39. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie A

In: Leo Boček (editor); Jiří Binder (editor); Vladimír Burjan (editor); Karel Horák (editor); Pavel Töpfer (editor): 39. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1989/90. 31. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1992. pp. 74–105.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404904

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

Určete nejmenší přirozené číslo n, pro které v prostoru existuje konvexní mnohostěn K s následujícími vlastnostmi:

a) K má alespoň 10 vrcholů,

b) každé jeho dva různé vrcholy lze po hranách spojit alespoň čtyřmi různými cestami, z nichž žádné dvě už nemají další společný vrchol,

c) K má n hran.

A – I – 2

Ukažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n s touto vlastností: Čísla 0, 0, 1, 1, ..., n, n lze seřadit do posloupnosti tak, že mezi dvěma výskyty čísla k je právě k jejích členů ($0 \leqq k \leqq n$).

A – I – 3

Je dán čtyřstěn $ABCD$, středy dvou jeho protilehlých hran označme K a L. Dokažte, že každá rovina procházející body K, L dělí daný čtyřstěn na dvě části stejného objemu.

A – I – 4

Předpokládejme, že délky a, b, c stran trojúhelníku a délky jeho těžnic jsou celá čísla. Dokažte, že pak a, b, c jsou sudá a pro délky těžnic platí: Buď jsou všechny dělitelné třemi, anebo žádná z nich není dělitelná třemi.

A – I – 5

Je-li G graf takový, že z každého jeho vrcholu vychází nejméně $2m - 1$ hran, lze vrcholy grafu rozdělit do dvou disjunktních množin A a B tak, že z každého vrcholu v A vychází nejméně m hran do vrcholů v B a z každého vrcholu v B vychází nejméně m hran do vrcholů v A. Dokažte.

A – I – 6

Najděte všechna reálná čísla α s vlastností: Jsou-li x, y, z délky stran trojúhelníku, pak

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq \alpha(xy + yz + zx).$$

A – S – 1

Jsou dány posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$a_n = \frac{1}{2}\left((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right),$$
$$b_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right).$$

Najděte čísla c, d a p, q tak, aby pro každé přirozené n platily následující vztahy

$$a_{n+2} = ca_{n+1} + da_n,$$
$$pa_n^2 + qb_n^2 = 1.$$

A – S – 2

V rovině je dáno $n \geqq 3$ bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Pak existuje aspoň $\frac{1}{6}n(n-1)$ trojúhelníků s vrcholy v daných bodech, které neobsahují žádný další z daných bodů. Dokažte.

A – S – 3

Spomedzi štvorstenov $ABCD$ s danými dĺžkami a, c hrán AB, CD a danou vzdialenosťou d stredov hrán AB, CD nájdite ten, ktorý má najväčší objem, a tento objem určte.

A – II – 1

Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je daná vzťahmi

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4,$$
$$a_{2^k+j} = -a_j \quad \text{pre } 1 \leqq j \leqq 2^k,\ k = 1, 2, \ldots$$

Vypočítajte súčet $a_1 + a_2 + \ldots + a_{1\,990}$.

A – II – 2

Spomedzi štvorstenov $ABCD$ s danými dĺžkami a, c hrán AB, CD a danou vzdialenosťou d stredov hrán AB, CD nájdite ten, ktorý má najväčší povrch, a tento povrch určte.

A - II - 3

Najděte nejmenší ε, pro které platí: Je-li T ostroúhlý trojúhelník s úhly α, β, γ, pak existuje rovnoramenný nebo pravoúhlý trojúhelník s úhly α', β', γ' takový, že

$$|\alpha - \alpha'| \leqq \varepsilon, \ |\beta - \beta'| \leqq \varepsilon, \ |\gamma - \gamma'| \leqq \varepsilon.$$

A - II - 4

Zjistěte, kolik existuje pořadí $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ čísel 1, 2, ..., 10 takových, že $a_i > a_{2i}$ $(1 \leqq i \leqq 5)$ a $a_j > a_{2j+1}$ $(1 \leqq j \leqq 4)$.

A - III - 1

Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je daná vzťahmi

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_{2^k+j} &= -a_j \quad \text{pre } 1 \leqq j \leqq 2^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Dokážte, že daná postupnosť nie je periodická.

A - III - 2

Nájdite všetky reálne čísla α, pre ktoré má každé kladné riešenie (x, y, z) nerovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq \alpha(xy + yz + zx)$$

tú vlastnosť, že existuje trojuholník so stranami dĺžok x, y, z.

A - III - 3

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Najděte všechna čísla $\varphi > \frac{1}{2}\pi$, pro která existuje rovina, jejíž průnik se čtyřstěnem $ABDE$ je tupoúhlý trojúhelník s tupým úhlem φ.

A - III - 4

Určete největší číslo $k \geqq 0$ takové, že pro všechny n-tice $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqq 2)$ nezáporných čísel platí

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1) \geqq$$
$$\geqq k(x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + \ldots + x_{n-1}^2x_n^2 + x_n^2x_1^2).$$

A - III - 5

V zemi jsou každá dvě města spojena právě jednou silnicí. Každá z nich je jednosměrná a je určena buď jen pro motorová vozidla, anebo jen pro cyklisty. Silnice se křižují pouze ve městech (jinde mají mimoúrovňové křížení). Dokažte, že existuje město, z něhož lze do libovolného jiného města dojet bez změny dopravního prostředku.

A - III - 6

Dokažte, že pro každé přirozené číslo k existuje systém S dvouprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, 2k\}$ takový, že platí: Jsou-li $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \ldots, \mathsf{M}_{2k}$ libovolné množiny takové, že

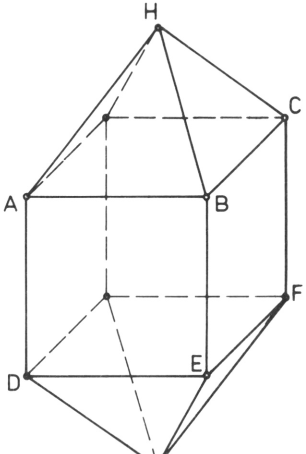
$$\mathsf{M}_i \cap \mathsf{M}_j \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \{i, j\} \in \mathsf{S},$$

pak množina $\mathsf{M}_1 \cup \mathsf{M}_2 \cup \ldots \cup \mathsf{M}_{2k}$ obsahuje aspoň k^2 prvků.

