38. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategória Z4

In: Milan Koman (editor); Vladimír Repáš (editor): 38. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1988/89. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. pp. 129–137.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404894

Kategória Z4

ÚLOHY I. KOLA

(Riešenia na str. 132 až 136)

Z4 - I - 1

V istom mesiaci mali tri soboty párny dátum. Aký deň v týždni pripadol v tomto mesiaci na 28-eho?

Z4 - I - 2

Kváder s rozmermi 260 mm, 120 mm, 40 mm rozrezali na kocky s hranou 2 cm. Všetky kocky, ktoré takto dostali, postavili do radu. Aký dlhý rad vznikol?

Z4 - I - 3

Mám 9 paličiek. Ich dĺžky sú 1 cm, 2 cm, ..., 9 cm. Chcem z nich zostrojiť štvorcový rám. Môj mladší brat chce, aby som mu dal aspoň jednu paličku. Poraďte mi, koľko a ktorých paličiek mu môžem dať. Napíšte mi všetky možnosti.

Z4 - I - 4

Pozrite si postupnosť slov: ruka, akur, karu, ... Je vytvorená podľa tohto pravidla: v poslednom napísanom slove presuň posledné písmeno na začiatok a potom vymeň písmená r, k.

Napríklad v slove ruka najprv dáme posledné písmeno na začiatok — dostaneme aruk — a potom ešte prehodíme r, k — dostaneme akur. Rovnako pokračujeme ďalej.

Zistite, aké slovo bude v tejto postupnosti na 99. mieste.

Z4 - I - 5

Pri lesnej škôlke pichla Miška osa. Začal bežať popri plote. Od prvého rožného*) stĺpika po 5. stĺpik prebehol za 12 sekúnd. Potom pokračoval až po 15. stĺpik, tam sa otočil a bežal späť. Pri druhom stĺpiku sa otočil a bežal až k 14. stĺpiku. A tak behal od 14. stĺpika ku 3., odtiaľ k 13., naspäť ku 4., atď. Nakoniec sa zastavil pri 8. stĺpiku. Vieme, že Miško bežal stále rovnakou rýchlosťou. Ako dlho bežal Miško popri plote?

Z4 - I - 6

Do zápisu

$$1\,988 - 183 - 512 - 411 + 102$$

vyznačte zátvorky piatimi spôsobmi tak, aby ste dostali päť rôznych výsledkov.

---

*) Česky »rohového«.

ÚLOHY II. KOLA

(Riešenia na str. 136 až 137)

Z4 - II - 1

Z 31 rovnakých kociek treba zložiť čo najväčšiu kocku. Koľko kociek budeme potrebovať?

Z4 - II - 2

Nahraďte hviezdičky číslicami tak, aby platil nasledujúci súčet. (Hviezdičky nemusia byť nahradené rovnakou číslicou.)

$$\begin{array}{r} * * * * * \\ * * * * * \\ \hline 1\,9\,9\,9\,9\,7 \end{array}$$

Z4 - II - 3

Máme 7 paličiek. Sú dlhé 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm. Chceme z nich zložiť trojuholník, ktorý má všetky strany rovnako dlhé. Aký najväčší a aký najmenší takýto trojuholník možno zložiť? Uveď, z ktorých paličiek a ako ho zložíš.

RIEŠENIA ÚLOH I. KOLA

Riešenie úlohy Z4 - I - 1 (str. 129)

Pretože týždeň má 7 dní, čo je nepárny počet, majú soboty idúce za sebou dátumy rôznej parity (— párny — nepárny — — párny —). Keďže tri soboty boli s párnym dátumom, muselo byť v danom mesiaci aspoň 5 sobôt. Sobota s párnym, potom nepárnym, párnym, nepárnym, párnym dátumom. Teda tri soboty s párnym a medzi nimi dve soboty s nepárnym dátumom. Viac sobôt v mesiaci nemôže byť.

Rozdiel dátumov medzi piatou a prvou sobotou v mesiaci musí byť $4 . 7 = 28$. Prvá párna sobota v mesiaci môže byť druhého. Teda piata sobota by potom bola 30-teho v mesiaci. Ďalšia prvá párna sobota by mohla byť 4-tého v mesiaci, ale potom piata sobota by musela byť 32-hého v mesiaci, ale žiaden mesiac nemá toľko dní.

Teda jediné riešenie je, že prvá sobota v mesiaci bola druhého, piata bola 30-teho, a teda 29-teho bol piatok a 28-ho bol štvrtok.

28. deň v mesiaci pripadol na štvrtok.

