38. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategorie Z8

In: Milan Koman (editor); Vladimír Repáš (editor): 38. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1988/89. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. pp. 27–64.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404890

Kategorie Z8

ÚLOHY I. KOLA

(Řešení úloh na str. 37 až 50)

Z8 - I - 1

Je dán trojúhelník ABC. Body R_1, R_2, které dělí stranu BC na třetiny, veďte rovnoběžky se stranou AC. Jejich průsečíky se stranou AB označte postupně S_1, S_2 a sestrojte úsečky S_1C a S_2C. Tímto způsobem rozdělíte trojúhelník ABC na 6 částí. Určete jejich obsahy, jestliže víte, že obsah trojúhelníku ABC je 18 cm^2.

Z8 - I - 2

V kleci tvaru krychle $ABCDEFGH$ s délkou strany 48 cm jsou umístěny dvě dřevěné příčky BG a KE (K je střed hrany HD). Z jedné z nich vzlétl kanárek a přeletěl nejkratší cestou na druhou, z ní se vrátil zase nejkratší cestou na první a z ní opět na druhou atd.

Popište, jak sestrojíte bod X_3, do kterého se dostal kanárek z výchozího bodu X po třetím přeletu.

Najděte na úsečce BG takový bod X, ze kterého musí kanárek vzlétnout, aby se do něho po několika přeletech zase vrátil.

Určete vzdálenost bodu X od přímky CG.

Z8 - I - 3

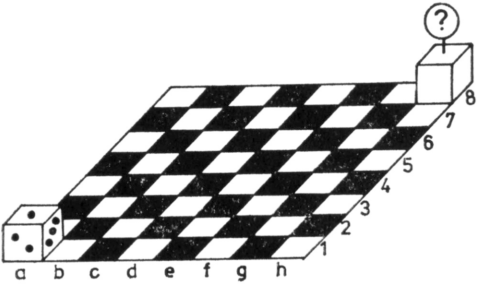
Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC ($AB > BC$). Na straně AB je vyznačen bod X, pro který platí $AX \cong CX$. Dokažte, že střed O kružnice vepsané trojúhelníku XCB leží na přímce p, která je rovnoběžná se stranou AC a prochází bodem X.

Z8 - I - 4

Pythagorejský trojúhelník je pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými délkami stran. Ukažte, že každý pythagorejský trojúhelník má obsah dělitelný číslem 3.

Z8 - I - 5

Na šachovnici na poli a1 (obr. 1) stojí hrací kostka. Překlápěním převeďte kostku na pole h8. Můžete měnit dráhy putující kostky tak, aby se na poli h8 vystřídaly všechny její stěny (tj. všechny počty ok)? Udejte pro každou možnost příslušnou dráhu kostky.



Obr. 1

Z8 - I - 6

Jsou dány dva body A, B. Sestrojte pravidelný osmiúhelník, který má v bodech A, B středy některých dvou stran. Vyšetřte všechny možnosti.

Dvě poznámky k úlohám I. kola:

Poznámka 1. Při řešení úlohy Z8-I-2 je možno použít následující větu 1, která byla v soutěžním letáku též uvedena.

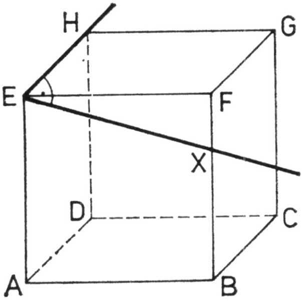
Věta 1. *Nechť je dán pravý úhel, jehož jedno rameno je rovnoběžné s rovinou podstavy krychle a druhé k ní není kolmé. Potom při pohledu směrem kolmým k podstavě vidíme tento pravý úhel jako pravý úhel. Jestliže jsou obě ramena tohoto úhlu různoběžná s rovinou podstavy, pak to neplatí.*

Větu 1 zde nebudeme dokazovat, ale ověříme ji na dvou příkladech:

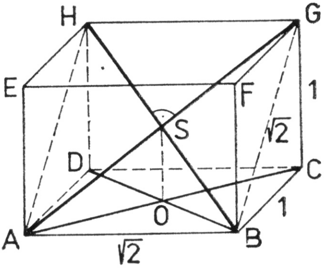
a) Nechť je dána krychle $ABCDEFGH$ (obr. 2a). Za jedno rameno pravého úhlu zvolme polopřímku EH. Pak druhé rameno musí ležet v rovině boční stěny $ABFE$. Při pohledu shora splyne tento pravý úhel s úhlem BAD (nebo s úhlem vedlejším k úhlu BAD), který je pravý.

b) Nechť je dán čtyřboký hranol $ABCDEFGH$ (obr. 2b), pro který platí

$$|AB| = \sqrt{2}, \quad |BC| = |CG| = 1.$$



Obr. 2a



Obr. 2b

Potom jeho úhlopříčný řez $ABGH$ je čtverec, takže jeho úhlopříčky AG a BH jsou navzájem kolmé. Při pohledu shora splynou tyto úhlopříčky s úhlopříčkami AC a BD, které zřejmě nejsou kolmé. Při tomto pohledu vidíme pravý úhel ASB jako tupý úhel a pravý úhel BSG jako ostrý úhel.

Poznámka 2. Při řešení úlohy Z8-I-4 je možné – i když ne nutné – použít následující věty 2 a 3, které byly rovněž v soutěžním letáku uvedeny.

Věta 2. *Zvolíme-li dvě přirozená čísla k, l ($k > l$) a vypočítáme čísla*

$$\text{(R)} \qquad a = 2kl,\ b = k^2 - l^2,\ c = k^2 + l^2,$$

pak a, b, c jsou délky stran pravoúhlého trojúhelníku. Také jejich přirozené násobky an, bn, cn (pro libovolné přirozené číslo n) jsou délky stran pravoúhlého trojúhelníku.

