32. ročník matematické olympiády

24. MMO

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); František Zítek (editor): 32. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1982/83. 24. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985. pp. 137–151.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404774

24. MMO

Čtyřiadvacátou mezinárodní matematickou olympiádu uspořádala Francie; konala se ve dnech 1. až 12. července 1983 v Paříži za účasti delegací z 32 zemí: Alžírska, Austrálie, Belgie, Brazílie, Bulharska, Československa, Finska, Francie, Holandska, Itálie, Izraele, Jugoslávie, Kanady, Kolumbie, Kuby, Kuvajtu, Lucemburska, Maďarska, Maroka, NDR, NSR, Polska, Rakouska, Rumunska, Řecka, SSSR, Španělska, Švédska, Tuniska, USA, Velké Británie a Vietnamu. Byl to opět rekordní počet zúčastněných zemí; poprvé se na MMO objevilo Španělsko a Maroko, naopak nepřijely delegace z Mexika, Mongolska a Venezuely, které se v minulých letech již MMO účastnily a také tentokrát byly pozvány. Protože počet žáků v družstvu byl z dřívějších osmi snížen na šest, soutěžilo na 24. MMO 186 žáků (družstva Lucemburska a Španělska byla neúplná).

Vedoucí jednotlivých delegací, kteří tvoří mezinárodní porotu MMO, přijeli do Paříže již 1. července a ve dnech 2. až 5. července vybírali úlohy a připravovali soutěžní texty. Tato etapa práce poroty obvykle probíhá v přísné izolaci od soutěžících žáků, mnohdy v dosti vzdáleném místě. Francouzští organizátoři však pro práci poroty vybrali Mezinárodní pedagogické centrum v Sèvres, což je prakticky předměstí Paříže, snadno dosažitelné městskou hromadnou dopravou. Nebylo to však na závadu regulérnímu chodu soutěže, nedošlo k žádnému úniku informací.

Z připravených 25 návrhů vybrala porota po diskusi těchto šest úloh pro soutěž:

1. Určete všechny funkce f, které zobrazují množinu R^+ všech kladných reálných čísel do R^+ a které vyhovují podmínkám:

(1) $f(x \,.\, f(y)) = y \,.\, f(x)$ pro všechna kladná reálná čísla x, y;

(2) $f(x) \to 0$ pro $x \to +\infty$.

2. V rovině jsou dány dvě protínající se kružnice k_1 a k_2 se středy O_1, resp. O_2, o různých poloměrech; označme A jeden z jejich průsečíků. Jedna z obou společných tečen kružnic k_1, k_2 se dotýká kružnice k_1 v bodě P_1 a kružnice k_2 v bodě P_2, druhá se dotýká kružnice k_1 v bodě Q_1 a kružnice k_2 v bodě Q_2. Označme M_1 střed úsečky P_1Q_1 a M_2 střed úsečky P_2Q_2. Dokažte, že platí

$$|\sphericalangle\, O_1AO_2| = |\sphericalangle\, M_1AM_2|.$$

3. Nechť a, b, c jsou celá kladná čísla, po dvou nesoudělná. Dokažte, že

$$2abc - ab - bc - ca$$

je největší celé číslo, které se nedá vyjádřit ve tvaru

$$xbc + yca + zab,$$

kde x, y, z jsou celá nezáporná čísla.

4. Nechť E je množina všech bodů ležících na obvodu rovnostranného trojúhelníku ABC. Rozhodněte, zda pro každý rozklad množiny E na dvě podmnožiny existuje pravoúhlý trojúhelník, jehož všechny tři vrcholy leží v jedné z obou podmnožin.

5. Rozhodněte, zda lze najít 1983 vesměs různých přirozených čísel, ne větších než 10^5, tak, aby žádná tři z nich nebyla třemi po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti.

6. Jsou-li a, b, c délky stran libovolného trojúhelníku, potom platí

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geqq 0;$$

dokažte. Kdy platí rovnost?

Návrhy těchto šesti úloh zaslaly: Velká Británie, SSSR, NSR, Belgie, Polsko a USA.

