39. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie B

In: Leo Boček (editor); Jiří Binder (editor); Vladimír Burjan (editor); Karel Horák (editor); Pavel Töpfer (editor): 39. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1989/90. 31. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1992. pp. 62–73.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404903

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Je dáno liché přirozené číslo n. Najděte aspoň jednu dvojici přirozených čísel x, y tak, aby největším společným dělitelem čísel x, y bylo číslo n a aby největším společným dělitelem čísel $xy + x$, $xy + y$ bylo číslo $2n$.

B – I – 2

Reálná nezáporná čísla x, y splňují nerovnosti $x + y \leqq 1$, $x \geqq \dfrac{n}{n+1}$, kde n je přirozené číslo. Dokažte, že

$$x^n(1 - x) \geqq y(1 - y)^n.$$

B – I – 3

Trojúhelník ABC s obsahem 10 je těžnicí CD a úsečkou AE rozdělen na čtyři části (bod E leží uvnitř strany BC, D je střed strany AB). Obsah trojúhelníku AFC je 4, F je průsečík CD a AE. Určete obsahy trojúhelníků ADF, CEF a čtyřúhelníku $BDFE$.

B – I – 4

Určete největší přirozené číslo, které se nedá vyjádřit jako součet dvou přirozených čísel, z nichž má každé ciferný součet aspoň 10.

B – I – 5

Pro reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqq 3)$ platí $x_1 \geqq x_3 + n$, $x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n^2$. Dokažte, že $x_1 + x_2 \geqq 3n - 2$. Kdy platí rovnost $x_1 + x_2 = 3n - 2$?

B – I – 6

V rovině je dána úsečka AB. Najděte množinu všech vrcholů Z pravoúhlých trojúhelníků XYZ, jejichž přepona je částí úsečky AB a $|AX| = |XZ|$, $|BY| = |YZ|$.

B – S – 1

Je dáno přirozené číslo n. Najděte aspoň jednu dvojici přirozených čísel x, y tak, aby $D(x, y) = D(xy + x, xy + y) = n$. $D(a, b)$ značí největšího společného dělitele čísel a, b.

B – S – 2

V trojúhelníku ABC je D střed strany AB, E je bod úsečky BC, F je průsečík úseček AE a CD. Obsah trojúhelníku ABC je 15, obsah trojúhelníku CFE je 4. Určete obsahy trojúhelníků AFC, ADF a čtyřúhelníku $DBEF$.

B – S – 3

Najděte všechny uspořádané dvojice (n, k) celých čísel n, k, které splňují rovnici $k^3 - 3k^2n + 3kn^2 - 61 = 0$.

B – II – 1

Je dáno přirozené číslo n. Najděte aspoň jednu dvojici přirozených čísel x, y tak, aby to byla čísla nesoudělná a aby největším společným dělitelem čísel $xy + x$, $xy + y$ bylo číslo n.

B – II – 2

Je dána kružnice k. Sestrojte trojúhelník ABC se středem D strany BC tak, aby byl trojúhelník ABD kružnici k vepsán, přímka AC byla tečnou kružnice k a $|AC| = 2|AD|$.

B – II – 3

Pro nezáporná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ platí $x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_{10}$, $x_1 - x_6 \geqq 3$, $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2 = 25$. Jakou nejmenší hodnotu může mít součet $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$?

B – II – 4

V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ označme E průsečík úhlopříček a S střed kružnice opsané trojúhelníku ABE. Potom jsou přímky CD a SE kolmé, právě když je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový. Dokažte.

B - I - 1

Úlohu vyřešíme nejdříve pro některá konkrétní n. Například pro $n = 15$ můžeme vzít $x = 15$, $y = 45$. Při obecném n zkusíme $x = n$, $y = kn$. Snadno zjistíme, že číslo k musí být liché. Zvolme $k = 3$, pak je $xy + x = n(3n + 1)$, $xy + y = n(3n + 3)$. Čísla $3n + 1$, $3n + 3$ jsou sudá a kromě jedničky a dvojky nemají společného dělitele. Ten by totiž musel dělit jejich rozdíl, tj. číslo 2. Odtud plyne, že největším společným dělitelem čísel $xy + x$, $xy + y$ je číslo $2n$.