Věta 3. *Jestliže má pravoúhlý trojúhelník celočíselné délky stran, můžeme je vypočítat podle věty 2. (Můžeme najít přirozená čísla k, l tak, že čísla a, b, c daná rovnicemi (R) nebo jejich násobky an, bn, cn jsou délky stran daného trojúhelníku.)*

Větu 2 sami snadno dokážete. Důkaz věty 3 uvedeme až po řešení úlohy Z8 - I - 4 na str. 44. Zde uvedeme dvě ukázky výpočtu čísel k, l.

a) Trojúhelník o stranách 8 cm, 15 cm, 17 cm je pravoúhlý, neboť

$$8^2 + 15^2 = 17^2.$$

Pokusíme se najít čísla k, l tak, aby

$$8 = 2kl, \quad 15 = k^2 - l^2, \quad 17 = k^2 + l^2.$$

Sečtením druhé a třetí rovnice dostaneme $2k^2 = 32$. Odtud vypočítáme $k = 4$, $l = 1$.

b) Také trojúhelník o stranách 5 cm, 12 cm a 13 cm je pravoúhlý, neboť

$$5^2 + 12^2 = 13^2.$$

Snadno však zjistíte, že soustava

$$5 = 2kl, \quad 12 = k^2 - l^2, \quad 13 = k^2 + l^2$$

nemá celočíselné řešení. Zato má celočíselné řešení soustava

$$5 = k^2 - l^2, \quad 12 = 2kl, \quad 13 = k^2 + l^2.$$

Najděte sami toto řešení.

ÚLOHY II. KOLA

(Řešení úloh na str. 51 až 57)

Z8 - II - 1

V kleci tvaru krychle *ABCDEFGH* o straně $a = 30$ cm sedí 2 kanárci, modrý uprostřed stěny *ADHE*, zelený uprostřed stěny *DCGH*. V bodě *K* na hraně *AB* ve vzdálenosti $v = 10$ cm od *B* je krmítko. Který kanárek má k němu blíže a o kolik centimetrů?

Z8 - II - 2

V obdélníku *ABCD* jsou *E*, *F* po řadě středy stran *AB*, *CD*. Obdélník je rozdělen úsečkami *AF*, *CE*, *BD* na 6 částí, z nichž dvě nejmenší mají stejný obsah 24 cm^2. Vypočtěte obsah celého obdélníku.

Z8 - II - 3

Vypočtěte délky stran všech pythagorejských trojúhelníků, jejichž jedna odvěsna je dlouhá 12 cm.

Z8 - II - 4

Na stole jsou 3 hromady stejných mincí. Z první z nich přemístíme na zbylé dvě tolik mincí, aby se v každé z nich počet mincí zdvojnásobil. Pak uděláme totéž s druhou a nakonec s třetí hromadou. Zůstanou 3 hromady se stejným počtem mincí. Mincí je dohromady víc než 150, ale méně než 190. Kolik bylo původně na hromadách mincí?

ÚLOHY III. KOLA

(Řešení úloh na str. 58 až 64)

Z8 - III - 1

V kleci tvaru krychle $ABCDEFGH$ jsou dvě tyčky CF a AH a krmítko ve středu K hrany AB délky 40 cm. Bílý kanárek letěl z K nejkratší cestou na tyčku AH, odtud nejkratší cestou na tyčku CF a zpět do bodu K. Zelený kanárek letěl obráceně z K nejkratší cestou na CF, pak nejkratší cestou na AH a zpět do K. Vypočtěte, který kanárek uletěl kratší dráhu a o kolik centimetrů.

Z8 - III - 2

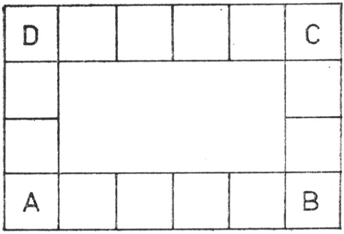
Pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ o straně $a = 6$ cm byl rozdělen úsečkami AM a DN (kde M, N jsou středy stran DE a AB) na 3 části. Porovnejte obsahy všech tří částí.

Z8 - III - 3

Vypočtěte délky stran všech pythagorejských trojúhelníků, jejichž přepona je o 8 cm kratší než součet jejich odvěsen.

Z8 - III - 4

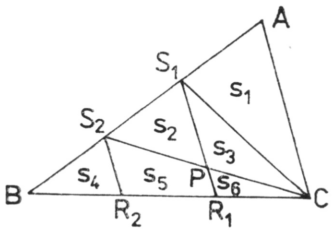
Hrací kostka se překlápí po obdélníkovém pásu (obr. 3), který je složen ze čtverců shodných se stěnami krychle. Ve výchozím místě A je na horní stěně kostky šestka. Kde bude šestka, když kostka oběhne stokrát obdélníkový pás a zůstane v místě A (nahoře, vpravo, vlevo, vpředu, vzadu nebo dole)?



Obr. 3

Řešení úlohy Z8 - I - 1 (str. 27)

Obsahy částí trojúhelníku ABC označíme podle obrázku 4. Obsah celého trojúhelníku označíme S; $S = 18\ \mathrm{cm}^2$.



