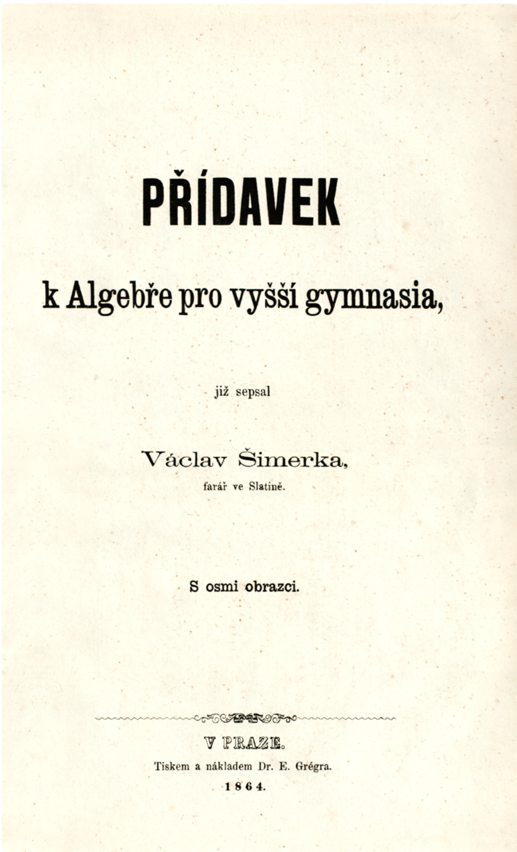
[Úu13], obálka, 14,1 × 21 cm.

POČET INFINITESIMÁLNÍ

Úvod

Spolu s *Početnicemi pro měšťanské školy* J. Úlehla sepsal v roce 1906 ještě druhou učebnici matematiky *Počet infinitesimální* [Úu13]. Vyložil v ní základy diferenciálního a integrálního počtu, v té době tzv. vyšší matematiky a navázal jí na existující česky psané studijní texty o této problematice. Pro zařazení rozboru Úlehlovy knihy do dějinného i matematického kontextu proto nejdříve v této kapitole přiblížíme první české učebnice kalkulu.

První české učebnice vyšší matematiky



PŘÍDAVEK

k Algebře pro vyšší gymnasia,

již sepsal

Václav Šimerka,

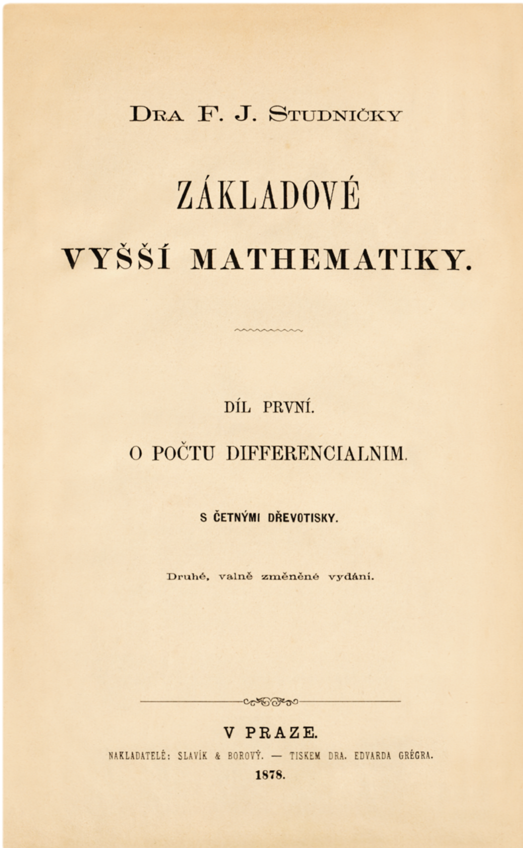
farář ve Slatině.

S osmi obrazci.

V PRAZE.

Tiskem a nákladem Dr. E. Grégra.

1864.



DRA F. J. STUDNIČKY

ZÁKLADOVÉ

VYŠŠÍ MATHEMATIKY.

DÍL PRVNÍ.

O POČTU DIFFERENCIALNIM.

S ČETNÝMI DŘEVOTISKY.

Druhé, valně změněné vydání.

V PRAZE.

NAKLADATELÉ: SLAVÍK & BOROVÝ. — TISKEM DRA. EDVARDA GRÉGRA.

1878.

Titulní listy učebnic [Ši64] a [St78], 13,6 × 22,2 cm a 13,5 × 21,4 cm.

Před přijetím tzv. Marchetovy reformy v roce 1909 nebyla matematická analýza (resp. její základy) povinně zařazena do středoškolského vzdělávání.[1] Byla přednášena na vysokých školách a byla v českých učebnicích zpracovávána až po zavedení výuky v mateřském jazyce na našem území. K tomu postupně došlo díky zrovnoprávnění národních jazyků v rakouské monarchii v roce 1848, konkrétně na

[1] O Marchetově reformě viz např. Trkovská D., *Historický vývoj geometrických transformací.* Edice Dějiny matematiky, svazek č. 58, Matfyzpress, Praha, 2015, str. 103–104.

pražské polytechnice, resp. tehdejším *Polytechnickém Ústavu Království Českého* v roce 1864 a na pražské *Karlo-Ferdinandově universitě* v roce 1871.[2]

Níže přiblížené učebnice byly (s jedinou výjimkou, Šimerkovou prací) připraveny jako vysokoškolské studijní texty. Je důležité poznamenat, že nebyly schvalovány tehdejším Ministerstvem kultu a vyučování a nebyly ani vázány jakýmikoliv osnovami. Byly svým způsobem odrazem osobnosti autora, jeho odborného zaměření i pedagogického působení. Rovněž byly dokladem jeho obětavé snahy o sepsání dosud chybějící české matematické literatury a s tím související tvorby české odborné terminologie.[3]

Šimerkův *Přídavek k algebře*

Nejstarší českou učebnici vyšší matematiky publikoval v roce 1864 profesor českobudějovického gymnázia Václav Šimerka (1819–1887).[4] Původně zamýšlel její kapitoly zařadit do své *Algebry čili počtářství obecné pro vyšší gymnasia* [Ši63]. Vzhledem k platným osnovám však neobdržel ministerské schválení pro zařazení kalkulu do této středoškolské učebnice. Práci proto připravil k samostatnému vydání a příhodně ji nazval *Přídavek k algebře pro vyšší gymnasia* [Ši64]. Určil ji nadanějším středoškolským studentům, kteří by se chtěli sami seznámit se základy infinitezimálního počtu.[5]

Na nevelikém rozsahu *Přídavku*, pouze 56 stran V. Šimerka zpracoval diferenciální a integrální počet na základě intuitivního chápání problematiky, tedy bez

---

[2] Uvedeny jsou tehdejší názvy škol, jejichž pokračovateli jsou dnešní *České vysoké učení technické v Praze* a *Univerzita Karlova v Praze*.

[3] Důležitým vodítkem pro přiblížení českých učebnic vyšší matematiky a jejich zasazení do dobového kontextu je monografie *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918* [BM08].

[4] V. Šimerka se narodil ve Vysokém Veselí u Nového Bydžova. Po absolvování gymnázia v Jičíně studoval filozofii v Praze a teologii v Hradci Králové. Od roku 1845 působil jako kaplan ve Žlunicích a Slatinách na Jičínsku a studoval matematiku a fyziku. V roce 1853 získal místo suplujícího profesora na německém gymnáziu v Českých Budějovicích. V roce 1862 přešel zpět do východních Čech, stal se farářem ve Slatině nad Zdobnicí a později v Jenšovicích u Vysokého Mýta. Zemřel v Praskačce u Hradce Králové (na zdejším hřbitově má výpravný hrob zhotovený *Jednotou českých mathematiků*). Za celý život publikoval více než 20 prací, vedle středoškolských učebnic napsal odborné články a knihy převážně z teorie čísel a posloupností. O Šimerkově životě a díle viz např. Fiala J., *Síla přesvědčení Václava Šimerky.* In Pátý L. (ed.), *Jubilejní almanach Jednoty čs. matematiků a fyziků 1862–1987.* JČSMF, Praha, 1987, str. 97–106.

[5] Proces schvalování Šimerkovy učebnice algebry byl zajímavě nastíněn v její *Předmluvě.* Vzhledem k tomu, že zde byly také připomenuty recenze na knihu a bylo zdůvodněno samostatné vydání *Přídavku* včetně jeho určení, připojme nyní delší úryvek Šimerkova úvodního komentáře: *Dle rady některých z mých vědeckých přátel a maje za to, že čas nynější toho požaduje, přijal jsem i základy počtu differencialného a integralného ve spis ten, vynechav za to řetězce co méně důležité … Takto spořádaný rukopis zaslal jsem v máji 1861 slav. c. k. místodržitelství se žádostí, by byl za školní knihu přijat. V srpnu 1862 obdržel jsem od vys. c. k. ministerstva svůj rukopis zpět, s ním pak čtveru recensi. Všechny ty kritiky shodují se v tom, že jest spis onen práce nová, a vyniká zvláštní jasností – vlastnosti to, jimiž se každá podobná práce vykázati nemůže. Co do vady udáno vynechání řetězců, že jich semo tam ve fysice znáti třeba, mimo to vytýkáno z dvou stran knize mé množství obsahu, přijmutím totiž počtu differencialného a integralného že budou žáci přetíženi. Jiným se však počet ten pro stručnost a srozumitelnost velmi líbil. Vysoké ministerstvo rozhodlo se dle stávajícího školního plánu pro vynechání. Chtěje požadavkům těm vyhověti, předělal jsem ještě jednou spis ten, pojal v něj řetězce … Co do počtu infinitesimalného podávám jej, bych obojímu přání vyhověl, co přídavek k algebře, by tak schopnější žáci, budouli chtíti, sami sobě známost jakousi tohoto důležitého počtu opatřiti mohli …*

([Ši63], nestránkovaná *Předmluva*)

přesného teoretického výkladu a zejména se zřetelem na početní dovednosti. Text strukturoval do šesti kapitol, v prvních čtyřech věnovaných diferenciálnímu počtu vyložil diferenciál a diferenciální poměr, techniku derivování reálné funkce jedné proměnné, Taylorův rozvoj, určování hodnot výrazů jdoucích limitně ke tvaru $\frac{0}{0}$ a pravidla užitečná k určování průběhu funkce. V páté kapitole představil neurčitý integrál a popsal techniku integrování. Do poslední části zařadil některá užití kalkulu, zejména hledání rovnic tečen a normál ke křivkám, „praktické“ úlohy na hledání extrémů[6] nebo známé geometrické aplikace určitých integrálů (výpočty obsahů ploch pod grafem funkce, délek křivek, objemů a povrchů plášťů rotačních těles atp.).