A – I – 1

Aby byla splněna podmínka b) úlohy, musí zřejmě z každého vrcholu vycházet aspoň 4 hrany. Označíme-li v počet vrcholů takového mnohostěnu, platí podle a) pro jeho počet hran n nerovnost $n \geqq 2v \geqq 20$ (sčítáme-li počet hran pro všechny vrcholy, počítáme každou hranu dvakrát).

Mnohostěn K na obr. 16 má právě 10 vrcholů, 20 hran a z každého vrcholu vycházejí právě 4 hrany. Zbývá ověřit,



Obr. 16

že skutečně každé dva vrcholy mnohostěnu K mají požadovanou vlastnost. Vzhledem k souměrnosti uvedeného mnohostěnu stačí spočítat, kolik různých cest vede mezi dvojicemi vrcholů A, B; A, C; A, D; A, E; A, F; A, G; A, H a H, G.

Nejmenší hledané n s uvedenými vlastnostmi je tedy $n = 20$.

A – I – 2

Poměrně snadno zjistíme, že pro $n = 1, 2$ taková posloupnost neexistuje. Pro $n = 3$ vyhovuje např. posloupnost (0, 0, 3, 1, 2, 1, 3, 2). Těžko se podaří najít nějaký obecný předpis, který by dával požadovanou posloupnost pro přirozené n jistého tvaru. Ukážeme několik návodných pozorování:

1. Ze sudých čísel $0, 0, 2, 2, \ldots, 2k, 2k$ snadno sestavíme posloupnost s požadovanou vlastností:

$$2k, \ldots, 4, 2, 0, 0, 2, 4, \ldots, 2k.$$

2. Pro lichá čísla $1, 1, 3, 3, \ldots, 2k+1, 2k+1$ to jde, když jedno místo vynecháme:

$$2k+1, \ldots, 3, 1, *, 1, 3, \ldots, 2k+1.$$

3. Z posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}, a_{2n+2}$ pro n dostaneme „roztažením" část jiné posloupnosti (s lichými čísly $1, 3, \ldots, 2n+1$) takto:

$$2a_1+1, *, 2a_2+1, *, \ldots, *, 2a_{2n+1}+1, *, 2a_{2n+2}+1$$

Mějme posloupnost $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n+2})$, která vyhovuje pro nějaké $n \geqq 3$ (obsahuje čísla $0, 0, 1, 1, \ldots, n, n$). Sestrojíme následující posloupnost, která bude vyhovovat pro

$n' = 4n + 3$:

$$\begin{gathered}2n,\ 2n-2,\ \ldots,\ 2,\ 0,\ 0,\ 2,\ \ldots,\ 2n-2,\ 2n,\\ 4n+3,\ \underline{2a_1+1},\ 4n+2,\ \underline{2a_2+1},\ 4n+1,\ \ldots,\\ 2n+2,\ \underline{2a_{2n+2}+1},\\ 4n+3,\ 4n+2,\ 4n+1,\ \ldots,\ 2n+3,\ 2n+2\end{gathered}$$

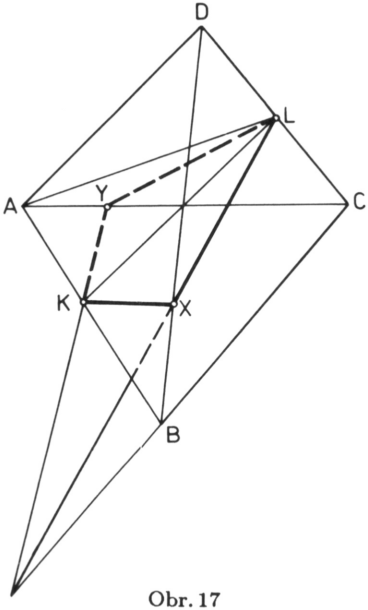
(nejprve podle 1. uspořádáme všechna sudá čísla 0, 2, ..., $2n$, pak podle 3. roztáhneme danou posloupnost (a_1, ..., a_{2n+2}) a do příslušných mezer umístíme postupně všechna čísla $4n+3$, $4n+2$, ..., $2n+2$ a ta pak ještě jednou zopakujeme na konci posloupnosti. Je zřejmé, že nová posloupnost obsahuje každé z čísel 0, 1, ..., $4n+3$ právě dvakrát, a snadno se přesvědčíme, že je splněna i podmínka úlohy.

Pro $n = 4 \cdot 3 + 3 = 16$ tak dostaneme posloupnost (6, 4, 2, 0, 0, 2, 4, 6, 15, 1, 14, 1, 13, 7, 12, 3, 11, 5, 10, 3, 9, 7, 8, 5, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8). Z uvedené konstrukce plyne, že každé přirozené číslo tvaru $4n + 3$ pro $n \geqq 3$ má požadovanou vlastnost.

A - I - 3

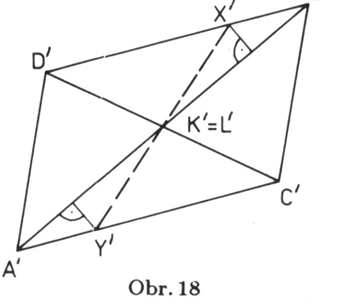
Pro rovinu ABL je tvrzení zřejmé, protože body C, D mají od roviny ABL stejnou vzdálenost.

Uvažujme rovinu, která protne hranu BD v bodě X a hranu AC v bodě Y (obr. 17). Nyní si stačí uvědomit, že těleso $KXLYAD$ vznikne z čtyřstěnu $ABLD$ přidáním čtyřstěnu $AKLY$ a ubráním čtyřstěnu $KBLX$. Jejich podstavy AKL a KBL mají stejný obsah, stačí tedy dokázat, že oba čtyřstěny mají i stejnou výšku, tj. body X a Y jsou od roviny



Obr. 17

ABL stejně vzdáleny. To je nejlépe vidět, když promítneme daný čtyřstěn do roviny kolmé na přímku KL (obr. 18).



Obr. 18

Protože $|AK| = |BK|$ a $|CL| = |DL|$, je uvedeným průmětem rovnoběžník $A'C'B'D'$ a rovina KLX se promítne do přímky $X'Y'$ procházející jeho středem $K' = L'$, přičemž vzdálenosti bodů X, Y od roviny ABL se promítnou ve skutečné velikosti. Stejně postupujeme i v případě, kdy uvažovaná rovina protíná hrany BC a AD. Tím je tvrzení dokázáno.