Při jednáních o výběru úloh byla probírána také otázka jejich obtížnosti - porota se snažila, aby vybraná šestice nebyla příliš lehká. Proto také byly do ní zařazeny úlohy 5 a 6, které byly považovány za velmi obtížné. Naproti tomu úlohy 1 a 4 byly označeny za lehké. Přesto rozhodla porota o tom, že - podobně jako v posledních dvou letech - všechny úlohy mají být hodnoceny stejně, a to každá sedmi body.

Tato fáze práce poroty skončila překladem úloh do jazyků soutěžících, rozmnožením textů a jejich kontrolou - vše bylo hotovo v pondělí 4. července, takže následující den mohl být věnován exkurzi spojené s prohlídkou tří zámků na Loiře: Chambord, Chenonceaux a Amboise.

V pondělí 4. července se do Paříže sjeli soutěžící žáci v doprovodu zástupců vedoucích. Byli ubytováni v internátě lycea Ludvíka Velikého v pařížské Latinské čtvrti. Lyceum bylo pak sídlem i celého dalšího průběhu 24. MMO.

Vlastní soutěž proběhla ve dnech 6. a 7. července. Slavnostní zahájení se konalo ve středu 6. července dopoledne ve velkém amfiteátru pařížské Sorbonny za přítomnosti zástupců francouzského ministerstva školství i univerzity; hned potom následoval první soutěžní půlden (úlohy 1, 2 a 3). Soutěž pokračovala ve čtvrtek 7. července dopoledne, kdy již do lycea Ludvíka Velikého přesídlila také porota ze Sèvres. Během pátku a soboty byla žákovská řešení úloh opravena a zkoordinována, takže v sobotu večer mohla porota schválit definitivní výsledky.

Po delší a dosti vzrušené debatě se většina poroty přiklonila k názoru, že má být dodržena tradice MMO a že se tedy má udělit tolik cen, aby je získala přibližně polovina všech soutěžících. Vzhledem k tomu, že úlohy byly vcelku dost obtížné a bodové zisky žáků relativně nízké, znamenalo toto rozhodnutí velmi mírnou klasifikaci. K získání třetí ceny stačilo pouhých 15 bodů ze 42 možných. Některé delegace se k tomu rozhodnutí vyjadřovaly značně kriticky, neboť se tím podle jejich názoru snížila hodnota získaných cen, a proto požadovaly, aby alespoň prvních cen nebylo příliš mnoho, aby se nepřihlíželo k tradičnímu dělení cen v poměru 1 : 2 : 3. Nakonec bylo rozhodnuto udělit 9 prvních cen žákům, kteří dosáhli alespoň 38 bodů, 27 druhých cen žákům s 26 až 34 body a 57 třetích cen žákům s 15 až 25 body. Vedle toho byly uděleny tři zvláštní ceny za originální a elegantní řešení jednotlivých úloh; získali je žáci z Velké Británie (za 3. úlohu), z NDR (za 6. úlohu) a z NSR (za 6. úlohu).

V neděli 10. července byl pro všechny účastníky MMO uspořádán výlet do Versailles spojený s prohlídkou zámku a parku. V pondělí 11. července pak byla MMO zakončena. Odpoledne proběhlo slavnostní rozdílení cen - opět ve velkém amfiteátru na Sorbonně - potom byli účastníci přijati na pařížské radnici a vše zakončila závěrečná společná večeře, která měla tentokrát zcela neformální ráz. V úterý 12. července již zahraniční delegace opouštěly Paříž.

Jako obvykle byl odborný program MMO doplněn o společenskou a kulturní část. Bohatství pařížských kulturních památek poskytovalo dostatek příležitostí k prohlídkám, jež delegace absolvovaly většinou jednotlivě. Společně byly pro žáky organizovány projížďka lodí po Seině, prohlídka muzea v Louvru a koncert klasické hudby v kostele sv. Severina. Pro vedoucí delegací a jejich zástupce připravili pořadatelé návštěvu baletního představení v pařížské Opeře.