V. Šimerka neuvedl použitou literaturu, odkazoval se pouze na svoji učebnici algebry [Ši63]. V předmluvě této práce zmínil absenci ucelené české terminologie. Není však zřejmé, jakým způsobem se přesně vyrovnal s touto obtíží.[7]

Studničkovy učebnice matematické analýzy

Prvním autorem českých vysokoškolských učebnic matematické analýzy[8] byl František Josef Studnička (1836–1903),[9] profesor pražské polytechniky a později pražské univerzity. Během svého působení na polytechnice (v letech 1864 až 1871) vydal pro zdejší studenty sbírku *Vyšší mathematika v úlohách* [St66] a třídílnou učebnici *Základové vyšší mathematiky* [St68], [St71] a [St67]. Do první jmenované práce zařadil pouze soubor příkladů bez výsledků,[10] tedy nepředvedl postupy řešení, resp. jakékoliv teoretické poznámky. Úlohy členil podle zaměření do tří

[6] Tyto úlohy lze přiblížit citací jedné z nich:
Který do přímého kužele vepsaný válec jest největší? Který má největší povrch? Který největší pobočnou plochu? ([Ši64], str. 49)

[7] V. Šimerka k jazykovým otázkám poznamenal:
Nemalou obtíž působila mi stránka mluvnická. Slovník vědeckého názvosloví podává sice významy, jichž posud užíváno; mnohé z nich pocházejí však patrně z přehnaného purismu, jenž vědě více škody než užitku přináší. Na opak se ale zase názvy řecko-latinské nechtějí vždy českým skloňkům podrobovati. V případu tom šetřil jsem prostřední cesty. To samé činil jsem do skladny varuje se vždy všeho nuceného. ([Ši63], nestránkovaná *Předmluva*)

[8] K vysokoškolských učebnicím matematiky doplňme, že někteří profesoři připravili ještě tzv. litografické přednášky, neboli přepsaná a rozmnožená „skripta“ určená posluchačům ke čtení během studia. Infinitezimálnímu počtu byly věnovány svazky Weyr Ed., *Výklady o mathematice.* A. Vaňourek, Praha, I. díl, 1891, 310 stran, a II. díl, 1892, 271 stran; Blažek G., *I. Mathematika. Běh přednášek prof. Dr. G. Blažka.* Praha, 480 stran (rok neuveden, pravděpodobně 1894) a Zahradník K., *Přednášky o integraci differenciálních rovnic obyčejných. Letní semestr 1904.* Brno, 1904, 174 stran. Další informace k těmto pracím jsou uvedeny v [BM08], str. 259–260.

[9] F. J. Studnička se narodil v Janově u Soběslavi. V roce 1857 absolvoval gymnázium v Jindřichově Hradci, pokračoval studiem přírodních věd na filozofické fakultě vídeňské univerzity, kde promoval v roce 1861. Složil zkoušky učitelské způsobilosti a v roce 1862 nastoupil jako suplující profesor na vyšší německé gymnázium v Českých Budějovicích, kde nahradil odcházejícího Václava Šimerku. V letech 1864 až 1871 působil jako prozatímní docent a později jako řádný profesor vyšší matematiky a analytické mechaniky na pražské polytechnice. V roce 1871 přešel na místo řádného profesora matematiky na pražskou univerzitu, po jejím rozdělení na dvě samostatné školy roce 1882 působil na České univerzitě. Zemřel v Praze. Během života publikoval více než 300 prací. Zabýval se determinanty, kvaterniony, astronomií a meteorologií. Věnoval se rovněž popularizaci a historii vědy. Rozsáhlou částí Studničkovy tvorby byly vysokoškolské učebnice. Vedle matematické analýzy byly věnovány také algebře nebo analytické geometrii. O Studničkově životě a díle viz monografii *František Josef Studnička (1836–1903)* [BM98].

[10] F. J. Studnička do *Vyšší mathematiky v úlohách* zařadil 1051 úloh.

částí nazvaných *Počet differenciální a jeho upotřebení*, *Počet integrální a jeho upotřebení* a *Dodatek*. V poslední z nich uvedl cvičení k variačnímu počtu. Později sbírku přepracoval, zvýšil počet zadání o více než polovinu a práci publikoval pod stejným názvem (viz [St74]). Přestože tehdy působil již na univerzitě, opět ji určil především studentům polytechniky.

Učebnici *Základové vyšší mathematiky* F. J. Studnička připravoval ve spolupráci s profesorem polytechniky Gustavem Skřivanem (1831–1866).[11] Kvůli jeho úmrtí ji však dokončil sám. Nejprve vydal třetí díl *O integrování rovnic differenciálních a počtu variačním* [St67],[12] neboť jeho kapitoly již rozpracoval, poté první *O počtu differenciálním* [St68] a nakonec druhý *O počtu integrálním* [St71]. Z názvů dílů „je vidět“ jejich matematických obsah. Jelikož tyto práce byly analyzovány v knize věnované autorovu životu a dílu *František Josef Studnička (1836–1903)* [BM98], str. 111–119, charakterizujme je pouze stručně.

Studničkovy *Základy* byly sepsány mnohem podrobněji než Šimerkův *Přídavek*. Byly však rovněž založeny na intuitivním přístupu k problematice a byly proti době svého vzniku spíše odrazem pojetí infinitezimálního počtu v 18. století. Nezohledňovaly totiž ve výkladu zpřesňování matematické analýzy ve 2. polovině 19. století odrážející zejména ε a δ aritmetiku při zavádění pojmů a dokazování tvrzení.[13] Nedostatek exaktního vyjadřování by nebylo adekvátní vnímat zcela negativně, neboť F. J. Studnička připravil tyto texty s cílem předvést základní metody kalkulu potřebné k řešení praktických úloh technických oborů.[14] Vzhledem k nedostatku českého matematického názvosloví tvořil řadu termínů sám nebo překládal původní pojmenování z němčiny a francouzštiny. Během působení na univerzitě připravoval druhé přepracované vydání *Základů* (publikoval však jen první díl, viz [St78]) a napsal dvě učebnice nazvané *Všeobecné tvarosloví algebraické čili nauka o konečných i nekonečných součtech čili řadách, součinech a podílech čili řetězcích* [St80] a *Výklady o funkcích monoperiodických neboli o nižších funkcích transcendentních* [St92]. Vyložil v nich řady, součiny, řetězové zlomky a elementární funkce. Svazky plánoval doplnit ještě třetím *O rovnicích a jich řešení*[15] a obsáhnout tím celou matematickou analýzu tehdejšího vysokoškolského studia.

Studničkovy učebnice vzniklé v době jeho univerzitního působení byly důležitým doplněním českých studijních textů, byly významné pečlivým uspořádáním

[11] G. Skřivan byl prvním tzv. řádným profesorem elementární a vyšší matematiky s českou vyučovací řečí na polytechnice v Praze. Pro více informací o jeho životu a díle viz Slavík J., *Životní příběh prof. Gustava Skřivana*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.), *32. mezinárodní konference Historie matematiky*. Matfyzpress, Praha, 2011, str. 245–254.

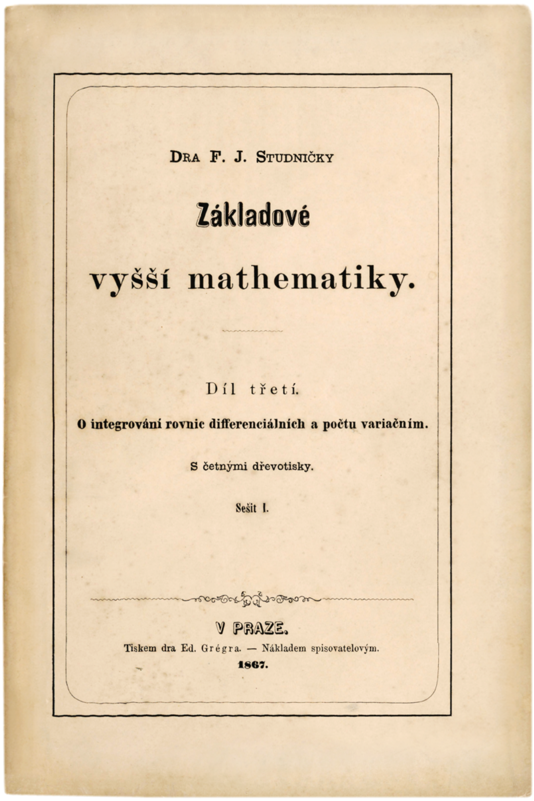
[12] Pro úplnost uveďme, že kapitola věnovaná variačnímu počtu (nazvaná *Dodatek*) byla později rozdělena do dvou částí a vydána znovu jako samostatné brožury Studnička F. J., *Přednáška o původu a rozvoji počtu variačního*. Nákl. vl., Praha, 1871, 15 stran, a Studnička F. J., *O počtu variačním*. Nákl. vl., Praha, 1872, 54 stran.

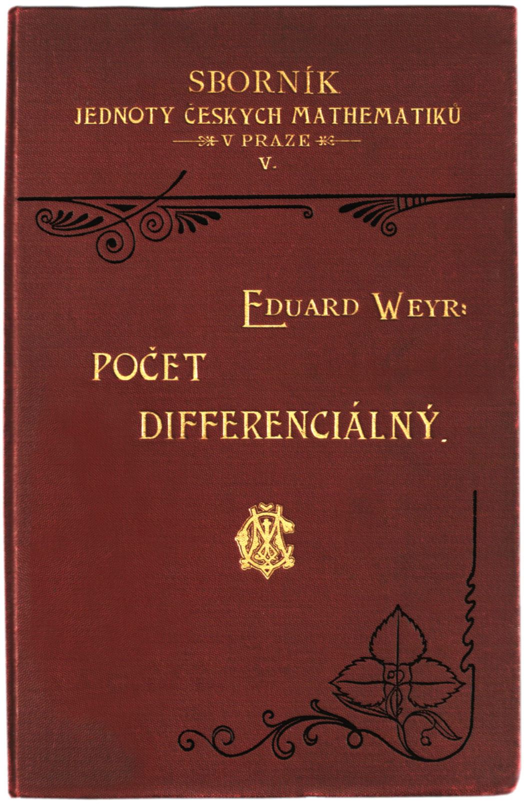
[13] Pro seznámení s vývojem a zpřesňováním matematické analýzy viz Netuka I., Schwabik Š., *Vznik a vývoj matematické analýzy*. In Šedivý J. (ed.), *Světonázorová výchova v matematice*. JČSMF, Praha, 1987, str. 127–156.

[14] Na druhou stranu můžeme považovat za nešťastné, že F. J. Studnička používal tyto učebnice i při pozdější výuce na univerzitě. Jiné však neměl k dispozici, neboť až do počátku 20. století takové v češtině neexistovaly.