Poznámka. Tvrzení úlohy lze zobecnit na případ, kdy body K a L dělí příslušné hrany v daném poměru. Ve stejném poměru jsou pak i objemy příslušných částí čtyřstěnu, jež vzniknou řezem nějakou rovinou procházející body K a L.

A – I – 4

K řešení potřebujeme vyjádřit délky těžnic pomocí délek stran trojúhelníku. Je-li např. A_1 střed strany BC, vyjádříme v trojúhelníku ABA_1 délku $t_a = |AA_1|$ a v trojúhelníku ABC zase délku b pomocí kosinové věty. Vyloučením $\cos\beta$ vyjde vzorec

$$4t_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 \tag{1}$$

(další dva dostaneme cyklickou záměnou $a \to b \to c \to a$). Odtud hned plyne, že a^2 (a tedy i b^2, c^2) jsou sudá čísla, tudíž i a, b, c musí být sudá.

Druhé tvrzení úlohy dostaneme sečtením vzorců (1) pro všechny tři těžnice,

$$4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Výsledná rovnost říká, že $t_a^2 + t_b^2 + t_c^2$ je číslo dělitelné třemi (protože čísla 3 a 4 jsou nesoudělná). Nyní si stačí uvědomit, že druhá mocnina každého celého čísla dává při dělení třemi zbytek 0 nebo 1 (podle toho, zda je základ sám dělitelný třemi, či nikoli). Odtud plyne, že součet tří čtverců je dělitelný třemi, jen když jsou všechna tři čísla dělitelná třemi, anebo žádné z nich není třemi dělitelné.

Poznámka. Poslední úvahu lze nahradit i dalším využitím vzorců (1). Odečtením dvou z nich vyjde např.

$$4(t_a^2 - t_b^2) = 3(b^2 - a^2),$$

takže hned vidíme, že čísla t_a^2, t_b^2 (a tedy i číslo t_c^2) dávají stejný zbytek (mod 3), a tedy všechna tři čísla t_a^2, t_b^2, t_c^2 mají stejný zbytek (mod 3).

A – I – 5

Hledáme vlastně takový disjunktní rozklad $\mathsf{V} = \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ ($\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$) množiny V vrcholů daného grafu G, aby mezi množinami A a B bylo „mnoho hran". Vezměme proto ze všech možných rozkladů ten, pro který je příslušný počet hran co největší. Takový rozklad má už požadovanou vlastnost, protože kdyby z nějakého vrcholu $v \in \mathsf{A}$ vedlo do B nejvýše $m - 1$ hran, dostali bychom přemístěním v z A do B nový rozklad $\mathsf{A} \setminus \{v\}$, $\mathsf{B} \cup \{v\}$, který bude mít mezi oběma množinami více hran, protože v je podle předpokladu s ostatními vrcholy v A spojen aspoň m hranami.

A – I – 6

Předpoklad, že x, y, z jsou délky stran trojúhelníku, znamená, že platí

$$x + y - z > 0, \quad x - y + z > 0, \quad -x + y + z > 0. \qquad (1)$$

Nerovnost, která nás zajímá, má jednu charakteristickou vlastnost: je symetrickou funkcí proměnných x, y, z (tj. při jejich libovolné permutaci se nezmění). Z (1) dostaneme symetrickou nerovnost tak, že sečteme součiny každých dvou výrazů v (1), takže

$$\begin{aligned}(x+y-z)(x-y+z)+(x+y-z)(-x+y+z)+\\+(x-y+z)(-x+y+z)=\\=2(xy+yz+zx)-(x^2+y^2+z^2)>0,\end{aligned}$$

tj. uvažovaná nerovnost platí pro každé $\alpha \geqq 2$.

Podívejme se, co se stane pro $x = y = 1$ (pak musí být $0 < z < 2$). Vyjde nerovnost

$$z^2 - 2\alpha z - \alpha + 2 \leqq 0, \tag{2}$$

která pro $\alpha < 2$ jistě nebude platit, vezmeme-li $z > 0$ dostatečně malé. Kvadratický trojčlen (2) má totiž pro $\alpha < 1$ záporný diskriminant (tj. je vždy $z^2 - 2\alpha z - \alpha + 2 > 0$) a pro $1 \leqq \alpha < 2$ jeho kořeny z_1, z_2 splňují nerovnosti $0 < z_1 < \alpha < z_2$ (takže pro $0 < z < z_1$ bude zase $z^2 - 2\alpha z - \alpha + 2 > 0$).

Řešením úlohy jsou všechna $\alpha \geqq 2$.

Jiné řešení. Položme

$$2a = x - y + z, \quad 2b = x + y - z, \quad 2c = -x + y + z,$$

neboli

$$x = a + b, \quad y = b + c, \quad z = c + a.$$

Podle předpokladu jsou x, y, z délky stran trojúhelníku, takže a, b, $c > 0$. Dosazením do dané nerovnosti dostaneme po úpravě nerovnost

$$(2-\alpha)(a^2+b^2+c^2)+(2-3\alpha)(ab+bc+ca) \leqq 0, \qquad (3)$$

která zřejmě platí pro každé $\alpha \geqq 2$.

Uvažujme teď $\alpha < 2$ a položme $a = b = 1$; pak

$$(2-\alpha)(a^2+b^2+c^2)+(2-3\alpha)(ab+bc+ca) =$$
$$= (2-\alpha)c^2+2(2-3\alpha)c+6-5\alpha.$$

Protože $2-\alpha > 0$, víme z vlastností kvadratické funkce, že existuje kladné číslo c_0 takové, že

$$(2-\alpha)c_0^2+2(2-3\alpha)c_0+6-5\alpha > 0.$$

Čísla $a = b = 1$, $c = c_0$ tedy nesplňují nerovnost (3), a proto ani čísla $x = 2$, $y = z = 1+c_0$, jež vyhovují trojúhelníkovým nerovnostem, nesplňují požadovanou nerovnost.

A – S – 1

Dosazením do požadovaného rekurentního vztahu (a po vydělení $\frac{1}{2}$) dostaneme rovnost

$$(7+4\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n+(7-4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n =$$
$$= c(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n+c(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n +$$
$$+ d(2+\sqrt{3})^n+d(2-\sqrt{3})^n =$$
$$= (2c+d+c\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n+(2c+d-c\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n.$$

Porovnáním obou stran získaného vztahu dostaneme, že předpokládaná rovnost je splněna pro $c = 4$, $d = -1$.