B - I - 2

Položme $z = 1 - y$. Potom $\frac{n}{n+1} \leqq x \leqq z$ a máme dokázat nerovnost $x^n(1-x) \geqq z^n(1-z)$. Jinými slovy máme dokázat, že funkce $f(x) = x^n(1 - x)$ je pro $x \geqq \frac{n}{n+1}$ klesající. To lze snadno dokázat pomocí derivace uvažované funkce, neodpovídá to však osnovám 2. ročníku středních škol. Bez užití derivace můžeme postupovat takto:

Pro $z > x \geqq \frac{n}{n+1}$ máme dokázat, že $x^n(1 - x) > z^n(1 - z)$, tj. $z^n - x^n < z^{n+1} - x^{n+1}$. Vydělením nezáporným číslem $z - x$ dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$z^{n-1} + z^{n-2}x + \ldots + zx^{n-2} + x^{n-1} <$$
$$< z^n + z^{n-1}x + \ldots + zx^{n-1} + x^n,$$

tj.

$$(1-x)(z^{n-1}+z^{n-2}x+\ldots+zx^{n-2}+x^{n-1})<z^n.$$

Pro $x>1$ to zřejmě platí, neboť levá strana je pak záporná. Je-li $x \leqq 1$, je $1-x$ nezáporné. Jelikož $x \geqq \frac{n}{n+1}$, je $1-x \leqq \leqq \frac{1}{n+1}$. Dále je

$$z^{n-1}+z^{n-2}x+\ldots+zx^{n-2}+x^{n-1}<nz^{n-1},$$

takže

$$(1-x)(z^{n-1}+z^{n-2}x+\ldots+zx^{n-2}+x^{n-1})<\frac{nz^{n-1}}{n+1}\leqq z^n,$$

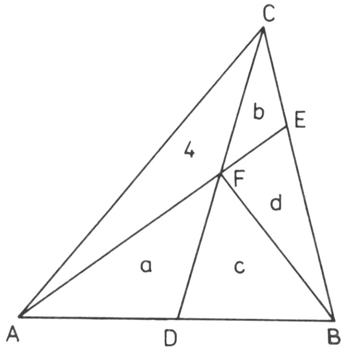
což jsme měli dokázat.

B – I – 3

Označme a, b, c, d obsahy trojúhelníků ADF, EFC, BDF, BFE (obr. 11). Potom $a+4=5$, $b+c+$ $+d=5$, dále je $a=c$, neboť $|AD|=|BD|$. Konečně platí $b:d=(b+4):(a+c+d)=|CE|:|BE|$. Je tedy $a=c=1$, $b+d=4$, $b(2+d)=(b+4)d$, takže $b=2d$, odkud $d=\frac{4}{3}$, $b=\frac{8}{3}$. Hledané obsahy jsou 1, $\frac{8}{3}$, $\frac{7}{3}$.

B – I – 4

Dá-li se číslo N napsat jako součet dvou přirozených čísel A, B, z nichž má každé ciferný součet aspoň 10, jsou čísla A,



Obr. 11

B aspoň dvojciferná a větší nebo rovna 19, takže N je větší než 37. Pro $A = B = 99$ dostaneme číslo 198. Avšak číslo 199 se nedá napsat požadovaným způsobem. Kdyby totiž bylo $199 = (100 + 10a + b) + (10c + d)$, muselo by platit současně $b + d = 9$, $a + c = 9$, takže součet ciferných součtů obou sčítanců by byl 19, a tudíž by nemohly být oba ciferné součty rovny aspoň 10. Zkusmo zjistíme, že náhodně zvolená čísla větší než 199 se požadovaným způsobem zapsat dají. Pokusíme se tedy dokázat, že každé číslo $N \geqq 200$ se dá napsat jako součet $A + B$, kde A, B mají ciferný součet větší než 9. V následující tabulce je uvedeno, jak zvolit poslední číslice y, z čísel A, B, je-li poslední číslice čísla N rovna x:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	u
y	5	5	6	6	7	7	8	8	9	5	v
z	5	6	6	7	7	8	8	9	9	4	w

V další tabulce je uvedeno, jak zvolit předposlední číslice v, w čísel A, B, je-li předposlední číslice čísla N rovna u a $x \neq 9$:

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
v	5	5	5	6	6	7	7	8	8	9
w	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9

Je-li $x = 9$, zvolíme při daném u hodnoty v, w podle první tabulky. Vidíme, že již součet posledních dvou číslic čísla A i čísla B je aspoň 10, kromě případů, kdy N končí některým z dvojčíslí 00, 09 nebo 99. Pak můžeme vždy zvolit $A = 145$ a B tak, aby končilo dvojčíslím 55, resp. 64, resp. 54, končí-li N dvojčíslím 00, resp. 09, resp. 99. V posledním případě je však číslo B aspoň trojciferné, protože $A + B \geqq 200$. Takže v každém případě je ciferný součet čísla A i čísla B větší než 9.