Československo vyslalo na 24. MMO delegaci v složení

vedoucí delegace — *dr. František Zítek, CSc.*
Matematický ústav ČSAV, Praha

zástupkyně vedoucího — *dr. Júlia Lukátšová*
Ministerstvo školství SSR, Bratislava

žáci

Vladimír Dančík	—	Košice, 4. r., G Šmeralova ul.
Xaver Gubáš	—	Bratislava, 4. r., G A. Markuša
Igor Kříž	—	Praha, 4. r., G W. Piecka
Marián Neamţu	—	Bratislava, 4. r., G A. Markuša
Jiří Sgall	—	Praha, 4. r., G W. Piecka
Jiří Witzany	—	Praha, 3. r., G W. Piecka

Kromě toho byl na MMO přítomen též *dr. Václav Šůla* z ministerstva školství ČSR jako pozorovatel.

V soutěži si naši žáci vedli se střídavými úspěchy; detailní výsledky obsahuje připojená tabulka:

Jméno	Body za úlohu číslo 1	2	3	4	5	6	Celkem	Cena
Sgall	7	6	7	7	7	4	38	I.
Kříž	7	7	7	7	7	1	36	II.
Dančík	7	7	4	7	0	0	25	III.
Witzany	3	0	7	7	0	0	17	III.
Gubáš	3	2	4	0	7	0	16	III.
Neamțu	1	2	0	7	0	0	10	–
Součet	28	24	29	35	21	5	142	–

Jak je vidět, největší potíže dělala našim žákům poslední, šestá úloha, s níž si žádný z nich nedokázal poradit. Tato úloha byla všeobecně považována za nejtěžší. Určité potíže měli také s úlohou pátou. Nezdá se však, že by našim žákům chyběly konkrétní vědomosti v určitém směru, ale spíše vyrovnanost a spolehlivost výkonu.

Ve srovnání s ostatními zúčastněnými družstvy dopadlo československé poměrně dobře: v neoficiálním pořadí podle součtu bodů zaujalo osmé místo. Celkový přehled o udělených cenách podává následující tabulka:

Země	Počet cen I.	II.	III.	Zvl.	Součet bodů
Alžírsko	0	0	0	0	6
Austrálie	0	1	2	0	81
Belgie	0	0	0	0	25
Brazílie	0	0	3	0	77
Bulharsko	0	1	4	0	137
Československo	1	1	3	0	142
Finsko	0	0	3	0	103
Francie	0	2	3	0	123
Holandsko	1	3	0	0	143
Itálie	0	0	0	0	2
Izrael	0	0	5	0	96
Jugoslávie	0	0	5	0	89
Kanada	0	0	4	0	102
Kolumbie	0	0	0	0	21
Kuba	0	0	1	0	36
Kuvajt	0	0	0	0	4
Lucembursko	0	0	0	0	13*
Maďarsko	0	4	2	0	170
Maroko	0	0	0	0	32
NDR	0	0	5	1	117
NSR	4	1	0	1	212
Polsko	0	0	3	0	101
Rakousko	0	0	0	0	38
Rumunsko	1	2	3	0	161
Řecko	0	0	3	0	96
SSSR	1	3	2	0	169
Španělsko	0	0	0	0	37**
Švédsko	0	0	0	0	47
Tunisko	0	0	0	0	26
USA	1	3	2	0	171
Velká Británie	0	3	1	1	121
Vietnam	0	3	3	0	148

* Z Lucemburska přijeli jen dva žáci

** Ze Španělska přijeli jen čtyři žáci

Řešení úloh 24. MMO

1. Snadno se přesvědčíme, že funkce f definovaná v R^+ vztahem

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{3}$$

vyhovuje podmínkám (1) i (2); ukážeme, že jiné řešení úloha nemá.

