14. ročník matematické olympiády

V. Sedmá mezinárodní matematická olympiáda v Berlíně ve dnech 3.-12. července 1965

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Rudolf Zelinka (author): 14. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1964-1965. 7. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1966. pp. 112–143.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404543

V. Sedmá mezinárodní matematická olympiáda v Berlíně ve dnech 3.—12. července 1965

1. Průběh olympiády

VII. MMO měla ze všech dosavadních mezinárodních olympiád největší počet účastnických zemí. Zúčastnilo se jí deset států: Bulharsko, Československo, Finsko, Jugoslávie, Maďarsko, Mongolsko, Německá demokratická republika, Polsko, Rumunsko a Sovětský svaz. Pozoruhodné je, že se letos olympiády účastnilo Finsko jako první stát, který nepatří k socialistickému táboru. Některé další pozvané státy (Čína, Kuba) se nedostavily, ale lze očekávat, že v příštích letech bude počet účastnických zemí vzrůstat a že soutěž nezůstane omezena jen na socialistické státy; tím se ovšem bude zvyšovat její význam pro spolupráci národů na poli školské matematiky i její politická váha. Soutěž byla organizována v podstatě podle statutu vypracovaného pro IV. MMO v roce 1962 v Československu. Každý účastnický stát vyslal osmičlenné družstvo pod vedením delegáta a jeho zástupce (pedagogického průvodce).

Soutěž řídila mezinárodní komise (Jury); jejím předsedou byl *prof. dr. Engel* z university v Roztokách (Rostock), členy s hlasovacím právem všichni vedoucí delegací.

Program soutěže byl velmi pečlivě připraven do nejmenších podrobností; byl skutečně bohatý a časově i pracovně velmi náročný. VII. MMO se konala za velké morální i finanční podpory strany a vlády NDR a těšila se velké pozornosti, zejména tisku; deset časopisů — mezi nimi i Neues Deutschland — věnovalo na svých stránkách mnoho místa reportážím a zprávám.

Vedoucí delegací se sjeli dne 1. července t. r. v Berlíně. Večer bylo krátké přijetí všech členů prof. Engelem v hotelu Newa. Dne 2. července zasedala Jury po celý den v Domě odborů; při zahájení uctila památku zesnulého čs. pracovníka R. Zelinky. Odpoledne se zabývala předběžně hodnocením navržených soutěžních úloh. Večer byli delegáti přijati v hotelu Moskva státním sekretářem *Wernerem Lorenzem* za účasti dalších vládních a stranických činitelů. Celý den 3. července byl věnován výběru úloh pro soutěž. Po dlouhé diskusi bylo vybráno šest úloh (tři pro první soutěžní práci, tři pro druhou). Během 3. července dorazila do Berlína všechna družstva pod vedením pedagogických průvodců a byla ubytována v internátu Jugendhochschule W. Piecka v Bogensee, v pěkné lesnaté a jezernaté krajině, vzdálené asi 30 km od středu Berlína.

V neděli 4. července se dostavili na zasedání Jury i pedagogičtí průvodci; po krátké schůzi se účastníci rozešli, aby rozmnožili texty soutěžních úloh v národních jazycích. Překlady textů z německého originálu připravili vedoucí delegací již předchozí večer. Odpoledne odjeli delegáti se svými zástupci do Postupimi. Prohlédli si zámek Sanssouci, park i další pamětihodnosti; večer bylo uspořádáno v restauraci Zur Stadt Potsdam přátelské setkání s učiteli postupimské Vysoké školy pedagogické. Žáci věnovali neděli rekreaci a vyjížďce na Weisse Flotte po Sprévě.

Ráno 5. července byla v Bogensee v sále Jugendhochschule zahájena první část soutěže. Promluvil krátce prof. Engel, potom zástupce strany přečetl pozdravný dopis s. *Waltera Ulbrichta*, adresovaný účastníkům VII. MMO, a pak začali žáci pracovat na prvních třech úlohách (viz část II).

V úterý 6. července soutěž pokračovala řešením druhé trojice úloh; současně delegáti a jejich zástupci korigovali první trojici soutěžních úloh.

Dne 7. července se za spolupráce pedagogických průvodců dokončovalo korigování úloh a koordinace. Opravování úloh i práce Jury filmovala televize. Na zasedání Jury byly stanoveny podle počtu bodů hranice pro udělení 1., 2. a 3. ceny, pak bylo rozhodnuto jednomyslně o udělení cen. Mimo to byla projednána udělení zvláštních pochval za mimořádně obratná řešení nebo za více různých způsobů řešení a zobecnění. Žáci věnovali celou středu 7. července návštěvě Postupimi (Potsdamu).

Dny 8. až 11. července byly vyplněny okružní cestou po NDR, kterou v autobusech absolvovaly všechny delegace se svými vedoucími i jejich zástupci. Po celou dobu doprovázeli delegace *prof. W. Engel* a neúnavní organizátoři: hlavní sekretář Oberstudienrat *H. Titze* a *F. Weiss* z Technické stanice. Většina cesty se projela po výborných německých dálnicích. 8. července byla polední zastávka v Naumburku (s prohlídkou dómu), večer dorazila výprava přes Jenu a Weimar (Výmar) do Ettersbergu (Buchenwaldu), kde byla ubytována v tamějším hotelu. Dopoledne 9. července byla prohlídka bývalého koncentračního tábora a po ní následoval pietní akt; vedoucí delegací v průvodu všech účastníků VII. MMO položili kytice k pylonům národů; za znění buchenwaldského zvonu byl položen věnec k památníku obětí nacismu a delegáti podepsali společný zápis v pamětní knize. Odpoledne následovala prohlídka Výmaru, zejména Schillerova a Goethova domu. Večer se účastnili delegáti recepce, kterou pro ně uspořádal rektor Vysoké školy architektury a stavitelství ve Výmaru *dr. Motzke.*

Dne 10. července odjeli účastníci VII. MMO přes Karl-Marx-Stadt do Drážďan. Ihned po příjezdu následovala prohlídka galerie a večeře v Italienisches Dörfchen. Večer byl volný s možností navštívit slavnost Dne tisku, která se právě v městě konala. Ráno 11. července byla na programu prohlídka Zwingru, po ní volný čas k prohlídce města. Snídaně i oběd byly toho dne podávány v příjemném prostředí Luisenhofu s krásnou vyhlídkou na město. Odpoledne asi v 16 hodin byla nastoupena zpáteční cesta do Berlína.