Obr. 4

Protože body R_1, R_2 dělí stranu BC na třetiny a příčky S_1R_1, S_2R_2 jsou rovnoběžné se stranou AC, dělí body S_1, S_2 stranu AB také na třetiny.*)
Úsečky CS_1 a CS_2 dělí tedy trojúhelník ABC na tři trojúhelníky stejného obsahu, proto

*) Můžete to odvodit ze stejnolehlosti se středem ve vrcholu B, ale i bez stejnolehlosti, jen z vlastnosti střední příčky trojúhelníku a lichoběžníku.

$$s_1 = s_2 + s_3 = s_4 + s_5 + s_6 = \frac{1}{3} s = 6 \text{ cm}^2.$$

Úsečka S_2R_2 rozdělí trojúhelník BCS_2 na dvě části o obsazích s_4 a $s_5 + s_6$. Protože R_2 je ve třetině strany BC, je obsah trojúhelníku BR_2S_2 roven třetině obsahu trojúhelníku BS_2C:

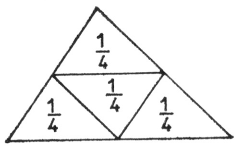
$$s_4 = \frac{1}{3}(s_4 + s_5 + s_6) = \frac{1}{3} . 6 \text{ cm}^2 = 2 \text{ cm}^2$$

$$s_5 + s_6 = 4 \text{ cm}^2$$

Úsečka PR_1 je střední příčka trojúhelníku S_2R_2C a zároveň PS_1 je těžnice trojúhelníku S_1S_2C. Proto je obsah s_6 roven čtvrtině obsahu trojúhelníku S_2R_2C**) a obsahy s_2, s_3 se sobě rovnají.

$$s_6 = \frac{1}{4}(s_5 + s_6) = \frac{1}{4} \cdot 4 \text{ cm}^2 = 1 \text{ cm}^2$$

$$s_5 = 3 \text{ cm}^2$$

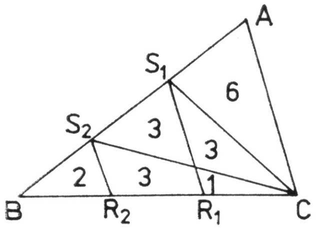


Obr. 5

**) Neboť střední příčky dělí každý trojúhelník na 4 navzájem shodné trojúhelníky. Ověřte sami podle obrázku 5.

$$s_2 = s_3 = \frac{1}{2}(s_2 + s_3) = \frac{1}{2} \cdot 6\ \mathrm{cm}^2 = 3\ \mathrm{cm}^2.$$

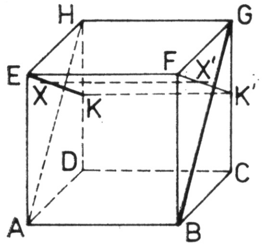
Celkový výsledek znázorňuje obrázek 6.



Obr. 6

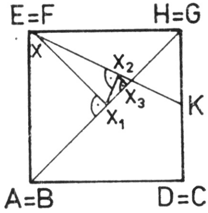
Řešení úlohy Z8 - I - 2 (str. 27)

Krychle i s příčkami je znázorněna na obrázku 7. Kanárek musí létat vždy tak, aby dráha letu byla kolmá k příčce,



Obr. 7

ke které letí. Situace při pohledu kolmém na boční stěnu $BCGF$ je podle věty 1, str. 29 znázorněna na obrázku 8. Dráha kanára se přitom zobrazuje (obr. 8) jako lomená čára $XX_1X_2X_3\ldots$, přičemž

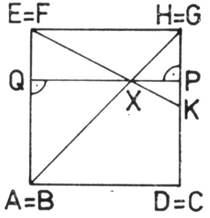


Obr. 8

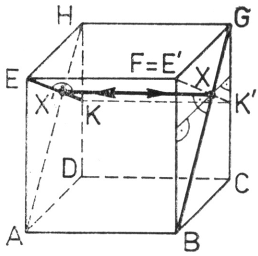
$$XX_1 \perp BG, \quad X_1X_2 \perp EK, \quad X_2X_3 \perp BG, \quad \ldots$$

Má-li se kanárek vrátit do téhož místa, musí vyletět z bodu X, který se na obrázku 9a zobrazuje do průsečíku BG a EK. Létá přitom mezi příčkami po přímce kolmé k oběma příčkám (obr. 9b). Může startovat jak z přímky BG, tak z přímky EK. Celá dráha, po které se kanárek pohybuje, se zobrazí na obr. 9a do jediného bodu X.

Vzdálenost bodu X od přímky CG se zobrazí na obrázku 9a ve skutečné velikosti. Využijeme toho, že trojúhelníky AEX a GKX jsou podobné. Protože $|GK| = \frac{1}{2}|AE|$, je poměr podobnosti roven $\frac{1}{2}$. Z toho plyne, že $|PX| = \frac{1}{2}|QX|$.



Obr. 9a



Obr. 9b

Hledaná vzdálenost

$$v = |PX| = \frac{1}{3}\,|QP| = \frac{1}{3}\,.\,48\text{ cm} = 16\text{ cm}.$$

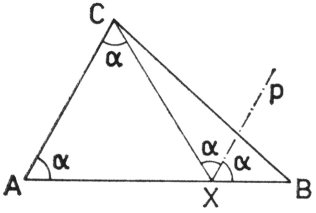
Doplňující otázky k řešení úlohy Z8 - I - 2. Jaké jsou vzdálenosti bodu X (obr. 9b) od vrcholů B, G? Jaké jsou vzdálenosti bodu X' (obr. 9b) od bodů E, K? Jaké jsou vzdálenosti bodů X a X' od všech vrcholů krychle?

Řešení úlohy Z8 - I - 3 (str. 28)

Situace je znázorněna na obrázku 10. Existenci bodu X na straně AB, pro který platí $AX \cong CX$, zaručuje podmínka $AB > BC$.

Trojúhelník ACX je rovnoramenný, a proto

$$\sphericalangle XCA = \sphericalangle XAC = \alpha$$
$$\sphericalangle BXC = 2\alpha \qquad \text{(vnější úhel } \triangle\, ACX).$$



Obr. 10

Osa úhlu BXC, na které leží střed kružnice vepsané trojúhelníku BXC, půlí úhel BXC (obr. 10). Protože

$$\frac{1}{2} \sphericalangle BXC = \alpha, \quad \sphericalangle XCA = \alpha, \qquad \text{(střídavé úhly)}$$

jsou přímky AC a p rovnoběžné.