Protože

$$\left((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right)^2 = (7+4\sqrt{3})^n + (7-4\sqrt{3})^n + 2 =$$
$$= \left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right)^2 + 4,$$

plyne odtud rovnost

$$4a_n^2 - 3b_n^2 = 4, \qquad \text{tj.} \qquad a_n^2 - \frac{3}{4}b_n^2 = 1.$$

Druhému požadavku úlohy tedy vyhovují čísla $p = 1$, $q = -\frac{3}{4}$.

Jiné řešení dostaneme, pokud máme základní znalosti z teorie diferenčních rovnic. Odtud plyne, že posloupnosti (a_n) odpovídá charakteristická rovnice $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ (její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$), takže příslušný rekurentní vztah, který uvedená posloupnost splňuje, je

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n,$$

tj. $c = 4$, $d = -1$.

Rovněž je možno spočítat první čtyři členy posloupnosti $a_1 = 2$, $a_2 = 7$, $a_3 = 26$, $a_4 = 97$ a pro neznámá čísla sestavit dvě lineární rovnice. Jejich řešením dostaneme $c = 4$, $d = -1$. Zbývá ovšem dokázat (nejlépe matematickou indukcí), že uvažovaná posloupnost splňuje získaný vztah pro každé přirozené n. Podobně můžeme vyřešit i druhou část úlohy. Pro $n = 1$ a $n = 2$ dostaneme dvě lineární rovnice.

A – S – 2

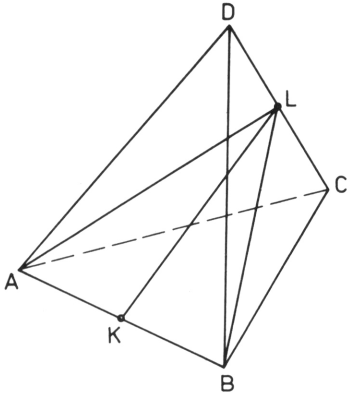
Z daných n bodů vezměme libovolné dva body X, Y. K nim z daných bodů určíme třetí bod Z tak, aby výška trojúhelníku XYZ na stranu XY byla co nejmenší. V takovém případě už nebude trojúhelník XYZ obsahovat žádný jiný z daných bodů. Ke každé z $\binom{n}{2}$ dvojic daných bodů jsme tak našli jeden „prázdný“ trojúhelník, přitom jsme ale mohli každý takový trojúhelník počítat nejvýše třikrát (pro každou stranu jednou). Existuje tedy aspoň $\frac{1}{3}\binom{n}{2} = \frac{1}{6}n(n-1)$ trojúhelníků s požadovanou vlastností, což jsme měli dokázat.

A – S – 3

Označme K, L středy hran AB, CD uvažovaného čtyřstěnu. Objem čtyřstěnu $ABCD$ pak můžeme spočítat tak, že ho rozdělíme rovinou ABL na dva čtyřstěny $ABLC$ a $ABLD$ (obr. 19). Pro objem $V(ABCD)$ uvažovaného čtyřstěnu pak zřejmě platí

$$V(ABCD) \leqq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |AB| \cdot |KL| \cdot |CD| = \frac{1}{6}\, adc$$

s rovností, právě když KL je výškou trojúhelníku ABC a CD je kolmá na rovinu ABL, což je právě tehdy, jsou-li obě mimoběžné hrany AB a CD navzájem kolmé a zároveň obě kolmé na spojnici svých středů. Objem odpovídajícího čtyřstěnu pak bude $\frac{1}{6}\, acd$.



Obr. 19

A - II - 1

Zřejmě je $a_3 = -1$, $a_4 = -4$, takže platí $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$. Z toho, jak je uvedená posloupnost definována, snadno plyne, že součet prvních $4n$ členů posloupnosti je pro libovolné přirozené n nulový: pro každé číslo n tvaru $n = 2^k$ ($k \geqq 0$) to zřejmě platí, neboť

$$a_1 + \ldots + a_{4.2^k} =$$

$$= a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^{k+1}} + a_{2^{k+1}+1} + \ldots + a_{2^{k+2}} =$$

$$= a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^{k+1}} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^{k+1}}) = 0.$$

Předpokládejme navíc, že součet $a_1 + a_2 + \ldots + a_{4m}$ je nulový pro libovolné $m < n$ (tj. i pro $m = 0$, kterému odpovídá prázdný součet). Pro každé $n \geqq 1$ a pro vhodné $k \geqq 2$ pak můžeme psát $4n = 2^k + 4m$, kde $0 \leqq m < n$, takže

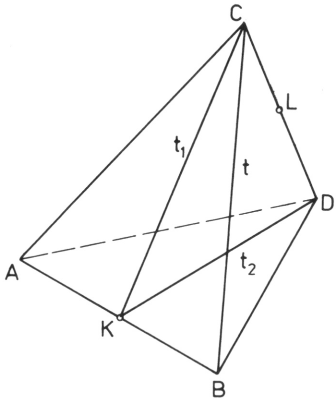
$$a_1+a_2+\ldots+a_{4n} = a_1+a_2+\ldots+a_{2^k}-(a_1+a_2+\ldots+a_{4m}) = 0$$

podle indukčního předpokladu. Podle definice dané posloupnosti tedy platí

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{1\,990} =$$
$$= a_{1\,989} + a_{1\,990} = -a_{965} - a_{966} = a_{453} + a_{454} =$$
$$= -a_{197} - a_{198} = a_{69} + a_{70} = -a_5 - a_6 = a_1 + a_2 = 5.$$

A – II – 2

Označme K a L středy hran AB, CD uvažovaného čtyřstěnu $ABCD$. Pro obsah stěn ABC a ABD zřejmě platí (obr. 20) $S(ABC) \leqq \frac{1}{2}at_1$, $S(ABD) \leqq \frac{1}{2}at_2$, kde $t_1 = |KC|$, $t_2 = |KD|$ jsou délky příslušných těžnic. Rovnost



Obr. 20

v obou nerovnostech nastane, právě když obě těžnice CK, DK budou kolmé na hranu AB, tj. právě když bude rovina CDK kolmá na AB. Pro část povrchu uvažovaného čtyřstěnu tak dostáváme odhad

$$S(ABC) + S(ABD) \leqq \frac{a}{2}(t_1 + t_2). \tag{1}$$

Z kosinové věty pro trojúhelníky CKL a DKL plynou rovnosti

$$t_1^2 = \frac{c^2}{4} + d^2 - cd \cos |\sphericalangle KLC|,$$
$$t_2^2 = \frac{c^2}{4} + d^2 + cd \cos |\sphericalangle KLC|,$$

takže podle známé nerovnosti $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \leqq$ $\leqq 2(x^2 + y^2)$ dostáváme nerovnost

$$(t_1 + t_2)^2 \leqq 2(t_1^2 + t_2^2) = c^2 + 4d^2,$$

v níž nastane rovnost, právě když $t_1 = t_2$. Ze vztahu (1) tak vychází odhad

$$S(ABC) + S(ABD) \leqq \frac{a}{2}\sqrt{c^2 + 4d^2}.$$

V nerovnosti (1) zřejmě nastane rovnost, právě když jsou obě těžnice t_1 i t_2 kolmé na AB, tj. právě když je rovina CDK, a tedy i hrana CD kolmá na AB. Z rovnosti $t_1 = t_2$ pak navíc plyne, že je $KL \perp CD$.