V pondělí dne 12. července v 10 hodin byla ve Sjezdové dvoraně na Alexandrově náměstí v Berlíně uspořádána závěrečná slavnost s udělením cen a pochval. Promluvili *profesor Engel*, státní sekretář *Werner Lorenz* a nakonec *prof. Mateev*, který oficiálně pozval jménem bulharského ministerstva školství všechny účastníky na VIII. MMO do Sofie. Pak následovalo udělení cen a pochval. Za žáky poděkovala rumunská účastnice *Liliana Bucurová.* Význam slavnosti byl zvýšen i účastí četných vynikajících hostí, např. rektora Humboldtovy university *prof. Schrödra*, mongolského vyslance aj. Slavnost byla zahájena i ukončena komorní hudbou. Po ukončení následovaly interviewy rozhlasu a televize s některými účastníky. Večer téhož dne uspořádal časopis Junge Welt přátelskou besedu ve Sjezdové dvoraně, která byla dovršením pozornosti, kterou věnoval tisk VII. MMO. Každá z delegací měla svého hosta z řad domácích prominentů — hostem čs. delegace byl rektor Humboldtovy university profesor

Schröder. Večer byl doplněn řadou programových čísel (např. zpěvním číslem mongolské delegace, předvedením finského lidového tance aj.) a vyzněl v opravdové přátelské sblížení všech účastníků soutěže.

Během 13. července se rozjížděly delegace do svých domovů.

Tento popis průběhu alespoň naznačuje nesmírnou práci, kterou němečtí organizátoři věnovali VII. MMO. Účastníci VII. MMO měli příležitost zhlédnout velkolepou výstavbu v Berlíně, Drážďanech, Karl-Marx-Stadtu a jinde, měli možnost poznat jedinečné historické památky; ve Weimaru a v Buchenwaldu měli před očima ohromující kontrast mezi kolébkou německého humanismu a nedalekým památníkem připomínajícím hrůzy fašismu. Tyto zážitky zapůsobily hluboce na všechny účastníky a zanechaly jistě, zejména v myslích žáků, nesmazatelné dojmy.

2. Soutěžní úlohy VII. MMO

Soutěžní úlohy byly rozděleny do dvou trojic: 5. července byly zadány úlohy 1 až 3, 6. července úlohy 4 až 6. Na každou klauzurní práci byly stanoveny 4 hodiny čistého času. Následují texty úloh; v závorce je uveden stát, který úlohu navrhl, a maximální počet bodů, které mohl řešitel úlohy získat.

1. Určete všechna čísla x z intervalu $0 \leqq x \leqq 2\pi$, která vyhovují nerovnostem

$$2 \cos x \leqq \left| \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \right| \leqq \sqrt{2}\,.$$

(*Jugoslávie*, 4 body)

2. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0\,, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

s neznámými x_1, x_2. x_3. Její koeficienty splňují tyto podmínky:

a) a_{11}, a_{22}, a_{33} jsou kladná čísla;
b) všechny ostatní koeficienty jsou záporná čísla;
c) v každé z daných rovnic je součet všech tří koeficientů kladné číslo.

Dokažte, že daná soustava má jediné řešení $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

(*Polsko*, 6 bodů)

3. Je dán čtyřstěn $ABCD$, jehož hrany AB, CD mají po řadě délky a, b. Vzdálenost mimoběžek AB, CD je d, jejich odchylka je ω. Čtyřstěn $ABCD$ je rozdělen ve dvě tělesa rovinou ε rovnoběžnou s přímkou AB i s přímkou CD; poměr vzdáleností roviny ε od přímky AB a od přímky CD je roven k. Vypočtěte poměr objemů obou vzniklých těles.

(*Československo*, 8 bodů)

4. Vypočtěte všechny čtveřice reálných čísel x_1, x_2, x_3, x_4, pro něž platí, že součet každého z těchto čísel se součinem tří zbývajících je roven dvěma.

(*SSSR*, 6 bodů)

5. Je dán trojúhelník OAB, jehož úhel $\sphericalangle AOB$ je ostrý. Bodem $M \neq O$ trojúhelníku OAB jsou vedeny kolmice k přímkám OA, OB a jejich paty jsou označeny po řadě P, Q; průsečík výšek trojúhelníku OPQ je označen H. Zjistěte, jaký útvar je geometrickým místem bodů H, probíhá-li bod M

a) stranu AB,
b) vnitřek trojúhelníku OAB.

(*Rumunsko*, 8 bodů)

6. V rovině je dána množina n bodů ($n \geqq 3$), každé dva z nich jsou spojeny úsečkou. Označme d délku nejdelší z těchto úseček. *Průměrem dané množiny* nazveme každou z těchto úseček, která má délku d. Dokažte, že počet průměrů dané množiny je roven nejvýše n.

(*Polsko*, 9 bodů)

3. Řešení soutěžních úloh

Úloha 1. Řešme nejprve nerovnost

$$\left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \leqq \sqrt{2}\,. \tag{1}$$

Jejím umocněním a úpravou dostaneme

$$1 - |\cos 2x| \leqq 1\,. \tag{2}$$

Nerovnost (2) je splněna pro všechna x z intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$. Protože lze obrácením postupu přejít od nerovnosti (2) k nerovnosti (1), jsou řešením nerovnosti (1) všechna čísla x z intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Řešme za druhé nerovnost

$$2\cos x \leqq \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right|\,. \tag{3}$$

Je-li $\cos x \leqq 0$, tj.

$$\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3\pi}{2}\,, \tag{4}$$

je nerovnost (3) splněna. Je-li $\cos x \geqq 0$, umocníme nerovnost (3) dvěma a upravíme; vyjde

$$2\cos^2 x \leqq 1 - |\cos 2x|\,,$$

neboli

$$|\cos 2x| \leqq 1 - 2\cos^2 x = -\cos 2x\,. \tag{5}$$

Nerovnost (5) je splněna pro všechna x z intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$, pro něž platí $\frac{\pi}{2} \leqq 2x \leqq \frac{3\pi}{2}$ nebo $\frac{5\pi}{2} \leqq 2x \leqq \frac{7\pi}{2}$, tj. pro všechna x, pro něž platí

$$\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{7\pi}{4}. \tag{6}$$

Protože lze postup obrátit, jsou všechna x vyhovující nerovnostem (6), řešením nerovnosti (3).

Všechna řešení dané nerovnosti dostaneme spojením vztahů (4), (6); jsou to tedy všechna x z intervalu

$$\left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\rangle .$$

Úloha 2. Buď platí pro aspoň dvě neznámé nerovnosti

$$x_i \geqq 0\,, \quad x_j \geqq 0\,, \tag{7}$$

nebo znásobíme všechny tři dané rovnice číslem -1 a dosáhneme toho, že pro neznámé $-x_1$, $-x_2$, $-x_3$ platí vztahy (7).