Riešenie úlohy Z4 - I - 2 (str. 129)

Uvážme najskôr, koľko kociek s hranou 2 cm môžeme položiť pozdĺž jednotlivých hrán kvádra. Vedľa 260 milimetrovej hrany možno položiť 13 dvojcentimetrových kociek, pretože 13.2 cm = 26 cm = 260 mm. Vedľa 120 milimetrovej hrany možno položiť 6 kociek, vedľa 40 milimetrovej hrany 2 kocky.

Teda z kvádra dostaneme 13.6.2 = 156 dvojcentimetrových kociek.

Keď ich postavíme vedľa seba, vznikne rad dlhý 156.2 cm = = 312 cm.

Riešenie úlohy Z4 - I - 3 (str. 129)

I. *spôsob.* Najskôr zistím, aké štvorcové rámy je možné z daných paličiek zostrojiť. Zrejme nemožno zostrojiť rámy so stranou 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, pretože dlhšie paličky nemožno použiť a vhodných krátkych je málo.

Rám so stranou 7 cm možno zostrojiť, ak jednotlivé strany budú zložené z paličiek 1 + 6, 2 + 5, 3 + 4 a 7. Iným spôsobom to nejde. Takže mladšiemu bratovi môžem dať paličky dĺžky 8 cm a 9 cm.

Rám so stranou 8 cm možno zostrojiť, ak jednotlivé strany budú 1 + 7, 2 + 6, 3 + 5, 8. Mohol by som zvážiť, že niektorú stranu zostrojím viacerými paličkami; napr. 4 + 3 + 1, 5 + 2 + 1, potom mi ale nezostane dosť kratších paličiek na ostatné strany. Je len jediná možnosť na získanie strán dĺžky 8 cm. Takže mladšiemu bratovi môžem dať v tomto prípade paličky dĺžky 4 cm a 9 cm.

Rám so stranou 9 cm možno zostrojiť, ak jednotlivé strany budú 1 + 8, 2 + 7, 3 + 6, 4 + 5, alebo 9. Pričom si môžem vybrať ľubovoľné štyri z piatich možností. Takže mladšiemu bratovi by som mohol dať buď paličku dĺžky 9 cm, alebo paličky dĺžky 1 cm a 8 cm, alebo 2 cm a 7 cm, alebo 3 cm a 6 cm, alebo 4 cm a 5 cm.

Rám so stranou 10 cm môžem zostrojiť, ak jednotlivé strany budú $1 + 9$, $2 + 8$, $3 + 7$, $4 + 6$. Takže na darovanie mi zostane palička dĺžky 5 cm.

Rám so stranou 11 cm má obvod 44 cm. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$. Teda zostane mi palička dĺžky 1 cm. Tú môžem, v prípade, že sa z ostatných paličiek dá poskladať štvorcový rám, darovať mladšiemu bratovi. Z ostatných paličiek možno urobiť rám so stranami $2 + 9$, $3 + 8$, $4 + 7$, $5 + 6$.

Teda mladšiemu bratovi môžem dať buď paličky dĺžky 8 cm a 9 cm, alebo 4 cm a 9 cm, alebo 9 cm, alebo 1 cm a 8 cm, alebo 2 cm a 7 cm, alebo 3 cm a 6 cm, alebo 4 cm a 5 cm, alebo 5 cm, alebo 1 cm.

II. *spôsob.* Úlohu možno riešiť aj od paličiek, ktoré môžem darovať. Obvod štvorca totiž musí byť násobkom štyroch, potom zvyšok obvodu do 45 cm môžem darovať za predpokladu, že zo zostávajúcich paličiek môžem urobiť štvorcový rám. Teda podobná úvaha ako v I. spôsobe pre rám so stranou 11 cm.

Riešenie úlohy Z4 - I - 4 (str. 130)

Pokračujeme ďalej v písaní postupnosti slov: ruka, akur, karu, urak, ruka, . . . Vidíme, že postupnosť sa bude opakovať. A to tak, že na každom štvrtom mieste bude »urak«. Z toho na $4 . 24 = 96$. mieste bude teda »urak«. A potom na 97. mieste bude »ruka«, na 98. »akur«, na 99. »karu«.

Na 99. mieste postupnosti slov bude slovo »karu«.

Riešenie úlohy Z4 - I - 5 (str. 130)

Zapíšme si postupne čísla stĺpov, pri ktorých sa Miško otáčal:
1 — 15 — 2 — 14 — 3 — 13 — 4 — 12 — 5 — 11 — 6 — — 10 — 7 — 9 — 8, medzi nimi je postupne medzier:
14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + + 3 + 2 + 1. Čo je spolu 105 medzier.