Řešení úlohy Z8 - I - 4 (str. 28)

1. *řešení.* Nechť je dán libovolný pythagorejský trojúhelník. Podle věty 3 (str. 31) můžeme najít přirozená čísla k, l tak, že čísla

$$a = 2kl, \quad b = k^2 - l^2, \quad c = k^2 + l^2$$

nebo jejich násobky an, bn, cn jsou strany daného trojúhelníku. Přitom a, b (nebo jejich násobky) jsou délky jeho odvěsen. Proto obsah tohoto pythagorejského trojúhelníku je násobkem čísla

$$S = \frac{1}{2} ab = kl(k^2 - l^2) = kl(k + l)(k - l).$$

Stačí tedy ukázat, že číslo S je násobkem čísla 3. Je-li některé z čísel k, l násobkem tří, je i S násobkem tří. V opačném případě mohou nastat dvě možnosti:

a) Čísla k, l dávají při dělení třemi týž zbytek. Potom je rozdíl $k - l$, a tedy i S, násobkem tří.

b) Čísla k, l dávají při dělení třemi různé zbytky (jeden je 1 a druhý 2). Potom je násobkem 3 součet čísel $k + l$, a tedy i S.

2. *řešení* (bez použití vět 2 a 3 na str. 31). Jestliže a, b jsou odvěsny pythagorejského trojúhelníku a c je přepona, potom platí

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Obsah trojúhelníku je $S = \frac{1}{2} ab$. Aby toto číslo bylo násobkem tří, musí být součin ab násobkem šesti. Musíme dokázat, že aspoň jedno z čísel a, b je násobkem 2 a aspoň jedno násobkem 3.

Nejdříve dokážeme **pomocnou větu 1:** *V každém pythagorejském trojúhelníku je aspoň jedna odvěsna násobkem 2.*

Dokážeme to sporem. Budeme předpokládat, že obě čísla a, b jsou lichá ($a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$). Potom $c^2 = a^2 + b^2$ musí být číslo sudé. Sudé číslo však může být druhou mocninou přirozeného čísla, jen když je násobkem 4. Zároveň

$$c^2 = a^2 + b^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 =$$
$$= 4(m^2 + n^2 + m + n) + 2.$$

To však znamená, že číslo c^2 není násobkem 4. Předpoklad, že obě čísla a, b jsou lichá, vede tedy ke sporu. Proto musí být aspoň jedno z nich sudé.

Podobně dokážeme **pomocnou větu 2:** *V každém pythagorejském trojúhelníku je aspoň jedna odvěsna násobkem 3.*

Dokážeme to opět sporem. Budeme předpokládat, že ani jedno z čísel a, b není násobkem 3. Potom můžeme psát

$$a = 3m \pm 1, \qquad b = 3n \pm 1.$$

Potom

$$c^2 = (3m \pm 1)^2 + (3n \pm 1)^2 = 3(3m^2 \pm 2m + 3n^2 \pm 2n) + 2.$$

Tedy číslo c^2 není násobkem 3, neboť dává při dělení třemi zbytek 2. Proto ani c není násobek 3, takže

$$c = 3k \pm 1 \quad \text{a} \quad c^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1.$$

To však znamená, že c^2 dává při dělení třemi zbytek 1, a nikoli 2. Protože jsme došli ke sporu, byl náš předpoklad, že ani jedno z čísel a, b není násobkem 3, chybný. Tím je dokázána pomocná věta 2.

Z obou pomocných vět 1 a 2 plyne naše tvrzení o obsahu pythagorejského trojúhelníku.

Dodatek. Dokážeme větu 3 uvedenou bez důkazu na str. 31. Nechť je dán pythagorejský trojúhelník, jehož délky stran a, b, c jsou nesoudělná čísla a pro něž platí $c^2 = a^2 + b^2$.

Podle pomocné věty 1 je aspoň jedno z čísel a, b sudé, nechť je to a. Potom musí být b liché číslo, jinak by bylo i c sudé a čísla a, b, c by byla soudělná. Podobně zjistíme, že je i c liché číslo.

Nyní platí

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b).$$

Čísla $c + b$ a $c - b$ jsou součet a rozdíl lichých čísel, a proto jsou sudá. Můžeme psát

$$c + b = 2u, \qquad c - b = 2v,$$

kde u, v jsou vhodná přirozená čísla. Odtud dostaneme

$$c = u + v, \qquad b = u - v. \tag{1}$$

Ukážeme, že čísla u, v jsou nesoudělná, tzn. nemají žádného společného prvočíselného dělitele p. V opačném případě by jejich společný prvočíselný dělitel dělil i jejich součet a rozdíl, tedy čísla b a c. Protože

$$a^2 = (c + b)(c - b) = 4uv, \tag{2}$$

dělilo by prvočíslo p i a^2 a samozřejmě i a, což je spor s tím, že a, b, c jsou nesoudělná čísla.

Protože a je sudé, můžeme psát $a = 2x$, z rovností (2) dostaneme $4x^2 = 4uv$ neboli

$$x^2 = uv. \tag{3}$$

Protože u, v nemají žádného společného prvočíselného dělitele, plyne z rovnosti (3), že u, v musí být také 2. mocniny přirozených čísel, tzn.

$$u = k^2, \qquad v = l^2.$$

Z rovnosti (2) dostaneme $a^2 = 4k^2l^2$ neboli

$$a = 2kl.$$

Z rovnosti (1) dostaneme

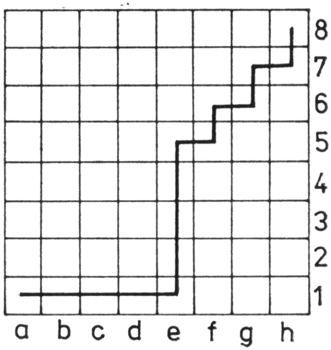
$$b = k^2 - l^2, \qquad c = k^2 + l^2.$$

Tím je věta 2 (str. 31) dokázána. Navíc z důkazu plyne, že strany pythagorejského trojúhelníku jsou nesoudělná čísla, právě když k, l jsou nesoudělná čísla, z nichž jedno je liché a druhé sudé číslo.