Vhodnou výměnou neznámých a současnou výměnou rovnic dosáhneme toho, že je

$$x_1 \geqq 0\,, \quad x_2 \geqq 0 \tag{8}$$

a že koeficienty takto upravené soustavy splňují podmínky a) až b). Z poslední rovnice dané soustavy pak plyne

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leqq 0\,,$$

tj.

$$a_{33}x_3 \geqq 0\,, \quad x_3 \geqq 0\,.$$

Je tedy $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$, $x_3 \geqq 0$. Budiž např. x_1 největší z čísel x_1, x_2, x_3, tj.

$$x_1 \geqq x_2 \geqq 0\,, \quad x_1 \geqq x_3 \geqq 0\,. \tag{9}$$

Znásobíme nerovnosti (9) po řadě zápornými čísly a_{12}, a_{13}; vyjde

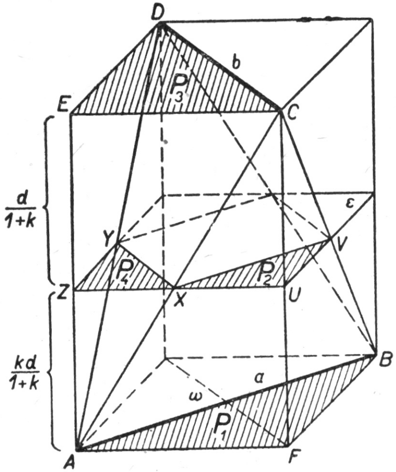
$$a_{12}x_1 \leqq a_{12}x_2\,, \quad a_{13}x_1 \leqq a_{13}x_3\,. \tag{10}$$

Sečteme nerovnosti (10) a přičteme rovnost $a_{11}x_1 = a_{11}x_1$; dostaneme

$$0 \leqq (a_{11} + a_{12} + a_{13})x_1 \leqq a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0\,.$$

Odtud plyne — protože $a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0$ — výsledek $x_1 = 0$ a dále podle (9) $x_2 = x_3 = 0$.

Úloha 3. Čtyřstěn $ABCD$ doplníme na rovnoběžnostěn, jak ukazuje obrázek 37; výsledný rovnoběžnostěn



Obr. 37

ovšem nemusí být kolmý. Hrany AB, CD čtyřstěnu jsou úhlopříčkami jeho podstav, rovina ε dělí rovnoběžnostěn ve dva rovnoběžnostěny; objem dolního (horního) označíme $V_1(V_2)$. Protože jejich výšky jsou po řadě $\frac{kd}{1+k}$, $\frac{d}{1+k}$ a protože oba rovnoběžnostěny mají podstavu téhož obsahu — $\frac{1}{2}ab \sin \omega$, platí

$$V_1 = \frac{kabd}{2(1+k)} \sin \omega\,, \qquad V_2 = \frac{abd}{2(1+k)} \sin \omega. \tag{11}$$

Rovina ε rozdělí čtyřstěn $ABCD$ na dvě části; dolní dostaneme, když od dolního rovnoběžnostěnu oddělíme dva jehlany a dva komolé jehlany. Výška jehlanů je $\frac{kd}{1+k}$ a jejich podstavy mají týž obsah P_4; je to obsah trojúhelníku XYZ. Poněvadž trojúhelníky XYZ, CDE jsou stejnolehlé podle středu A $\left(\text{koeficient stejnolehlosti je } \frac{k}{1+k}\right)$, platí

$$P_4 = \left(\frac{k}{1+k}\right)^2 \cdot P_3\,.$$

Součet objemů jehlanů je tedy

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{kd}{1+k} \left(\frac{k}{1+k}\right)^2 \cdot P_3 = \frac{2}{3} d \cdot \left(\frac{k}{1+k}\right)^3 \cdot P_3\,. \tag{12}$$

Oba komolé jehlany mají také výšku $\frac{kd}{1+k}$; jejich podstavy mají obsahy P_1 ($\triangle ABF$) a P_2 ($\triangle XVU$). Protože trojúhelníky XVU, ABF jsou stejnolehlé podle středu C $\left(\text{koeficient stejnolehlosti je } \frac{1}{1+k}\right)$, platí

$$P_2 = \left(\frac{1}{1+k}\right)^2 \cdot P_1\,.$$

Součet objemů obou komolých jehlanů je tedy

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{kd}{1+k}\left[P_1 + \left(\frac{1}{1+k}\right)P_1 + \left(\frac{1}{1+k}\right)^2 P_1\right] =$$

$$= \frac{2d}{3} \cdot \frac{k(k^2+3k+3)}{(1+k)^3} \cdot P_1 \,. \tag{13}$$

Objem V_1'' dolní části dostaneme, odečteme-li od čísla V_1 obě čísla (12), (13). Uvážíme-li, že je

$$P_1 = P_3 = \frac{1}{4} ab \sin \omega \,,$$

dostaneme

$$V_1'' = \frac{2kd}{1+k} \cdot P_1 - \frac{2}{3} d \cdot \frac{k^3}{(1+k)^3} \cdot P_1 -$$

$$- \frac{2}{3} d \cdot \frac{k(k^2+3k+3)}{(1+k)^3} \cdot P_1 = \frac{2k^2(k+3)}{3(1+k)^3} \cdot dP_1 \,. \tag{14}$$

Objem V_2'' horní části dostaneme zřejmě, nahradíme-li ve výsledku (14) číslo k číslem $\frac{1}{k}$; po úpravě vyjde

$$V_2'' = \frac{2(1+3k)}{3(1+k)^3} \cdot dP_1 \,. \tag{15}$$

Z (14) a (15) plyne

$$\frac{V_1''}{V_2''} = \frac{k^2(k+3)}{1+3k} \,. \tag{16}$$

Jak je patrno, poměr nezávisí na údajích a, b, d, ω.

Úloha 4. Podle textu úlohy je

$$\begin{aligned} x_1 + x_2x_3x_4 &= 2 \,, \\ x_2 + x_3x_4x_1 &= 2 \,, \\ x_3 + x_4x_2x_1 &= 2 \,, \\ x_4 + x_1x_2x_3 &= 2 \,. \end{aligned} \tag{17}$$

Označme $q = x_1x_2x_3x_4$ a znásobíme i-tou rovnici (17) číslem x_i; dostaneme pro $i = 1, 2, 3, 4$ po úpravě

$$x_i^2 - 2x_i + q = 0\,. \tag{18}$$

Kvadratická rovnice (18) má reálné řešení právě tehdy, platí-li $1 - q \geqq 0$ neboli

$$q \leqq 1\,. \tag{19}$$

Kořeny rovnice (18) jsou pak

$$r_1 = 1 + \sqrt{1 - q}\,, \quad r_2 = 1 - \sqrt{1 - q}\,. \tag{20}$$

Pro $q = 1$ dostaneme $r_1 = r_2 = 1$, a tedy

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1\,, \tag{21}$$

což je jedno řešení soustavy.