[15] K publikování této učebnice nikdy nedošlo. Informace plyne z [BM98], str. 121.

látky a byly precizněјší v matematickém vyjadřování.[16] Nebyly však vynikající z hlediska podrobnosti nebo originálnosti výkladu. Spolu se *Základy* byly inspirované v drtivé většině cizojazyčnými učebnicemi a odbornými knihami (např. autoři Leonhard Euler (1707–1783), Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), Jakob Philipp Kulik (1793–1863), Moritz Stern (1807–1894), Joseph Bertrand (1822–1900), Oscar Schlömilch (1823–1901) a další).[17]





Obálky učebnic [St67] a [We02], 14,8 × 22,2 cm a 15,3 × 23,6 cm.[18]

Weyrův *Počet differenciálný*

Autorem nové učebnice matematické analýzy byl profesor pražské techniky a univerzity Eduard Weyr (1852–1903).[19] K sepsání byl vyzván *Jednotou českých*

[16] V učebnicích [St80] a [St92] F. J. Studnička částečně reflektoval soudobé zpřesňování matematické analýzy. Např. limitu vyložil s využitím ε a δ aritmetiky (viz [St92], str. 3–4.). Celkově však uvedené práce můžeme přirovnat spíše k matematických textům 1. poloviny 19. století.

[17] Z českých textů F. J. Studnička využil při tvorbě *Základů* práci Skřivan G.: *Přednášky o algebraické analysi.* Dr. E. Grégr, Praha, 1865. Poznamenejme, že kniha byla jednou z nejstarších českých vysokoškolských učebnic matematiky. Byla souborem přetištěných Skřivanových poznámek k výuce matematiky na pražské technice. V celkem 21 částech byla věnována elementárním funkcím, nekonečným řadám, binomické větě nebo komplexním číslům.

[18] Obrázek učebnice [St67] představuje pouze přebal *Sešitu I.* obsahující části *Kniha I.* a *II.*

[19] Ed. Weyr se narodil se v Praze. V roce 1862 nastoupil na německou reálku v pražské Mikulandské ulici, ze zdravotních důvodů však absolvoval pouze pět ročníků. Ve škole dosahoval velmi dobrých výsledků. V roce 1868 začal studovat na pražské polytechnice strojařské a stavební obory a geodézii. Disertaci vypracoval na stipendijním pobytu v Göttingen a obhájil v roce 1873. Od roku 1874, po stipendijním pobytu v Paříži, působil jako docent na pražské polytechnice a o dva roky později na pražské univerzitě. Místo řádného profesora techniky získal v roce 1881 a suplujícího profesora pražské univerzity v roce 1891. Zemřel v Záboří nad Labem. Na-

mathematiků a požádán, aby sepsal texty, které nahradí staré a po matematické stránce již nevyhovující Studničkovy práce.[20]

Ed. Weyr začal připravovat dvě knihy, jednu o diferenciálním a druhou o integrálním počtu. V roce 1902 však publikoval v edici *Sborník jednoty českých mathematiků v Praze* pouze první z nich.[21] Shrnul v ní nauku o teorii čísel, reálných posloupností, elementárních a implicitních funkcích jedné i více proměnných, spojitosti, limitě, derivaci, aplikacích diferenciálního počtu a funkcích komplexní proměnné. Výklad stavěl téměř vždy na exaktních definicích, tvrzeních a zdůvodněních, přestože je v textu přesně neoznačoval. Popisované pojmy a vlastnosti zvýrazňoval zpravidla italikou a důkazy psal často v pokračování znění vět. Užíval kvantifikátory a označení odpovídající ε a δ aritmetice. Čerpal z francouzské a německé literatury, z českých autorů čtenáře odkazoval na starší Studničkovy práce.

Můžeme usuzovat, že Ed. Weyr zaměstnán pracovními povinnostmi postrádal chuť i energii k tvorbě učebních textů o kalkulu, navíc odborně publikoval v jiných matematických oblastech. Řadu partií *Počtu differenciálného* pouze přeložil ze zahraničních knih a to i včetně chyb.[22] Na nepůvodnost a nepřesnost textu reagoval Jan Vilém Pexider (1874–1914). Napsal věcnou, místy však neadekvátně ostrou stať *Pana dvorního rady prof. Eduarda Weyra Počet differenciálný, vědecká úvaha kritická.* Vznikl vleklý spor známý i mimo matematické kruhy. Ed. Weyr oponoval *Odpovědí*, rovněž místy nepřiměřenou, na niž obdržel od J. V. Pexidera *Protiodpověď*. Rozepře bohužel nevedla ke šťastným koncům, neboť negativně ovlivnila Pexiderovu profesní dráhu a jistě nepřispěla k tehdy pohnutému Weyerovu zdraví.[23] Ed. Weyr zemřel rok po vydání svého *Počtu differenciálného.* K dalším učebnícím se již nikdy nedostal.

Při četbě prací V. Šimerky, F. J. Studničky i Ed. Weyra můžeme kriticky nahlížet na nepřesnosti v matematickém vyjadřování. Při hodnocení učebnic však mějme na paměti kontext jejich sepsání, především určení příslušným čtenářům. Rovněž bychom měli ocenit jejich význam pro budování české matematické kultury. I z těchto úhlů pohledu se podívejme na Úlehlův *Počet infinitesimální.*

---

psal téměř 100 odborných prací věnovaných geometrii, bilineárním formám, hyperkomplexním číslům a teorii matic. O Weyrově životě a díle viz [BJ95], podrobně o jeho příspěvcích k teorii matic viz příslušné kapitoly monografie Štěpánová M., *Počátky teorie matic v Českých zemích a jejich ohlasy.* Edice Dějiny matematiky, svazek č. 56, Matfyzpress, Praha, 2014.

[20] Jednota významně přispívala k tvorbě vysokoškolských a středoškolských učebnic. Vydávala je postupně od 70. let 19. století. Podrobně o její zásluze o rozvoj, kvalitu i systematičnost českých učebních textů viz [BM08], str. 254–256 (středoškolské učebnice) a str. 260–262 (vysokoškolské učebnice). O historii *Jednoty českých mathematiků*, resp. současné *Jednoty českých matematiků a fyziků* viz dále [BM08], str. 89–118; Bečvářová M., *Z historie Jednoty 1862–1869.* Edice Dějiny matematiky, svazek č. 13, Prometheus, Praha, 1999; Pátý L. (ed.), *Jubilejní almanach Jednoty čs. matematiků a fyziků 1862–1987*, JČSMF, Praha, 1987.

[21] V rámci této edice vydávala Jednota od roku 1898 odborné monografie i učebnice matematiky a fyziky. Postupně jimi pokryla takřka všechny podstatné oblasti vysokoškolského vzdělávání v těchto disciplínách. Více informací viz [BM08], str. 114.

[22] Ed. Weyr např. uvedl, že funkce $x(a-x)$ není ani shora ani zdola omezená ([We02], str. 256). Tuto chybu obsahuje i použitá literatura, resp. kniha Genocchi A., *Differentialrechnung und grundzüge der Integralrechnung.* B. G. Teubner, Lipsko, 1899, str. 180.

[23] O životě a díle J. V. Pexidera viz Bečvář J. (ed.), *Jan Vilém Pexider 1874–1914.* Edice Dějiny matematiky, svazek č. 5, Prometheus, Praha, 1997. Podrobně o jeho sporu s Ed. Weyrem viz [BJ95], str. 143–162.

Počet infinitesimální.

Napsal

Josef Úlehla.

SPISŮ „DĚDICTVÍ KOMENSKÉHO“ Č. 63.

U PRAZE. 1906.
Nákladem „Dědictví Komenského“ — Tiskem Družstva knihtiskárny v Zábřeze.

[Úu13], titulní list, 13,5 × 20,6 cm.

Úlehlův *Počet infinitesimální*

Úvodní charakteristika

V literatuře naší není dosud elementární knihy, která by stručně učila základním pravidlům počtu diferenciálního a integrálního. Šimerkův Přídavek k algebře jest příliš stručný, učebnice Studničkova a Weyrova jsou nesnadny pro začátečníky. ([Úu13], str. I.)[24]

Těmito slovy J. Úlehla zahájil *Předmluvu* své učebnice vyšší matematiky. V podstatě nepokládal dřívější, výše přiblížené práce za užitečné pro základní seznámení a ovládání prezentované problematiky. Za druhý důvod tvorby textu považoval nedostatečné matematické vzdělávání na učitelských ústavech. Uvedl přitom, že při zkouškách pedagogické způsobilosti pro výuku na měšťanských školách musí žadatelé studovat středoškolské i jiné učebnice.[25] Svojí knihou jakoby předpověděl zařazení kalkulu do středoškolské matematiky po zmiňované Marchetově reformě. Ministerské schválení *Počtu infinitesimálního* jako učebnice nepožadoval, pochopitelně by jej velmi pravděpodobně, resp. srovnatelně s V. Šimerkou neobdržel.

Práci vydal v edici *Encyklopedická knihovna Dědictví Komenského*, věnoval ji vedle učitelů také širší veřejnosti a čtenářům svých *Dějin matematiky.* Jako třetí důvod totiž napsal:

A konečně byl také důvod ten, že připravuji druhý díl svých dějin vědy matematické a že v něm vypravovati musím, kterak byl objeven počet diferenciální a integrální, které úkoly řešili počtem tímto zvláště Leibniz a bratři Bernoulli, a kterak vznikl spor o tento vynález mezi Leibnizem a Newtonem. Nelze pak vypravovati o tomto objevu ani o sporu, jestliže čtenáři ničeho nevědí o počtu samém.
([Úu13], str. I.)

Učebnici J. Úlehla určil samoukům, kteří mají vlastní zájem či potřebu prostudovat základy kalkulu. Látku předkládal přívětivým jazykem, velmi dbal na motivaci i názornost výkladu, přičemž do něj výrazně promítl historické pojetí infinitesimálního počtu. Zcela stavěl na intuitivním chápání problematiky. Předkládaná tvrzení nedokazoval, pouze jejich platnost místy ilustroval konkrétními příklady. Vůbec nepracoval se zaváděním pojmů pomocí ε a δ aritmetiky, jak bylo v 1. polovině 20. století v učebnicích matematické analýzy již běžné.

Základní charakteristiku Úlehlovy práce může vhodně podtrhnout následující citace. V její první části si povšimněme zdůraznění samostudia, z něhož si můžeme odvodit, že se zamýšlení čtenáři nemuseli matematikou zabývat i delší dobu. V druhé části věnované derivaci funkce třetí mocnina potom pozorujme názorné pojetí infinitezimálních veličin, jejich postupné „mizení“, resp. intuitivní předvedení určité vlastnosti bez obecného důkazu:

Kdo chce tuto knihu prostudovati, ať zopakuje počítání zlomkové, algebraické, exponenciální, a po ruce ať má také učebnici trigonometrickou, aby v ní vyhledal vzorce, jichž se bude kniha dovolávati, na př. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $1 + \cos x = 2\cos^2 x/2$ *ap.*

[24] Jde o první ze čtyř římsky číslovaných stran *Předmluvy* (atp. níže).
[25] Viz [Úu13], str. I.

