nejvýše n). V ostatních řádcích je potom alespoň $n(k-1)+1-n = n(k-2)+1$ věží a lze z nich tedy podle indukčního předpokladu vybrat $k-1$ věží, které se neohrožují. Těchto $k-1$ věží leží v $k-1$ sloupcích. Proto v řádku r existuje věž, která se ani s jednou z nich neohrožuje. Dohromady tedy máme k věží, které se navzájem neohrožují, a důkaz je hotov.

3.2 Část a) je triviální, např.

$$x \cdot x = x^2, \quad x^2 \cdot x^2 = x^4,$$
$$x^4 \cdot x^4 = x^8, \quad \ldots, \quad x^{512} \cdot x^{512} = x^{1\,024},$$
$$x^{1\,024} : x^{16} = x^{1\,008}, \quad x^{1\,008} : x^8 = x^{1\,000}.$$

Pro část b) uvedeme dvě řešení.

1. řešení (podle O. Šucha, 4. ročník GAM, Bratislava). Napišme číslo n v dvojkové soustavě; protože možné číslice jsou pouze 0 a 1, je to vlastně totéž co rozklad

$$n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_k}, \qquad a_1 > a_2 > \ldots > a_k \geqq 0.$$

Uvažujme následující dva způsoby vytvoření čísla x^n.

1. Pomocí $x \cdot x = x^2$, $x^2 \cdot x^2 = x^4$ atd. vytvoříme všechny mocniny x^{2^i} pro $0 \leqq i \leqq a_1$; to zabere a_1 operací. Mezi těmito čísly jsou i čísla x^j pro $j = 2^{a_1}, 2^{a_2}, \ldots, 2^{a_k}$; vynásobíme-li je postupně mezi sebou, spotřebujeme na to dalších $k-1$ operací. Tím dostaneme x^n pomocí a_1+k-1 operací.

2. Nejdříve použijeme (stejným způsobem) a_1+1 operací na vytvoření čísel x^{2^i} pro $0 \leqq i \leqq a_1+1$. Dále poslední z těchto čísel vydělíme x, čímž získáme

$$x^{2^{a_1+1}-1} = x^{2^{a_1}+2^{a_1-1}+\ldots+4+2+1}.$$

Toto číslo dělíme všemi čísly x^{2^j} pro $j \in \{0, 1, 2, \ldots, a_1\} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$; těchto čísel je dohromady $(a_1+1)-k$ a po vydělení dostaneme zřejmě číslo x^n. Na dělení je třeba $(a_1+1)-k$ operací; celkem jsme x^n vytvořili pomocí $(a_1+1)+1+(a_1+1-k) = 2a_1 - k + 3$ operací.

Nyní ukážeme, že při aspoň jednom způsobu je počet operací nejvýše $\frac{3}{2}\log_2 n + 1$. Kdyby tomu tak nebylo, muselo by zároveň platit

$$a_1 + k - 1 > \frac{3}{2}\log_2 n + 1$$
$$2a_1 - k + 3 > \frac{3}{2}\log_2 n + 1.$$

Sečtením a úpravami dostaneme

$$a_1 > \log_2 n,$$
$$2^{a_1} > n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_k},$$

což je spor, a důkaz je hotov.

2. řešení (podle Š. Kasala, 3. ročník GWP, Praha.) Pro $1 \leqq n \leqq 11$ se přesvědčíme přímo, že tvrzení platí. Pro $n \geqq 12$ ukážeme, že dokonce stačí $\frac{3}{2}\log_2(n-1)$ operací. Důkaz provedeme indukcí. Pro $n = 12, 13, \ldots, 45$ toto tvrzení platí podle následující tabulky:

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
počet operací	4	5	5	5	4	5	5	6	5	6	6	6	5	6	6	7	6
$[\frac{3}{2}\log_2(n-1)]$	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7

n	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
počet operací	7	6	6	5	6	6	7	6	7	7	7	6	7	7	8	7	8
$[\frac{3}{2}\log_2(n-1)]$	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8

Mějme nyní $n \geqq 46$ a předpokládejme, že pro $12 \leqq m \leqq n-1$ tvrzení platí. Rozlišíme dvě možnosti:

a) n je sudé, $n = 2k$. Pak x^n vyjádříme jedinou operací z x^k ($x^n = x^k \cdot x^k$); na x^k podle indukčního předpokladu stačí $\frac{3}{2}\log_2(k-1)$ operací. Celkem nám tedy pro x^n stačí

$$\frac{3}{2}\log_2(k-1) + 1 < \frac{3}{2}(\log_2(k-1) + 1) = \\ = \frac{3}{2}\log_2(2k-2) < \frac{3}{2}\log_2(n-1)$$

operací.

b) n je liché; pak lze n psát ve tvaru $n = 4k \pm 1$. Přitom x^n lze vyjádřit z x^k třemi operacemi

$$x^{2k} = x^k \cdot x^k, \quad x^{4k} = x^{2k} \cdot x^{2k}, \\ x^n = x^{4k} \cdot x \quad \text{nebo} \quad x^n = x^{4k} : x.$$

Celkem tedy umíme vytvořit x^n pomocí

$$\frac{3}{2}\log_2(k-1) + 3 = \frac{3}{2}(\log_2(k-1) + 2) = \\ = \frac{3}{2}\log_2(4k-4) < \frac{3}{2}\log_2(n-1)$$

operací.

Tím je důkaz hotov.

Poznámka. Poznamenejme, že oběma způsoby lze řešit i nepatrně těžší verzi úlohy, kdy jsou povoleny pouze operace

$$x^k \mapsto x^k \cdot x^k = x^{2k}, \quad x^k \mapsto x^k \cdot x = x^{k+1} \\ \text{a} \quad x^k \mapsto x^k : x = x^{k-1}.$$

(Potřebný počet operací je opět nejvýše $\frac{3}{2}\log_2 n + 1$.) Dodejme ještě, že žádný z uvedených odhadů není optimální. Např. pro x^{170} stačí pouze 9 operací!

3.3 Označme $a = |A_2A_3|$, $b = |A_1A_3|$, $c = |A_1A_2|$. Z Pythagorovy věty pro trojúhelníky $A_1H_3A_3$, $A_2H_3A_3$ dostaneme

$$|A_3H_3|^2 = |A_1A_3|^2 - |A_1H_3|^2 = |A_2A_3|^2 - |H_3A_2|^2.$$

Odečtením odtud plyne

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 = |A_1A_3|^2 - |A_2A_3|^2 = |A_1H_3|^2 - |H_3A_2|^2 = \\ = (|A_1H_3| + |H_3A_2|)(|A_1H_3| - |H_3A_2|). \end{aligned} \tag{1}$$

Využijeme-li rovnosti $|A_1M_3| = |M_3A_2|$, snadno určíme jednotlivé činitele

$$\begin{aligned} |A_1H_3| + |H_3A_2| = |A_1A_2|, \\ \big||A_1H_3| - |H_3A_2|\big| = 2|H_3M_3| \end{aligned} \tag{2}$$

a dosazením do (1) pak dostaneme

$$|A_1A_2| \cdot |H_3M_3| = \frac{|b^2 - a^2|}{2}.$$

Analogicky dokážeme i rovnosti

$$|A_1A_3| \cdot |H_2M_2| = \frac{|a^2 - c^2|}{2}, \quad |A_2A_3| \cdot |H_1M_1| = \frac{|c^2 - b^2|}{2}.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme dále předpokládat, že $a \leqq b \leqq c$. Pak hned dostaneme požadovanou rovnost

$$|A_1A_3| \cdot |H_2M_2| = |A_1A_2| \cdot |H_3M_3| + |A_2A_3| \cdot |H_1M_1|.$$

Podívejme se teď, jak se změní situace pro pravoúhlý či tupoúhlý trojúhelník. Platnost (1) se samozřejmě zachová. Jediná potíž nastane, když bod H_3 neleží na úsečce A_1A_2. Potom se (2) změní na

$$|A_1H_3| + |A_3H_2| = 2|H_3M_3|,$$
$$\big||A_1H_3| - |H_3A_2|\big| = |A_1A_2|.$$

To však znamená, že se jen prohodily hodnoty činitelů v součinu (1), takže tvrzení zůstává v platnosti i pro pravoúhlý a tupoúhlý trojúhelník.

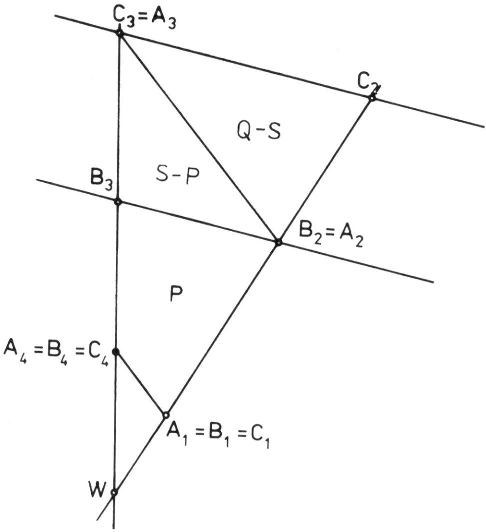
Poznámka. Uvedené řešení je zcela elementární, zato trochu umělé. Pomocí kosinové věty lze snadno vypočítat $|H_iM_i|$ přímo, v podstatě jde ale o totéž. Využitím vzorečků pro délky těžnic trojúhelníku bylo možno získat tvrzení rovnou pro libovolný trojúhelník (avšak řešení je technicky náročnější). Podobně pro libovolný trojúhelník funguje řešení pomocí základních operací s vektory (sčítání a skalární součin).

3.4 Správná odpověď zní: buď $S = P = Q$, anebo S leží v intervalu $\sqrt{PQ} \leqq S < Q$.

Nejprve dokážeme, že libovolné takové hodnoty S, P, Q se skutečně mohou nabývat. Případ $S = P = Q$ je jasný (všechny tři mnohoúhelníky splynou, tj. $A_i = B_i = C_i$); mějme tedy dána kladná čísla P, Q, S tak, že

$$\sqrt{PQ} \leqq S < Q.$$

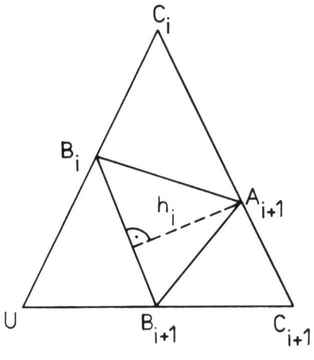
Zvolme v rovině dvě rovnoběžky o vzdálenosti 2 a nějakou jejich příčku B_3C_3 (obr. 48), dále body B_2, C_2 tak, aby



Obr. 48

bylo $|B_2B_3| = S - P$, $|C_2C_3| = Q - S$. Obsahy trojúhelníků $B_2B_3C_3$ a $B_2C_2C_3$ jsou tedy $S - P$, resp. $Q - S$.

