26. ročník matematické olympiády

V. Úlohy III. kola kategorie A

In: Jan Vyšín (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); Lev Bukovský (editor): 26. ročník matematické olympiády. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. pp. 127–136.

V. Úlohy III. kola kategorie A

A – III – 1

V kocke s hranou veľkosti 1 je daných 2050 bodov. Dokážte, že medzi nimi existuje päť takých, ktoré ležia vo vnútri gule s polomerom $\frac{1}{9}$.

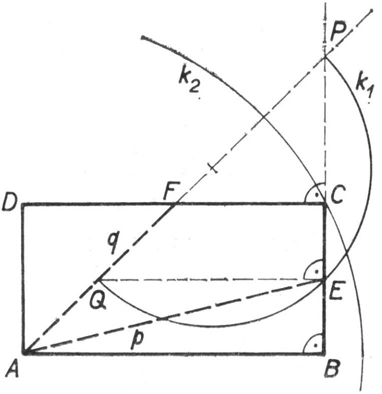
Riešenie. Celú kocku so stranou 1 môžeme rozdeliť na 512 kociek so stranou dĺžky $\frac{1}{8}$. Keďže $4 \cdot 512 = 2048 < < 2050$, musí podľa Dirichletovho priehradkového princípu existovať medzi nimi aspoň jedna, ktorá obsahuje najmenej päť z daných bodov. Ak tejto kocke opíšeme guľovú plochu, pre jej polomer r platí

$$r = \frac{\sqrt{3}}{16} = \sqrt{\frac{3}{256}} < \sqrt{\frac{3}{255}} = \frac{1}{\sqrt{85}} < \frac{1}{\sqrt{81}} = \frac{1}{9}.$$

A – III – 2

Jsou dána kladná čísla p a q. Sestrojte pravoúhlý rovnoběžník $ABCD$ tak, aby platilo $AE = p$, $AF = q$, kde E a F jsou po řadě středy stran BC a CD. Udejte podmínky řešitelnosti.

Řešení (obr. 28). *Rozbor:* Označme P bod polopřímky AF, pro který platí $AP = 2 \,.\, AF$, a dále Q střed úsečky AF. Protože $QE \perp BC$ a dále $P \in BC$, leží E na Thaletově



Obr. 28

kružnici nad úsečkou PQ. Zároveň ovšem E leží na $k_2 = (A; p)$. Odtud plyne *konstrukce:* Vyjdeme od úsečky AF délky q. Sestrojíme body P a Q tak, jak je uvedeno v rozboru, dále Thaletovu kružnici k_1 a kružnici $k_2 = (A; p)$. Jejich průsečík je bod E. Vrcholy B a C jsou pak paty kolmic z A a F na PE. Potom lichoběžník $ABCF$ doplníme na pravoúhlý rovnoběžník $ABCD$. *Zkouška:* Přímo z konstrukce vyplývá, že $AF = q$ a $AE = p$. Zřejmě E je tedy střed strany BC, neboť QE je střední příčka lichoběžníku $ABCF$. Dále je F středem strany CD, neboť CF je střední příčka trojúhelníku ABP, takže $CF = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} CD$.

Podmínkou řešitelnosti je existence dvou společných bodů kružnic k_1 a k_2 (E nesmí být na přímce AP). Protože středná obou kružnic má délku $\frac{5}{4}q$ a poloměry jsou p a $\frac{3}{4}q$, je úloha řešitelná, platí-li

$$p - \frac{3}{4}q < \frac{5}{4}q < p + \frac{3}{4}q$$

neboli

$$p < 2q \quad \text{a} \quad q < 2p\,,$$

tj.

$$\frac{p}{2} < q < 2p\,.$$

A – III – 3

Vyšetřete a v Gaussově rovině komplexních čísel graficky znázorněte množinu hodnot, jichž může nabýt součet $S = Z + W$ dvou komplexních jednotek Z a W, pro něž zároveň platí:

$$\operatorname{Im} Z \geqq 0 \quad \text{a} \quad \operatorname{Re} W \geqq 0\,.$$

Poznámka: Im Z značí imaginární část čísla Z, Re W vyjadřuje reálnou část čísla W.