Zcela analogicky odvodíme nerovnost

$$S(CDA) + S(CDB) \leqq \frac{c}{2}\sqrt{a^2 + 4d^2}.$$

Podle předchozích úvah nastane v obou posledních nerovnostech rovnost, právě když jsou obě hrany AB, CD navzájem kolmé a zároveň jsou obě kolmé na svoji střední příčku KL. Takový čtyřstěn $ABCD$ pak má povrch

$$\frac{a}{2}\sqrt{c^2+4d^2}+\frac{c}{2}\sqrt{a^2+4d^2}.$$

A – II – 3

Uvažujme ostroúhlý trojúhelník s úhly $\alpha<\beta<\gamma$ a číslo $\varepsilon>0$ takové, že změnou libovolného z úhlů α, β, γ o nejvýše ε nedostaneme ani pravoúhlý, ani rovnoramenný trojúhelník. Pak současně platí

$$\gamma<90^\circ-\varepsilon, \qquad \beta-\alpha>2\varepsilon, \qquad \gamma-\beta>2\varepsilon.$$

Odtud plyne

$$\beta<\gamma-2\varepsilon<90^\circ-3\varepsilon, \qquad \alpha<\beta-2\varepsilon<90^\circ-5\varepsilon,$$

a protože $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, vychází

$$180^\circ<90^\circ-5\varepsilon+90^\circ-3\varepsilon+90^\circ-\varepsilon,$$

tedy $9\varepsilon<90^\circ$, $\varepsilon<10^\circ$.

To znamená, že pro každé $\varepsilon\geqq10^\circ$ už máme zaručenu existenci pravoúhlého či rovnoramenného trojúhelníku, jehož odpovídající úhly se od daných liší nejvýše o ε. A $\varepsilon=10^\circ$ je skutečně nejmenší číslo s touto vlastností, jak je vidět z trojúhelníku s úhly $\alpha=40^\circ$, $\beta=60^\circ$, $\gamma=80^\circ$.

A – II – 4

Předpokládejme, že pořadí $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ splňuje uvedené nerovnosti. Čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ pak můžeme uspořádat do následujícího schématu

$$\begin{tikzcd}
 & & & & a_1 \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & & a_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & a_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & a_4 \arrow[dl] \arrow[dr] & & a_5 \arrow[dr] & & a_6 & & a_7 \\
a_8 & & a_9 & & a_{10} & & &
\end{tikzcd}$$

v němž $a_i \to a_j$ znamená, že $a_i > a_j$ (relace $>$ je ovšem tranzitivní).

Je jasné, že musí být $a_1 = 10$. Dále uvažujme jednu z $\binom{9}{3}$ možností, jak zbylých devět čísel 1, 2, ..., 9 rozdělit na dvě disjunktní množiny šesti a tří čísel. Pro každé takové rozdělení jsou hodnoty a_2 a a_3 jednoznačně určeny jako maximální prvky příslušných podmnožin, pro volbu hodnot a_6, a_7 pak máme dvě možnosti, zatímco čísla a_4, a_5, a_8, a_9, a_{10} musíme ještě rozdělit do dvou disjunktních množin se třemi a dvěma prvky (to jde $\binom{5}{2}$ způsoby). Pro každé takové rozdělení nám pak zbývají právě dvě možnosti jak určit a_8 a a_9 (prvky a_4, a_5, a tedy i a_{10} jsou takovým rozdělením už jednoznačně určeny!).

Celkem tedy existuje

$$\binom{9}{3} \cdot 2 \cdot \binom{5}{2} \cdot 2 = 3\,360$$

různých pořadí, která splňují požadované podmínky.

Jiné řešení (podle P. Tomana, 4. ročník GWP, Praha, a R. Kubackiho, 3. ročník GMK, Bílovec). Uvažujme všechna možná pořadí $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ deseti čísel $1, 2, \ldots, 10$, kterých je $10!$. Těch, která mají na prvním místě největší číslo 10, je $9! = \frac{1}{10} 10!$. Ze všech pořadí s $a_1 = 10$ jich je zřejmě $\frac{1}{6} = 5!/6!$ takových, že a_2 je mezi čísly a_2, a_4, a_5, a_8, a_9, a_{10} největší. Podobně uvažujeme i pro $a_4 > a_8, a_9$ (tyto dvě nerovnosti splňuje právě $\frac{1}{3}$ všech vyhovujících pořadí), pro $a_5 > a_{10}$ ($\frac{1}{2}$ dosud vyčleněných pořadí) a konečně pro $a_3 > a_6, a_7$ ($\frac{1}{3}$ dosud vyčleněných pořadí). Celkem tedy je takových pořadí

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10! = 3\,360.$$

A – III – 1

Pro $j = 2^k$ dostáváme, že $a_{2^{k+1}} = -a_{2^k}$, tedy $a_{2^k} = (-1)^k$. Předpokládejme, že daná posloupnost má periodu p, tj. že pro každé přirozené m platí $a_{m+p} = a_m$. Vezměme k takové, že $2^k \geqq p$. Potom

$$a_{2^k+p} = a_{2^k} = (-1)^k, \qquad a_{2^{k+1}+p} = a_{2^{k+1}} = (-1)^{k+1},$$

tedy $a_{2^k+p} \neq a_{2^{k+1}+p}$. Přitom ale podle definice posloupnosti je pro $p \leqq 2^k$

$$a_{2^k+p} = -a_p = a_{2^{k+1}+p}.$$

Uvedená posloupnost tudíž nemůže být periodická.