Pokud bude $|B_2B_3| \geqq |C_2C_3|$, neboli $S \geqq \frac{P+Q}{2}$, pak se polopřímky C_3B_3 a C_2B_2 neprotnou; můžeme na nich zvolit body $A_4 = B_4 = C_4$ a $A_1 = B_1 = C_1$ tak, aby čtyřúhelník $B_1B_2B_3B_4$ měl obsah P. Zbývá vzít $A_2 = B_2$, $A_3 = C_3$ a jsme hotovi (obr. 49). Pokud $|B_2B_3| < |C_2C_3|$, neboli $S < < \frac{P+Q}{2}$, pak se polopřímky C_3B_3 a C_2B_2 protnou v bodě W; právě popsanou konstrukci můžeme tedy zopakovat, jen když bude $P \leqq S(B_2B_3W)$ (symbolem $S(\cdot)$ budeme i nadále značit obsah příslušného útvaru). Využitím podobnosti



Obr. 49

trojúhelníků $WB_2B_3 \sim W_2C_2C_3$ lze spočítat, že je

$$S(B_2B_3W) = \frac{(S-P)^2}{P+Q-2S}.$$

Naši konstrukci lze tedy použít, bude-li

$$P \leqq \frac{(S-P)^2}{P+Q-2S},$$

což je pro $S < \frac{P+Q}{2}$ ekvivalentní nerovnosti $PQ \leqq S^2$, která platí. Můžeme tedy opět zvolit body $A_1 = B_1 = C_1$ a $A_4 = B_4 = C_4$ (popř. pouze $A_1 = B_1 = C_1 = W$, pokud $S = \sqrt{PQ}$) a jsme hotovi.

Zbývá těžká část úlohy — dokázat, že vždy platí $S \geqq \sqrt{PQ}$. Dokážeme vlastně silnější tvrzení:

Jsou-li $B_1B_2 \ldots B_n \subset C_1C_2 \ldots C_n$ dva konvexní n-úhelníky takové, že $B_iB_{i+1} \parallel C_iC_{i+1}$ (takovým dvěma mnohoúhelníkům budeme dále říkat „rovnoběžné") a body A_i

leží na stranách $C_{i-1}C_i$, A_1 na straně C_nC_1, pak pro obsahy P, Q n-úhelníků $B_1B_2\dots B_n$ a $C_1C_2\dots C_n$ a obsah S $2n$-úhelníku $A_1B_1A_2B_2\dots A_nB_n$ platí $S \geqq \sqrt{PQ}$.

Nejprve vyřešíme případ, kdy mnohoúhelníky $B_1B_2\dots B_n$ a $C_1C_2\dots C_n$ jsou stejnolehlé (tak je tomu např. vždy pro $n = 3$). Označme U střed a $k = \dfrac{|C_1C_2|}{|B_1B_2|}$ koeficient uvedené stejnolehlosti. Je-li h_i vzdálenost přímek B_iB_{i+1} a C_iC_{i+1}, bude platit (obr. 49)

$$\frac{S(B_iB_{i+1}A_{i+1})}{S(B_iC_iA_{i+1}) + S(B_{i+1}A_{i+1}C_{i+1})} = \\ = \frac{|B_iB_{i+1}|h_i}{|C_iA_{i+1}|h_i + |C_{i+1}A_{i+1}|h_i} = \\ = \frac{|B_iB_{i+1}|}{|C_iC_{i+1}|} = \frac{1}{k},$$

takže

$$k \cdot S(B_iB_{i+1}A_{i+1}) = S(B_iB_{i+1}C_{i+1}C_i) - S(B_iB_{i+1}A_{i+1}).$$

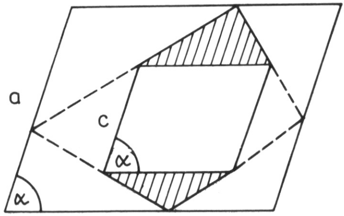
Sečtením pro všechna i, $1 \leqq i \leqq n$, vyjde

$$k(S - P) = Q - S.$$

Zároveň ale je $Q = k^2P$, takže (vyloučíme-li triviální případ $S = P$)

$$\left(\frac{Q-S}{S-P}\right)^2 = \frac{Q}{P},$$

a po úpravě vyjde $S^2 = PQ$, což jsme chtěli dokázat.



Obr. 50

Nyní vyřešíme případ, kdy $n = 4$ a $C_1C_2C_3C_4$ je rovnoběžník. V situaci na obr. 50 máme $Q = ab\sin\alpha$, $P = cd\sin\alpha$. Obsahy dvou vyznačených trojúhelníků dají dohromady $\frac{1}{2}d(a-c)\sin\alpha$; podobně druhá (analogická) dvojice dá $\frac{1}{2}c(b-d)\sin\alpha$. Odtud plyne

$$S = P + \frac{1}{2}d(a-c)\sin\alpha + \frac{1}{2}c(b-d)\sin\alpha = \frac{ad+bc}{2}\sin\alpha$$

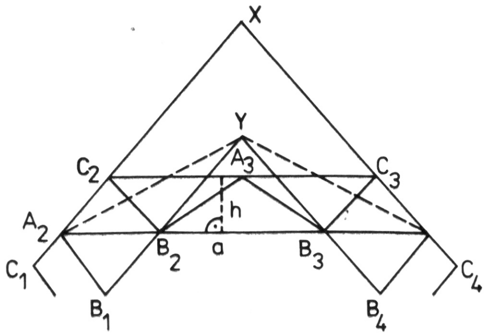
a podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem vyjde

$$S \geqq \sqrt{ad\cdot bc}\sin\alpha = \sqrt{PQ}.$$

Přejděme teď konečně k obecnému případu; důkaz provedeme indukcí. Pro $n = 3$ nerovnost $S \geqq \sqrt{PQ}$ platí (dokonce s rovností). Předpokládejme platnost tohoto tvrzení pro $n - 1 \geqq 3$; dokážeme je pro n.

Uvažujme tedy příslušné n-úhelníky popsané v zadání. Je-li $n = 4$ a $C_1C_2C_3C_4$ je rovnoběžník, je nerovnost dokázána v předchozím odstavci. V opačném případě existují v mnohoúhelníku $C_1C_2\ldots C_n$ tři po sobě jdoucí strany (zvolme označení takové, aby to byly např. strany C_1C_2, C_2C_3 a C_3C_4) tak, že polopřímky C_1C_2 a C_4C_3

se protínají (obr. 51); důkaz tohoto tvrzeníčka přenechá-



Obr. 51

váme čtenáři (nápověda: dle Dirichletova principu existují dva sousední vnitřní úhly, jejichž součet je větší než 180°). Označme X, resp. Y průsečík polopřímek C_1C_2 a C_4C_3, resp. B_1B_2 a B_4B_3. Trojúhelníky B_2B_3Y a C_2C_3X jsou podobné s koeficientem k; označme $a = |B_2B_3|$, takže $|C_2C_3| = ka$. Dále označme P_0 a Q_0 obsahy $(n - 1)$-úhelníků $B_1YB_4B_5 \dots B_n$ a $C_1XC_4C_5 \dots C_n$ a S_0 obsah $2(n - 1)$-úhelníku $A_1B_1A_2YA_4B_4 \dots A_nB_n$. Konečně buď h vzdálenost přímek B_2B_3 a C_2C_3 a R obsah trojúhelníku B_2B_3Y.

Zřejmě platí $P_0 = P + R$, $Q_0 = Q + k^2R$ a

$$S_0 = S - S(B_2B_3A_3) + S(B_2A_2Y) + S(B_3A_4Y) + R.$$

Nyní je $S(B_2A_2Y) = S(B_2C_2Y)$ a (podobně jsme to provedli už v důkazu pro $n = 3$)

$$\frac{S(B_2A_2Y)}{S(B_2C_2XY)} = \frac{S(B_2C_2Y)}{S(B_2C_2Y) + S(C_2YX)} = \frac{1}{k+1}.$$

Podobně pro $S(B_3A_4Y)$; sečtením pak vyjde

$$S(B_2A_2Y) + S(B_3A_4Y) = \frac{1}{k+1} S(B_2YB_3C_3XC_2).$$

Obsah na pravé straně je roven

$$\begin{aligned} &S(B_2YB_3C_3XC_2) = \\ &\quad = S(C_2C_3X) + S(B_2B_3C_3C_2) - S(B_2B_3Y) = \\ &\quad = k^2R + \frac{1}{2}(a+ka)h - R = (k+1)\left((k-1)R + \frac{ah}{2}\right). \end{aligned}$$

Konečně $S(B_2B_3A_3) = \frac{1}{2}ah$. Dosadíme-li vše do vztahu pro S_0, vyjde

$$S_0 = S - \frac{1}{2}ah + (k-1)R + \frac{1}{2}ah + R = S + kR.$$

Podle indukčního předpokladu platí $S_0 \geqq \sqrt{P_0Q_0}$, a my chceme dokázat nerovnost $S \geqq \sqrt{PQ}$, neboli

$$(S_0 - kR)^2 \geqq (P_0 - R)(Q_0 - k^2R). \tag{1}$$

Její úpravou dostaneme nerovnost

$$S_0^2 - 2kRS_0 - P_0Q_0 + k^2RP_0 + RQ_0 \geqq 0,$$

která je kvadratická v k a pro její diskriminant D platí

$$\begin{aligned} D &= 4R^2S_0^2 - 4RP_0(RQ_0 + S_0^2 - P_0Q_0) = \\ &= 4R(S_0^2 - P_0Q_0)(R - P_0) < 0. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že nerovnost (1) opravdu platí, a podle principu matematické indukce je důkaz uvedeného tvrzení hotov.