Řešení úlohy Z8 - I - 5 (str. 28)

1. *řešení.* Ukážeme, že můžeme překlápěním přemístit kostku na pole h8 tak, že nahoře může být kterákoli její stěna.

Překlápíme-li kostku po dráze znázorněné na obrázku 11, bude na poli h8 nahoře stěna s 1 okem. Přitom po prvních osmi tazích bude kostka na poli e5 s 1 okem nahoře. Stačí tedy ověřit posledních 6 překlopení. Tento pohyb překlápěné kostky zapíšeme pomocí písmen P = překlopení vpravo, N = překlopení nahoru:



Obr. 11

P P P P N N N N P N P N P N (nahoře »1«)

Podobně zapíšeme další 4 pohyby kostek, přitom prvních 8 tahů (tj. na pole e5) ponecháme beze změny:

P P P P N N N N P N P N N N (nahoře »2«)
P P P P N N N N N P P N N P (nahoře »3«)
P P P P N N N N N P N N P P (nahoře »4«)
P P P P N N N N P P P N N N (nahoře »5«)

Poslední způsob přemístění zachycuje zápis

P N P N P N P N N P N N P P (nahoře »6«).

Všechna tato přemístění jsou provedena pomocí 14 překlopení. Snadno si uvědomíte, že menším počtem překlopení kostku přemístit nelze. Snadno také zjistíte, že existují i jiná řešení pomocí 14 nebo i více překlopení.

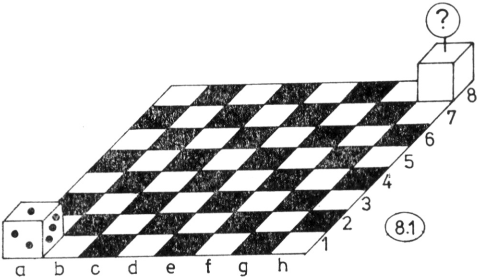
2. *řešení.* Dokážeme obecnější tvrzení: Kostku můžeme přemístit na libovolné pole šachovnice tak, aby nahoře byla kterákoli ze zvolených stěn.

Budeme používat čtyř druhů překlápění: vpravo (P), vlevo (L), nahoru (N), dolů (D).

Provedeme-li překlopení kostky z polohy zobrazené na obrázku 12*) takto:

N P D L,

vrátí se kostka na výchozí místo a nahoře budou 2 oka.



Obr. 12

Opakujeme-li tento postup, dostaneme po 2. oběhu nahoře 4 oka, po dalším oběhu opět 1 oko.

---

*) Předpokládáme, že jde o správnou kostku, na které je součet počtů ok na libovolných dvou protějších stěnách roven 7.

Provedeme-li překlopení

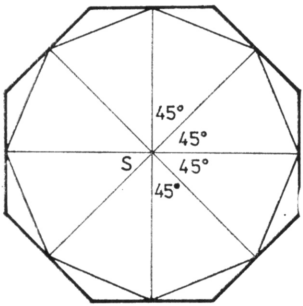
N N P D D L ,

dostaneme nahoře 6 ok. Tedy stěna s jedním okem se vymění s protilehlou. Spojením obou možností můžeme získat na horní stěně kterýkoli počet ok.

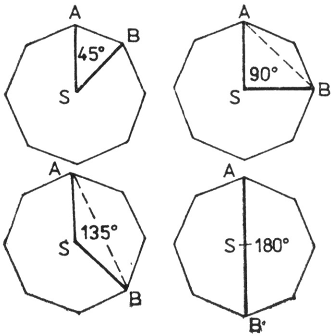
Ukázali jsme tedy obecnější tvrzení, ovšem za cenu, že počet překlápění není nejmenší (na rozdíl od 1. řešení).

Řešení úlohy Z8 - I - 6 (str. 29)

Středy stran pravidelného osmiúhelníku jsou také vrcholy pravidelného osmiúhelníku: obrázek 13. Oba osmiúhelníky mají společný střed S. Středy stran hledaného (tj. většího) osmiúhelníku V_8 jsou tedy vrcholy pomocného (menšího) osmiúhelníku M_8.



Obr. 13



Obr. 14a—d

Úhel ASB může mít velikost $\sigma = 45°, 90°, 135°$ nebo $180°$, obr. 14a—d. Je-li $\sigma < 180°$, jsou body A, B, S vrcholy rovnoramenného trojúhelníku, jehož úhly při základně mají velikost $\alpha = \frac{1}{2}(180° - \sigma)$, tj. v jednotlivých případech $\alpha = 67{,}5°, 45°, 22{,}5°$.

Konstrukce pro $\sigma < 180°$

1. A, B
2. $\triangle ASB$: $\sphericalangle SAB = \sphericalangle SBA = \alpha$ (*usu*); v každé polorovině určené přímkou AB jeden trojúhelník
3. $k(S, SA)$
4. M_8; pravidelný osmiúhelník vepsaný kružnici k s vrcholem A
5. V_8; pravidelný osmiúhelník, jehož strany jsou tečny kružnice k ve vrcholech M_8

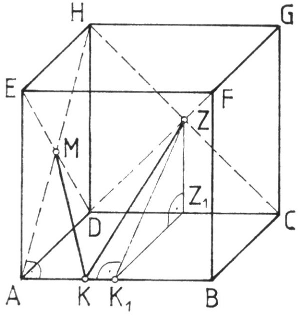
Konstrukce pro $\sigma = 180°$ se liší jen v bodě 2, bod S je střed úsečky AB.