Velice prospěje milimetrový papír, jenž se dostane v každém papírnickém obchodu. Na tom se pohodlně rýsují křivky dle daných rovnic, na př. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = \sqrt{ax}$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tang} x$.

Křivky ty nechť čtenář pilně kreslí dle čl. 2. Za x nechť klade hodnoty 0, 1, 2, 3,... 9, 10, 11,... *nebo* 0·1, 0·2, 0·3, 0·4,... *a pak vypočítává trpělivě hodnoty pro y.*[26] *Zvolíme-li v rovnici* $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ $a = 12$, *bude* $y_0 = \sqrt{144} = 12$, $y_1 = \sqrt{144 - 1} = 11 \cdot 96$, $y_2 = \sqrt{144 - 4} = 11 \cdot 8$, $y_3 = \sqrt{144 - 9} = 11 \cdot 6$, $y_4 = \sqrt{144 - 16} = 11{\cdot}3$, $y_5 = \sqrt{144 - 25} = 10{\cdot}9$ *atd.*

Ať také přepočítává vzorce diferenciální a integrální. Vzorec $dy/dx = d(x^3)/dx = 3x^2$, *lze přepočítati, zvolíme-li na př.* $x = 5$, $dx = 0{\cdot}0001$. *Pak bude*

$$y = x^3 = 125$$

$$y + dy = (x + dx)^3 = 125{\cdot}007500150001$$

$$dy = 0{\cdot}007500150001$$

$$dy/dx = 0{\cdot}007500150001/0{\cdot}0001 = 75{\cdot}00150001$$

a tedy $dy/dx = 75$, *vypustíme-li z počtu* 0·00150001.

To jest ovšem značná chyba, ale jednak už i tento zlomek opravdu mizí proti číslu celému, 1·5 *mm na př. proti* 75 *m, jednak si myslíme diferenciál jako číslo ještě značně menší, třebas jako miliontinu nebo biliontinu.* ([Úu13], str. I.–II.)[27]

Zmíněný paragraf, podle kterého *nechť čtenář pilně kreslí*, byl nazván *2. Geometrie Descartova.* Byl věnován soustavě souřadnic v rovině, zakreslování obrazů bodů a křivek a také stručnému připomenutí historie analytické geometrie společně s jejím tvůrcem Reném Descartem (1596–1650). Byl opět dokladem Úlehlovy snahy o přibližování vývoje matematiky v učebních textech, jak jsme mohli v předchozí kapitole pozorovat v jeho *Početnicích pro měšťanské školy.*

Povšimněme si ještě zápisu odmocnin z postupně zmenšovaného čísla 144. Pozorujeme, že vůbec není rozlišováno mezi přesným výsledkem ($\sqrt{144} = 12$) a přibližnou hodnotou ($\sqrt{144 - 1} = 11 \cdot 96$). Navíc pouze jedenkrát je výsledek zaokrouhlen na dvě desetinná místa, jinak jen na jedno. Poznamenejme, že takové drobné nepřesnosti nebo nejasnosti procházejí celým Úlehlovým textem.

Obsah práce

Podívejme se nyní podrobněji na obsah *Počtu infinitesimálního* a jeho formální zpracování. J. Úlehla rozčlenil text do čtyř základních částí: *A) Úvod*, *B) Počet diferenciální*, *C) Počet integrální* a *Přídavek.* Nejširší z nich, druhou a třetí strukturoval do kapitol, resp. podkapitol. Výklad jednotlivých témat seřadil do po sobě jdoucích paragrafů, jež očísloval napříč celou učebnicí a jež na závěrečných stránkách, tedy v přehledu jejího obsahu charakterizoval příslušnými hesly. Názvy kapitol, resp. podkapitol, jejich stránkový rozsah a počet paragrafů představujeme v následující tabulce.

[26] Zápisy 0·1, 0·2, 0·3, 0·4 znamenají desetinná čísla 0,1, 0,2, 0,3, 0,4. Stejný způsob značení desetinné čárky byl volen v učebních textech V. Šimerky, F. J. Studničky a Ed. Weyra i v Úlehlových *Početnicích pro měšťanské školy* (viz předchozí kapitola).

[27] Texty všech učebnic citujeme přesně, tj. včetně diakritiky a co možná nejpodobněji jejich sazbě, kterou bychom dnes zejména u matematických vzorců upravili jinak.

část, kapitola, podkapitola	strana	paragrafy
A) Úvod	1	1–4
B) Počet diferenciální		
I. Diferenciál a diferenciální poměr	2	5–20
II. Logaritmy	12	21–26
III. Funkce trigonometrické	18	27–36
IV. Funkce hyperbolické	28	37–43
V. Které úkoly se řeší počtem diferenciálním?	36	44–53
VI. Křivky a jejich geometrie	49	54–56
C) Počet integrální		
I. Integrování daných integrandů	52	57–66
II. Které úkoly se řeší počtem integrálním?		
a) Rektifikace, délka dané křivky	76	67–75
b) Plošný obsah	85	76–82
c) Povrch těles rotačních	91	83–87
d) Krychlový obsah tělesa rotačního	96	88–93
e) Těžiště	98	94–96
f) Křivka řetězová	100	97–104
III. Diferenciální rovnice	105	105–107
IV. Které úkoly se řeší diferenciálními rovnicemi?	112	108–115
V. Příklady z fyziky	117	116–120
Přídavek	123	121–122
celkem	130	122

Po formální stránce, především uspořádáním tematických celků J. Úlehla zpracoval knihu velmi podobně s Šimerkovým *Přídavkem.* Srovnatelně také se Studničkovými *Základy* (byť o mnoho podrobnějšími), resp. takřka se všemi pozdějšími studijními texty vyšší matematiky čísloval důležité rovnosti, jím nazývané jako *vzorce*, aby docílil nezbytné systematičnosti a umožnil srozumitelně ve výkladu na příslušné závěry.

Po typografické stránce nikterak nevybočil z pojetí sazby výše prezentovaných učebnic. Text nechal přehledně vytisknout a doplnil jej četnými očíslovanými ilustracemi, celkem 34,[28] na něž účelně upozorňoval v průběhu výkladu. Vizuální charakter práce přibližujeme na následujících obrázcích, na levém z nich přitom ukazujeme výřez paragrafu *5. Úkol počtu diferenciálního*, neboli Úlehlovu motivaci ke studiu této problematiky. Na ní můžeme rovněž pozorovat užitou terminologii. Poznamenejme, že J. Úlehla označoval přírůstek funkce jako *diferenciál*, derivaci jako *diferenciální poměr* či *odvozenou funkci* a derivování jako *diferencování.* Dále např. konstantu nazýval *stálou veličinou*, nezávislou/závislou proměnnou *neodvisle/odvisle proměnnou* nebo integrování per partes *integrováním počástečným.* Obecně vzato volil pojmosloví velmi podobné V. Šimerkovi. Zajímavé je, že stejně jako on do učebnice nenapsal slovo derivace.[29] V popisu jeho práce však budeme adekvátně užívat současnou odbornou terminologii.

[28] Poslední obrázek má číslo třicet pět, z neznámých důvodů totiž sedmý není zařazen.

[29] Např. F. J. Studnička také užíval označení diferenciální poměr, avšak derivaci zmínil jako alternativní název při zavedení tohoto pojmu ([St78], str. 13).

Rozbor části *Počet diferenciální*

Při četbě úvodních stránek učebnice si nelze nepovšimnout řady zvláštních tvrzení. Např. ke způsobu výkladu látky J. Úlehla uvedl:

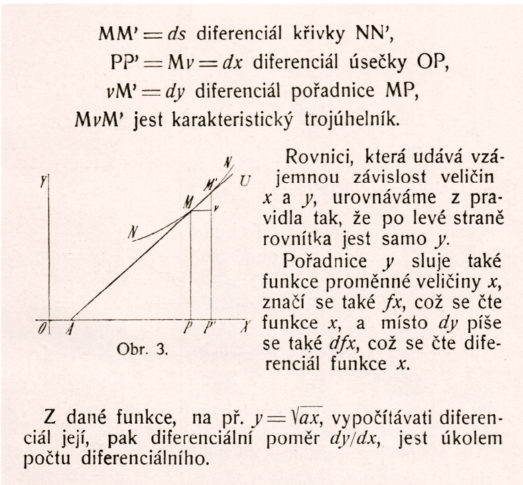
Počtu diferenciálnímu a integrálnímu učím dle Leibnizovy metody infinitesimální; o diferenciálu a integrálu tak, jak základní ty pojmy určil a vymezil sám původce jejich Leibniz.

V tom se odlišuje moje kniha od učebnic (Weyrovy, Studničkovy, Šimerkovy), kde se učí tomuto počtu metodou limitní, která vzrostla z Newtonovy metody fluxionové. ([Úu13], str. III.)

K objevení kalkulu, resp. k jeho významu pro studium a měření křivek dále prohlásil:

Bylo potřeba nového algoritmu, počtu infinitesimálního, a vynálezcem tohoto počtu jest G. W. Leibniz (1646–1716). ([Úu13], str. 2.)

Pokud však porovnáme *Počet infinitesimální* s dřívějšími pracemi, musíme poznamenat, že J. Úlehla nepojal text diametrálně odlišně z matematického hlediska. Spíše těmito prohlášeními vystihl, že vůbec nebude používat pojem limita a vyzdvižením Leibnizova významu pro objevení kalkulu připomněl užívání jeho formálního značení. Tzv. spor o prvenství mezi ním a I. Newtonem (1643–1727) později podrobně popsal ve druhém dílu *Dějin matematiky* ([Úk9], str. 183–197), připsal přitom více zásluh G. W. Leibnizovi, jak ukážeme v následující kapitole.

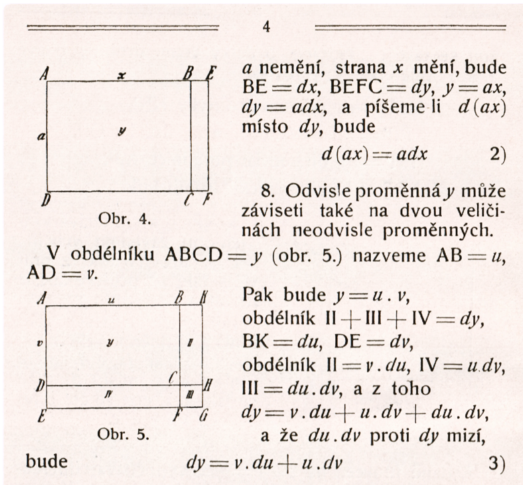

MM' = *ds* diferenciál křivky NN',
PP' = M*v* = *dx* diferenciál úsečky OP,
*v*M' = *dy* diferenciál pořadnice MP,
M*v*M' jest karakteristický trojúhelník.