Označme S množinu těch $x \in R^+$, pro něž je

$$f(x) = x. \tag{4}$$

Dosadíme-li $y = x$ do (1), vidíme, že pro každé $x \in R^+$ je

$$f(x\,.\,f(x)) = x\,.\,f(x), \tag{5}$$

tj. $x\,.\,f(x) \in S$; množina S je tedy neprázdná. Podle (1) pak pro libovolné $x \in S$ platí

$$x = f(x) = f(f(x)) = f(1\,.\,f(x)) = x\,.\,f(1),$$

takže nutně

$$f(1) = 1, \tag{6}$$

tj. $1 \in S$. Dále platí toto tvrzení:

Jestliže $x \in S$, potom také $x^c \in S$ pro každé celé číslo c. Tvrzení dokážeme nejprve pro $c \geqq 0$, a to indukcí. Pro $c = 0$ je $x^0 = 1 \in S$ podle (6), pro $c = 1$ se platnost $x^1 \in S$ předpokládá. Nechť $x^n \in S$ pro některé $n \geqq 1$, potom podle (1)

$$f(x^{n+1}) = f(x \,.\, x^n) = f(x \,.\, f(x^n)) = x^n \,.\, f(x) = x^{n+1}.$$

Tvrzení tedy platí pro všechna $c \geqq 0$. Z $x^c \in S$ však také plyne

$$1 = f(1) = f(x^{-c} \,.\, x^c) = f(x^{-c} \,.\, f(x^c)) = x^c \,.\, f(x^{-c}),$$

tj.

$$f(x^{-c}) = x^{-c},$$

takže také $x^{-c} \in S$.

Jestliže $x > 1$, pak $x^c \to \infty$ pro $c \to \infty$, jestliže $x < 1$, pak $x^{-c} \to \infty$ pro $c \to \infty$; v obou případech tedy v S existuje neomezeně rostoucí (geometrická) posloupnost čísel splňujících (4). To je však ve sporu s podmínkou (2), proto jediným prvkem množiny S je číslo 1. To však znamená, že pro každé $x \in R^+$ platí $x \,.\, f(x) = 1$, neboli (3), což jsme měli dokázat.

2. Poněvadž kružnice k_1 a k_2 mají různé poloměry, protínají se jejich společné tečny v jednom bodě; označme jej V. Kružnice k_2 je pak obrazem kružnice k_1 ve stejnolehlosti se středem V a koeficientem daným poměrem obou poloměrů. Označme A' bod kružnice k_2, který je obrazem bodu $A \in k_1$ v této stejnolehlosti. Dokážeme, že body A, A', O_2, M_2 leží

na jedné kružnici, a to tak, že budeme počítat mocnost bodu V k této kružnici.

Jelikož $A \in k_2$, $A' \in k_2$, je mocnost bodu V ke kružnici k_2 rovna součinu $|VA| . |VA'|$; zároveň je však také rovna $|VP_2|^2$. Podle Eukleidovy věty však v pravoúhlém trojúhelníku VO_2P_2 platí $|VP_2|^2 = |VO_2| . |VM_2|$, máme tak celkem

$$|VA| . |VA'| = |VO_2| . |VM_2|,$$

tzn. že skutečně body A, A', O_2, M_2 leží na jedné kružnici. Podle věty o obvodových úhlech tedy platí

$$|\sphericalangle\, O_2AM_2| = |\sphericalangle\, O_2A'M_2|.$$

Avšak trojúhelník $O_2A'M_2$ je obrazem trojúhelníku O_1AM_1 ve zmíněné stejnolehlosti, takže $|\sphericalangle\, O_2A'M_2| = |\sphericalangle\, O_1AM_1|$. Platí tedy $|\sphericalangle\, O_2AM_2| = |\sphericalangle\, O_1AM_1|$ a vzhledem k uspořádání bodů O_1, O_2, M_1, M_2 na přímce O_1O_2 také

$$|\sphericalangle\, O_1AO_2| = |\sphericalangle\, M_1AM_2|,$$

což jsme měli dokázat.