A – III – 2

Položíme-li $x = y = 1$ a $z = 2$, vyjde $6 \leqq 5\alpha$, takže daná nerovnost bude splněna pro všechna reálná čísla $\alpha \geqq \frac{6}{5}$. Aby každé kladné řešení uvažované nerovnice dávalo strany trojúhelníku, musí proto platit $\alpha < \frac{6}{5}$.

Ukážeme, že pro $\alpha < \frac{6}{5}$ má každé kladné řešení uvedené nerovnice požadovanou vlastnost. Kdyby nerovnice měla takové kladné řešení (x, y, z), které by nesplňovalo trojúhelníkové nerovnosti, můžeme bez ztráty obecnosti předpokládat, že je $t = z - (x + y) \geqq 0$ (nerovnice je symetrická v proměnných x, y, z). Dosazením do původní nerovnosti postupně pro $\alpha < \frac{6}{5}$ dostaneme

$$x^2 + y^2 + (x + y + t)^2 < \frac{6}{5}\bigl(xy + y(x + y + t) + x(x + y + t)\bigr),$$

$$t^2 + \frac{4}{5}x^2 + \frac{4}{5}y^2 - \frac{8}{5}xy + \frac{4}{5}t(x + y) < 0,$$

$$t^2 + \frac{4}{5}(x - y)^2 + \frac{4}{5}t(x + y) < 0,$$

což nemůže platit, neboť na levé straně nerovnosti je kladné číslo.

Požadovanou vlastnost tedy mají všechna čísla $\alpha < \frac{6}{5}$.

Jiné řešení (podle M. Kubečka, 3. ročník GWP, Praha). Pokud $\alpha \geqq \frac{6}{5}$, má uvažovaná nerovnice kladné řešení $x = y = 1$, $z = 2$, pro které trojúhelník zřejmě neexistuje.

Na druhé straně, pokud pro nějaká kladná čísla x, y, z neexistuje trojúhelník se stranami délek x, y, z, můžeme předpokládat, že je $x \leqq y \leqq z$, a přitom $x + y - z \leqq 0$. Umocněním této nerovnosti dostaneme

$$z^2 + x^2 + y^2 \geqq 2xz + 2yz - 2xy,$$

zároveň ale platí

$$4z^2 \geqq 4z(x+y),$$
$$4(x^2+y^2) \geqq 4 \cdot 2xy,$$

což dohromady dává nerovnost

$$5(x^2+y^2+z^2) \geqq 6(xy+yz+zx).$$

Odtud vidíme, že taková čísla x, y, z nejsou řešením uvažované nerovnice pro $\alpha < \frac{6}{5}$.

A – III – 3

Protože žádná ze stěn čtyřstěnu $ABDE$ není tupoúhlý trojúhelník, můžeme předpokládat, že rovina řezu ϱ není s žádnou jeho stěnou rovnoběžná. Přitom dvě rovnoběžné roviny $\varrho \parallel \varrho'$, pokud příslušný pás neobsahuje žádný z vrcholů uvažovaného čtyřstěnu, dávají v řezu podobné útvary, takže bez újmy na obecnosti můžeme dále předpokládat, že rovina řezu ϱ prochází některým z vrcholů A nebo B (vrcholy B, D, E jsou zaměnitelné).

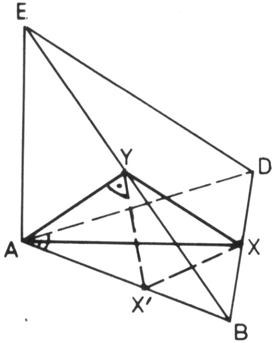
Budeme využívat následujících vlastností kolmého promítání úhlů, jež se snadno odvodí pomocí kosinové věty (obě vlastnosti jsou stručně dokázány v poznámce).

Při promítání do roviny obsahující jen jedno rameno úhlu se tupý úhel zvětší a ostrý úhel se zmenší.

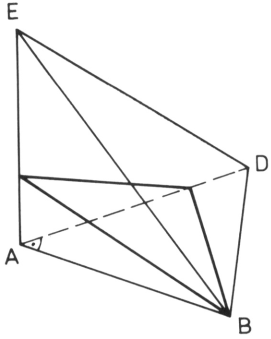
Tupý úhel se při promítání do roviny protínající obě jeho ramena zvětší.

Uvažujme tedy rovinu ϱ procházející vrcholem A a protínající podstavu BDE v úsečce XY (obr. 21). Protože úhel

XAB je ostrý, je ostrý i úhel XAY. Bez újmy na obecnosti můžeme zřejmě předpokládat, že $|AX| \geqq |AY|$. Z uvedených vlastností promítání nyní plyne, že úhel AYX je tupý, jen když je tupý i úhel AYB, přičemž $|\sphericalangle AYB| < \frac{3}{4}\pi$. Ze spojitosti snadno uvážíme, že pro každé φ z intervalu $\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{3}{4}\pi$ existuje rovina ϱ procházející vrcholem A, jejíž průnik se čtyřstěnem $ABDE$ je tupoúhlý trojúhelník s úhlem φ. (Je-li Y vnitřní bod úsečky BE a bod X' uvnitř AB takový, že $|\sphericalangle AYX'| = \frac{1}{2}\pi$, pak pro odpovídající bod X na BD, jehož je bod X' průmětem do roviny ABE, bude rovněž $|\sphericalangle AYX| = \frac{1}{2}\pi$. Pro body Z uvnitř XB bude tupý úhel AYZ nabývat libovolné hodnoty menší než $|\sphericalangle AYB|$.)



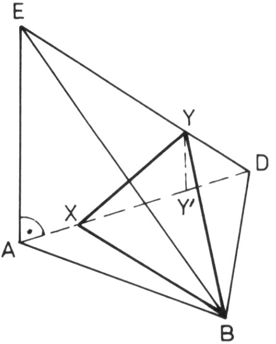
Obr. 21



Obr. 22

Uvažujme teď rovinu ϱ procházející vrcholem B. Pokud rovina ϱ protíná obě kratší hrany uvažovaného čtyřstěnu (obr. 22), dostaneme v řezu ostroúhlý trojúhelník, protože průměty uvažovaných úhlů do roviny ABD jsou vesměs ostré nebo pravé.

Protíná-li rovina ϱ např. hrany AD a DE v bodech X a Y, označme Y' kolmý průmět bodu Y do roviny ABD (Y' leží na hraně AD). V každém případě ale je (obr. 23) jak $|\sphericalangle Y'XB| < \frac{3}{4}\pi$, tak i $|\sphericalangle XY'B| < \frac{3}{4}\pi$, takže i případný tupý úhel řezu BXY je menší než $\frac{3}{4}\pi$.