Obr. 3.

Rovnici, která udává vzájemnou závislost veličin *x* a *y*, urovnáváme z pravidla tak, že po levé straně rovnítka jest samo *y*.

Pořadnice *y* sluje také funkce proměnné veličiny *x*, značí se také *fx*, což se čte funkce *x*, a místo *dy* píše se také *dfx*, což se čte diferenciál funkce *x*.

Z dané funkce, na př. $y = \sqrt{ax}$, vypočítávati diferenciál její, pak diferenciální poměr dy/dx, jest úkolem počtu diferenciálního.


4

Obr. 4.

a nemění, strana *x* mění, bude BE = *dx*, BEFC = *dy*, $y = ax$, $dy = adx$, a píšeme li $d(ax)$ místo *dy*, bude

$$d(ax) = adx \qquad 2)$$

8. Odvisle proměnná *y* může záviseti také na dvou veličinách neodvisle proměnných.

V obdélníku ABCD = *y* (obr. 5.) nazveme AB = *u*, AD = *v*.

Obr. 5.

Pak bude $y = u \, . \, v$,
obdélník II + III + IV = *dy*,
BK = *du*, DE = *dv*,
obdélník II = $v \, . \, du$, IV = $u \, . \, dv$,
III = $du \, . \, dv$, a z toho
$dy = v \, . \, du + u \, . \, dv + du \, . \, dv$,
a že $du \, . \, dv$ proti *dy* mizí,
bude

$$dy = v \, . \, du + u \, . \, dv \qquad 3)$$

Výklad diferenciálního poměru, ilustrace; [Úu13], výřezy str. 3 a str. 4, 10 × 9,3 cm (oba).

Z didaktického hlediska je pro názornost výkladu velmi zajímavé Úlehlovo uplatňování geometrických interpretací, jak bylo již dobře patrné v určitých částech *Početnic*. Je rovněž dokladem autorovy pedagogické nápaditosti bezpochyby podnícené jeho dlouholetou výukou na obecných a měšťanských školách. Na ilustraci vpravo (v jejích dolních dvou třetinách) je předvedeno v paragrafu pojmenovaném *8. Diferenciál plochy s dvěma rozměry proměnnými* s přiloženým obrázkem č. 5. J. Úlehla pracoval s obdélníkem $ABCD$. Jeho obsah označil y a délky jeho stran AB, AD jako u, v, přičemž uvažoval jejich přírůstky du, dv. Změnu obsahu dy následně vyjádřil pomocí $dy = v.du + u.dv + du.dv$ s poznámkou, *že* *du.dv proti dy mizí*. Na závěr uvedl rovnost $dy = v.du + u.dv$ očíslovanou jako 3). Význam tohoto vzorce dále přenesl do prezentace derivace součinu a obdržené platnosti využil v paragrafu *13. Diferenciál mocniny* $y = x^n$:

13. a) *Máme-li* $y = x^2$, *bude dle vz.* 3. $dy = x.dx + x.dx$

$$d(x^2) = 2x.dx \qquad 6)$$

b) *Máme-li* $y = x^3$, *bude dle vz.* 4. $dy = x^2.dx + x^2.dx + x^2.dx$ *nebo*[30]

$$d(x^3) = 3x^2.dx \qquad 7)$$

c) *Abychom určili* $d(x^5)$, *položíme* $x^3 = u$, $x^2 = v$, *a pak bude dle vz.* 3.

$$\begin{aligned} d(x^5) &= x^3.d(x^2) + x^2.d(x^3) \\ d(x^5) &= x^3.2x.dx + x^2.3x^2.dx, \textit{ a z toho} \\ d(x^5) &= 2x^4.dx + 3x^4.dx \textit{ nebo} \\ d(x^5) &= 5x^4.dx \qquad 8) \end{aligned}$$

d) *Ze vzorců* 6., 7. *a* 8. *viděti, že bychom takto dále obdrželi obecný vzorec*

$$d(x^n) = nx^{n-1} \qquad 9)$$

([Úu13], str. 5–6)

Takto J. Úlehla „vklouzl“ do problematiky derivování reálné funkce jedné proměnné hned na úvodních stranách části *B) Počet diferenciální*, resp. kapitoly *I. Diferenciál a diferenciální poměr*. Jeho pojetí přitom zcela korespondovalo s charakterem Šimerkova *Přídavku*. Analogicky s touto prací nerozebral otázku spojitosti nebo zmiňovanou limitu a z matematického hlediska derivaci vůbec nezavedl.[31] Pouze ji nastínil pomocí tzv. charakteristického trojúhelníku. Uvažoval přitom $\triangle MvM'$, kde $dx = |Mv|$ a $dy = |M'v|$, jak můžeme opět pozorovat

[30] Uvedený 4. vzorec J. Úlehla zapsal jako $dy = \frac{\delta y}{\delta u}.du + \frac{\delta y}{\delta t}.dt$. Vyšel přitom z derivace součinu $y = t.u$ v podobě $dy = t.du + u.dt$, přičemž užil označení $t = \frac{\delta y}{\delta u}$ a $u = \frac{\delta y}{\delta t}$ ([Úu13], str. 5).

[31] Pro srovnání přibližme zavedení derivace ve vysokoškolských učebnicích. F. J. Studnička v prvním dílu *Základů* uvedl:

… že se volí za druhou hodnotu proměnné x taková, která se nekonečně málo liší od první, tedy $x + \Delta x$, *přičemž lpí na veličině* Δx *podmínka, že* $\lim \Delta = 0$ …

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\,; \ \ldots \qquad \text{([St78], str. 12–13)}$$

Podrobněji a pro analýzu Studničkova přístupu viz [BM98], str. 114–115. Ed. Weyr definoval derivaci takto:

Klademe-li přírůst proměnné $\Delta x = h$, *jest přírůst funkce*

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$$

$$\text{a } \lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta(x)} = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{pro } \lim h = 0$$

derivace funkce $f(x)$, *ač-li tento limes existuje; derivace ta obecně opět závisí na x a označují se symbolem* $f'(x)$. ([We02], str. 131).

Několik poznámek k Weyerově popisu základních pojmů matematické analýzy je uvedeno v [Cr92], str. 53–57.

výše na levém obrázku. Následně k němu ještě připojil komentář o geometrickém významu derivace, jež zakončil poznamenáním:

Diferenciální poměr jest trigonometrická tangenta tohoto úhlu, který geometrická tangenta dané křivky v daném bodu uzavírá s osou OX. ([Úu13], str. 3)

Vraťme se ještě k obdélníku $ABCD$ z paragrafu *8. Diferenciál plochy s dvěma rozměry proměnnými* a uvedenému vztahu $dy = v.du + u.dv + du.dv$. Pro zvýraznění inspirativní souvislosti vystihněme pravou stranu této rovnosti Úlehlovým komentářem z *Početnice* věnovaným odmocňování dvěma. Platí totiž, že je to *plocha obdélníku, který se k tomuto čtverci připojuje po dvou jeho stranách jako pás a s ním činí nový čtverec* ([Úu14], str. 44). Na jednu stranu přiznáváme jistou nepřesnost citace spočívající v přetvoření obdélníku na čtverec, na druhou stranu však považujeme Úlehlovu geometrickou interpretaci derivování za podnětnou, neboť v ní došlo k zajímavému odkazu na určování druhé odmocniny, aneb čtenářům dobře známé početní dovednosti již na úrovni matematiky měšťanské školy.

Je zde však jeden podstatný rozdíl. Zatímco v algoritmu odmocňování dvěma je obsah „čtverečku $du.dv$" zcela podstatným, v ilustraci derivování je považován za nulový. Je tedy v případě Úlehlova pojetí kalkulu dalším dokladem naprosto intuitivního přístupu a paradoxně je svým zanedbáním zásadní pro správné osvojení si techniky derivování.

Na následujících stranách učebnice uvádí více než třicet příkladů funkcí předepsaných nejrůznějšími algebraickými výrazy a jejich derivace. Neobsahuje však postupy výpočtu ani definiční obory funkcí nebo poznámky k souvislostem mezi spojitostí, limitou a derivací:

Dle vzorců, jež jsme dosud vyvodili, možno diferencovati mnoho algebraických výrazů.

1. $d(1 + x) = dx$. 2. $d(a + x) = dx \ldots$

7. $\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \dfrac{mdx}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}} \ldots$

30. $d\dfrac{c}{\sqrt[r]{(a + bx^m)^n}} = -\dfrac{mnbcx^{m-1} \cdot dx}{r\sqrt[r]{(a + bx^m)^{n+r}}} \ldots$ ([Úu13], str. 6–8)

Knihu bychom mohli přirovnat k atlasu matematických vědomostí, neboť v jednotlivých paragrafech vždy předkládá uvedení do problematiky, určitou motivaci k jejímu studiu, prezentaci důležitých tvrzení, ukázku jejich platnosti a případně nastínění aplikací. Na mnoha místech stručně představuje elementární funkce. Tento princip zpracování je dobře patrný například v kapitole *II. Logaritmy*, konkrétně v dvacátém paragrafu označeném *1.* $d\log x$:

21. $d\log x$. *Napíšeme-li* $y = \log x$*, třeba neznáme základ, při němž* y *jest logaritmem čísla* x*. Avšak* $y' = \dfrac{dy}{dx}$ *jest jistě nějaká funkce proměnné* x*. Smíme jistě psáti*

$$y' = fx \ \ \textit{nebo} \ \ \frac{dy}{dx} = fx, \ dy = fx.dx, \ d\log x = fx.dx \qquad \text{I.}$$

Vložíme-li do I. x^n za x, *bude*

$$d\log(x^n) = f(x^n).d(x^n) \qquad \text{II.}$$

Avšak $\log x^n = n\log x$, $d\log x^n = nd\log x$; *dále jest* $dx^n = nx^{n-1}.dx$; *a když tyto hodnoty vložíme do* I., *obdržíme* $nd\log x = f(x^n).nx^{n-1}.dx$

$$d\log x = x^{n-1}.f(x^n).dx, \textit{ a poněvadž}$$
$$d\log x = fxdx, \;\; fx.dx = x^{n-1}.f(x^n).dx$$
$$x.fx.dx = x^n.f(x^n).dx$$
$$\textit{a konečně } \; xfx = x^n f(x^n).$$

Položíme-li $x^n f(x^n) = A$, *bude*

$$fx = \frac{A}{x}, \;\; fx.dx = \frac{A}{x}.dx \;\; \textit{čili} \;\; d\log x = \frac{A}{x}.dx \qquad 17)$$