Řešení. Čísla Z a W napišme ve tvaru

$$Z = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\,, \qquad 0 \leqq \varphi \leqq \pi\,, \tag{1}$$

$$W = \cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi\,, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{2}\,. \tag{2}$$

Položme

$$\omega = \frac{1}{2}(\varphi + \psi)\,, \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}(\varphi - \psi)\,, \tag{3}$$

takže

$$\omega + \varepsilon = \varphi\,, \quad \omega - \varepsilon = \psi\,. \tag{4}$$

Vzhledem k (1) a (2) pak je

$$-\frac{\pi}{4} \leqq \omega \leqq \frac{3}{4}\pi\,, \quad -\frac{\pi}{4} \leqq \varepsilon \leqq \frac{3}{4}\pi\,. \tag{5}$$

Součet $S = Z + W$ nyní můžeme vyjádřit ve tvaru

$$S = (\cos\varphi + \cos\psi) + \mathrm{i}\,(\sin\varphi + \sin\psi).$$

Podle známých vzorců odtud dostáváme

$$S = 2 \,.\, \cos\varepsilon \,.\, (\cos\omega + \mathrm{i}\sin\omega)\,. \tag{6}$$

Přitom $\cos\omega + \mathrm{i}\sin\omega$ je komplexní jednotka s argumentem ω a $|S| = 2.\,|\cos\varepsilon|$.

Dále zjistíme, jakých hodnot může nabývat ε při dané hodnotě ω. Dosadíme-li podle (4) do nerovností (1) a (2), pak s přihlédnutím k nerovnostem (5) snadno poznáme, že

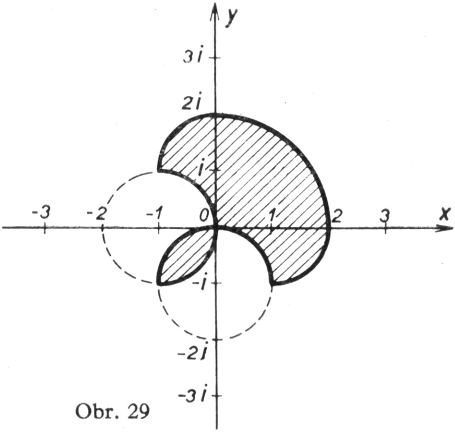
$$\text{pro} \quad -\frac{\pi}{4} \leqq \omega \leqq \frac{\pi}{4} \quad \text{je} \quad -\omega \leqq \varepsilon \leqq \omega + \frac{\pi}{2}\,, \tag{7}$$

$$\text{pro} \quad \frac{\pi}{4} \leqq \omega \leqq \frac{3}{4}\pi \quad \text{je} \quad \omega - \frac{\pi}{2} \leqq \varepsilon \leqq \pi - \omega\,. \tag{8}$$

Dále pro takto vymezené hodnoty ε nalezneme maximální a minimální hodnoty $2.\cos\varepsilon$:

$$\text{pro} \quad -\frac{\pi}{4} \leqq \omega \leqq 0 \quad \text{je} \quad -2\sin\omega \leqq 2\cos\varepsilon \leqq 2\cos\omega, \tag{9}$$

$$\text{pro} \quad 0 \leqq \omega \leqq \frac{\pi}{4} \quad \text{je} \quad -2\sin\omega \leqq 2\cos\varepsilon \leqq 2\,, \tag{10}$$



Obr. 29

$$\text{pro} \quad \frac{\pi}{4} \leqq \omega \leqq \frac{\pi}{2} \quad \text{je} \quad -2\cos\omega \leqq 2\cos\varepsilon \leqq 2\,, \quad (11)$$

$$\text{pro} \quad \frac{\pi}{2} \leqq \omega = \frac{3}{4}\pi \quad \text{je} \quad -2\cos\omega \leqq 2\cos\varepsilon \leqq 2\sin\omega. \quad (12)$$