Obr. 23

Poznámka. Dokážeme ještě vlastnosti kolmého promítání úhlů použité v předchozím řešení. Podle kosinové věty pro trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ platí (obr. 24)

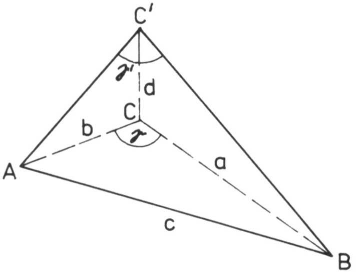
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$
$$c^2 + d^2 = a^2 + d^2 + b^2 - 2b\sqrt{a^2 + d^2}\cos\gamma',$$

takže

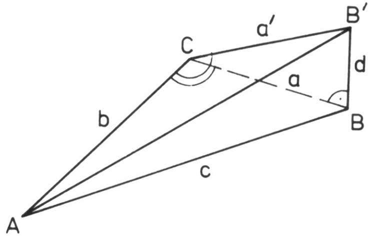
$$a\cos\gamma = \sqrt{a^2 + d^2}\cos\gamma'.$$

Odtud plyne, že

1. je-li $0 < \gamma < \frac{1}{2}\pi$, pak $\cos\gamma > \cos\gamma' > 0$ a $0 < \gamma < \gamma' < < \frac{1}{2}\pi$,
2. je-li $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, pak $\gamma' = \frac{1}{2}\pi$,
3. je-li $\frac{1}{2}\pi < \gamma < \pi$, pak $|\cos\gamma| > |\cos\gamma'|$ a $\frac{1}{2}\pi < \gamma' < \gamma < < \pi$.



Obr. 24



Obr. 25

Podobně pro situaci na obr. 25 dostaneme

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

a zároveň

$$c^2 = a^2 + d^2 + b^2 + d^2 - 2\sqrt{a^2 + d^2}\,\sqrt{b^2 + d^2}\cos\gamma',$$

takže

$$ab\cos\gamma = \sqrt{a^2 + d^2}\,\sqrt{b^2 + d^2}\cos\gamma' - d^2.$$

To znamená, že pro $\frac{1}{2}\pi < \gamma'$ je

$$-ab\cos\gamma = \sqrt{a^2 + d^2}\,\sqrt{b^2 + d^2}\,|\cos\gamma'| + d^2 > ab|\cos\gamma'|,$$

neboli

$$\gamma > \frac{\pi}{2} \qquad \text{a} \qquad |\cos\gamma| > |\cos\gamma'|,$$

tj. $\gamma > \gamma'$.

Jiné řešení. Každému trojúhelníkovému řezu uvažovaného čtyřstěnu odpovídá trojboký jehlan. Je-li jeho vrcholem bod A, je jeho podstavou (řezem) ostroúhlý trojúhelník, protože kolmým průmětem každého jeho úhlu je pravý úhel. Zbývá tedy možnost, že vrcholem odříznutého jehlanu je jeden z vrcholů B, D, E. Tento případ vyšetříme obdobně jako v předchozím řešení.

A - III - 4

Vzhledem k tomu, že uvažovaná nerovnost se nezmění, když místo každého x_i píšeme $\dfrac{x_i}{a}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ pro nějaké kladné a, můžeme předpokládat, že je $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$.

Pro $n = 2$ pak bude mít uvažovaná nerovnost tvar

$$x_1x_2(1 - kx_1x_2) \geqq 0, \qquad \text{tj.} \qquad x_1x_2 \leqq \frac{1}{k}$$

(pokud $x_1x_2 > 0$). A protože pro nezáporná čísla x_1, x_2 taková, že $x_1 + x_2 = 1$, platí

$$\sqrt{x_1x_2} \leqq \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2},$$

je vždy $x_1x_2 \leqq \frac{1}{4}$ s rovností pro $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$. Odtud plyne, že je $k \leqq 4$.

Stejný odhad ovšem dostaneme i pro libovolné $n \geqq 2$, když položíme $x_3 = \ldots = x_n = 0$.

Ukážeme teď, že uvažovaná nerovnost platí pro $k = 4$ a pro libovolné $n \geqq 2$. Protože

$$x_i x_j \leqq \left(\frac{1}{2}(x_i + x_j)\right)^2 \leqq \left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\right)^2 = \frac{1}{4},$$

je $1 - 4x_i x_j \geqq 0$, takže je také

$$x_1x_2(1-4x_1x_2)+x_2x_3(1-4x_2x_3)+\ldots+x_nx_1(1-4x_nx_1) \geqq 0.$$

A to je nerovnost, která je pro $k = 4$ s danou nerovností ekvivalentní.

A - III - 5

Označíme-li n počet měst v zemi, je tvrzení pro $n = 2$ zřejmé. Předpokládejme tedy, že uvedené tvrzení platí pro všechna přirozená čísla menší než n, a uvažujme zemi s n městy $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Městu s požadovanou vlastností budeme říkat „hlavní". Označme jako v hlavní město měst $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ a uvažujme množinu A těch měst, do nichž se dá z v dojet motorovým vozidlem, a množinu B měst, do nichž se dá z v dojet na kole. Navíc můžeme předpokládat, že u_n nepatří do žádné z množin A, B (jinak bychom byli hotovi), takže z u_n do v vede jednosměrná silnice (bez ztráty obecnosti můžeme předpokládat, že je to např. cesta pro cyklisty).

Označme nyní w hlavní město množiny $(\mathsf{A} \setminus \mathsf{B}) \cup \{u_n\}$, v níž je nejvýše $n - 1$ měst. Pokud $w = u_n$, jsme hotovi, protože z u_n se lze dostat i do libovolného města množiny B. Pokud $w \neq u_n$ a z w se lze do u_n dostat na kole, jsme rovněž hotovi, protože pak je w hlavní město i všech měst v B. Pokud ovšem vede z w do u_n cesta jen motorovým vozidlem, lze se do u_n dostat motorovým vozidlem i z města v (přes w), takže v je hlavní město všech měst $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

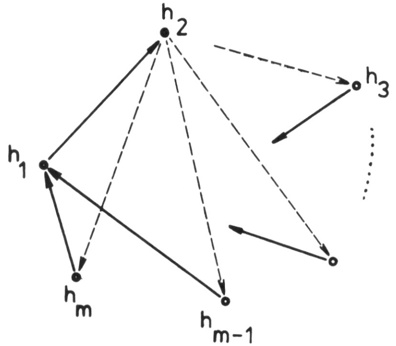
Jiné řešení (podle V. Búra, 1. ročník GAM, Bratislava). Označíme-li n počet měst v zemi, jsou případy $n = 2$ a $n = 3$ jasné (buď z jednoho města vedou cesty do zbylých dvou, nebo jsou cesty mezi třemi městy uspořádány cyklicky a pak aspoň dvě z nich jsou stejného druhu).