Je-li $q < 1$ [viz (19)], je $r_1 > r_2 \geqq 0$. Z rovnic (17) vyplývá, že nemohou být aspoň tři z čísel x_i rovna r_2. Kdyby totiž bylo např. $x_1 = x_2 = x_3 = r_2$, bylo by $x_1x_2x_3 = r_2^3 < 1$. Z poslední rovnice (17) by pak plynulo $x_4 > 1$, tj. $x_4 = r_1$. Z toho by pak plynulo (protože $r_1r_2 = q$, $1 + q < 2$)

$$x_1 + x_2x_3x_4 = r_2 + r_1r_2^2 = r_2(1 + q) < 1\,.\,2 = 2\,,$$

což je spor s první rovnicí (17). Nehledíme-li k permutacím indexů, jsou tedy tři možnosti:

I. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = r_1$;

II. $x_1 = x_2 = x_3 = r_1\,,\; x_4 = r_2$;

III. $x_1 = x_2 = r_1\,,\; x_3 = x_4 = r_2\,.$

V případě I plyne z kterékoli rovnice (17) rovnice

$$x_i^3 + x_i - 2 = 0\,, \tag{22}$$

která má reálný kořen $x_i = 1$. Rozložíme trojčlen

$$(x_i^3 + x_i - 2) = (x_i - 1)\,(x_i^2 + x_i + 2);$$

protože kvadratická rovnice $x_i^2 + x_i + 2 = 0$ nemá žádný reálný kořen, má rovnice (22) jediný reálný kořen 1 a dostáváme tedy opět řešení (21).

V případě II dostaneme jednak $r_1^3 r_2 = q$, jednak podle (20) $r_1 r_2 = q$ a odtud

$$r_1 r_2 (r_1^2 - 1) = 0 \,. \tag{23}$$

Z rovnice (23) vyjde buď $r_1 = 0$, to je však podle (20) vyloučeno, nebo $r_2 = 0$, což dává $q = 0$, $r_1 = 2$. To je však ve sporu se čtvrtou rovnicí (17). Musí tedy být $r_1^2 - 1 = 0$, neboli $r_1 = \pm 1$. Pro $r_1 = 1$ dostaneme z rovnice (18) $r_2 = 2 - r_1 = 1$, a tudíž opět řešení (21). Pro $r_1 = -1$ dostaneme z rovnice (18) $r_2 = 2 - r_1 = 3$, a tudíž další možné řešení

$$x_1 = x_2 = x_3 = -1,\ x_3 = 3 \,, \tag{24}$$

které skutečně soustavě (17) vyhovuje.

Zbývá vyšetřit případ III. Zde je $r_1^2 r_2^2 = q$, $r_1 r_2 = q$, tj.

$$r_1 r_2 (r_1 r_2 - 1) = 0 \,. \tag{25}$$

Řešení $r_1 = 0$ nebo $r_2 = 0$ se ukázala v předchozím jako nemožná. Rovnost $r_1 r_2 - 1 = 0$ nemůže platit, neboť je $r_1 r_2 = q < 1$.

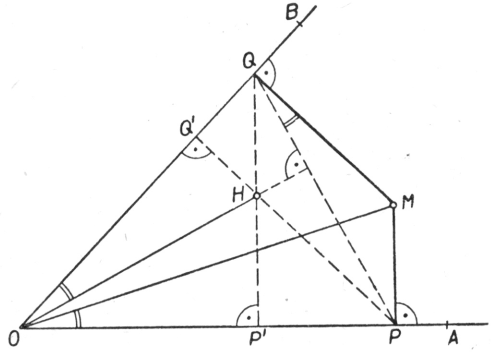
Úloha má tedy jen dvě řešení v oboru reálných čísel: jsou to řešení (21) a (24).

Úloha 5. Zvolme nejprve libovolný bod M ležící uvnitř úhlu $\sphericalangle AOB$, spusťme z něho kolmice MP, MQ na polopřímky OA, OB; dále sestrojme výšky QP', PQ' trojúhelníku OPQ a jejich průsečík H (obr. 38). Přímka OH je třetí výškou trojúhelníka OPQ, proto platí

$$OH \perp PQ \,.$$

Body P, Q leží na kružnici sestrojené nad průměrem OM; podle věty o obvodových úhlech platí

$$\sphericalangle PQM = \sphericalangle POM.$$



Obr. 38

Dále je

$$\sphericalangle HOQ = 90° - \sphericalangle OQP = \sphericalangle PQM\,,$$

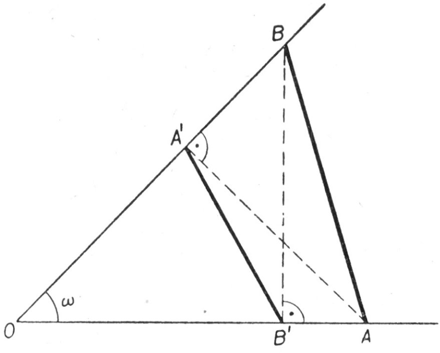
tedy

$$\sphericalangle POM = \sphericalangle HOQ = \varphi\,. \tag{26}$$

Označíme-li $\sphericalangle AOB = \omega$, platí

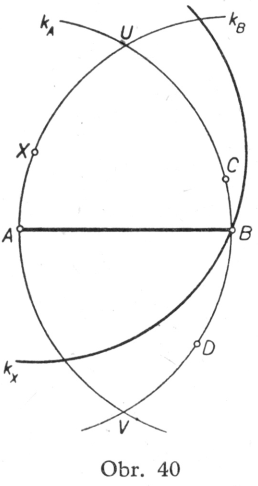
$$OH = OQ' \cdot \frac{1}{\cos\varphi} = OP \cdot \frac{\cos\omega}{\cos\varphi} = OM\,.\cos\varphi \cdot \frac{\cos\omega}{\cos\varphi} =$$
$$= OM\,.\cos\omega\,. \tag{27}$$

Bod H leží vždy uvnitř úhlu $\sphericalangle AOB$, neboť trojúhelník OPQ je ostroúhlý (to plyne z věty o obvodových úhlech). Ze vztahů (26), (27) pak vyplývá, že bod H je obrazem bodu M v zobrazení složeném ze souměrnosti S podle osy úhlu $\sphericalangle AOB$ a z homotetie $\mathbf{H}$, která má střed O a koeficient $\cos\omega$. Podobnost $\mathbf{P}$, která vznikne složením obou těchto zobrazení, převede úsečku AB v úsečku, jejíž krajní body jsou paty A', B' výšek trojúhelníku OAB



Obr. 39

spuštěných z bodů A, B (obr. 39). Lze totiž snadno dokázat, že paty A', B' jsou obrazy bodů A, B v podobnosti P. Z toho vyplývá, že obrazem vnitřku trojúhelníku OAB je vnitřek trojúhelníku $OA'B'$, obrazem úsečky AB je úsečka $A'B'$.