Jiné řešení (stručně). Označme $|B_iB_{i+1}| = b_i$, $|C_iC_{i+1}| = c_i$ (bereme $C_{n+1} = C_1$, $B_{n+1} = B_1$) a vzdálenost přímek B_iB_{i+1} a C_iC_{i+1} budiž h_i. Pak platí

$$S - P = \sum_{i=1}^{n} S(B_iB_{i+1}A_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}b_ih_i,$$

a podobně

$$Q - S = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}c_ih_i.$$

Označme dále

$$R = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}b_ih_i, \quad T = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}(b_i + c_i)h_i,$$

$$K = T - 2R = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}(c_i - b_i)h_i.$$

Je tedy $S = P + R$ a $Q = P + T$. Chceme dokázat, že $S^2 \geqq PQ$, neboli $(P+R)^2 \geqq P(P+T)$, což je ekvivalentní vztahu

$$R^2 \geqq PK.$$

Představme si nyní následující situaci: V rovině je dáno n bodů, které se pohybují rovnoměrným přímočarým pohybem tak, že v čase $t = 0$ se nacházejí v bodech B_1, B_2, ..., B_n, zatímco v čase $t = 1$ v bodech C_1, C_2, ..., C_n. Snadno se lze přesvědčit (proveďte!), že v libovolném čase

$t \in (0,1)$ tvoří uvažované body n-úhelník, který je „rovnoběžný“ s $B_1B_2\dots B_n$ a má obsah

$$P(t) = P + \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}\big(b_i + (1-t)b_i + tc_i\big)th_i = \\ = P + 2Rt + Kt^2. \tag{2}$$

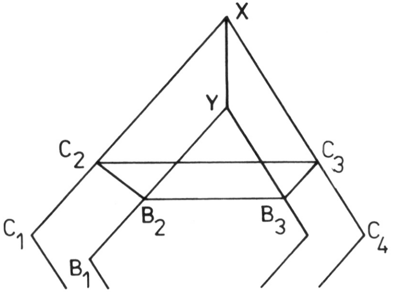
Diskriminant této kvadratické funkce je roven $4(R^2 - PK)$. Nerovnost $S^2 \geqq PQ$ je tedy ekvivalentní tomu, že tento diskriminant je nezáporný, tj. že existuje takové reálné číslo t_0, že $P(t_0) = 0$. (Upozorňujeme, že pro $t \notin (0,1)$ už nelze obecně $P(t)$ interpretovat jako obsah nějakého mnohoúhelníku — může docházet k různému „křížení“ ap.) Existenci takového t_0 dokážeme indukcí.

Nejprve (stejně jako v předchozím řešení) vyřešíme „zvláštní případy“, když $n = 3$ nebo když $n = 4$ a $C_1C_2C_3C_4$ je rovnoběžník. Pro rovnoběžník provedeme důkaz úplně stejně jako v předešlém řešení (tj. přímo, bez použití funkce $P(t)$). Pro $n = 3$ je vidět, že všechny trojúhelníky M_t, $t \in (0,1)$, jsou stejnolehlé; odtud plyne rovnost

$$P(t) = c(t-T)^2$$

pro jisté $c > 0$ a reálné číslo T; nyní stačí vzít $t_0 = T$, a bude $P(t_0) = 0$.

Předpokládejme nyní, že jsme už tvrzení dokázali pro $(n-1)$-úhelníky, $n \geqq 4$; dokážeme je pro n-úhelníky. Uvažujme tedy dva „rovnoběžné“ n-úhelníky $B_1B_2\dots B_n \subset C_1C_2\dots C_n$ a předpokládejme, že $C_1C_2\dots C_n$ není rovnoběžník. Stejně jako v předchozím řešení najdeme tři po sobě jdoucí strany (např. C_1C_2, C_2C_3 a C_3C_4) tak,



Obr. 52

že polopřímky C_1C_2 a C_4C_3 se protínají (obr. 52). Pro mnohoúhelníky $C_1C_2\ldots C_n$ a $B_1B_2\ldots B_n$ označme $P_n(t)$ příslušnou kvadratickou funkci. Protože mnohoúhelníky $C_1XC_4C_5\ldots C_n$ a $B_1YB_4B_5\ldots B_n$ jsou rovněž „rovnoběžné“, můžeme i pro ně sestrojit odpovídající kvadratickou funkci $P_{n-1}(t)$. Takovou funkci $P_\triangle(t)$ můžeme konečně sestrojit i pro „rovnoběžné“ trojúhelníky C_2C_3X a B_2B_3Y. Z případu $n = 3$ víme, že

$$P_\triangle(t) = c(t-T)^2$$

pro nějaká $c > 0$ a T. Podle definice jsou však pro $t \in (0,1)$ funkce P_n, P_{n-1} a $P_\triangle$ rovny obsahům příslušných mnohoúhelníků M_t vzniklých „smršťováním“ z $M_1 = C_1C_2\ldots C_n$ na $M_0 = B_1B_2\ldots B_n$, resp. z $C_1XC_4\ldots C_n$ na $B_1YB_4\ldots B_n$, resp. z C_2C_3X na B_2B_3Y; platí tedy $P_n = P_{n-1} - P_\triangle$, čili

$$P_n(t) = P_{n-1}(t) - c(t-T)^2$$

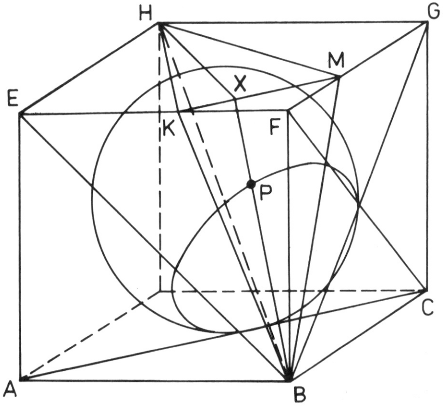
pro všechna $t \in (0,1)$. Poněvadž na obou stranách stojí kvadratické funkce, musí tato rovnost platit dokonce pro všechna reálná čísla t. Avšak podle indukčního předpokladu existuje t_0 takové, že $P_{n-1}(t_0) = 0$. Potom ale je

$$P_n(t_0) = P_{n-1}(t_0) - c(t_0 - T)^2 \leqq P_{n-1}(t_0) = 0,$$

což zaručuje existenci kořene funkce P_n, protože koeficient K kvadratického členu ve vztahu (2) je vždy kladný (mnohoúhelník $C_1C_2\dots C_n$ má větší obvod než $B_1B_2\dots B_n$). Tím je důkaz hotov.

Na závěr poznamenejme, že z obou řešení lze po chvilce přemýšlení zjistit, kdy nastane rovnost $S^2 = PQ$: je to právě tehdy, jsou-li mnohoúhelníky $C_1C_2\dots C_n$ a $B_1B_2\dots B_n$ podobné.

3.5 Předpokládejme, že se rovina BKM dotýká vepsané koule v bodě P, a označme X průsečík přímek BD a KM



Obr. 53

(obr. 53). Předpokládejme, že K leží uvnitř EF a M uvnitř FG. Ukážeme, že roviny HEB a HXB jsou souměrné podle roviny HKB.

Přímka BK je průsečnicí dvou tečných rovin ke kouli — EKB a XKB. Přitom roviny HEB, HXB procházejí dotykovými body, středem koule a bodem B. Analogicky jsou roviny HXB a HGB souměrné podle HMB. Úhel rovin HMB, HKB je proto roven polovině úhlu rovin HEB, HGB. Tento úhel je $\frac{2}{3}\pi$, protože uvedené roviny splynou při otočení o $\frac{2}{3}\pi$ kolem osy BH. Proto je úhel φ vždy týž a je roven $\frac{1}{3}\pi$.

3.6 Jedná se o dvě těžké úlohy z teorie grafů. Přeformulování do řeči grafů je nasnadě — vrcholy grafu budou rytíři, hrany spojují rytíře, kteří se přátelí (zde předpokládáme, že relace přátelství je symetrická, dále že relace přátelství a nepřátelství jsou komplementární, tedy pokud dva rytíři jsou přátelé, pak nejsou nepřátelé). Kružnice v daném grafu je posloupnost navzájem různých vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ($k \geqq 3$) taková, že dvojice $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{k-1}v_k, v_kv_1$ jsou hrany grafu. Kružnice, která prochází všemi vrcholy grafu (každým právě jednou), se nazývá hamiltonovská. Systém navzájem disjunktních kružnic, který pokrývá všechny vrcholy grafu (každý právě jednou kružnicí) se nazývá 2-faktor. (Jinými slovy, 2-faktor je podgraf, jehož všechny vrcholy mají stupeň 2 a který obsahuje všechny vrcholy původního grafu). Úloha 3.6 tak sestává ze dvou částí:

Úloha 3.6.1 Dokažte, že graf o n vrcholech, jehož každý vrchol má stupeň aspoň $n/2$, obsahuje hamiltonovskou kružnici.

Úloha 3.6.2 Dokažte, že $2k$-regulární graf ($k \geqq 1$ přirozené) obsahuje 2-faktor. (Stupeň vrcholu je počet hran, které z něj vycházejí; graf se nazývá d-regulární, jestliže všechny jeho vrcholy mají stupeň d.)

Řešení úlohy 3.6.1 (sporem). Předpokládejme, že existuje graf o n vrcholech, který má všechny vrcholy stupně aspoň $n/2$ a neobsahuje hamiltonovskou kružnici. Přidávejme mu po jedné hraně. Protože úplný graf hamiltonovskou kružnici obsahuje, existuje graf G a hrana ab taková, že G má všechny hrany stupně aspoň $n/2$ a neobsahuje hamiltonovskou kružnici, zatímco graf G s přidanou hranou ab již hamiltonovskou kružnici obsahuje. Každá taková kružnice pak nutně obsahuje hranu ab (jinak by to byla kružnice i v grafu G), nechť tedy $a = v_1, v_2, \ldots, v_n = b$ je pořadí vrcholů na hamiltonovské kružnici. Položme $\mathsf{A} = \{i;\, av_i$ je hrana $\mathsf{G}\}$, $\mathsf{B} = \{i;\, v_{i-1}b$ je hrana $\mathsf{G}\}$. Potom 1 nepatří do $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$, takže $|\mathsf{A} \cup \mathsf{B}| \leqq n-1$. Přitom $|\mathsf{A}| \geqq \dfrac{n}{2}$, $|\mathsf{B}| \geqq \dfrac{n}{2}$ podle předpokladu o stupních, a proto $|\mathsf{A} \cap \mathsf{B}| = |\mathsf{A}| + |\mathsf{B}| - |\mathsf{A} \cup \mathsf{B}| \geqq 1$. Existuje tedy i_0 takové, že av_{i_0} i $v_{i_0-1}b$ jsou hrany G. Potom ale $a = v_1, v_2, \ldots, v_{i_0-1}, b = v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i_0}$ je hamiltonovská kružnice v grafu G. To je spor. (Povšimněte si, že toto je vlastně důkaz indukcí podle počtu hran. Rozmyslete si, který je první krok indukce a zformulujte přesné znění indukčního kroku.)