3. Každé celé číslo N se dá vyjádřit ve tvaru

$$N = xbc + yac + zab, \tag{1}$$

kde x, y, z jsou celá čísla, a to dokonce různými způsoby. Vyjádříme-li dále čísla x, y, z ve tvaru

$$x = \xi\, a + \xi_0,\ y = \eta\, b + \eta_0,\ z = \zeta\, c + \zeta_0, \tag{2}$$

kde

$$0 \leqq \xi_0 < a,\ 0 \leqq \eta_0 < b,\ 0 \leqq \zeta_0 < c, \tag{3}$$

dostaneme dosazením do (1) pro číslo N vyjádření

$$N = \xi_0\, bc + \eta_0\, ac + \zeta_0\, ab + (\xi + \eta + \zeta)\, abc. \tag{4}$$

Za podmínek (3) jsou koeficienty ξ_0, η_0, ζ_0 a $(\xi + \eta + \zeta)$ ve vyjádření (4) jednoznačně určeny číslem N. Kdyby totiž pro totéž číslo N existovalo jiné vyjádření

$$N = \xi_0' bc + \eta_0' ac + \zeta_0' ab + \delta\, abc \tag{4'}$$

s čísly ξ_0', η_0', ζ_0' rovněž splňujícími podmínky (3), dostali bychom odečtením (4′) od (4) rovnost

$$0 = (\xi_0 - \xi_0')\, bc + (\eta_0 - \eta_0')\, ac + (\zeta_0 - \zeta_0')\, ab + \\ + (\xi + \eta + \zeta - \delta)\, abc.$$

Z ní vyplývá, že rozdíl $\xi_0 - \xi_0'$ musí být dělitelný číslem a, to však je při platnosti (3) možné jen když $\xi_0 = \xi_0'$. Obdobně odvodíme rovnosti $\eta_0 = \eta_0'$ a $\zeta_0 = \zeta_0'$, a potom ovšem také $\delta = \xi + \eta + \zeta$.

Různá vyjádření čísla N ve tvaru (1) se mohou mezi sebou tedy lišit pouze tak, aby čísla ξ_0, η_0, ζ_0 ve vyjádření (2) a součet $\xi + \eta + \zeta$ zůstaly zachovány. Přitom je zřejmé, že bude $x \geqq 0$, resp. $y \geqq 0$, resp. $z \geqq 0$, právě když $\xi \geqq 0$, resp. $\eta \geqq 0$, resp. $\zeta \geqq 0$.

Vezměme nyní celé číslo

$$N_0 = 2abc - bc - ac - ab.$$

Vyjádříme-li je ve tvaru (4), dostaneme

$$N_0 = (a - 1)\,bc + (b - 1)\,ac + (c - 1)\,ab - abc. \qquad (5)$$

Při každém jeho vyjádření ve tvaru (1) je tedy $\xi + \eta + \zeta = -1$, což znamená, že čísla ξ, η, ζ - a tedy ani čísla x, y, z, v (1) - nemohou být všechna nezáporná.

Vezměme nyní libovolné celé číslo $N > N_0$. Rozdíl $N_0 - N$ je tedy záporný; odečteme-li (4) od (5), dostaneme

$$0 > N_0 - N = (a - 1 - \xi_0)\,bc + (b - 1 - \eta_0)\,ac + (c - 1 - \zeta_0)\,ab - (1 + \xi + \eta + \zeta)\,abc.$$

Poněvadž v důsledku (3) jsou čísla $a - 1 - \xi_0$, $b - 1 - \eta_0$, $c - 1 - \zeta_0$ vesměs nezáporná, musí být číslo $1 + \xi + \eta + \zeta$ kladné. Je tedy $\xi + \eta + \zeta > -1$, tj.

$$\xi + \eta + \zeta \geqq 0.$$

Ve vyjádření čísla N ve tvaru (1) lze tedy volit x, y, z všechna nezáporná.

4. Dokážeme, že při libovolném rozkladu množiny E na dvě podmnožiny F, G

$$\mathsf{F} \cup \mathsf{G} = \mathsf{E},\ \mathsf{F} \cap \mathsf{G} = \emptyset,$$

existují v alespoň jedné z obou podmnožin tři body, které jsou vrcholy pravoúhlého trojúhelníku.