Obr. 40

Úloha 6. Odvodíme nejprve tuto pomocnou větu: Vycházejí-li z některého bodu A dané množiny $\mathfrak{M}$ aspoň tři průměry, pak existuje takový bod B množiny $\mathfrak{M}$, z něhož vychází jediný průměr (obr. 40).

Nechť z bodu A množiny $\mathfrak{M}$ vycházejí tři průměry AB, AC, AD; pak všechny tři body B, C, D leží na kružnici $k_A \equiv (A; d)$. Přitom body B, C, D leží v středovém úhlu velikosti $\alpha \leqq 60°$, neboť vzdálenost každých dvou z nich je menší nebo rovna d. Zvolme označení tak, aby polopřímka AB náležela úhlu $\sphericalangle CAD$ a hledejme všechny průměry, které vycházejí z bodu B.

Je-li BX takový průměr, pak bod X leží na kružnici $k_B \equiv (B; d)$; kružnice k_A, k_B se protnou ve dvou bodech, které označíme U, V tak, aby bod $U(V)$ náležel polorovině $ABC(ABD)$. Náleží-li krajní bod $X \not\equiv A$ průměru BX oblouku AU, pak kružnice $k_X \equiv (X; d)$ má bod U za vnitřní, V za vnější a prochází bodem B. Proto každý bod $V \not\equiv B$ oblouku BV, tedy i bod D, leží vně kružnice k_X, tj. platí $DX > d$, což je spor. Dokázali jsme tedy, že z bodu B vychází jen jediný průměr, totiž BA.

Z pomocné věty vyplývá, že daná množina může být jen dvojího typu: buď I. z každého jejího bodu vycházejí *právě dva* průměry, nebo II. obsahuje bod, z něhož vychází *nejvýše jeden* průměr. Větu z úlohy 6 dokážeme nyní indukcí. Předpokládejme, že platí pro každou množinu $\mathfrak{M}_n$ o n bodech ($n \geqq 3$) a zvolme množinu $\mathfrak{M}_{n+1}$ o $n + 1$ bodech. Je-li množina $\mathfrak{M}_{n+1}$ typu I, má $\frac{2(n+1)}{2} = n + 1$ průměrů. Je-li množina $\mathfrak{M}_{n+1}$ typu II, zvolíme její bod A, z něhož vychází nejvýše jeden průměr. Vynecháme-li z množiny $\mathfrak{M}_{n+1}$ bod A, dostaneme množinu $\mathfrak{M}_n$, která má nejvýše n průměrů; množina $\mathfrak{M}_{n+1}$ má tedy nejvýše $n + 1$ průměrů.

Tím je dokázán indukční krok; protože věta z úlohy 6 platí zřejmě pro $n = 3$, platí pro každé přirozené n.

Poznámky k úlohám a jejich řešením

Když Mezinárodní jury vybírala úlohy a rozhodovala o přidělení počtu bodů, byla v časové tísni. Tak se stalo, že bylo sice velmi mnoho diskutováno o formulaci *úlohy* **3**, ale vůbec se neanalyzovala *úloha* **6**, která byla velmi obtížná a k jejímuž řešení bylo v podstatě vždy třeba umělého obratu. Tato úloha se stala skutečně zkušebním kamenem matematického vzdělání a nadání účastníků; správně ji rozřešilo jen několik žáků z SSSR a Maďarska. Při jednání Jury nebyl také čas uvážit různé způsoby řešení úloh a chyby, které se mohou vyskytnout a stanovit zásady, jak budou tyto chyby posuzovány. Tím byla velmi stížena činnost opravujících i koordinátorů, kteří musili teprve během své práce stanovit zásady pro hodnocení, někdy se vracet a měnit klasifikaci.

První úloha byla nejsnazší; hlavní chyba, která se tu vyskytovala, bylo vynechání obrácení postupu, pokud ovšem nerovnosti byly řešeny umocněním. Řada žáků však řešila úlohu jinak, např. použitím vzorce

$$\sqrt{1 \pm \sin 2x} = |\cos x \pm \sin x|$$

a pak nebylo třeba postup obracet.

Také *úloha* **4** nevyžadovala vtip. Žáci často nepoužili umělého obratu, který je v autorském řešení, ale prováděli eliminace neznámých obvyklým způsobem. Obě řešení úlohy je možno zjistit experimentálně; těžiště úlohy je v zjištění, že soustava nemá jiné řešení. V původním návrhu úlohy se měla hledat všechna řešení soustavy (17) v oboru *komplexních čísel*. Poněvadž ve většině zúčastněných států se komplexní čísla na středních školách neprobírají, byla úloha redukována na zadaný tvar.

Pěkná a vhodná byla *úloha* **2**. Někteří žáci ji řešili pomocí vlastností determinantů; dokázali, že determinant dané soustavy je číslo kladné, což je velmi snadné.

Označme $s_i = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}$, $i = 1, 2, 3$; pak je podle předpokladu $s_i > 0$. Upravíme determinant soustavy:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_1 & a_{12} & a_{13} \\ s_2 & a_{22} & a_{23} \\ s_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = s_1(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) +$$

$$+ s_2a_{13}a_{32} + s_3a_{12}a_{23} - s_2a_{12}a_{33} - s_3a_{22}a_{13} . \qquad (28)$$

Druhý, třetí, čtvrtý a pátý člen součtu (28) jsou kladná čísla; dokážeme-li, že je $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} > 0$, bude dokázáno, že je $D > 0$.

Protože je $a_{31} < 0$, $s_3 > 0$, je $a_{32} + a_{33} > 0$; znásobíme-li tuto nerovnost kladným číslem $-a_{23}$ a přičteme-li na obou stranách součin $a_{22}a_{33}$, dostaneme $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} - a_{23}a_{33} > a_{22}a_{33}$, neboli

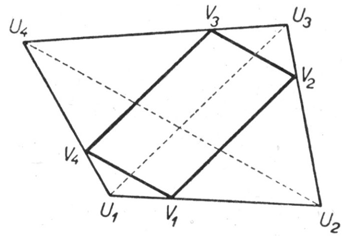
$$a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} > a_{33}(a_{23} + a_{22}) . \qquad (29)$$

Protože je $a_{21} < 0$, $s_2 > 0$, je $a_{23} + a_{22} > 0$ a z nerovnosti (29) pak plyne $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} > 0$.