Jiné řešení (stručně podle M. Badidy, 4. ročník G Košice, Šmeralova). Nejprve dokážeme, že když n rytířů sedí na lavici tak, že spolu sousedí jen přátelé a krajní mají mezi sedícími aspoň $n/2$ přátel, pak je lze posadit kolem kulatého stolu.

Označme uvedené rytíře $r_1, r_2, \ldots, r_n$ v pořadí, v jakém sedí na lavici. Pokud r_1 a r_n nejsou přáteli, stačí uvážit ty z rytířů, kteří se přátelí s r_1, a ty, jež sousedí zprava s přáteli rytíře r_n. Těch či oněch je aspoň $n/2$, ale dohromady jich je nejvýše $n-1$. Snadno nahlédnete, že rytíře lze pak ke stolu posadit v pořadí $r_{j-1} \ldots r_1 r_j \ldots r_n$, kde r_j je rytíř společný oběma zmíněným množinám.

Dále pak postupujeme induktivně: Z n rytířů vybereme dva přátele, jež posadíme na lavici a postupně k nim přisazujeme na jeden či druhý kraj lavice další, dokud to jde (aby vedle sebe seděli jen přátelé). Jakmile již nelze dále pokračovat, znamená to, že každý krajní rytíř má už všech svých aspoň $n/2$ přátel usazených na lavici, takže na lavici sedí $k \geqq \frac{n}{2} + 1$ rytířů. Podle předchozího tvrzení lze tyto rytíře rozesadit u kulatého stolu. Pokud ještě nějaký rytíř u stolu nesedí, najdeme mu mezi sedícími jistě přítele (nesedí jich méně než $n/2$), počínaje tímto přítelem je posadíme zase na lavici a rytíře k nim přisadíme, atd.

Řešení úlohy 3.6.2. Důkaz úlohy 3.6.2 ve vší obecnosti se opírá o následující netriviální větu:

Věta o manželství. Nechť D *(resp.* H*) je množina dívek (resp. hochů). Pro dívku* $d \in \mathsf{D}$ *označme* $\mathsf{H}(d) \subset \mathsf{H}$ *množinu hochů, které je ochotna pojmout za muže. Chceme všechny dívky najednou provdat (za různé hochy, bigamie dosud není povolena) tak, aby žádná dívka nemusela pojmout za muže někoho, koho nechce. Toto je možno provést, právě když je splněna podmínka*

$$\mathsf{D}^* \subset \mathsf{D} \Rightarrow |\mathsf{D}^*| \leqq \Big| \bigcup_{d \in \mathsf{D}^*} \mathsf{H}(d) \Big|. \tag{1}$$

Jinými slovy, právě když každých k dívek ($k \leqq n$) má dohromady alespoň k nápadníků!

Mějme $2k$-regulární graf. Opět stačí uvažovat souvislý graf, a ten lze nakreslit jedním tahem. Vezměme jeden takový tah a pamatujme si, v jakém pořadí jsme vrcholy grafu procházeli (do každého vrcholu jsme k-krát vešli a k-krát z něj odešli). Vrcholy tohoto grafu označme $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Sestrojme množiny $\mathsf{D} = \{d_1, \ldots, d_n\}$ a $\mathsf{H} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ a položme $\mathsf{H}(d_i) = \{h_j\,;$ hranu $v_i v_j$ jsme procházeli ve směru $v_i \to v_j\}$. Potom $|\mathsf{H}(d)| = k$ pro každé $d \in \mathsf{D}$ a též každý hoch $h \in \mathsf{H}$ náleží do k množin $\mathsf{H}(d)$.

Právě popsaný systém splňuje podmínku (1) a podle věty o manželství lze všechny dívky provdat (tj. všechny dívky a chlapce lze vzájemně jednoznačně spárovat).

Pro každé i tedy existuje $j(i)$ (pro různá i jsou $j(i)$ též různá) tak, že $h_{j(i)} \in \mathsf{H}(d_i)$. Protože $|\mathsf{H}| = |\mathsf{D}|$, plyne odtud, že i pro každé j existuje právě jedno $i(j)$ tak, že $h_j \in \mathsf{H}(d_{i(j)})$. Položíme-li $\mathsf{E} = \{v_i v_{j(i)}\,;\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, patří každý vrchol v_i dvěma hranám z E (jednou hraně $v_i v_{j(i)}$, podruhé hraně $v_k v_i$ pro $i = j(k)$). Tedy náš $2k$-regulární graf obsahuje 2-faktor E.

3.7 (Podle P. Hliněného, 4. ročník GMK, Bílovec.) Dané číslo pod odmocninou můžeme zapsat jako

$$0,\underbrace{11111\ldots11111}_{100} = \frac{1}{9}\left(1 - 10^{-100}\right).$$

Na výpočet uvedené odmocniny proto použijeme binomickou řadu

$$\sqrt{0,\underbrace{111\,11\ldots1\,111\,1}_{100}} = \frac{1}{3}\left(1-10^{-100}\right)^{\frac{1}{2}} = \\ = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\left(-10^{-100}\right)^{n}. \tag{1}$$

Protože pro $n \geqq 2$ je

$$\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{2}-n+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot n}\right| \leqq \frac{1}{8},$$

nemají členy binomické řady (1) počínaje třetím na prvních 200 desetinných míst vliv (příslušná řada má jako majorantu geometrickou řadu s menším součtem). Proto s přesností na 200 platných míst platí

$$\sqrt{0,\underbrace{111\,11\ldots1\,111\,1}_{100}} \doteq \frac{1}{3}-\frac{1}{6}\cdot10^{-100} = \\ = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot10^{-100}\right)+\left(\frac{1}{6}\cdot10^{-100}\right).$$

Číslo v první závorce má na prvních 100 desetinných místech samé trojky a pak samé nuly, zatímco číslo v druhé závorce má na 101. desetinném místě jedničku a pak dál samé šestky. Na 200 platných číslic tedy je

$$\sqrt{0,\underbrace{111\,11\ldots1\,111\,1}_{100}} = 0,\underbrace{333\ldots33\,3}_{100}1\underbrace{6\,66\ldots6\,66}_{99}\ldots.$$

4.1 Hledáme reálné kořeny rovnice s reálnými koeficienty. Využijeme buď speciálního případu Cauchyovy nerovnosti

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqq n\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \tag{1}$$

ve které nastává rovnost, právě když $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, anebo nerovnosti mezi mocninným a aritmetickým průměrem

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^{16}\right)^{\frac{1}{16}} \geqq \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|, \tag{2}$$

ve které nastává rovnost, právě když $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Podle Viètových vztahů platí

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = -n, \tag{3}$$

odtud pak podle (1) plyne

$$n^{16} = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)^{16} \leqq \left(n\sum_{i=1}^{n} r_i^2\right)^{8} \leqq n^8\left(n\sum_{i=1}^{n} r_i^4\right)^{4} \leqq$$
$$\leqq n^{12}\left(n\sum_{i=1}^{n} r_i^8\right)^{2} \leqq n^{15}\sum_{i=1}^{n} r_i^{16} = n^{16}.$$

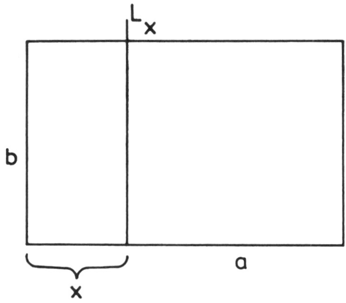
Ve všech nerovnostech nastává rovnost, je tedy $r_1 = r_2 = \ldots = r_n$ a podle (3) $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = -1$.

Ve druhém případě podle (2) dostaneme

$$1 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|r_i|^{16}\right)^{\frac{1}{16}} \geqq \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|r_i| \geqq \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} r_i\right| = \frac{|-n|}{n} = 1.$$

Opět tedy v obou nerovnostech platí rovnost. Z té první máme, že $|r_1| = |r_2| = \ldots = |r_n|$, a z druhé vidíme, že všechna r_i mají stejné znaménko, takže $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = -1$. Daná rovnice má tvar

$$(x+1)^n = 0.$$



Obr. 54

4.2 Daný pravoúhelník si představíme tak jako na obr. 54; je jasné, co myslíme slovy vlevo, dole, vodorovný, svislý, atd. (například strana a je vodorovná, strana b svislá). Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že každý pravoúhelník R_i má aspoň jednu stranu délky 1 (jinak rozsekáme každý R_i rozměrů $k \times x$ (k přirozené) na k pravoúhelníků $1 \times x$). Pravoúhelníky, jejichž svislá strana má délku 1, nazveme *svislými*, ostatní (musí mít nutně vodorovnou stranu délky 1) *vodorovnými*.

Pro $x \in \langle 0, a)$ označme $f(x)$ součet „výšek" všech vodorovných pravoúhelníků R_i, jejichž levé strany leží na svislé přímce L_x ležící ve vzdálenosti x napravo od b (obr. 54). Uvažujme nějaké x z intervalu $\langle 1, a)$. Označíme-li $z_1(x)$ součet výšek všech svislých pravoúhelníků, jejichž levá strana leží na L_x, bude

$$f(x) + z_1(x)$$

rovno součtu výšek *všech* pravoúhelníků, jejichž levá strana leží na L_x. Podobnou úvahou zjistíme, že součet výšek všech pravoúhelníků, jejichž pravá strana leží na L_x, je

$$f(x-1)+z_2(x),$$

kde $z_2(x)$ je součet výšek všech svislých pravoúhelníků, jejichž pravá strana leží na L_x. Tyto dva poslední výrazy si však musí být rovny, takže

$$f(x)=f(x-1)+z_2(x)-z_1(x).$$

Protože svislé pravoúhelníky mají výšku 1, jsou $z_1(x)$, $z_2(x)$ celá čísla, tedy i $f(x)-f(x-1)$ je celé číslo. Proveďme tuto úvahu pro $x=1, 2, \ldots, N$, kde N je největší přirozené číslo menší než a, vidíme, že $f(N)-f(0)$ je celé číslo.