B – I – 5

Je účelné pokusit se řešit úlohu nejprve úsudkem. Při pevně zvoleném x_3 je $x_1 + x_2$ aspoň $2x_3 + n$, neboť $x_1 \geqq x_3 + n$ a $x_2 \geqq x_3$. Přitom $x_1 + x_2 = 2x_3 + n$ právě tehdy, když $x_1 = x_3 + n$, $x_2 = x_3$. Vzhledem k tomu, že součet čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je pevný, rovná se n^2, je $x_1 + x_2$ nejmenší, když je součet $x_3 + x_4 + \ldots + x_n$ největší. Avšak $x_3 + \ldots + x_n \leqq (n-2)x_3$, rovnost platí právě tehdy, když $x_n = x_{n-1} = \ldots = x_4 = x_3$. Můžeme tedy říci, že $x_1 + x_2$ nabývá nejmenší hodnoty $2x_3 + n$, když $x_1 = x_3 + n$,

$x_2 = x_3 = \ldots = x_n$. Pak ale musí platit $x_3 + n + x_3 + (n - 2)x_3 = n^2$, tedy $x_3 = n - 1$, $2x_3 + n = 3n - 2$.

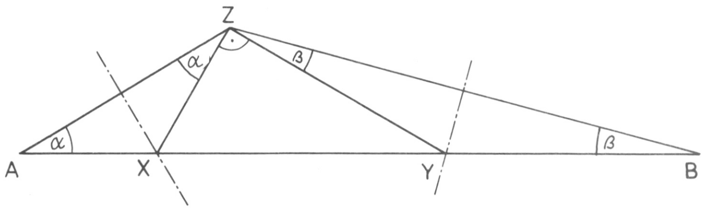
Jiný postup: Sečtením nerovností $x_1 \geqq x_3 + n$, $x_2 \geqq x_3$ dostaneme $x_1 + x_2 \geqq 2x_3 + n$. Užitím nerovností $x_i \leqq x_3$ pro $i = 3, 4, \ldots, n$ dostaneme

$$n^2 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqq x_1 + x_2 + (n-2)x_3,$$

takže je $x_1 + x_2 \geqq n^2 - (n-2)x_3$. Sečtením s nerovností $x_1 + x_2 \geqq 2x_3 + n$ vynásobenou faktorem $\dfrac{n-2}{2}$ dostaneme požadovanou nerovnost.

B - I - 6

Nechť trojúhelník XYZ má požadované vlastnosti. Pak je (obr. 12)



Obr. 12

$$|\sphericalangle ZAX| = |\sphericalangle AZX| = \alpha, \quad |\sphericalangle ZBY| = |\sphericalangle BZY| = \beta,$$
$$2\alpha + 2\beta + 90° = 180°,$$

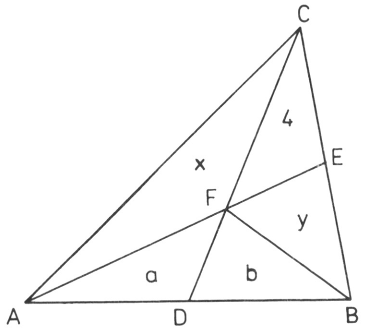
takže $\alpha + \beta = 45°$, $|\sphericalangle AZB| = \alpha + \beta + 90° = 135°$. Proto leží bod Z nutně na jednom ze dvou kruhových oblouků, jež jsou tvořeny všemi body, z nichž je vidět úsečka AB pod úhlem 135°. Jsou to menší kruhové oblouky ohraničené body A, B (bez bodů A, B) na kružnicích se středy S_1, S_2, přičemž $|\sphericalangle AS_1B| = |\sphericalangle AS_2B| = 90°$. Je-li obráceně Z bod některého z těchto oblouků, je $|\sphericalangle AZB| = 135°$, osy úseček AZ, BZ procházejí bodem S_1 nebo S_2 a protínají úsečku AB v bodech X, Y. Označme $|\sphericalangle XZY| = \gamma$, $|\sphericalangle ZAX| = |\sphericalangle AZX| = \alpha$, $|\sphericalangle ZBY| = |\sphericalangle BZY| = \beta$. Je tedy $\alpha + \gamma + \beta = 135°$ a $2\alpha + 2\beta + \gamma = 180°$, odkud $\gamma = 90°$. Hledanou množinou je množina všech bodů uvažovaných dvou oblouků.

B – S – 1

Stačí položit $x = n$, $y = 2n$. Je pak $D(x, y) = n$, $xy + x = n(2n + 1)$, $xy + y = n(2n + 2)$. Čísla $2n + 1$, $2n + 2$ jsou nesoudělná, jejich společný dělitel by musel dělit i jejich rozdíl, tj. číslo 1. Je tedy též $D(xy + x, xy + y) = n$.

B – S – 2

Označme obsahy trojúhelníků ADF, BDF, AFC, BFE po řadě a, b, x, y (obr. 13). Je $b = a$, $a + x = 7{,}5$, $b + y = 3{,}5$, $y : 4 = (2a + y) : (x + 4)$. Úpravou poslední rovnice máme $xy = 8a$, po dosazení za x, y dostaneme rovnici $a^2 - 19a + \frac{105}{4} = 0$. Kořen $a = 17{,}5$ nevyhovuje, pro $a = 1{,}5$ je $x = 6$, $y = 2$. Tyto hodnoty vyhovují, hledané obsahy jsou 6, 1,5 a 3,5.