Ovšem nevíme ještě, jak veliké jest A. *Avšak soustav logaritmických jest tolik, kolik je čísel t. nekonečně mnoho, a proto jistě jest taková soustava logaritmická, při níž je* $A = 1$. *Pro tuto soustavu platí pak*

$$d\log x = \frac{dx}{x} \qquad 18)$$

Logaritmy, při kterých $A = 1$ *slují přirozené.* ([Úu13], str. 12–13)

Poznamenejme, že V. Šimerka popsal logaritmickou funkci a její derivaci velmi podobně. F. J. Studnička a Ed. Weyr přistoupili k problematice z matematického hlediska precizněji. Pro srovnání proto citujme příslušný úryvek prvního dílu Studničkových *Základů*:[32]

Jest-li
$$y = \mathit{Log}\, x, \qquad (14)$$
Bude podle původního výměru

$$\frac{dy}{dx} = \mathit{lim}\,\frac{\mathit{Log}\,(x+\alpha) - \mathit{Log}\,x}{\alpha} = \mathit{lim}\,\frac{\mathit{Log}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}{\alpha};$$

položíme-li $\alpha = \omega x$, *promění se rovnice poslední v*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\,\mathit{lim}\,\mathit{Log}\,(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}} = \frac{1}{x}\,\mathit{Log}\;\mathit{lim}(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}};$$

poněvadž pak pro $\mathit{lim}\,\alpha = 0$ *jest i* $\mathit{lim}\,\omega = 0$ *a limita poslední má hodnotu e, bude konečně*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathit{Log}\,e}{x}$$

nebo
$$d\,\mathit{Log}\,x = \frac{dx}{x}\,\mathit{Log}\,e, \qquad (15)$$

a zvolíme-li přirozené logarithmy,

$$d\,lx = \frac{dx}{x}\,. \qquad (16)$$

[32] Pro Weyerovo pojetí derivace logaritmické funkce viz [We02], str. 140–141.

Jest-li pak všeobecně

$$y = l\,\varphi(x), \tag{17}$$

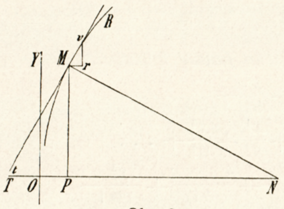
Bude podle toho

$$d\,l\,\varphi(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx. \tag{18}$$

([St78], str. 20–21)

Závěrečné paragrafy *Počtu diferenciálního*, resp. kapitoly *V. Které úkoly se řeší počtem diferenciálním?* a *VI. Křivky a jejich geometrie* J. Úlehla věnoval aplikacím. Ukázal užití kalkulu při analýze průběhu funkcí, hledání tečen a normál ke grafům nebo asymptot, přičemž věnoval pozornost funkcím s předpisy tvaru $y = \sqrt{px}$, $p > 0$, $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $a \neq 0$, tedy „částem" kuželoseček, exponenciále $y = e^x$ a polynomickým funkcím. Na obrázcích níže představujeme výřezy 36. strany učebnice, paragrafu *44. Úkol tangentový*, resp. zavedení a chápání pojmů *trigonometrická tangenta*, *subtangenta*, *subnormála* a *tangenta*,[33] jež zmíníme ještě při rozboru Úlehlova popisu aplikací diferenciálních rovnic.

44. *Úkol tangentový.* Známe-li rovnici, jež křivce patří, diferenciálním počtem vyšetříme, kterak vésti k ní tangentu. Na obr. 9. jest MR daná křivka, Mv = ds jest její diferenciál. MP = y OP = x, vr = dy, Mr = dx. Úkolem naším jest vypočísti, jak dlouhá jest tangenta TM = T, subtangenta TP = St, normála MN = N a subnormála PN = Sn; úkolem také jest určiti trigonometrickou tangentu úhlu t



Obr. 9.

a) Trigonometrická tangenta.

△ Mvr ∾ TMP ∾ MNP

MP : TP = vr : Mr

= dy : dx Avšak $\frac{\text{PM}}{\text{TP}}$ = tang t,

proto $\frac{dy}{dx}$ = tang t

b) Subtangenta

TP : PM = Mr : rv

St : y = dx : dy St = $y\frac{dx}{dy}$ 111)

c) Subnormála

PN : MP = vr : Mr

Sn : y = dy : dx Sn = $y\frac{dy}{dx}$ 112)

d) Tangenta TM = $\sqrt{\text{MP}^2 + \text{TP}^2}$

TM = $\sqrt{y^2 + y^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$

T = $y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ 113)

Úvodní úlohy paragrafu *44. Úkol tangentový*; [Úu13], výřezy str. 3, 9,7 × 8 cm (oba).

Doplňme, že pro zvýšení názornosti výkladu je k textu přiloženo mnoho ilustrací. Na obrázcích níže přibližujeme vysvětlení (dnešními slovy) konkávnosti, konvexnosti, extrémů a inflexních bodů funkce. Poznamenejme, že tyto vlastnosti jsou popsány s využitím Taylorova rozvoje, jež je před tím stručně přiblížen v samostatném paragrafu *20. Řada Taylorova.* Zde je uvažován ve tvaru

[33] Na následující 37. straně je ještě popsána *normála*. Je uvažována jako délka úsečky MN: *e) Normála*

$$MN = \sqrt{MP^2 + PN^2}$$

$$MN = \sqrt{y^2 + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$N = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad 114)$$

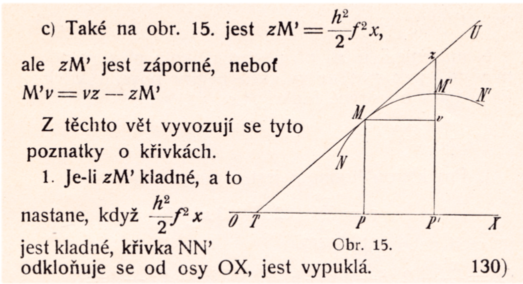
([Úu13], str. 37)

$f(x+h) = fx + hf^1x + \frac{h^2}{2!}f^2x + \frac{h^3}{3!}f^3x + \dots$ Ilustrace č. 15 na obrázku je uvedena tímto komentářem:

$$fx = MP = vP', \; f^1x = d\frac{vz}{Mv}, \; vz = hf^1x, \; P'M' = P'v + vz + zM'$$

Jest tedy $f(x+h) = P'v + vz + zM'$,

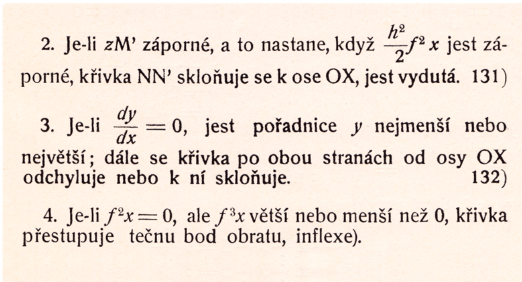
$$zM' = \frac{h^2}{2!}f^2x + \frac{h^3}{3!}f^3x + \dots \quad \textit{a při velmi malém h bude}$$
$$zM' = \frac{h^2}{2!}f^2x \qquad \text{([Úu13], str. 41)}$$


c) Také na obr. 15. jest $zM' = \frac{h^2}{2}f^2x$, ale zM' jest záporné, neboť $M'v = vz - zM'$

Z těchto vět vyvozují se tyto poznatky o křivkách.

1. Je-li zM' kladné, a to nastane, když $\frac{h^2}{2}f^2x$ jest kladné, křivka NN' odkloňuje se od osy OX, jest vypuklá. 130)

Obr. 15.


2. Je-li zM' záporné, a to nastane, když $\frac{h^2}{2}f^2x$ jest záporné, křivka NN' skloňuje se k ose OX, jest vydutá. 131)

3. Je-li $\frac{dy}{dx} = 0$, jest pořadnice y nejmenší nebo největší; dále se křivka po obou stranách od osy OX odchyluje nebo k ní skloňuje. 132)

4. Je-li $f^2x = 0$, ale f^3x větší nebo menší než 0, křivka přestupuje tečnu bod obratu, inflexe).

Konkávnost, konvexnost, extrémy a inflexní bod funkce; [Úu13], výřezy str. 41, 9,9 × 5,4 cm (oba).

Přidejme opět pro porovnání část výkladu této problematiky z vysokoškolské učebnice. Podívejme se na Weyerův preciznější popis konvexní a konkávní funkce:

Má-li $f(x)$ v místě x určité, konečné derivace až včetně do n-té, možno užiti formule Taylorovy[34]

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1\,.\,2} + \dots + f^{(n-1)}(x)\frac{h^{n-1}}{\underline{|n-1}} + \mathrm{R}_n,$$

kde

$$\mathrm{R}_n = f^{(n)}(x + \vartheta h)\frac{h^n}{\underline{|n}}, \; 0 < \vartheta < 1,$$

čímž

$$\vartheta = f''(x)\frac{h^2}{1\,.\,2} + \dots + f^{(n-1)}(x)\frac{h^{n-1}}{\underline{|n-1}} + \mathrm{R}_n.$$

Jest-li $f''(x) \gtrless 0$, *pišme*

$$\vartheta = f''(x)\frac{h^2}{2} + \mathrm{R}_3;$$

dle čl. 72. jest pro dosti malé $|h|$ první sčítanec číselně větší než R_3 a tedy ϑ pro kladné i záporné h téhož znamení jako $f''(x)$, t. j. při $f''(x) > 0$ jest čára po obou

[34] Ve jmenovatelích zlomků zápis $1\,.\,2$ znamená součin $1 \cdot 2$ a formátování $\underline{|n-1}$, resp. $\underline{|n}$ vyjadřuje faktoriály $(n-1)!$, resp. $n!$.

stranách bodu M nad tečnou,[35] *při* $f''(x) < 0$ *pod tečnou, neb jinak řečeno: při* $f''(x) > 0$ *jest čára dolů konvexní č. vypouklá, při* $f''(x) < 0$ *jest dolů konkávní č. vydutá, při čemž směr* Oy *jest vzat za směr nahoru.* ([We02], str. 285)

Weyerův text je matematicky přesnější zejména uvedením předpokladů o existenci derivací funkce (před zápisem Taylorova rozvoje) a podrobnější při vysvětlení vztahu znaménka druhé derivace a konvexnosti, resp. konkávnosti funkce. Proti tomu Úlehlův strohý přístup k matematickému výkladu předveďme na paragrafu *50. Maximum a minimum*, v němž byla daná problematika z odborného hlediska pouze nastíněna. Nebylo rozlišeno mezi lokálními a globálními extrémy, ve vzorci 136 byla naznačena existence ještě dalších vztahů důležitých k vyšetřování průběhu funkce (zde v podstatě vícenásobnost kořenů první derivace), v následujících odstavcích však nebyla tato problematika rozebrána:

50. *Maximum a minimum. Jest velmi důležitý úkol vyšší matematiky vypočítati, kdy jest* fx *největší nebo nejmenší; vypočítati její maximum nebo minimum. To určíme, když dle* 132

$$\text{a) } \textit{položíme } f'x = \frac{dy}{dx} = 0 \qquad 133)$$

$$\text{b) } \textit{vypočtenou hodnotu vložíme do } f^2x.$$

Je-li pak výsledek kladný,

$$\textit{když jest } zM' = \frac{h^2}{2} f^2x \textit{ kladné, bylo } y \textit{ nejmenší (minimum).} \qquad 134)$$

Obdržíme-li výsledek záporný,

$$\textit{je-li } zM' = \frac{h^2}{2} f^2x \textit{ záporné, bylo } y \textit{ největší (maximum).} \qquad 135)$$

Nemůžeme-li určiti při některém úkolu maxima nebo minima, pak musíme vyšetřiti nejprv povahu křivky, která patří odvozené funkci $f'x$. 136)

([Úu13], str. 42)

Je třeba poznamenat, že matematická nepřesnost výkladu je mnohdy Úlehlovým prostředkem k motivaci i přívětivému stručnému seznámení s danou látkou a je paradoxně zásadní pro celkový koncept textu. V určitých paragrafech, např. vedle zmíněného *50. Maximum a minimum* např. v *57. Úvod* (zavedení integrálu), *62. Kterak se integruje zaváděním nových veličin* nebo *66. Integrál omezený* je užívána až v překvapivě velké míře. Otázkou zde může být, zda na základě výše citovaného popisu vlastností křivek dovedl čtenář adekvátně analyzovat průběh funkce (konkrétně polynomické funkce s vícenásobnými kořeny první a druhé derivace).

Ještě si povšimněme Úlehlových slov z levého obrázku výše: *Z těchto vět vyvozují se tyto poznatky o křivkách.* Doplňme, že jsou vztaženy vedle textu pod odrážkou c) také k předchozímu analogickému předvedení konvexní funkce. Jsou jedním z mála náznaků přesné výstavby matematiky podle definic a vět s dů-

[35] Doplňme, že k Weyerově textu je přiložena ilustrace podobná s Úlehlovým 15. obrázkem (viz reprodukci výše). U obou autorů má bod M totožný význam. Pro úplnost ještě poznamenejme, že uvedený 72. paragraf Ed. Weyr pojmenoval *Řada Taylorova* a popsal v něm podrobně danou problematiku. Viz [We02], str. 162–164.

kazy a jsou také odrazem poněkud překvapivého postřehu autora tohoto textu, který plyne z analýzy *Počtu infinitesimálního*. Nemůžeme totiž jednoznačně tvrdit, že J. Úlehla připravil veskrze podrobnější učebnici kalkulu, nežli byl podle jeho slov *příliš stručný* Šimerkův *Přídavek*. Řadu témat, včetně prezentovaných „podkladů“ pro vyšetřování průběhu funkce pojal jednodušeji a méně precizně. Přestože hovořil o *větách*, pouze je naznačil a nikoliv uceleně formuloval. V. Šimerka se proti tomu pokusil přiblížit i důkazy některých tvrzení a mnohdy se mu tím podařilo docílit jasněji strukturovaného a poutavého textu. Pro porovnání proto předveďme Šimerkovu poznámku k maximu a minimu funkce:

Co do určování největších a nejmenších hodnot funkcí platí následující pravidlo: Postavíme-li $f^1x = 0$ čili $dfx = 0$, a dosadíme nápotom hodnotu neznámé $x = a$ z rovnice té nalezenou do daného úkonu, stává se fa maximum, je-li f^2a záporné, a minimum, je-li f^2a kladné.

Dle Taylorovy poučky jest totiž

$$\begin{aligned} f(x+h) &= fx + hf^1x + \tfrac{1}{2}!h^2f^2x + \tfrac{1}{3}!h^3f^3x + \dots \\ f(x-h) &= fx - hf^1x + \tfrac{1}{2}!h^2f^2x - \tfrac{1}{3}!h^3f^3x + \dots \end{aligned}$$

Vezmeme-li zde h tak malé, že h^2, h^3 atd. mizí, bude $f(x+h) = fx + hf^1x$; $f(x-h) = fx - hf^1x$; byl-li by pak při kladném h úkon f^1x kladný, máme $f(x-h) < fx < f(x+h)$; je-li však f^1x záporné, bude $f(x-h) > fx > f(x+h)$: protož v žádném z pádů těch nemůžeme k maximu neb k minimu přijíti, tak že, má-li se fx největším neb nejmenším státi, f^1x ani kladné ani záporné býti nesmí, což pouze při $f^1x = 0$ čili $dfx = 0$ možno jest, odkudž se pak $x = a$ nalezne.

Z hořejších řad obdržíme nápotom

$$\begin{aligned} f(a+h) - fa &= \tfrac{1}{2}h^2f^2a + \tfrac{1}{3}!h^3f^3a + \dots \\ f(a-h) - fa &= \tfrac{1}{2}h^2f^2a - \tfrac{1}{3}!h^3f^3a + \dots \end{aligned}$$

Vezmeme-li zde h^2 tak malé, že $\frac{1}{2}h^2f^2a$ všechny ostatní členy přesahuje, obdržíme, pakli f^2a záporné jest,

$$f(a-h) < fa > f(a+h),$$

tedy jest fa maximum; pakli však f^2a kladné jest, bude

$$f(a-h) > fa < f(a+h),$$

tedy fa minimum; čímž hořejší věta dokázána ([Ši64], str. 27–28)

Zpracování částí *Počet integrální* a *Přídavek*

Doposud vyslovená hodnocení Úlehlova přístupu k prezentaci diferenciálního počtu bychom mohli veskrze vztáhnout i na druhou polovinu učebnice. Přiblížíme proto její obsah, zmíníme nejdůležitější rysy a nastíníme matematické pojetí některých témat.

Úvodních více než dvacet stran části *C) Počet integrální*, resp. kapitoly *I. Integrování daných integrandů* J. Úlehla naplnil vesměs řešenými příklady, jež pro čtenáře připravil s cílem osvojení techniky integrování reálné funkce jedné proměnné. Teorii věnoval minimum prostoru, pouze uvedl několik takřka lakonických poznámek, v nichž opět poukázal na užívání Leibnizovy symboliky:

Součet nekonečně mnohých diferenciálů sluje integrál, dle Leibnize se značí písmenem $\int$ *t. začátečním písmenem latinského suma (součet). Jest tedy*

$$\int dy = y \tag{142}$$

Viděti, že se znaménko $\int$ *a* d *ruší. Diferencování a integrování jsou úkony opačné … Není obecných pravidel pro integrování, jsou jen pravidla zvláštní, jednotlivá.* ([Úu13], str. 52–53)

Poté zařadil paragraf *58. Integrály základní*, který upravil podobně, jako výše přiblížený soupis derivací funkcí vyjádřených pomocí různých algebraických výrazů (viz [Úk13], str. 6–8). Účelně v něm porovnával „derivování" a „integrování":

58. *Integrály základní.*

1. $d\dfrac{x^{n+1}}{n+1} = x^n.\,dx \qquad \displaystyle\int x^n.\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ 143)

2. $d\,lx = \dfrac{dx}{x} \qquad \displaystyle\int \frac{dx}{x} = lx$ 144)

…

8. $d\cotg x = -\dfrac{dx}{\sin^2 x} \qquad \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cotg x$ 150)

9. $d\,\mathrm{arctg}\, x = \dfrac{dx}{1+x^2} \qquad \displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x$ 151)

…

13. $d\sinh mx = m\cosh mx\,.\,dx \qquad \displaystyle\int \cosh mx\,.\,dx = \frac{\sinh mx}{m}$ 155)

([Úu13, str. 53–54])

Z těchto ukázek je patrné, že pod pojmem integrál v podstatě chápal primitivní funkci. Doplňme, že v citovaném přehledu uvedl algebraické, logaritmické, exponenciální, goniometrické, cyklometrické a hyperbolické funkce. Vyjma posledním jmenovaným se tedy věnoval elementárním funkcím dnes běžně řazeným do středoškolské matematiky.

Následující text opět vyniká Úlehlovým formálním přístupem k problematice. Například v paragrafu *59. Veličina stálá, konstanta* J. Úlehla vysvětlil nutnost práce s integrační konstantou, následně ji však k primitivním funkcím nepřičítal. Ve výše zmiňovaném paragrafu *62. Kterak se integruje zaváděním nových veličin* poznamenal k substituční integrační metodě:

Základní integrační vzorce jsou hlavní oporou při integrování složitějších výrazů. Do těchto výrazů zavádíme jak možno nové proměnné veličiny, abychom je převedli přímo nebo nepřímo na vzorce základní. ([Úu13], str. 55)

Tuto „techniku" objasnil na devatenácti řešených příkladech. Předvedl integrace racionálních a iracionálních funkcí a zařadil úlohy na trigonometrické substituce. Překvapivě však nezmínil příklady vedoucí k rozkladu na parciální zlomky[36] a vůbec se nevěnoval otázce definičních oborů funkcí. Ukažme Úlehlovo řešení jedné úlohy, díky níž přiblížíme typografický přístup k zápisu výpočtů, práci s interpunkcí a symbolikou i poznámku ke goniometrickým vzorcům, která účelně navazuje na výše citovaný úryvek *Předmluvy*:

8. $y = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$x = \cos u, \qquad dx = -\sin u \,.\, du$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{\cos^2 u \,.\, \sin u \, du}{\sin u}$$

$$= -\textstyle\int \cos^2 u \,.\, du, \qquad \cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2} \; {*})$$

$$\int \cos^2 u \,.\, du = \int \frac{du}{2} + \int \frac{\cos 2u \,.\, du}{2}$$

$$= \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} \qquad \frac{\sin 2u}{4} = \frac{\sin u \,.\, \cos u}{2}$$

$$= \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \arccos x - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} \qquad 169)$$

---

*) $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$
$1 = \cos^2 u + \sin^2 u$
$\cos 2u + 1 = 2\cos^2 u$ ([Úu13], str. 57–58)

Paragraf *64. Integrování počástečné*, resp. metodu per partes J. Úlehla ukázal na jedenácti řešených úlohách, zapsal je velmi podobným způsobem jako při výkladu substituční metody. V paragrafu *65. Kterak se integruje řadami?* formuloval dva příklady, v nichž využil rozvoj dané funkce v mocninnou řadu a pravidlo o integraci součtu. V prvním z nich takto předvedl integrál hyperbolického kosinu:[37]

Můžeme-li proměniti funkci v řadu, integrujeme členy této řady.