Řešení bez použití determinantů, které jsme uvedli výše, je v podstatě řešení čs. reprezentanta *D. Preisse*.

Jak jsme se již dříve zmínili, bylo při zasedání Jury mnoho diskutováno kolem *úlohy* **3**, tj. kolem otázky, má-li se žákům „pomoci“ tím, že se dá dílčí úloha: odvodit vzorec pro objem čtyřstěnu, který je dán délkami protějších hran, jejich vzdáleností a odchylkou. Tato formule byla totiž východiskem v autorském řešení. Nakonec se však rozhodlo „nevnucovat“ žákům tento způsob řešení, neboť jsou možné i způsoby jiné. A skutečnost rozhodnutí Jury potvrdila: žáci řešili úlohu nejrůznějšími metodami — třeba i integrálem (vlastně aplikací Cavalieriova principu), jako např. D. Preiss. Pěkná a obratná řešení podali někteří sovětští žáci.

Také *úloha* **5** nebyla náročná a poskytovala celou řadu možností různých řešení: pomocí zobrazení (viz řešení výše uvedené), metodou souřadnic aj. Originální řešení pomocí rovnoběžníku vepsaného do čtyřúhelníku podal třináctiletý československý účastník *Bohuš Sivák*:



Obr. 41

Řešení. Mějme body V_1, V_2, V_3, U_1, U_2, U_3, U_4 tak, že body V_1, V_2, V_3 leží na úsečkách U_1U_2, U_2U_3, U_3U_4 a platí $U_1V_1 : V_1U_2 = m : n$, $U_2V_2 : V_2U_3 = n : m$, $U_3V_3 : V_3U_4 = m : n$. Potom na úsečce U_4U_1 existuje právě jeden bod V_4, pro který platí $U_4V_4 : V_4U_1 = n : m$ a $V_1V_2V_3V_4$ je rovnoběžník (obr. 41).

Důkaz. 1. $U_1U_2U_3U_4$ je konvexní čtyřúhelník. Podle volby bodů V_1, V_2, V_3 platí, že

$$\triangle U_1U_2U_3 \sim \triangle V_1U_2V_2\,, \qquad \triangle U_2U_3U_4 \sim \triangle V_2U_3V_3;$$

tedy je

$$U_1U_3 \parallel V_1V_2\,, \qquad U_2U_4 \parallel V_2V_3\,.$$

Pro bod V_1 na úsečce U_1U_2 platí

$$\frac{U_1V_1}{U_2V_2} = \frac{m}{n}\,.$$

Na úsečce U_1U_4 existuje právě jeden bod V'_4, pro který platí

$$\frac{U_1V'_4}{U_4V'_4} = \frac{m}{n}\,, \quad U_2U_4 \parallel V_1V'_4\,,$$

a tedy také

$$V_2V_3 \parallel V_1V_4'\,.$$

Pro bod V_3 na úsečce U_3U_4 platí obdobně $\dfrac{U_3V_3}{U_3U_4} = \dfrac{m}{n}$.
Na úsečce U_1U_4 existuje právě jeden bod V_4'', pro který platí

$$\frac{U_1V_4''}{U_4V_4''} = \frac{m}{n}, \quad V_1U_3 \parallel V_3V_4'',$$

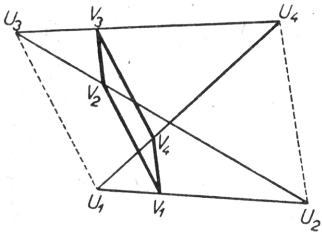
a tedy také

$$V_1V_2 \parallel V_3V_4''\,.$$

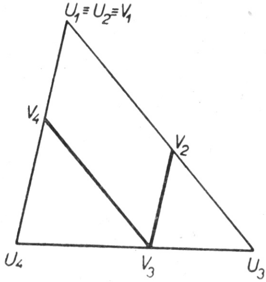
Protože existuje jediný bod, který dělí úsečku v daném poměru, je $V_4' \equiv V_4''$. Označíme-li tento bod V_4, pak $V_1V_2V_3V_4$ je rovnoběžník.

2. Úsečky U_1U_4, U_2U_3 se protínají. Bod V_4 se sestrojí a důkaz, že $V_1V_2V_3V_4$ je rovnoběžník, se provede podobně jako v případě 1. Je-li $U_1U_3 \parallel U_2U_4$, přejde $V_1V_2V_3V_4$ v úsečku, protože $V_2V_3 \parallel U_2U_4 \parallel U_1U_3 \parallel V_3V_4$ (obr. 42).

3. Dva z bodů U_1, U_2, U_3, U_4 jsou totožné; nechť např. $U_1 \equiv U_2$ (obr. 43). Pak bod V_4 dostaneme tak, že



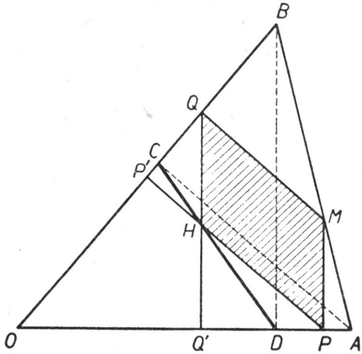
Obr. 42



Obr. 43

bodem V_3 vedeme rovnoběžku s $U_2U_3 \equiv U_1U_3$. V tomto případě musí byt $U_1 \equiv U_2 \equiv V_1$.

Zvolíme-li v některém z případů 1 až 3 jinou polohu bodu V_4 uvnitř úsečky U_1U_4, pak nebude $V_1V_2 \parallel V_3V_4$.



Obr. 44

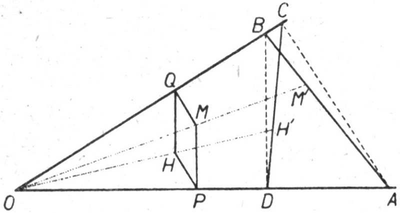
a) Podle obr. 44 označme C, D paty výšek trojúhelníku AOB, vedených vrcholy A, B. Je-li $DP : PA = m : n$, je

$$AM : BM = n : m,$$
$$BQ : CO = BM : AM = m : n\,.$$

Podle dříve dokázané věty existuje na úsečce CD bod H, pro který platí $QH \parallel MP$, $PH \parallel MQ$, tj. $QH \perp OP$, $PH \perp OQ$. Bod H je tedy průsečíkem výšek trojúhelníku OPQ a musí ležet na úsečce CD. Probíhá-li bod M úsečku AB, probíhá bod H úsečku CD.

b) Zvolme na úsečce CD bod H. Stejně jako dříve dokážeme, že je-li $HPMQ$ rovnoběžník, leží bod M na úsečce AB. Geometrickým místem bodů H je tedy úsečka CD.

c) Zvolme uvnitř $\triangle AOB$ bod M; pak existuje právě jedna stejnolehlost se středem O a koeficientem $k > 1$, která převádí bod M v bod M' úsečky AB. Jak jsme zjistili v odstavcích a), b), leží bod H', sestrojený podle textu úlohy, na úsečce CD. Stejnolehlost s koeficientem $0 < k < 1$ a se středem O převede bod H' v bod H, příslušný k bodu M. Protože se změnou polohy bodu M se mění koeficient $\frac{1}{k}$ od nuly do jedné, je geometrickým místem bodů H vnitřek trojúhelníku OCD (obr. 45).