Předpokládejme, že tvrzení úlohy platí pro libovolné $k \leq n-1$, a uvažujme n měst $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Vynecháme-li město m_i $(1 \leq i \leq n)$, bude mezi zbylými $n-1$ městy existovat jedno „hlavní město“ h_i. Pokud pro nějaké dva indexy $i \neq j$ dostaneme $h_i = h_j$, jsme hotovi, protože takové město je hlavním městem všech uvažovaných měst.

Budeme tedy dále předpokládat, že všechna „hlavní“ města $h_1, h_2, \ldots, h_n$ jsou vesměs různá a jsou přitom označena tak, že h_2 je hlavní město, když vynecháme h_1, h_3 je hlavní město, když vynecháme h_2, atd. až nám vyjde, že h_1 je hlavní město, když vynecháme nějaké h_m $(3 \leq m \leq n)$. Dostaneme tak „cyklus“, v němž neexistuje jednosměrná silnice z h_i do h_{i-1} (jinak bychom byli hotovi), ale naopak.

Bez újmy na obecnosti můžeme teď předpokládat, že silnice vedoucí z h_1 do h_2 je určena pro cyklisty. Z h_2 do h_m pak musí vést cesta pro motoristy (jinak by existovala cesta z h_1 do h_m a byli bychom hotovi) a ze stejného důvodu je existující silnice z h_m do h_1 určena pro cyklisty (obr. 26). Tuto úvahu nyní zopakujeme (z h_2 do h_{m-1} musí vést cesta pro motoristy, protože jinak by h_m bylo hlavním městem, takže z h_{m-1} do h_1 vede cesta pro cyklisty, atd.) celkem

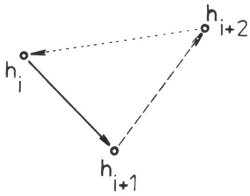
($m-3$)-krát a zjistíme (pokud jsme nenašli hlavní město již dříve), že h_3 je hlavním městem všech uvažovaných n měst.



Obr. 26

Jiné řešení (podle M. Konečného, 3. ročník G, Brno, kpt. Jaroše). Předpokládejme, že tvrzení platí pro libovolné $k \leqq n-1$ a uvažujme situaci s n městy. Stejně jako v předchozím řešení přiřadíme každému městu „hlavní město" zbylých $n-1$ měst (indukční předpoklad). Kdyby toto zobrazení množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ do množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ nebylo permutací, pak zřejmě najdeme hlavní město všech n měst.

Je-li uvedené přiřazení permutací, existuje v něm cyklus $h_1 \to h_2 \to \dots \to h_m \to h_1$, ve kterém je h_j hlavním městem všech $n-1$ měst vyjma h_{j-1} a v němž tedy vždy existuje jednosměrná silnice z h_j do h_{j+1}. Kdyby všechny uvedené silnice byly stejného druhu, je jasné, že libovolné z měst $h_1, h_2, \dots, h_m$ by bylo hlavní. Můžeme tedy předpokládat, že existují tři města h_i, h_{i+1}, h_{i+2} (indexy počítáme mod m) taková, že např. z h_i do h_{i+1} vede silnice pro cyklisty a z h_{i+1} do h_{i+2} pro motoristy (obr. 27). Z h_{i+2} pak existuje nějaká cesta do h_i — je-li průjezdná pro cyklisty, je hlavním městem h_{i+2}, je-li určena pro motoristy, je hlavním městem h_{i+1}.



Obr. 27

A – III – 6

Uvažujme $2k$ bodů $A_1, A_2, \ldots, A_{2k}$ v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce. Pro každou dvojici $\{i, j\} \in \mathsf{S}$ spojme odpovídající body úsečkou. Pokud takto nedostaneme žádný trojúhelník, budou mít libovolné tři množiny M_i, M_j, M_k prázdný průnik (jinak by odpovídající body musely být spojeny úsečkami). Můžeme tedy každé dvojici $\{i, j\} \in \mathsf{S}$ přiřadit prvek $m_{ij} \in \mathsf{M}_i \cap \mathsf{M}_j$, který už v žádné jiné z množin $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \ldots, \mathsf{M}_{2k}$ neleží. Sjednocení $\mathsf{M}_1 \cup \mathsf{M}_2 \cup \ldots \cup \mathsf{M}_{2k}$ tedy obsahuje alespoň tolik prvků co množina S.

Vezmeme-li nyní za množinu S množinu těch dvojic $\{i, j\} \subset \{1, 2, \ldots, 2k\}$, pro něž je součet $i + j$ lichý, bude mít S právě k^2 prvků, přičemž odpovídající úsečky nebudou tvořit žádný trojúhelník. Tím je důkaz hotov.

Jiné řešení (podle P. Hliněného, 4. ročník GMK, Bílovec). Hledaný systém je např. množina

$$\mathsf{S} = \bigl\{\{i,j\} : 1 \leqq i \leqq k,\ k+1 \leqq j \leqq 2k\bigr\}.$$

V takovém případě jsou množiny M_1, M_2, ..., M_k po dvou disjunktní a totéž platí i o množinách $\mathsf{M}_{k+1}, \ldots, \mathsf{M}_{2k}$. Přitom každá z množin $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \ldots, \mathsf{M}_k$ má neprázdný průnik s každou z množin $\mathsf{M}_{k+1}, \ldots, \mathsf{M}_{2k}$, a protože množiny $\mathsf{M}_{k+1}, \ldots, \mathsf{M}_{2k}$ jsou navzájem disjunktní, musí být $|\mathsf{M}_i| \geqq k$ pro všechna $1 \leqq i \leqq k$. Celkem tedy je

$$|\mathsf{M}_1 \cup \mathsf{M}_2 \cup \ldots \cup \mathsf{M}_{2k}| \geqq |\mathsf{M}_1 \cup \mathsf{M}_2 \cup \ldots \cup \mathsf{M}_k| =$$
$$= |\mathsf{M}_1| + |\mathsf{M}_2| + \ldots + |\mathsf{M}_k| \geqq k \cdot k = k^2.$$