Úloha má po 2 řešeních pro úhly $\sigma = 45°, 90°, 135°$ a jedno řešení pro úhel $\sigma = 180°$. Celkem je tedy 7 pravidelných osmiúhelníků, které vyhovují úloze.

Doplňující úloha. Vypočtěte délky stran a obsahy sestrojených osmiúhelníků v závislosti na vzdálenosti bodů A, B.

Řešení úlohy Z8 - II - 1 (str. 33)

Vzdálenost kanárků od krmítka určíme pomocí vhodných pravoúhlých trojúhelníků, např. podle obrázku 15.



Obr. 15

Protože AM je polovina úsečky AH, je $|AM| = \frac{1}{2}\sqrt{2}.30 =$ $= 15.\sqrt{2}$. Z pravoúhlého trojúhelníku AKM podle Pythagorovy věty

$$|MK|^2 = |AM|^2 + |AK|^2 = (15.\sqrt{2})^2 + 20^2 = 850$$
$$|MK| = \sqrt{850}\ \text{cm} \doteq 29{,}2\ \text{cm}$$

Délku ZK vypočteme pomocí dvou pravoúhlých trojúhelníků ZZ_1K_1 a ZK_1K.*)

$$\begin{aligned} |ZK_1|^2 &= |ZZ_1|^2 + |Z_1K_1|^2 = 15^2 + 5^2 = 250 \\ |ZK|^2 &= |KK_1|^2 + |ZK_1|^2 = 30^2 + 250 = 1\,150 \\ \hline |ZK| &= \sqrt{1\,150}\ \text{cm} \doteq 33{,}9\ \text{cm} \end{aligned}$$

Rozdíl

$$|ZK| - |MK| \doteq 33{,}9\ \text{cm} - 29{,}2\ \text{cm} = 4{,}7\ \text{cm}.$$

Modrý kanárek má o 4,7 cm blíže ke krmítku než zelený kanárek.

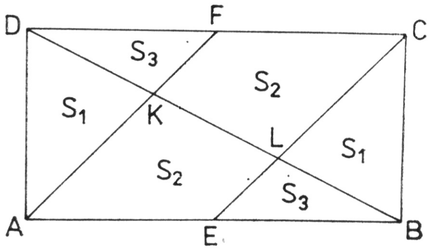
Řešení úlohy Z8 - II - 2 (str. 33)

Situaci znázorňuje obrázek 16. Protože $FC \cong AE$, je čtyřúhelník $AECF$ rovnoběžník. V trojúhelníku DLC je KF střední příčkou (neboť $DF \cong FC$ a AF je rovnoběžné s EC). Proto $DK \cong KL$. Podobně platí $KL \cong LB$.

Trojúhelníky DLC a BLC mají ve vrcholu C společnou výšku. Protože $DL = 2.BL$, je obsah trojúhelníku DLC dvakrát větší než obsah trojúhelníku BLC.

$$S_2 + S_3 = 2S_1$$

*) Jinou možností je využít pravoúhlé trojúhelníky Z_1K_1K a Z_1ZK. Výsledek tak můžete zkontrolovat.



Obr. 16

Obsah S_1 je proto třetina obsahu trojúhelníku BCD neboli šestina obsahu $S_\square$ celého obdélníku $ABCD$.

$$S_1 = \frac{1}{6} S_\square, \qquad S_2 + S_3 = \frac{1}{3} S_\square$$

Trojúhelník DKF má strany i výšky rovné polovinám stran a výšek trojúhelníku DLC. Proto je obsah trojúhelníku DKF rovný čtvrtině obsahu trojúhelníku DLC.

$$S_3 = \frac{1}{4} (S_2 + S_3) = \frac{1}{12} S_\square$$

$$S_2 = \frac{3}{4} (S_2 + S_3) = \frac{3}{12} S_\square = \frac{1}{4} S_\square$$

Z obsahů S_1, S_2, S_3 je nejmenší $S_3 = \frac{1}{12} S_\square$. Podle zadání je $S_3 = 24\ \text{cm}^2$. Tedy obsah $S_\square$ daného obdélníku je $288\ \text{cm}^2$.

Řešení úlohy Z8 - II - 3 (str. 33)

Označme délky odvěsen daného pythagorejského trojúhelníku a, $b = 12$ cm a délku přepony c. Pak je

$$12^2 = c^2 - a^2$$

$$144 = (c - a)(c + a).$$

Rozložíme 144 na součin dvou činitelů:

144	1	2	3	4	6	8	9	12
	144	72	48	36	24	18	16	12

Protože $c - a < c + a$, jsou v 1. řádku tabulky čísla $c - a$, ve 2. řádku čísla $c + a$. Aby byla čísla a, c celá, musí být oba činitelé $c - a$, $c + a$ sudá čísla. Dostaneme 4 soustavy rovnic:

$$\begin{array}{cccc}
c - a = 2 & c - a = 4 & c - a = 6 & c - a = 8 \\
c + a = 72 & c + a = 36 & c + a = 24 & c + a = 18 \\
\hline
a = 35 & a = 16 & a = 9 & a = 5 \\
c = 37 & c = 20 & c = 15 & c = 13
\end{array}$$

Existují tedy celkem čtyři pythagorejské trojúhelníky, které mají jednu odvěsnu dlouhou 12 cm. Jejich délky stran jsou:

35 cm, 12 cm, 37 cm   9 cm, 12 cm, 15 cm
16 cm, 12 cm, 20 cm   5 cm, 12 cm, 13 cm

Řešení úlohy Z8 - II - 4 (str. 34)

1. *řešení.* Úlohy tohoto typu se nejlépe řeší »od konce«. Napíšeme počty mincí na hromádkách po třetím, druhém a prvním přemístění a nakonec na začátku.