Z předchozích úvah nyní vyplývá, že

$$f(0)+z_1(0)=b.$$

Předpokládejme, že délka strany b není celé číslo. Jak už bylo řečeno, $z_1(x)$ je vždy celé, tedy ani $f(0)$ není celé, a proto ani $f(N)$ není celé číslo. Speciálně $f(N)\neq 0$, takže přímky L_N se dotýká zleva aspoň jeden vodorovný pravoúhelník. Protože je vodorovný a leží celý v R, musí být délka strany a aspoň $N+1$. Ale N bylo definováno jako největší celé číslo menší než a, je tedy nutně $a=N+1$, tj. a je celé.

Dokázali jsme, že pokud b není celé, musí být celočíselné a; tím je důkaz hotov.

Jiné řešení. Označme A, B, C, D vrcholy daného pravoúhelníku R a zaveďme kartézskou soustavu souřadnic s počátkem v bodě A a s osami $x=AB$, $y=AD$. Množinu těch bodů, jež jsou vrcholy některého z pravoúhelníků R_i a mají obě souřadnice celočíselné, označme S. Každému z vrcholů E v uvažovaném rozkladu pravoúhelníku R přiřaďme funkci n_E, označující počet pravoúhelníků R_i, jichž je E vrcholem. Je tedy $n_A = n_B = n_C = n_D = 1$, jinak $n_E = 0$, nebo $n_E = 2$, nebo $n_E = 4$. Přitom

$$\sum_{E \in S} n_E = \sum_{i=1}^{n} f(R_i),$$

kde $f(R_i)$ označuje počet vrcholů, jež patří do S (mají obě souřadnice celočíselné). Vzhledem k tomu, že aspoň jedna dvojice stran pravoúhelníku R_i je celočíselná, je $f(R_i) \in \{0, 2, 4\}$, takže

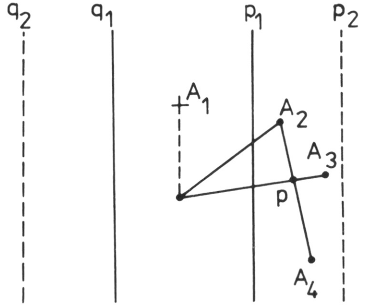
$$\sum_{E \in S} n_E = \sum_{i=1}^{n} f(R_i) \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2).$$

Protože ale $A \in S$ a $n_A = 1$, patří ještě aspoň jeden z vrcholů B, C, D rovněž do S. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

4.3 (Podle Š. Kasala, 3. ročník GWP, Praha.) Předpokládejme, že obsahy $S(OA_iA_j)$ všech trojúhelníků OA_iA_j, $1 \leqq i < j \leqq 4$, leží v intervalu $\langle 1, \sqrt{2})$, a z tohoto předpokladu vyvodíme spor.

Zřejmě žádné tři z daných pěti bodů nejsou kolineární. Sestrojme rovnoběžky p_1, p_2, q_1, q_2 s přímkou OA_1, jež leží ve vzdálenostech $\dfrac{2}{|OA_1|}$ a $\dfrac{2\sqrt{2}}{|OA_1|}$ od OA_1 (obr. 55).

Uvažujme nyní body A_k, $k = 2, 3, 4$. Protože obsah trojúhelníku OA_1A_k je aspoň 1 a méně než $\sqrt{2}$, musí A_k ležet v pásu vymezeném přímkami p_1, p_2 (p_1 do pásu patří,



Obr. 55

p_2 nikoliv) nebo v obdobném pásu mezi přímkami q_1 a q_2. Obsah žádného z trojúhelníků OA_iA_j, $1 \leqq i < j \leqq 4$, se však nezmění, nahradíme-li některé body A_k body A'_k s nimi souměrně sdruženými podle O. Bez újmy na obecnosti můžeme tedy předpokládat, že všechny body A_k ($k = 2, 3, 4$) leží v pásu mezi p_1 a p_2. Dále můžeme předpokládat, že polopřímka OA_3 náleží úhlu A_2OA_4 (stačí body vhodně přejmenovat).

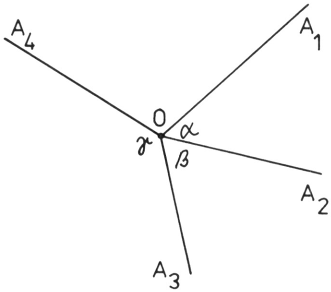
Označme P průsečík této polopřímky s úsečkou A_2A_4. Protože A_2, A_4 leží v pásu mezi p_1, p_2, leží v něm i P; proto

$$|OA_3| < \sqrt{2}|OP|.$$

Nyní platí

$$\begin{aligned} S(A_2OA_4) &= S(A_2OP) + S(A_4OP) = \\ &= \frac{|OP|}{|OA_3|}(S(A_2OA_3) + S(A_4OA_3)) > \\ &> \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1+1) = \sqrt{2}, \end{aligned}$$

což je spor s předpokladem, že $S(OA_iA_j) \in \langle 1, \sqrt{2})$ pro všechna $1 \leqq i < j \leqq 4$.



Obr. 56

Jiné řešení. Předpokládejme, že body $A_1, \ldots, A_n$ jsou označeny ve směru hodinových ručiček a vzájemné úhly polopřímek OA_i, OA_{i+1} jsou po řadě α, β, γ (obr. 56). Pro obsahy uvažovaných trojúhelníků pak platí ($S_{ij} = S(OA_iA_j)$)

$$S_{12} = \frac{1}{2}|OA_1|\,|OA_2|\,|\sin\alpha|$$

$$S_{13} = \frac{1}{2}|OA_1|\,|OA_3|\,|\sin(\alpha+\beta)|$$

$$S_{14} = \frac{1}{2}|OA_1|\,|OA_4|\,|\sin(\alpha+\beta+\gamma)|$$

$$S_{23} = \frac{1}{2}|OA_2|\,|OA_3|\,|\sin\beta|$$

$$S_{24} = \frac{1}{2}|OA_2|\,|OA_4|\,|\sin(\beta+\gamma)|$$

$$S_{34} = \frac{1}{2}|OA_3|\,|OA_4|\,|\sin\gamma|.$$

Jednoduchým výpočtem však vyjde

$$\begin{aligned}
&\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta+\sin\alpha\sin\gamma= \\
&=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma\sin\beta+ \\
&\quad+\sin\beta\sin\gamma\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\gamma= \\
&=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta- \\
&\quad-\sin^2\beta\sin\gamma\sin\alpha+\sin\alpha\sin\gamma= \\
&=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma\sin\beta+ \\
&\quad+\sin\gamma\cos\beta(\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta)= \\
&=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma),
\end{aligned}$$

takže pro vhodnou kombinaci znamének $\pm$ dostaneme

$$S_{14}S_{23}\pm S_{12}S_{34}\pm S_{13}S_{24}=0.$$

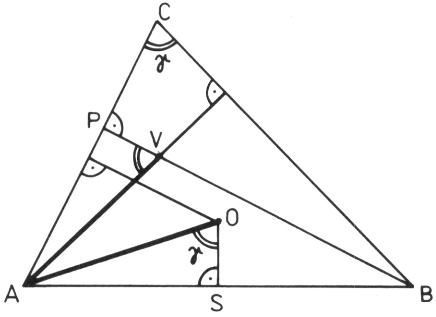
Pro vhodnou kombinaci $\{i,j,k,l\}=\{1,2,3,4\}$ tedy bude

$$\Big(\max_{1\leqq i<j\leqq 4} S_{ij}\Big)^2 \geqq S_{ij}S_{kl}=S_{ik}S_{jl}+S_{il}S_{jk}\geqq 2,$$

neboli

$$\max S_{ij}\geqq\sqrt{2}.$$

4.4 (S. Hrinko, A. Kuběna, J. Menšík.) Označme V průsečík výšek, O střed kružnice opsané, P patu výšky spuštěné z bodu B na stranu AC, S střed strany AB (obr. 57). Trojúhelník APV je pravoúhlý a velikost úhlu AVP je γ. Podle věty o obvodovém a středovém úhlu má úhel AOB



Obr. 57

velikost 2γ. Trojúhelník AOB je rovnoramenný, takže velikost úhlu AOS je γ. Trojúhelník ASO je také pravoúhlý a podle předpokladu $|AV| = |AO|$, takže trojúhelníky APV a ASO jsou shodné. Je tedy

$$|AP| = |AS| = \frac{1}{2}|AB|.$$

Odtud plyne, že $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (např. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$).

Obrácením sledu předcházejících úvah dostaneme, že $|AV| = |AO|$, právě když $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Poznámka. Velmi krátké řešení obdržíme použitím vzorce pro obvod kružnice opsané. Je

$$|AO| = \frac{|AB|}{2\sin\gamma}, \qquad |AV| = \frac{|AP|}{\sin\gamma} = \frac{|AB|\cos\alpha}{\sin\gamma}.$$

Odtud okamžitě plyne řešení.

4.5 Dokážeme následující tvrzení, z něhož tvrzení úlohy snadno plyne. Označme a_1, a_2 tečny kružnice k v bodech

A_1, A_2 a uvažujme bod X kružnice k. Jsou-li P_1, P_2, P (po řadě) paty kolmic spuštěných z bodu X na přímky a_1, a_2 a A_1A_2, je $|PX|^2 = |P_1X||P_2X|$.

Podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu je úhel A_1XA_2 roven úhlu α při vrcholu A_2 (kdo toto tvrzení nezná, může je snadno nahlédnout ze známé věty o středovém a obvodovém úhlu). Dále je snadno vidět, že i úhel PXP_2 je roven α. Proto se úhly PXP_2 a A_1XA_2 rovnají a rovnají se i úhly A_1XP a A_2XP_2, takže trojúhelníky A_1PX a A_2P_2X jsou podobné. Odtud

$$\frac{|P_2X|}{|A_2X|} = \frac{|PX|}{|A_1X|}$$

a symetricky také

$$\frac{|P_1X|}{|A_1X|} = \frac{|PX|}{|A_2X|}.$$

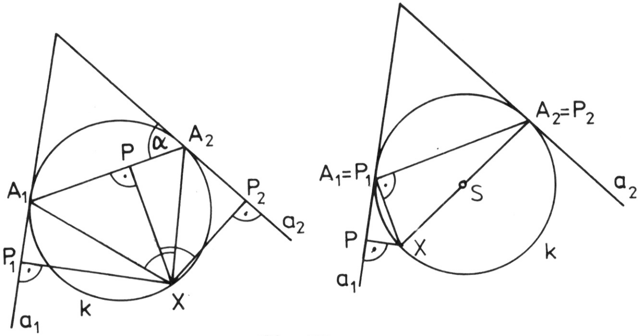
Uvedené rovnosti platí i v případě, kdy A_2X či A_1X je průměrem kružnice k (obr. 58). Vynásobením obou vztahů dostaneme požadovanou rovnost

$$|P_1X||P_2X| = |PX|^2,$$

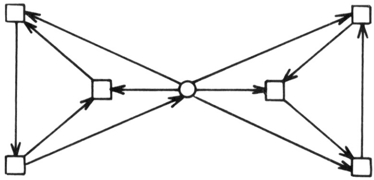
která platí, i když $|A_1X| = 0$ nebo $|A_2X| = 0$, protože pak také $|P_1X|\,|P_2X| = 0 = |PX|$.