Obr. 45

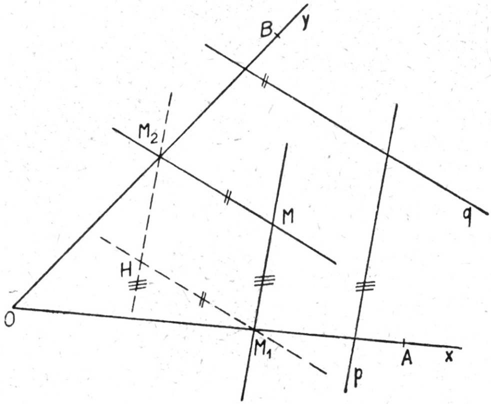
Mezi rumunskými řešiteli se vyskytl případ zobecnění úlohy ve smyslu afinním: místo výšek trojúhelníku použil žák přímek daného směru.

Afinní zobecnění úlohy, které provedl žák *A. Badescu*, zní takto:

Buďte OA, OB dvě různoběžky, p, q dvě různoběžky, z nichž žádná není rovnoběžná ani s přímkou OA, ani s přímkou OB. K libovolnému bodu M roviny OAB sestrojíme bod H takto: Bodem M vedeme rovnoběžku s přímkou $p(q)$, její průsečík s přímkou $OA(OB)$ označíme $M_1(M_2)$. Trojúhelník M_1MM_2 doplníme na rovnoběžník M_1MM_2H.

Probíhá-li bod M úsečku (vnitřek trojúhelníku), probíhá bod H také úsečku (vnitřek trojúhelníku).

Řešení této zobecněné úlohy, při němž se užívá rovnoběžkových souřadnic, lze formulovat takto: zvolíme přímky OA, OB za osy x, y rovnoběžkových souřadnic (obr. 46).



Obr. 46

Označíme souřadnice bodů: $M = [x, y]$, $M_1 = [u, 0]$, $M_2[0, v]$, $H = [x', y']$. Pak platí

$$\begin{aligned} y &= a(x - u), & y' - v &= a \,.\, x, \\ y - v &= b \,.\, x, & y' &= b(x' - u)\,. \end{aligned} \tag{30}$$

Přitom konstanty a, b, které charakterizují směry přímek p, q, vyhovují podmínkám

$$a \neq 0\,, \quad b \neq 0\,, \quad a \neq b\,.$$

Z rovnic (30) eliminujeme nejprve u, v; tím dostaneme soustavu dvou lineárních rovnic pro x', y'

$$-bx' + y' = \frac{by}{a} - bx\,, \qquad (31)$$

$$ax' - y' = bx - y\,.$$

Ze soustavy (31) vyjádříme x', y' jako funkce x, y; vyjde

$$x' = -\frac{y}{a}\,, \quad y' = -bx\,. \qquad (32)$$

Rovnice (32) vyjadřují zobrazení (afinitu); přiřadění bodů M, H je zřejmě vzájemně jednoznačné. Z rovnic (32) snadno dokážeme, že probíhá-li bod M úsečku (vnitřek trojúhelníku, přímku, úhel apod.), probíhá bod H útvar téhož druhu.

Řešení zobecněné úlohy, které jsem uvedl, není ovšem původní řešení žákovo. Při korigování se ukázalo, že pokud žáci použili metody souřadnic, byla jejich řešení dosti neobratná nebo neúplná. Je to dokladem, že prvkům analytické geometrie se nevyučuje na středních školách účelně.

Vcelku lze říci, že soutěžní úlohy byly vybrány a zadány (až snad na *úlohu* **6**) vhodně, přesto, že členové Jury měli jen velmi málo času k jejich předběžnému prostudování. Některá žákovská řešení ukazují oproti olympiádám dřívějším rostoucí úroveň.

4. Československé družstvo

Československé družstvo tvořili tito žáci:

Jan Brodský z Brna,
Jura Charvát z Příboru,

Tamara Marcisová z Bratislavy,
Pavel Novotný z Olomouce,
David Preiss z Jindřichova Hradce,
Miroslav Řezníček z Hradce Králové,
Bohuš Sivák ze Zvolena a
Milan Štědrý z Chotěboře.

Pavel Novotný byl absolventem 2. třídy SVVŠ, Bohuš Sivák 8. třídy ZDŠ, všichni ostatní 3. třídy SVVŠ.

Žáci byli vybráni jako v dřívějších letech na základě výsledků v třetím kole domácí olympiády. Tento způsob se však opět neosvědčil: ukázalo se, že nejlepší z vítězů třetího kola měli v VII. MMO nejslabší výsledky. Zdá se, že budeme musit přejít k jinému způsobu vybírání a přípravy našich reprezentantů než dosud. Je totiž skutečností, že úroveň mezinárodních matematických olympiád vzrůstá a že výsledky delegací — i když jde stále o soutěž jednotlivců — jsou pokládány za vizitku příslušného státu v oblasti školské matematiky. Není proto vhodné vysílat družstvo, v němž je polovina i více slabých žáků. Může-li nevelíké Maďarsko vyslat družstvo, které získá 7 cen, z toho 3 první, mohli bychom to udělat i my, neboť máme jistě dostatečný počet nadaných žáků; s jejich nadáním však špatně hospodaříme. Tabulky v přílohách 3 a 4 jsou pro nás skutečně zarmucující a svědčí o stálém ústupu z dřívějšího dobrého průměru. Největší možný dosažitelný počet bodů pro družstvo byl 320; sovětské družstvo dosáhlo téměř 90%, my ani ne 50%. To vše ukazuje, že naše vyučování matematice a hlavně naše péče o nadané žáky nejsou na výši. Máme sice ve třech městech speciální třídy, ale výběr žáků do nich není uspokojivý a učitelé neučí tak, jak to současná doba vyžaduje. Pořádáme sice přednášky a semináře pro olympioniky, ale ty nemají leckdy potřebnou úroveň a nadaní žáci nemají dost času ani chuti ke studiu, protože jsou příliš rozptylováni školními i mimoškolními povinnostmi.