Po 3. přemístění	x	x	x
Po 2. přemístění	$x/2$	$x/2$	$2x$
Po 1. přemístění	$x/4$	$7x/4$	x
Na začátku	$13x/8$	$7x/8$	$x/2$

(Výpočet kontrolujeme pomocí součtu všech tří čísel, tj. celkového počtu mincí na třech hromádkách, který musí být $3x$.)

Počet x musí být násobek osmi, jinak by $13x/8$ a $7x/8$ nebyla celá čísla. Součet

$$x + x + x = 3x$$

musí být násobkem 3 a 8, tedy násobkem 24.

Mezi čísly 150 a 190 je jediný násobek 24, je to číslo 168. Odtud dostaneme $x = 56$. Počty mincí na hromádkách na začátku udávají čísla 91, 49, 28.

Zkoušku si udělejte sami.

2. *řešení.* Úlohu je možno řešit i »od začátku«. Napíšeme si počty mincí na hromádkách:

Na začátku

x	y	z

Po 1. přemístění

$x - y - z$	$2y$	$2z$

Po 2. přemístění

$2(x - y - z)$	$2y -$ $-(x-y-z) - 2z =$ $= 3y - x - z$	$4z$

Po 3. přemístění

$4(x - y - z)$	$2(3y - x - z)$	$4z -$ $- 2(x - y - z) -$ $-(3y - x - z) =$ $= -x - y + 7z$

Odtud porovnáním dostaneme (výpočet překontrolujte sami)

$$7x = 13y, \qquad 4y = 7z,$$

takže

$$y : z = 7 : 4, \qquad x : y = 13 : 7.$$

Odtud zjistíme

$$x : y : z = 13 : 7 : 4$$

neboli

$x = 13k, \quad y = 7k, \quad z = 4k \quad$ (k je celé číslo).

Počet všech mincí je

$$N = x + y + z = 24k.$$

Podle podmínek úlohy je

$$24k = 168, \qquad k = 7.$$

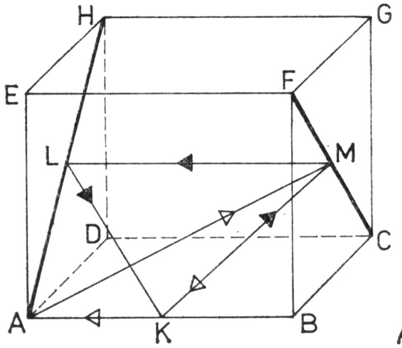
Odtud

$$x = 91, \qquad y = 49, \qquad z = 28.$$

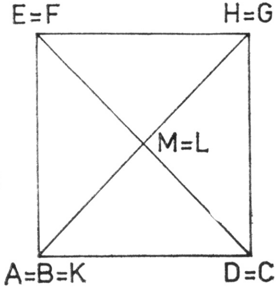
Zkoušku proveďte sami.

Řešení úlohy Z8 - III - 1 (str. 35)

Situaci znázorňuje obrázek 17. Dráha bílého kanárka je vyznačena bílými šipkami, dráha zeleného kanárka černými šipkami.



Obr. 17



Obr. 18

Porovnáním obrázků 17 a 18 zjistíme, že bílý kanárek letěl po lomené čáře $KAMK$ a zelený po lomené čáře $KMLK$, kde M, L jsou po řadě středy úseček CF a AH.

Vypočteme délky (v centimetrech):

$$|KA| = 20, \qquad |LM| = 40.$$

Dále počítáme pomocí Pythagorovy věty:

$$
\begin{aligned}
|KL| &= \sqrt{20^2 + 20^2 + 20^2} = 20 \,.\, \sqrt{3} \doteq 34 \; ^{\star)} \\
|KM| &= |KL| \doteq 34 \\
|AM| &= \sqrt{40^2 + 20^2 + 20^2} \doteq 49
\end{aligned}
$$

Délky lomených čar jsou

$$
\begin{aligned}
|KAMK| &\doteq 20 + 49 + 34 = 103 \\
|KMLK| &\doteq 34 + 40 + 34 = 108.
\end{aligned}
$$

Dráha bílého kanárka je přibližně 103 cm, zeleného 108 cm. Dráha bílého je asi o 5 cm kratší.

Řešení úlohy Z8 - III - 2 (str. 35)

1. *řešení.* Situace je znázorněna na obrázku 19. Obsahy S_1 a S_3 se sobě rovnají, protože čtyřúhelníky $AMEF$ a $DNBC$ jsou shodné (proč?).

Obsah S_2 rovnoběžníku $ANDM$ vypočteme jako součin délky AN a výšky MN ke straně AN. Délka strany AN se rovná $\frac{1}{2} a = 3$ cm a výška MN je dvojnásobek výšky rovnostranného trojúhelníku o straně $a = 6$ cm. Tedy

$$
\begin{aligned}
|MN| &= a\sqrt{3} \\
|MN| &\doteq 6 \,.\, 1{,}7 \text{ cm} = 10{,}2 \text{ cm}.
\end{aligned}
$$

---

*) Všimněte si také, že KL je střední příčka trojúhelníku ABH, a proto je délka KL rovna délce poloviny tělesové úhlopříčky BH (na obrázku 18 není vyznačena).