Uvedené tvrzení lze také snadno dokázat analyticky.

4.6 Ještě než uvedeme řešení této úlohy, je třeba poznamenat, že obrázek je součástí podmínek úlohy. Jinak existuje protipříklad (obr. 59), pro který tvrzení úlohy neplatí.



Obr. 58



Obr. 59

Kruhové náměstí označme O, ulici z A do B označme $A \rightarrow B$. Dokážeme, že

a) z libovolného náměstí $A \neq O$ se dostaneme na O,

b) z O se dostaneme na libovolné čtvercové náměstí.

Z a) a b) pak snadno plyne tvrzení úlohy.

Nejprve dokážeme, že z náměstí $A \neq O$ se dostaneme na O. Jestliže $A \to O$, není co dokazovat, jinak z A vede cesta na nějaké čtvercové náměstí. Pokračujme z A po čtvercových náměstích, dokud je to možné, anebo dokud se nevrátíme zpátky do A.

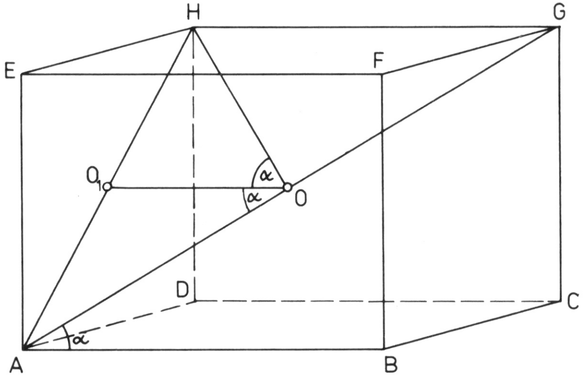
Jestliže přijdeme na nějaké náměstí B, odkud nemůžeme pokračovat po obvodě, je podle zadání $B \to O$, čímž jsme se dostali z A na O. Pokud jsme se nikde nezastavili, pak se vrátíme na A, protože náměstí je konečný počet. Předpokládáme-li, že plán města odpovídá obrázku, museli jsme projít všechna čtvercová náměstí a podle zadání pak existuje náměstí B takové, že $B \to O$. Z A tedy půjdeme do B a odtud do O.

Tvrzení b) dostaneme, jestliže změníme orientaci ulic; podmínky zadání se zachovají a podle a) se (v novém městě) dostaneme z A na O, to znamená, že v daném městě se lze dostat z O na A.

Poznámka. Úloha se dá zobecnit takto: Předpokládejme, že se v městě dá označit směr jednotlivých ulic tak, aby se dalo z každého náměstí odjet a na každé náměstí přijet. Pak se dá z každého náměstí dojet na libovolné jiné, právě když každá „kruhová“ trasa po jednotlivých náměstích (bez ohledu na zvolené směry) prochází jedním pevným náměstím.

Pokuste se to dokázat.

4.7 (Podle V. Skalského, 4. ročník G, Prešov, T. Ševčenka.) Označme O střed tělesové úhlopříčky AG a O_1 střed stěnové úhlopříčky AH (obr. 60). Pak OO_1 je střední příčka trojúhelníku GHA, a proto OO_1, GH, AB jsou navzájem



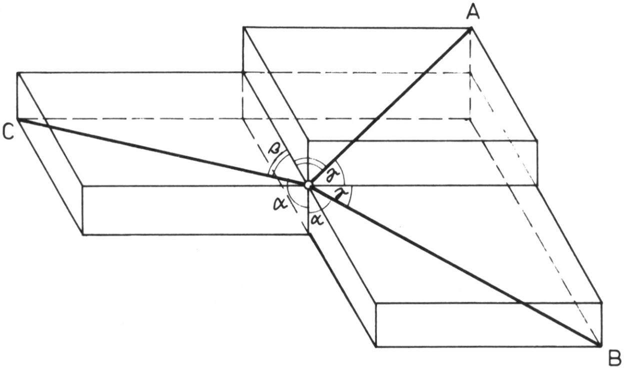
Obr. 60

rovnoběžné. Podle věty o střídavých úhlech je $|\sphericalangle AOO_1| = |\sphericalangle OAB| = \alpha$. Protože OO_1 je kolmá na AH (neboť je kolmá na boční stěnu $ADHE$), je trojúhelník AOH rovnoramenný, takže $|\sphericalangle AOH| = |\sphericalangle AOO_1| + |\sphericalangle HOO_1| = 2\alpha$. Analogicky dostaneme, že $|\sphericalangle HOC| = 2\beta$, $|\sphericalangle COA| = 2\gamma$ (velmi názorně je to vidět i na obr. 61). Trojhran $OAHC$ má tedy rovinné úhly 2α, 2β, 2γ. Ale součet úhlů v každém trojhranu, který neleží v rovině, je menší než 2π. V našem případě jistě O neleží v rovině AHC, jinak bychom lehko dokázali, že v ní leží všechny vrcholy kvádru. Proto $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

Tvrzení o součtu úhlů v trojhranu dokážeme pomocí kosinové věty: Označme O' kolmý průmět bodu O, který neleží v rovině AHC, do této roviny. Zřejmě platí

$$|\sphericalangle AO'H| + |\sphericalangle HO'C| + |\sphericalangle CO'A| = 2\pi$$

a je $|O'A| = |O'H| = |O'C| < |OA| = |OH| = |OC|$. Z kosi-



Obr. 61

nové věty plyne

$$\cos|\sphericalangle AO'H| = \frac{|AH|^2 - |O'A|^2 - |O'H|^2}{2|O'A||O'H|} =$$
$$= \frac{|AH|^2 - 2|O'A|^2}{2|O'A|^2} <$$
$$< \frac{|AH|^2 - |OA|^2 - |OH|^2}{2|OA||OH|} =$$
$$= \cos|\sphericalangle AOH|.$$

Protože velikosti úhlů $AO'H$, AOH leží v intervalu $(0, \pi)$, plyne odtud $|\sphericalangle AOH| < |\sphericalangle AO'H|$. Podobně dokážeme, že $|\sphericalangle COH| < |\sphericalangle CO'H|$, $|\sphericalangle COA| < |\sphericalangle CO'A|$. Po sečtení vyjde $|\sphericalangle AOH| + |\sphericalangle COH| + |\sphericalangle COA| < 2\pi$.

5.1 Pro $n = 1$ dostáváme

$$b = x_0^2 + x_1^2 = x_0^2 + (a - x_0)^2 = 2x_0^2 - 2ax_0 + a^2,$$

takže x_0 je kořenem kvadratické rovnice

$$2x^2 - 2ax + (a^2 - b) = 0,$$

jejíž diskriminant $4(2b - a^2)$ je zřejmě nezáporný, a platí tedy

$$x_0 \in \left\{ \frac{a \pm \sqrt{2b - a^2}}{2} \right\},$$

přičemž obě hodnoty se mohou nabývat.

Dále předpokládejme, že $n > 1$. Použijeme-li Cauchyovu nerovnost

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

na čísla $a_i = 1$, $b_i = y_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$, jež splňují rovnosti $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = A$, $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 = B$, dostaneme nerovnost $A^2 \leqq nB$; přitom pro $c = \sqrt{\dfrac{nB - A^2}{2n}}$ a čísla

$$y_1 = \frac{A}{n} - c, \quad y_2 = \frac{A}{n} + c, \quad y_3 = y_4 = \ldots = y_n = \frac{A}{n}$$

(na tomto místě používáme předpoklad $n > 1$) obráceně platí

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} y_i = A, \\
&\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \left(\frac{A}{n} - c \right)^2 + \left(\frac{A}{n} + c \right)^2 + (n-2)\frac{A^2}{n^2} = \\
&\qquad = \frac{A^2}{n} + 2c^2 = B.
\end{aligned}$$

Protože čísla $x_0, \ldots, x_n$ splňují rovnosti

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = a, \qquad \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = b,$$

musí analogicky podle Cauchyovy nerovnosti platit $a^2 \leqq (n+1)b$. Za tohoto předpokladu hledáme tedy všechna x_0, pro něž existují $x_1, \ldots, x_n$ tak, aby

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = a - x_0, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = b - x_0^2.$$

Podle předchozí úvahy taková čísla $x_1, \ldots, x_n$ existují, právě když

$$(a - x_0)^2 \leqq n(b - x_0^2),$$

neboli

$$(n+1)x_0^2 - 2ax_0 + (a^2 - nb) \leqq 0.$$

Protože $a^2 \leqq (n+1)b$, je diskriminant kvadratického trojčlenu na levé straně nezáporný,

$$D = 4a^2 - 4(n+1)(a^2 - nb) = 4n\big((n+1)b - a^2\big) \geqq 0.$$

Uvažovaná nerovnice je tedy ekvivalentní podmínce

$$x_0 \in \left\langle \frac{2a - \sqrt{D}}{2(n+1)}, \frac{2a + \sqrt{D}}{2(n+1)} \right\rangle,$$

neboli

$$x_0 \in \left\langle \frac{a - \sqrt{n(n+1)b - na^2}}{n+1}, \frac{a + \sqrt{n(n+1)b - na^2}}{n+1} \right\rangle,$$

což je odpověď na naši úlohu.

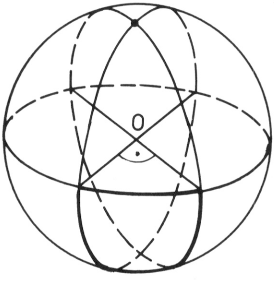
5.2 Místo s eukleidovskými vzdálenostmi budeme raději počítat s velikostmi úhlů A_iOA_j, kde O je střed dané kulové plochy. Pro jednodušší vyjadřování budeme používat zeměpisnou terminologii.