Obr. 13

B – S – 3

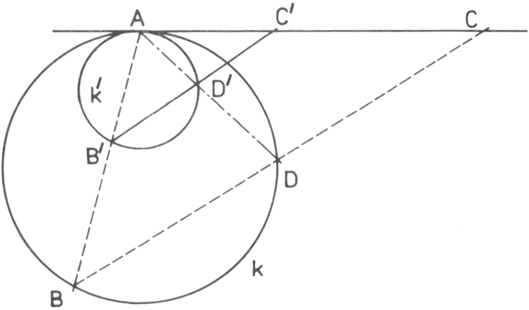
Je $k(k^2 - 3kn + 3n^2) = 61$. Číslo 61 je prvočíslo, takže se k může rovnat pouze některému z čísel $1, -1, 61, -61$, pro n pak dostaneme vždy kvadratickou rovnici. Ta má pouze v případě $k = 1$ nezáporný diskriminant a kořeny $5, -4$. Úloha má proto právě dvě řešení: $(5,1)$ a $(-4,1)$.

B – II – 1

Je $xy + x = x(y+1)$, $xy + y = y(x+1)$. Čísla x, y mají být nesoudělná, největším společným dělitelem čísel $x+1$, $y+1$ musí být číslo n. Položíme-li $x + 1 = n$, $y + 1 = 2n$, je tato podmínka splněna a čísla $x = n - 1$, $y = 2n - 1$ jsou nesoudělná (jejich společný dělitel by musel dělit i číslo $y - 2x = 1$). Pouze v případě $n = 1$ není číslo $n - 1$ přirozené, můžeme však pro $n = 1$ zvolit $x = 1$, $y = 2$.

B – II – 2

Z mocnosti bodu C ke kružnici k plyne $|AC|^2 = 2|CD|^2$, takže $|AC| : |CD| : |AD| = 2 : \sqrt{2} : 1$. V libovolném bodě A kružnice k (obr. 14) sestrojíme tečnu, na ní bod C' tak, aby $|AC'| = 2$. Body A, C' doplníme na trojúhelník $AC'D'$ tak, aby $|AD'| = 1$, $|C'D'| = \sqrt{2}$. Bod B' zvolíme tak, aby byl bod D' středem úsečky $C'B'$. Kružnice k' opsaná trojúhelníku $AD'B'$ se pak v bodě A dotýká přímky AC'. To vyplývá z mocnosti bodu ke kružnici. Stejnolehlost se



Obr. 14

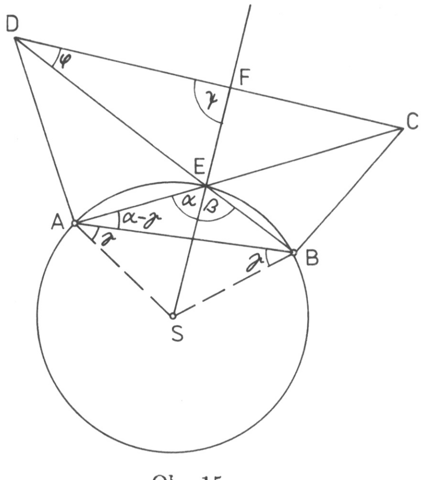
středem v bodě A zobrazující k' na kružnici k zobrazuje body C', D', B' na hledané body C, D, B. Až na shodnost má úloha právě jedno řešení.

B – II – 3

Postupujeme podobně jako v úloze B–I–5, hledanou nejmenší hodnotu dostaneme v případě $x_1 = x_6 + 3$, $x_2 = x_3 = \ldots = x_{10}$, kdy je $x_1 = 4$, $x_2 = \ldots = x_{10} = 1$. Hledaná nejmenší hodnota je 20.

B – II – 4

Trojúhelníky ABS, AES, BES (obr. 15) jsou rovnoramenné, jejich vnitřní úhly při základně označme γ, α, β, dále označme $\varphi = |\sphericalangle CDE|$, $\psi = |\sphericalangle DFE|$, kde F je průsečík CD a SE. Z trojúhelníku ABE plyne $\alpha + \beta - \gamma = 90°$. Je $\psi = 180° - \varphi - \beta$, a tedy $\psi = 90°$ právě tehdy, když je $\varphi = 90° - \beta = \alpha - \gamma$. Podmínka $\varphi = \alpha - \gamma$ je podle věty o obvodových úhlech ekvivalentní s tím, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový. Podobně bychom postupovali v případě, kdyby byl bod S bodem trojúhelníku ABE.



Obr. 15