Obsah rovnoběžníku $ANDM$ je

$$S_2 = \frac{1}{2} a^2 \,.\, \sqrt{3}$$

$$S_2 \doteq \frac{1}{2} \,.\, 6^2 \,.\, 1{,}7 \text{ cm}^2 = 30{,}6 \text{ cm}^2.$$

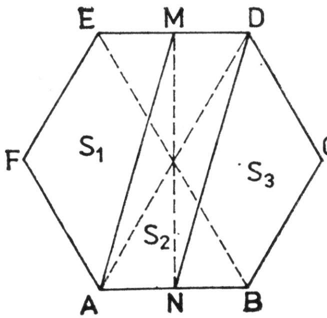
Obsah celého šestiúhelníku je

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$$

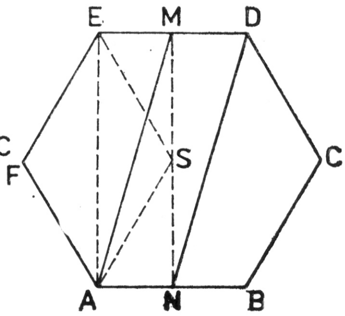
$$S \doteq \frac{3}{2} \,.\, 36 \,.\, 1{,}7 \text{ cm}^2 \doteq 91{,}8 \text{ cm}^2.$$

Obsahy S_1 a S_2 jsou

$$S_1 = S_3 = \frac{1}{2} (S - S_2) = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3}$$



Obr. 19



Obr. 20

$$S_1 = S_3 \doteq \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 1{,}7\ \mathrm{cm}^2 = 30{,}6\ \mathrm{cm}^2.$$

Všechny tři části mají stejný obsah

$$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3},$$

což je přibližně 30,6 cm². Je to třetina obsahu daného šestiúhelníku.

2. *řešení.* (Obr. 20) Obsah rovnoběžníku $ANDM$ se rovná obsahu obdélníku $ANME$, ale ten se rovná obsahu kosočtverce $ASEF$. (Proč?) Obsah tohoto kosočtverce je roven třetině obsahu šestiúhelníku $ABCDEF$. (Proč?)

Podobně obsah čtyřúhelníku $AMEF$ je roven také obsahu kosočtverce $ASEF$ (obr. 20), neboť trojúhelníky AME a ASE mají společnou stranu AE a stejnou výšku k této straně. Je tedy obsah čtyřúhelníku $AMEF$ také roven třetině obsahu šestiúhelníku $ABCDEF$.

Řešení úlohy Z8 - III - 3 (str. 35)

1. *řešení.* Nechť a, b ($a < b$) jsou odvěsny a c přepona pythagorejského trojúhelníku. Do rovnosti

$$c^2 = a^2 + b^2$$

dosadíme podle předpokladu $c = a + b - 8$. Vypočteme

$$(a + b - 8)^2 = a^2 + b^2.$$

Po umocnění a další jednoduché úpravě dostaneme:

$$ab - 8a - 8b + 32 = 0$$
$$(a - 8)(b - 8) = 32$$

Protože a, b jsou přirozená čísla ($a < b$), dostaneme rozložením čísla 32 tři možnosti:

$a - 8 = 1$, $b - 8 = 32$, a tedy $a = 9$, $b = 40$, $c = 41$
$a - 8 = 2$, $b - 8 = 16$, a tedy $a = 10$, $b = 24$, $c = 26$
$a - 8 = 4$, $b - 8 = 8$, a tedy $a = 12$, $b = 16$, $c = 20$

Existují právě tři pythagorejské trojúhelníky, jejichž přepona je o 8 cm kratší než součet jejich odvěsen.

2. *řešení* (podle žákyně *Pavly Kozákové* z 2. ZŠ v Milevsku). Strany každého pythagorejského trojúhelníku můžeme napsat ve tvaru

(1) $a = 2kln$, $b = (k^2 - l^2)n$, $c = (k^2 + l^2)n$,

kde k, l, n jsou vhodná přirozená čísla (viz věty 2 a 3 na str. 31). Podle předpokladu platí

$$a + b = c + 8$$

neboli

$$2kln + (k^2 - l^2)n = (k^2 + l^2)n + 8.$$

Po úpravě dostaneme

$$(k - l)ln = 4.$$

Pro $k - l$, l a n je 6 možností uvedených v prvních 3 sloupcích tabulky 1. Z prvních dvou sloupců vypočteme k a pak za k, l, n dosadíme do rovností (1). Tím vypočteme a, b, c.

Tab. 1

$k-l$	l	n	k	a	b	c
4	1	1	5	10	24	26
2	2	1	4	16	12	20
1	4	1	5	40	9	41
2	1	2	3	12	16	20
1	2	2	3	24	10	26
1	1	4	2	16	12	20

V tabulce dostaneme 6 výsledků, ale některé se liší jen výměnou a, b, nebo jsou dokonce stejné. Různé trojúhelníky jsou jen tři, jejich délky jsou:

10, 24, 26 16, 12, 20 40, 9, 41

Řešení úlohy Z8 - III - 4 (str. 36)

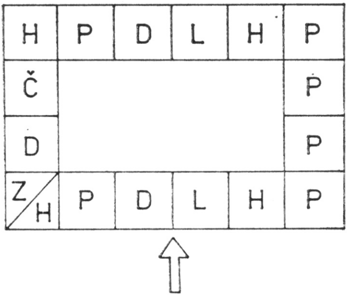
Jak se mění poloha šestky při prvním oběhu pásu, ukazuje obrázek 21. Na pás se díváme ve směru šipky, označení je toto:

H = nahoře   L = vlevo   Z = vzadu
D = dole   P = vpravo   Č = v čele (vpředu)

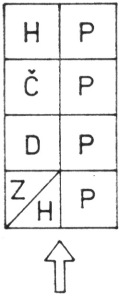
Po ukončení 1. oběhu (po 16 překlopeních) je šestka vzadu.

Podobně zjistíme, že po 2. oběhu bude šestka vlevo a po 3. oběhu opět nahoře. Situace se tedy opakuje po každých třech obězích.

Po 99 obězích bude šestka nahoře. Po stém oběhu — stejně jako po prvním — bude šestka vzadu.



Obr. 21



Obr. 22

Poznámka. Všimněte si, že střídání poloh šestka na výchozím poli daného pásu je stejné jako střídání šestka na výchozím poli A »zkráceného« pásu (obr. 22). To může usnadnit řešení.