Poněvadž v udaných mezích lze φ a ψ, resp. ω a ε, volit zcela libovolně, je hledanou množinou hodnot součtu $Z + W$ právě množina všech čísel tvaru (6), kde ω splňuje (5) a 2. cos ε leží v mezích udaných příslušnou nerovností (9) až (12). Tím je vlastně tato množina popsána v polárních souřadnicích. Grafické znázornění je na obr. 29.

Poznámka. Při řešení lze využít symetrie podle osy 1. a 4. kvadrantu.

Nájdite všetky reálne riešenia sústavy rovníc

$$x + y + z = 3\,, \tag{1}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{12}\,, \tag{2}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 45\,. \tag{3}$$

Riešenie. Ak nejaká trojica x, y, z vyhovuje danej sústave, potom musí zrejme byť $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Z (2) dostaneme

$$xy + yz + zx = \frac{5}{12}\,xyz\,. \tag{4}$$

Zrejme platí:

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3\,(x + y + z)(xy + \\ + yz + zx) - 3xyz\,,$$

z čoho po dosadení z (1), (3), (4) a jednoduchej úprave dostaneme

$$xyz = -24\,, \tag{5}$$

odkiaľ po dosadení do (4) hneď príde

$$xy + yz + zx = -\,10\,. \tag{6}$$

Z (1), (6), (5) vyplýva na základe známych vzťahov medzi koreňmi a koeficientami kubickej rovnice, že x, y, z vyhovujúce danej sústave musia byť koreňmi rovnice

$$u^3 - 3u^2 - 10u + 24 = 0\,. \tag{7}$$

Keďže $u^3 - 3u^2 - 10u + 24 = (u - 2)(u^2 - u - 12) = (u - 2)(u + 3)(u - 4)$, rovnici (7) vyhovujú čísla $2, -3, 4$.

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že všetky permutácie čísel tejto trojice sú riešeniami danej sústavy. Sú to:

$$(2, -3, 4), (2, 4, -3), (-3, 2, 4), (-3, 4, 2), (4, 2, -3), (4, -3, 2).$$

A — III — 5

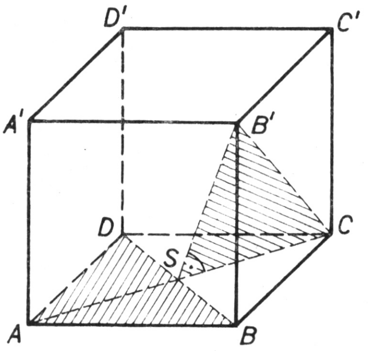
Na přímce jsou dány navzájem různé body $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Každý z nich označíme právě jednou ze čtyř barev tak, aby bylo každé barvy použito. Dokažte, že pak v dané přímce existuje úsečka, která obsahuje právě po jednom bodu některých dvou z uvedených barev a alespoň po jednom bodu obou zbylých barev.

Řešení. Můžeme předpokládat, že body následují v přímce za sebou v pořadí $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Nechť k je nejmenší index takový, že mezi body $A_1, A_2, \ldots, A_k$ už jsou body všech čtyř barev. Má tedy A_k jinou barvu než kterýkoli z bodů $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$. Označme j největší index takový, že $1 \leqq j \leqq k - 1$ a že mezi body $A_j, A_{j+1}, \ldots, A_k$ už jsou body všech čtyř barev. Má tedy A_j jinou barvu než kterýkoli z bodů $A_{j+1}, A_{j+2}, \ldots, A_k$. Úsečka A_jA_k už má požadovanou vlastnost, neboť barvy bodů A_k a A_j se vyskytují mezi body $A_j, A_{j+1}, \ldots, A_k$ právě jednou a zbylé dvě barvy aspoň jednou.