Od 1. po 5. stĺpik, čo sú 4 medzery, prebehne za 12 sekúnd. Teda 1 medzeru prebehne za 12 : 4 = 3 sekundy. Potom ale 105 medzier prebehne za 105 . 3 = 315 sekúnd, čo je 5 minút a 15 sekúnd, alebo 5 a štvrť minúty.

Riešenie úlohy Z4 - I - 6 (str. 130)

Zapíšme si všetky možnosti zátvorkovania a vypočítajme ich súčty. Takto nájdeme všetky riešenia. (V úlohe sa nájdenie všetkých riešení nepožaduje, stačí, ak náhodným zátvorkovaním nájdete 5 rôznych výsledkov.)

$$\begin{array}{rl}
1\,988 - 183 - 512 - 411 + 102 & = 984 \\
\bullet 1\,988 - (183 - 512) - 411 + 102 & = 2\,008 \\
1\,988 - ((183 - 512) - 411) + 102 & = 2\,830 \\
1\,988 - ((183 - 512) - 411 + 102) & = 2\,626 \\
1\,988 - (183 - 512) - (411 + 102) & = 1\,804 \\
1\,988 - ((183 - 512) - (411 + 102)) & = 2\,830 \\
\bullet 1\,988 - 183 - (512 - 411) + 102 & = 1\,806 \\
1\,988 - (183 - (512 - 411)) + 102 & = 2\,008 \\
1\,988 - (183 - (512 - 411) + 102) & = 1\,804
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lr}
1\,988 - 183 - ((512 - 411) + 102) & = 1\,602 \\
\bullet 1\,988 - 183 - 512 - (411 + 102) & = 780 \\
1\,988 - (183 - 512 - (411 + 102)) & = 2\,830 \\
1\,988 - 183 - (512 - (411 + 102)) & = 1\,806 \\
\bullet 1\,988 - (183 - 512 - 411) + 102 & = 2\,830 \\
1\,988 - ((183 - 512 - 411) + 102) & = 2\,626 \\
\bullet 1\,988 - 183 - (512 - 411 + 102) & = 1\,602 \\
1\,988 - (183 - (512 - 411 + 102)) & = 2\,008 \\
\bullet 1\,988 - (183 - 512 - 411 + 102) & = 2\,626
\end{array}
$$

Možnosti zátvorkovania prvých čísel v zápise sme vynechávali, nakoľko nemajú vplyv na zmenu súčtu. Ak si pozorne všimnete spôsoby zátvorkovania, pred ktorými sú bodky, a poradie, ako idú za sebou, možno vás to navedie na spôsob, akým sme to robili.

Sú tieto možnosti výsledkov: 780, 984, 1 602, 1 804, 1 806, 2 008, 2 626, 2 830.

RIEŠENIA ÚLOH II. KOLA

Riešenie úlohy Z4 - II - 1 (str. 131)

Ak by kocka mala na jednej hrane 2 kocky, potom by bola zložená z dvoch vrstiev, v každej po 4 kockách, teda spolu z 8 kociek.

Ak by kocka mala rozmer 3 kocky, potom by bola zložená z $3.9 = 27$ kociek. Väčšiu kocku už nemožno z 31 kociek zložiť.

Riešenie úlohy Z4 - II - 2 (str. 131)

V číslach, ktoré sčítavame, musia byť na prvých miestach najväčšie číslice, teda deviatky. Aj tak ich súčet bude len 18 a nie 19, teda »jedna« musí zostať z predchádzajúceho medzisúčtu. Tou istou úvahou zistíme, že až po miesta desiatok musia byť namiesto hviezdičiek samé deviatky. Z miesta jednotiek musí zostať 1, teda, aby sme v súčte dostali na miesto jednotiek 7, musíme sčítať $8 + 9$.

Jediné riešenie, až na poradie sčítancov je:

$$\begin{array}{r} 99998 \\ 99999 \\ \hline 199997 \end{array}$$

Riešenie úlohy Z4 - II - 3 (str. 131)

Súčet dĺžok všetkých paličiek je 28 cm. Najväčší trojuholník by mohol mať stranu 9 cm, pretože $9.3 = 27$.

Jediná možnosť zostrojenia jeho strán je z paličiek dĺžok 7 cm a 2 cm, 6 cm a 3 cm, 5 cm a 4 cm.

Najmenší trojuholník by mohol mať napríklad dĺžku strany 4 cm, ale potom by sme z daných paličiek mohli zostrojiť len dve strany 4 cm, 3 cm + 1 cm. Teda najmenší trojuholník musí mať stranu dĺžky 5 cm. Jediná možnosť zostrojenia jeho strán je z paličiek dĺžky 5 cm, 1 cm a 4 cm, 2 cm a 3 cm.