Vezmeme-li např. pět vrcholů pravidelného osmistěnu, vidíme, že existují body A_1, A_2, ..., A_5 takové, že

$$\min_{i \neq j} |\sphericalangle A_iOA_j| \geqq \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Uvažujme množinu bodů $\{A_1, \ldots, A_5\}$, jež splňují (1). Ukážeme, že aspoň dva z nich tvoří průměr dané kulové plochy.

Představme si např. bod A_5 jako „severní pól" a předpokládejme, že žádné dva z bodů A_1, ..., A_5 netvoří průměr. Body A_1, ..., A_4 musí tedy ležet na „jižní polokouli" s výjimkou jižního pólu. Uvažujme libovolný kvadrant této polokoule ohraničený čtvrtinou rovníku (obr. 62). Pokud



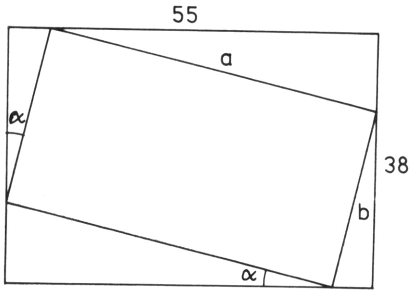
Obr. 62

obsahuje dva z bodů $A_1, \ldots, A_4$, musí každý ležet na jiném poledníku, protože jejich „délky“ se liší aspoň o $\frac{\pi}{2}$. Odtud plyne, že body $A_1, \ldots, A_4$ leží na polednících, jež rozdělují sféru na čtyři shodné části (kvadranty). Pokud by ovšem některý z nich neležel na rovníku, musí tam ležet oba jeho sousedé, jež jsou středově souměrní podle středu O dané kulové plochy.

Odtud plyne, že je vždy $\min\limits_{i \neq j} |A_i O A_j| \leqq \frac{\pi}{2}$, přičemž rovnost nastane, právě když dva z bodů $A_1, \ldots, A_5$ jsou středově souměrné (tvoří „póly“) a ostatní leží na odpovídajícím „rovníku“ ve vrcholech trojúhelníku s vnitřními úhly aspoň $\frac{\pi}{4}$.

Pro nejmenší vzdálenost bodů A_i, A_j tak dostaneme hranici $\sqrt{2}$.

5.3 (Podle A. Kuběny, 3. ročník GMK, Bílovec.) Označme a, b délky stran koberce a předpokládejme, že koberec má tvar pravoúhelníku. Jestliže v místnosti 55×38 svírá



Obr. 63

strana délky a se stěnou délky 55 úhel $\alpha \leqq \pi/2$, pak pro úhly, které svírají strany koberce s průniky stěn a podlahy místnosti, platí to, co je vyznačeno na obr. 63 (plyne to z toho, že jde pouze o pravoúhlé trojúhelníky a obdélník). Platí tedy

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = 38$$

$$b \sin \alpha + a \cos \alpha = 55.$$

Po umocnění, sečtení a vzájemném vynásobení těchto dvou rovnic dostáváme

$$a^2 + b^2 + 2ab \sin 2\alpha = 38^2 + 55^2$$

$$(a^2 + b^2) \sin 2\alpha + 2ab = 38 \cdot 55 \cdot 2.$$

Položíme-li $x = a^2 + b^2$, $y = 2ab$, bude $x, y > 0$ a

$$\frac{38^2 + 55^2 - x}{y} = \frac{2 \cdot 38 \cdot 55 - y}{x},$$

tedy

$$(38^2 + 55^2)x - x^2 = 2 \cdot 38 \cdot 55y - y^2,$$

a podobně v druhé místnosti zjistíme, že

$$(50^2 + 55^2)x - x^2 = 2 \cdot 50 \cdot 55y - y^2.$$

Jediné kladné řešení soustavy posledních dvou rovnic je $(x, y) = (3\,125, 2\,500)$. Jim odpovídající kladná a, b jsou jedině $(a, b) = (50, 25)$.

Zkoušku, že koberec rozměrů 25×50 lze skutečně do skladovacích místností uložit uvedeným způsobem, přenecháváme těm, kteří obchodníkovi nedůvěřují.

5.4 (Podle P. Novotného, 2. ročník GWP, Praha.)

a) Jestliže $p = 1$, pak nerovnost platí pro všechna $n \geqq 2$, neboť

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - (x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n) =$$
$$= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{2}(x_{n-1} - x_n)^2 + \frac{1}{2}x_n^2 \geqq 0.$$

b) Nechť $p = \frac{4}{3}$. Upravme rozdíl levé a pravé strany nerovnosti (zatím formálně) následujícím způsobem:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - \frac{4}{3}(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n) =$$
$$= a_1\left(x_1 - \frac{2}{3a_1}x_2\right)^2 + a_2\left(x_2 - \frac{2}{3a_2}x_3\right)^2 + \ldots +$$
$$+ a_{n-1}\left(x_{n-1} - \frac{2}{3a_{n-1}}x_n\right)^2 + a_nx_n^2.$$

Předně $a_1 = 1$. Porovnáním koeficientů u x_{k+1}^2 dostaneme pro $1 \leqq k \leqq n-1$ rekurentní vztah

$$\frac{4}{9a_k} + a_{k+1} = 1,$$
$$a_{k+1} = \frac{9a_k - 4}{9a_k}.$$

(Všimněte si, že čísla a_1, a_2, ... nezávisí na n!) Můžeme tedy snadno vypočítat $a_2 = \frac{5}{9}$, $a_3 = \frac{1}{5}$, $a_4 = -\frac{11}{9}$. To znamená, že pro $n = 2, 3$ jsme uvažovaný rozdíl upravili na součet čtverců a nerovnost tedy pro tato n platí. Dosazením $x_1 = 1$, $x_{k+1} = \frac{3}{2}a_k x_k$ $(k = 2, 3, 4)$, $x_5 = \ldots = x_n = 0$ naopak dostáváme, že pro $n \geqq 4$ nerovnost neplatí.

c) Nechť $p = \frac{6}{5}$. Postupujeme obdobně jako v případě b). Porovnáním koeficientů v rovnosti

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - \frac{6}{5}(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n) =$$
$$= a_1\left(x_1 - \frac{3}{5a_1}x_2\right)^2 + a_2\left(x_2 - \frac{3}{5a_2}x_3\right)^2 + \ldots +$$
$$+ a_{n-1}\left(x_{n-1} - \frac{3}{5a_{n-1}}x_n\right)^2 + a_n x_n^2$$

dostaneme pro $1 \leqq k \leqq n - 1$ rekurentní vztah

$$a_1 = 1,$$
$$a_{k+1} = \frac{25a_k - 9}{25a_k}$$

a konkrétní hodnoty $a_2 = \frac{16}{25}$, $a_3 = \frac{7}{16}$, $a_4 = \frac{31}{175}$, $a_5 = -\frac{32}{31}$.

Stejnou úvahou jako v b) pak nahlédneme, že nerovnost platí právě pro $n = 2, 3, 4$.

Všimněte si, že tento způsob řešení v podstatě nezávisel na hodnotě p. Pro konkrétní hodnoty ($p = \frac{4}{3}$, $\frac{6}{5}$) bylo samozřejmě možné napsat rovnou, jak se nerovnost upraví — a to co nejrychleji a nejjednodušeji — na součet čtverců a jak najdeme protipříklad, pro který nerovnost neplatí.

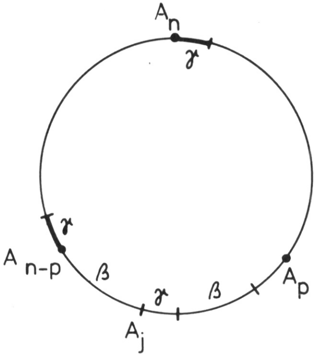
Poznámka. Je dobré si všimnout, že pokud uvedená nerovnost pro dané p a pro nějaké n platí pro všechna reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pak platí i pro všechna $k < n$. Stačí položit $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$. To znamená, že pro každé p existuje přirozené číslo $N(p) \geqq 2$ takové, že nerovnost (1) platí pro každé $n < N(p)$ a neplatí pro $n \geqq N(p)$ (tj. existují reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ taková, že ...). Z výsledku a) víme, že můžeme klást $N(1) = \infty$, a dále jsme zjistili, že $N(\frac{4}{3}) = 4$, $N(\frac{6}{5}) = 5$.

Dá se dokázat, že nerovnost (1) platí právě pro $p \leqq \leqq \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{n+1}}$, tj. $N(p) = \left[\dfrac{\pi}{\arccos\frac{1}{p}}\right]$. Pro $p = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{n+1}}$ pak nastane rovnost pro čísla $x_k = \sin\dfrac{k\pi}{n+1}$, $1 \leqq k \leqq n$.

5.5 (Použita myšlenka A. Kuběny, 3. ročník GMK, Bílovec.) Podmínku „ke každému bodu A_i existují dva shodně obarvené oblouky ...“ budeme nazývat podmínkou (1). V zadání mělo být přesněji řečeno, že to musí být *různé* oblouky (jinak by uvedená podmínka byla triviálně splněna pro „oblouky“ délky celé kružnice a pro libovolné obarvení).

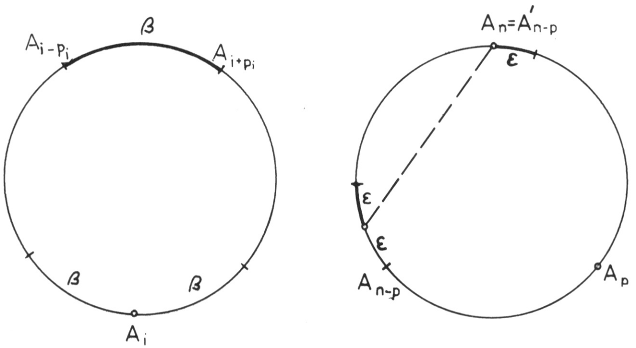
Pro libovolné i označme p_i nejmenší číslo, pro které jsou oblouky $A_{i-p_i}A_i$, $A_iA_{i+p_i}$ shodné. Nejprve si všimněme, že nemůže být $p_i > n/2$. Je-li totiž β průnik oblouků $A_{i-p_i}A_i$, $A_iA_{i+p_i}$ (obr. 64), plyne z jejich shodnosti, že A_i je společným krajním bodem dvou oblouků shodných s β, což odporuje minimalitě p_i.