Na stranách AB, resp. AC, resp. CA daného rovnostranného trojúhelníku ABC najdeme body A_1, A_2, resp. B_1, B_2, resp. C_1, C_2 tak, aby

$$|AA_1| = |A_1A_2| = |A_2B| =$$

$$= |BB_1| = |B_1B_2| = |B_2C| =$$

$$= |CC_1| = |C_1C_2| = |C_2A| = \frac{1}{3}|AB|.$$

Ze tří bodů A_1, B_1, C_1 patří alespoň dva do jedné (stejné) z obou podmnožin F, G. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je $A_1 \in F$, $B_1 \in F$.

Jestliže některý z bodů B_2, C_2, C náleží rovněž do F, pak F obsahuje tři vrcholy pravoúhlého trojúhelníku $A_1B_1B_2$, resp. $A_1B_1C_2$, resp. A_1B_1C. Jestliže však všechny tři tyto body B_2, C_2, C náleží do G, pak G obsahuje tři vrcholy pravoúhlého trojúhelníku B_2C_2C. Tím je tvrzení dokázáno.

5. Označme M množinu všech přirozených čísel, která lze vyjádřit ve tvaru součtu

$$a_0 + 3a_1 + 3^2a_2 + \ldots + 3^{10}a_{10},$$

kde $a_j (j = 0, 1, \ldots, 10)$ jsou celá čísla, $0 \leqq a_j \leqq 1$. Množina M má $2^{11} - 1 = 2\,047$ prvků, největším z nich je číslo

$$1 + 3 + 9 + \ldots + 3^{10} = 88\,573 < 10^5.$$

Vezměme tři prvky množiny M:

$$A = \sum_{j=0}^{10} a_j 3^j,\ B = \sum_{j=0}^{10} b_j 3^j,\ C = \sum_{j=0}^{10} c_j 3^j;$$

kdyby to byly tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, platilo by

$$A + C = 2B,$$

a tedy také

$$a_j + c_j = 2b_j$$

pro $j = 0, 1, 2, \ldots, 10$. To je však možné pouze, když

$$a_j = c_j = b_j\ (j = 0, 1, \ldots, 10),$$

tj. když $A = B = C$.

Lze tedy najít nejen 1 983, ale i 2 047 (ba ještě více) přirozených čísel menších než 10^5, z nichž žádná tři nejsou třemi po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti.

6. Položme

$$x = \frac{b + c - a}{2},\ y = \frac{a + c - b}{2},\ z = \frac{a + b - c}{2};$$

z trojúhelníkové nerovnosti vyplývá, že čísla x, y, z jsou kladná, přitom platí

$$x + y = c,\ y + z = a,\ x + z = b. \tag{1}$$

Dosadíme-li do dané nerovnosti

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geqq 0 \tag{2}$$

podle (1), přejde (2) po úpravách v nerovnost

$$yz^3 + xy^3 + x^3z \geqq xyz(x + y + z). \tag{3}$$

Vezměme nyní vektory

$$\boldsymbol{u} = (\sqrt{z}, \sqrt{x}, \sqrt{y5y})$$

a

$$\boldsymbol{v} = (y\sqrt{xy}, z\sqrt{yz}, x\sqrt{xz5y}).$$

Jejich skalární součin

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \sqrt{xyz}\,(y + z + x)$$

je nanejvýš roven součinu jejich délek $|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|$. Avšak

$$|\boldsymbol{u}|^2 = z + x + y$$

a

$$|\boldsymbol{v}|^2 = xy^3 + yz^3 + x^3z.$$

Platí tedy

$$\sqrt{xyz}\,(x + y + z) \leqq \sqrt{x + y + z} \cdot \sqrt{xy^3 + yz^3 + x^3z},$$

resp.

$$xyz\,(x + y + z) \leqq x^3z + xy^3 + yz^3,$$

ale to je právě nerovnost (3), kterou jsme měli dokázat.

Rovnost platí právě pro rovnostranný trojúhelník.