A — III — 6

Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$, $AA' \| BB' \| CC' \| DD'$; střed stěny $ABCD$ označme S. Určete všechny body X, které mají zároveň tyto dvě vlastnosti:

1. X náleží některé hraně dané krychle;
2. čtyřstěny $ABDX$ a $CB'SX$ mají objemy sobě rovné.



Obr. 30

Řešení. Uvažujme krychli o hraně délky 1 (obr. 30). Obsah $\triangle ABD$ je $P_1 = \frac{1}{2}$. Přímka AC je kolmá na rovinu DBB', a proto obsah $\triangle CB'S$ je

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{3}.$$

Označme vzdálenosti hledaného bodu X od rovin ABD a $CB'S$ po řadě d_1, d_2. Pak čtyřstěny $ABDX$ a $CB'SX$

mají po řadě objemy $V_1 = \frac{1}{6} d_1$ a $V_2 = \frac{1}{12} d_2 \sqrt{3}$. Z 2. vlastnosti bodu X plyne

$$2d_1 = d_2 \sqrt{3}\,. \tag{1}$$

Zvolme ortonormální soustavu souřadnic tak, že $A = [0, 0, 0]$, $B = [1, 0, 0]$, $D = [0, 1, 0]$, $A' = [0, 0, 1]$. Nechť $X = [u, v, w]$ je hledaný bod. Bod X leží na některé z hran dané krychle a je vrcholem čtyřstěnu $ABDX$, a proto

$$w > 0\,. \tag{2}$$

Pro vzdálenost d_1 bodu X od roviny ABC tedy platí

$$d_1 = w\,. \tag{3}$$

Rovina ACB' má rovnici

$$x - y - z = 0\,, \tag{4}$$

takže vzdálenost bodu X od roviny SCB' je

$$d_2 = \frac{|u - v - w|}{\sqrt{3}}\,. \tag{5}$$

Podle (1), (3), (5) dostáváme

$$2w = |u - v - w|\,. \tag{6}$$

Nyní rozlišíme dva případy:

a) Nechť $u - v - w > 0$. Z podmínky (2), z rovnice (4) roviny ACB' a z toho, že $B = [1, 0, 0]$, plyne, že v tomto případě hledaný bod X leží uvnitř klínu určeného polorovinami ACB a ACB'. Bod X může tedy ležet jedině na hraně BB', tzn., že pro jeho souřadnice platí: $u = 1$, $v = 0$. Podle (6) pak $w = \frac{1}{3}$.

Pro bod $X = \left[1, 0, \frac{1}{3}\right]$ je $d_1 = \frac{1}{3}$, $d_2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Potom je $V_1 = V_2 = \frac{1}{18}$.

b) Nechť $u - v - w < 0$. Obdobně jako v případě a) se zjistí, že hledaný bod X leží uvnitř klínu určeného polorovinami ACD a ACB'. Z podmínky (2) a rovnice (6) plyne, že bod X leží v otevřené polorovině, jež má početní vyjádření

$$x - y + z = 0 \quad \wedge \quad z > 0\,. \tag{7}$$

Její hraniční přímka je AC.

Nejprve je třeba zjistit, zda tato polorovina protíná hranu DD'. Pro bod X ležící na DD' by platilo $u = 0$ a $v = 1$, takže po dosazení do (7) máme $z = w = 1$, tj. $X = D'$. Pro tento bod X je $d_1 = 1$, $d_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, takže $V_1 = V_2 = \frac{1}{6}$.

Tedy bod D' splňuje podmínky úlohy. Otevřená polorovina ACD' nemá mimo bod D' s hranami dané krychle žádné další společné body.

Závěr: Existují právě dva body X s požadovanými vlastnostmi, jedním z nich je bod D' a druhý leží na hraně BB', přičemž jeho vzdálenost od bodu B je $\frac{1}{3} BB'$.