Budiž nyní $p = \max\limits_{1 \leqq i \leqq n} p_i$. Zvolme očíslování tak, aby bylo $p = p_n$, tedy $A_{n-p_n}A_n = A_nA_{n+p_n} = \alpha$ (obarvené oblouky budeme označovat malými řeckými písmeny). Jestliže z kružnice „vynecháme“ oblouk $A_{n-p_n}A_n$, nová „kružnice“ (s body $A'_1, \ldots, A'_{n-p}$) bude opět splňovat podmínku (1) a pro příslušné číslo p' bude $p' \leqq p$.



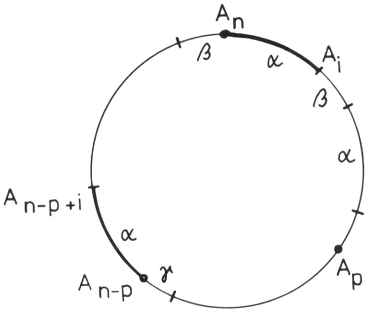
Obr. 64

To je jasné pro bod $A_n = A_{n-p}$ a pro body $A_j = A'_j$, $p \leqq j \leqq n-p$ (obr. 65, kde ε je oblouk příslušný A_{n-p} a $\beta\gamma$ je oblouk příslušný A_j). Případ $n-p=p$ je rovněž jasný — zde není co dokazovat.



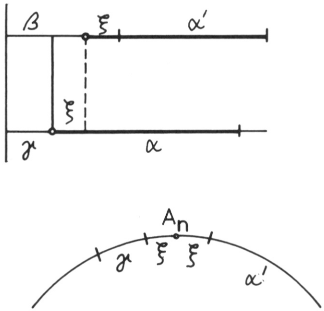
Obr. 65

Uvažujme teď bod A_i pro $1 \leqq i \leqq p$. Vzhledem k tomu, že si body A_i, A_{n-p+i} navzájem odpovídají, můžeme dokonce předpokládat, že je $i \leqq p/2$. Vezměme nejprve ten případ, kdy nejmenší oblouky příslušné bodu A_i (na původní kružnici) neobsahují bod A_p a první z nich je bodem A_n rozdělen na oblouky β a α (obr. 66). Jestliže analogicky bo-



Obr. 66

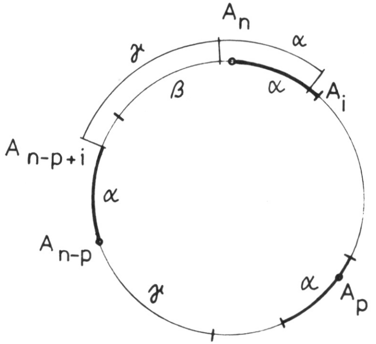
du A_{n-p+i} odpovídají shodné oblouky $\gamma\alpha$, musí být jeden z oblouků $\gamma\alpha$, $\beta\alpha$ obsažen v druhém: Bude-li např. $\beta = \gamma\xi$,



Obr. 67

pak je také $\alpha = \xi\alpha'$ (obr. 67), takže bodu A_n odpovídá kratší oblouk ξ! To ale znamená, že je $\beta = \gamma$.

Podobně si poradíme i s případem, kde jeden z oblouků odpovídajících bodu A_i obsahuje bod A_p (obr. 68). Je-li

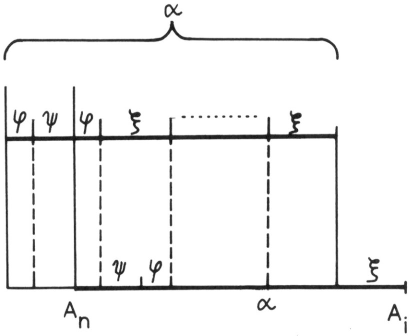


Obr. 68

jeden z oblouků opět rozdělen bodem A_n na oblouky β a α, vyjde postupně, že $\alpha = \alpha'\xi = \alpha''\xi^2 = \ldots = \varphi\xi^k = \varphi\psi\varphi\xi^{k-1}$, takže zase bodu A_n odpovídají kratší oblouky $\varphi\psi$ (obr. 69). To je opět spor s naším předpokladem.

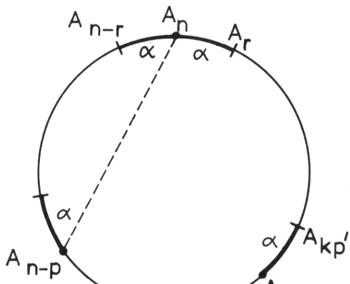
Tvrzení úlohy už teď snadno dokážeme matematickou indukcí (a navíc dokážeme i to, že perioda je rovna číslu p).

Pro $n = 2$ musí být podle podmínky (1) obarveny dva oblouky stejnou barvou, obarvení je tedy periodické s periodou 1. Předpokládejme, že tvrzení platí pro každé $k < n$. Danou kružnici zredukujeme popsaným způsobem na kružnici s body $A_1, \ldots, A_{n-p}$. Pro číslo p', jež odpovídá této nové kružnici, platí $p' \leqq p \leqq n - p$, neboť $p \leqq n/2$. Pokud



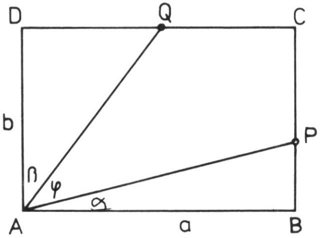
Obr. 69

$p' = n - p$, je $p = n/2$ a obarvení je periodické s periodou $n/2$. Pokud $p' < n - p$, je obarvení redukované kružnice periodické s periodou p' podle indukčního předpokladu. Kdyby teď bylo $p = kp' + r$ pro $0 < r < p'$, bude mezi $A_{kp'}$ a A_p ležet „zbytkový" oblouk α délky r (obr. 70). Díky periodě p' najdeme oblouk α i mezi A_n a A_r a dí-



Obr. 70

ky shodnosti oblouků $A_{n-p}A_n$, A_nA_p leží α též mezi A_{n-r} a A_n. To je ale ve sporu s definicí čísla $p_n = p$. Proto je $p = kp'$, takže snadno nahlédneme, že i původní kružnice musela mít periodu p', takže je dokonce $p' = p$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.



Obr. 71

5.6 Nechť $|AB| = a$, $|AD| = b$, takže $|BP| = \dfrac{b}{p}$, $|DQ| = \dfrac{a}{q}$, a dále položme $\dfrac{a}{b} = k$ (obr. 71). Pro obsahy příslušných trojúhelníků platí

$$2P(ABP) = \frac{ab}{p}, \quad 2P(ADQ) = \frac{ab}{q},$$

$$2P(PCQ) = ab\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\Big(1 - \frac{1}{q}\Big).$$

Proto

$$2P(APQ) = ab\Big(2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\Big(1 - \frac{1}{q}\Big)\Big) =$$

$$= ab\Big(1 - \frac{1}{pq}\Big).$$

Protože $|AP|^2 = a^2 + \dfrac{b^2}{p^2}$, $|AQ|^2 = b^2 + \dfrac{a^2}{q^2}$, dostaneme pro $\varphi = |\sphericalangle PAQ|$ rovnost

$$4P^2(APQ) = \left(a^2 + \frac{b^2}{p^2}\right)\left(b^2 + \frac{a^2}{q^2}\right)\sin^2\varphi =$$
$$= a^2b^2\left(1 - \frac{1}{pq}\right)^2,$$

tj.

$$\left(1 + \frac{1}{k^2p^2}\right)\left(1 + \frac{k^2}{q^2}\right)\sin^2\varphi = \left(1 - \frac{1}{pq}\right)^2.$$

Má-li být φ maximální, musí být hodnota funkce

$$f(k) = \left(1 + \frac{1}{k^2p^2}\right)\left(1 + \frac{k^2}{q^2}\right)$$

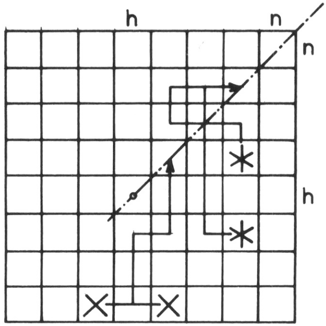
minimální. Ale podle Cauchyovy nerovnosti je

$$f(k) \geqq 1 \cdot 1 + \frac{1}{kp} \cdot \frac{k}{q} = 1 + \frac{1}{pq},$$

přičemž rovnost nastává, právě když

$$\frac{1}{1} = \frac{\dfrac{k^2}{q^2}}{\dfrac{1}{k^2p^2}}, \quad \text{neboli} \quad k^4 = \frac{q^2}{p^2} \quad \text{a} \quad k = \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{q}{p}}.$$

5.7 První hráč má vyhrávající strategii: Předpokládejme, že jeho cílem je přemístit se z pole $(1,1)$ na (n,n). Z tahů



Obr. 72

druhého hráče, jež jsou souměrné podle úhlopříčky, budeme rozebírat vždy jen jednu možnost.

První tah prvního hráče bude $(1,1) \to (2,3) \to (4,4)$.

Předpokládejme teď, že po tahu prvního hráče jsme na poli (h,h), $h \geqq 4$ (podmínka $h \geqq 4$ zaručuje, že existuje platný tah druhého, například $(h-1, h-3)$).

Jestliže $h = n$, první vyhrál, jinak $(h < n)$ má druhý tyto možnosti (obr. 72):

tah druhého hráče — odpověď prvního hráče

a) $(h,h) \to (h-1, h-3) \to [(h, h-1) \to (h+1, h+1)]$,
b) $(h,h) \to (h+1, h-3) \to [(h, h-1) \to (h+1, h+1)]$,
c) $(h,h) \to (h+3, h-1) \to [(h+2, h+1) \to (h+3, h+3)]$, je-li $h \leqq n-3$
d) $(h,h) \to (h+3, h+1) \to [(h+1, h+2) \to (h+3, h+3)]$, je-li $h \leqq n-3$

Pokaždé tedy postoupí první hráč po úhlopříčce alespoň o jedno políčko blíže ke svému cíli. Přitom možnosti, že by se pro $h = n-1$ nemohl po tahu soupeře dostat do rohu (n,n), se nemusí obávat, protože pole označená $*$ (v tabulce tahy c) a d)) už nejsou v takovém případě pro soupeře dostupná.

Začíná-li druhý hráč, má jenom možnost d) a po tahu prvního se dostaneme na pole $(4, 4)$, tedy i v tomto případě má první hráč vyhrávající strategii. Protože délka úhlopříčky je konečná, dosáhne první hráč po konečném počtu kroků cílového pole (n, n).