Projděme *tabulku 4*; druhý sloupec ukazuje, že jen tři žáci z osmi se dobře vyrovnali s nepříliš složitou úlohou o soustavě tří lineárních homogenních rovnic. Plná polovina zcela selhala v úloze stereometrické, plná polovina měla nevyhovující výsledek v celkem běžné planimetrické úloze na geometrické místo bodů. Naproti tomu neúspěch v úloze 6 není třeba brát příliš tragicky; svědčí jen o tom, že nikdo z našeho družstva neměl trénink „vyššího řádu“.

Co naši žáci neumějí? Stále vázne obracení postupů, projevuje se nedostatek představivosti, zvláště prostorové, malá zběhlost v používání geometrických zobrazení a metody souřadnic, hlavně však je vidět často neobratný přístup k řešení problému a malá kombinační schopnost.

Na nepříliš příznivé umístění našich reprezentantů měla vliv asi také jejich celková dispozice. Snad působením výchovy a režimu života jsou naši žáci málo průbojní a vytrvalí, leckdy lhostejní nebo zase neklidní: zdá se, že i na tomto poli by mohla mít naše pedagogika dosti práce.

Na závěr bychom chtěli vyslovit naději, že se poučíme z výsledků našeho družstva v letošní MMO a že učiníme vše možné, aby naše umístění na VIII. MMO v Sofii bylo příznivější.

Příloha 1

Vedoucí delegací a jejich zástupci

Bulharsko: *Prof. dr. Alippi Mateev*, děkan mat. fakulty university v Sofii.
Inspektor *Stoian Budurov*.

Československo: *Docent Jan Vyšín*, mat.-fyz. fakulta KU v Praze.
František Zítek, CSc., Matematický ústav ČSAV.

Finsko: *Jarmo Nyström*, ředitel střední školy v Tapiole.
Anja Hormio.

Jugoslávie: *Prof. dr. Milica Ilićová-Ďajovičová*, Stavební fakulta university v Bělehradě.
Magistr Vladimír Mićić.

Maďarsko: *Hódi Endre*, vedoucí vědecký pracovník Optických závodů v Budapešti.
Reiman István.

Mongolsko: *Prof. dr. Gensengin Ischzeren*, universita v Ulánbátoru.
Balsh Altangerel.

Německá demokratická republika: *Prof. dr. Hans Joachim Weinert*, Vysoká škola pedagogická, Potsdam.
Johannes Gronitz.

Polsko: *Prof. dr. Mieczyslaw Czyżykowski*, Polytechnika ve Varšavě.
Magister Andrzej Mąkowski.

Rumunsko: *Prof. Tiberiu Roman*, Vysoká škola technická v Bukurešti.
Prof. Zlate Bogdanov.

Sovětský svaz: *Doc. E. Aleksandrovna Morozovova*, Mech.-matem. fakulta Lomonosovovy university v Moskvě.
Ivan Semjonovič Petrakov.

Příloha 2

Přehled udělených cen a pochvalných uznání

1. cena: (8)	*Pavel Elecher*	SSSR	40 bodů
	Lovász László	MLR	40 bodů
	Andrej Subkov	SSSR	39 bodů
	Sergěj Valander	SSSR	39 bodů
	Anatolij Peresezkij	SSSR	38 bodů
	Nikolaj Širokov	SSSR	38 bodů
	Makai Endre	MLR	38 bodů
	Pelikan József	MLR	38 bodů
2. cena: (12)	*Alexander Karsanov*	SSSR	36 bodů
	Liliana Bucurová	RLR	34 body
	Pósa Lájos	MLR	34 body
	David Preiss	ČSSR	32 body
	Krzysztof Nowiński	PLR	32 body
	Alexandru Bădescu	RLR	32 body
	Dan Voiculescu	RLR	32 body
	Vasilij Stojanovskij	SSSR	32 body
	Jacques Weinstein	RLR	32 body
	Berkes István	MLR	31 bod
	Manfred Brandt	NDR	30 bodů
	Wolfgang Klamt	NDR	30 bodů
3. cena: (17)	*Tamara Marcisová*	ČSSR	29 bodů
	Peter Enskonatus	NDR	29 bodů
	Zeno Fortuna	PLR	29 bodů
	Michal Misiurewicz	PLR	29 bodů
	Octavian Biscă	RLR	29 bodů

3. cena: (pokrač.)	*Walter Liepe*	NDR	28 bodů
	Laczkovich Miklós	MLR	28 bodů
	Velimir Bole	FSRJ	27 bodů
	Elekes György	MLR	27 bodů
	Tadeusz Figiel	PLR	26 bodů
	Eugen Popa	RLR	24 body
	Bohuš Sivák	ČSSR	22 body
	Wilhelm Otto	NDR	22 body
	Miroslav Ašić	FSRJ	22 body
	Ion Stefănescu-Sabba	RLR	21 bod
	Jordan Tabor	BLR	21 bod
	Miroslav Řezníček	ČSSR	20 bodů

Pochvalná uznání:

Timo Erkama, RF (Finsko)
Krzystof Nowiński, PLR
Avgaanzere Damdinsuren, Mong. LR
Alexandru Adescu, RLR
Lovász László, MLR
Pelikan Jósef, MLR

Příloha 3

Přehled počtu bodů, jež získala družstva v jednotlivých úlohách

Stát \ Úloha č.	1	2	3	4	5	6	Součet
Bulharsko	12	6	36	21	10	8	93
Československo	28	17	29	37	33	15	159
Finsko	12	6	0	24	17	3	62
Jugoslávie	26	20	15	33	18	25	137
Maďarsko	29	36	50	38	45	46	244
Mongolsko	8	8	6	22	8	11	63
Něm. dem. republika	23	17	42	34	37	22	175
Polsko	28	25	33	44	40	8	178
Rumunsko	27	32	50	39	53	21	222
Sovětský Svaz	25	46	64	43	42	61	281

Příloha 4

Přehled počtu bodů, které získali čs. žáci v jednotlivých úlohách

Žák \ Úloha č.	1	2	3	4	5	6	Součet
Brodský	0	0	4	4	2	1	11
Charvát	4	4	1	3	2	2	16
Marcisová	4	0	8	6	7	4	29
Novotný	4	1	0	6	3	3	17
Preiss	4	6	8	5	5	4	32
Řezníček	4	1	8	6	1	0	20
Sivák	4	5	0	6	6	1	22
Štědrý	4	0	0	1	7	0	12
Součet	28	17	29	37	33	15	159
Maximálně dosažitelný počet	32	48	64	48	56	72	320