1. $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$

---

[36] J. Úlehla využil pouze rozklad $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)$ ([Úu13], str. 64). Proti tomu V. Šimerka do *Přídavku* i F. J. Studnička do druhého dílu *Základů* integraci s využitím rozkladu na parciální zlomky zařadili. Viz [Ši64], str. 37–39 a [St71], str. 21–27.

[37] Druhá úloha je věnována integrálu $\int \frac{x^{m-1}}{x+1}$ a využití rozvoje $\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ Viz [Úu13], str. 68.

$$\textstyle\int \cosh x\,.\,dx = \int dx + \frac{1}{2!}\int x^2.\,dx + \frac{1}{4!}\int x^4.\,dx + \ldots = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$\textstyle\int \cosh x\,.\,dx = \sinh x \qquad 187)$$

([Úu13], str. 68)

Poslední paragraf *66. Integrál omezený* kapitoly *I. Integrování daných integrandů* je věnován určitému integrálu a je velmi stručný jak z odborného matematického hlediska, tak v počtu zařazených úloh a prezentovaných postupů výpočtu. Je v něm uvažován Riemannův integrál, přestože není jakkoliv definován. Spolu s absencí teoretického popisu problematiky v paragrafu chybí vysvětlení dvou „základních dovedností“, tedy substituční metody a metody per partes pro určité integrály. Je zde předvedeno pouze výše zmíněné využití rozvoje funkce v mocninnou řadu. Způsob zpracování příkladů lze vystihnout následující citací. Povšimněme si zejména zajímavého „vyústění“ úlohy. V Úlehlově podání totiž není „hlavním“ výsledkem vypočítaná hodnota určitého integrálu, jsou jím příslušné souvislosti plynoucí z rozvoje funkcí v mocninné řady:

2. $z = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Dle binominální poučky jest $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^4 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}x^6 + \ldots$

Zároveň jest $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x.$

Jest tedy

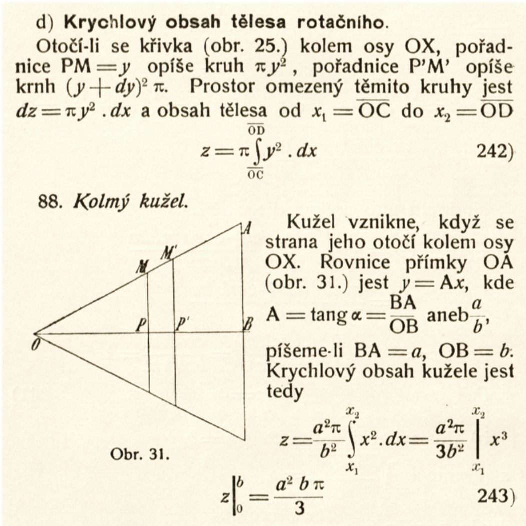
$$\operatorname{arc\,sin} x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots \qquad 192)$$

Poněvadž $\operatorname{arc\,sin} 1 = \frac{\pi}{2}$, *bude*

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1\,.\,1}{2\,.\,3} + \frac{1\,.\,3\,.\,1}{2\,.\,4\,.\,5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,1}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,7} + \ldots \qquad 193)$$

([Úu13], str. 70)

Z didaktického hlediska považujeme výklad určitých integrálů za velmi neúplný a domníváme se, že jej můžeme hodnotit poměrně kriticky. Jeho hlavní „úskalí“ totiž spatřujeme ve skutečnosti, že čtenář není veden k osvojení početních dovedností. Spíše je na základě něho „srozuměn“ s příslušnými platnostmi nebo závěry. Navíc podobným způsobem je v následující kapitole *II. Které úkoly se řeší počtem integrálním?* seznamován s geometrickými aplikacemi integrálního počtu. Způsob jejich zpracování můžeme popsat jako přehled důležitých výsledků, případně vzorců, jenž je Úlehlovým typickým způsobem přívětivě komentován a jenž je vhodně doplněn ilustracemi. Domníváme se však, že není dostatečným „podkladem“ pro ovládání integrálního kalkulu v přírodovědných a technických oborech. Předveďme jej na výřezech stran učebnice, resp. úlohách z podkapitol *d) Krychlový objem tělesa rotačního* a *e) Těžiště.*



d) **Krychlový obsah tělesa rotačního.**

Otočí-li se křivka (obr. 25.) kolem osy OX, pořadnice PM $= y$ opíše kruh πy^2, pořadnice P'M' opíše krnh $(y + dy)^2 \pi$. Prostor omezený těmito kruhy jest $dz = \pi y^2 . dx$ a obsah tělesa od $x_1 = \overline{OC}$ do $x_2 = \overline{OD}$

$$z = \pi \int_{\overline{OC}}^{\overline{OD}} y^2 . dx \qquad 242)$$

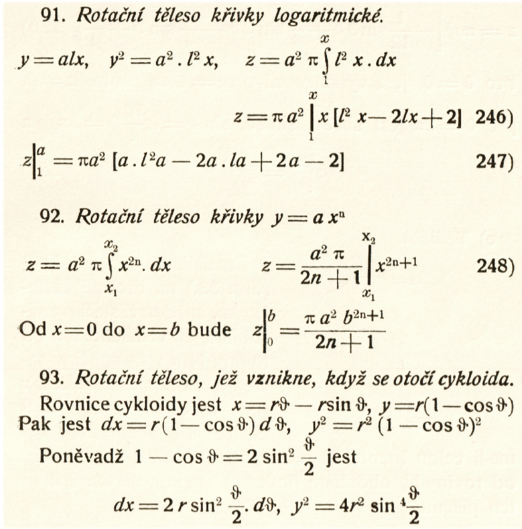
88. *Kolmý kužel.*

Kužel vznikne, když se strana jeho otočí kolem osy OX. Rovnice přímky OA (obr. 31.) jest $y = Ax$, kde $A = \text{tang}\,\alpha = \frac{BA}{OB}$ aneb $\frac{a}{b}$, píšeme-li BA $= a$, OB $= b$. Krychlový obsah kužele jest tedy

$$z = \frac{a^2\pi}{b^2} \int_{x_1}^{x_2} x^2 . dx = \frac{a^2\pi}{3b^2} \Big|_{x_1}^{x_2} x^3$$

Obr. 31.

$$z \Big|_0^b = \frac{a^2 b \pi}{3} \qquad 243)$$



91. *Rotační těleso křivky logaritmické.*

$$y = alx, \quad y^2 = a^2 . l^2 x, \quad z = a^2 \pi \int_1^x l^2 x . dx$$

$$z = \pi a^2 \Big|_1^x x [l^2 x - 2lx + 2] \qquad 246)$$

$$z \Big|_1^a = \pi a^2 [a . l^2 a - 2a . la + 2a - 2] \qquad 247)$$

92. *Rotační těleso křivky $y = a x^n$*

$$z = a^2 \pi \int_{x_1}^{x_2} x^{2n} . dx \qquad z = \frac{a^2 \pi}{2n + 1} \Big|_{x_1}^{x_2} x^{2n+1} \qquad 248)$$

Od $x = 0$ do $x = b$ bude $z \Big|_0^b = \frac{\pi a^2 b^{2n+1}}{2n + 1}$

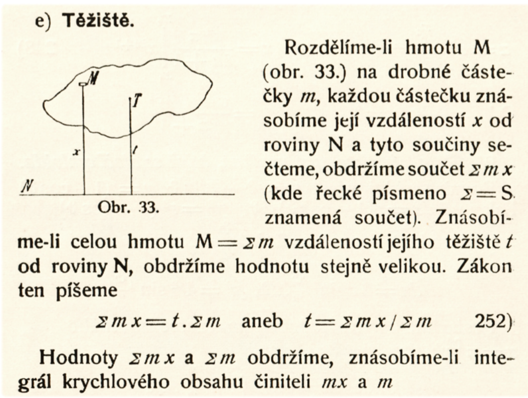
93. *Rotační těleso, jež vznikne, když se otočí cykloida.*

Rovnice cykloidy jest $x = r\vartheta - r \sin \vartheta$, $y = r(1 - \cos \vartheta)$
Pak jest $dx = r(1 - \cos \vartheta)\, d\vartheta$, $y^2 = r^2 (1 - \cos \vartheta)^2$

Poněvadž $1 - \cos \vartheta = 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ jest

$$dx = 2 r \sin^2 \frac{\vartheta}{2} . d\vartheta, \quad y^2 = 4r^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}$$

Podkapitola *d) Krychlový obsah tělesa rotačního*; [Úu13], výřezy stran 96 a 97, 9,8 × 9,7 cm (oba).



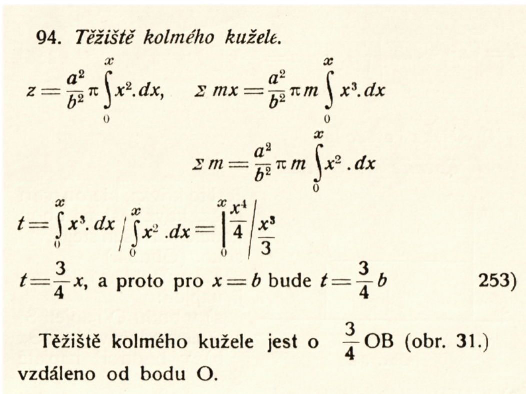
e) **Těžiště.**

Rozdělíme-li hmotu M (obr. 33.) na drobné částečky m, každou částečku znásobíme její vzdáleností x od roviny N a tyto součiny sečteme, obdržíme součet $\Sigma m x$ (kde řecké písmeno $\Sigma =$ S znamená součet). Znásobíme-li celou hmotu M $= \Sigma m$ vzdáleností jejího těžiště t od roviny N, obdržíme hodnotu stejně velikou. Zákon ten píšeme

Obr. 33.

$$\Sigma m x = t . \Sigma m \quad \text{aneb} \quad t = \Sigma m x / \Sigma m \qquad 252)$$

Hodnoty $\Sigma m x$ a Σm obdržíme, znásobíme-li integrál krychlového obsahu činiteli mx a m



94. *Těžiště kolmého kužele.*

$$z = \frac{a^2}{b^2} \pi \int_0^x x^2 . dx, \qquad \Sigma\, mx = \frac{a^2}{b^2} \pi m \int_0^x x^3 . dx$$

$$\Sigma\, m = \frac{a^2}{b^2} \pi m \int_0^x x^2 . dx$$

$$t = \int_0^x x^3 . dx \Big/ \int_0^x x^2 . dx = \Big|_0^x \frac{x^4}{4} \Big/ \frac{x^3}{3}$$

$$t = \frac{3}{4} x, \text{ a proto pro } x = b \text{ bude } t = \frac{3}{4} b \qquad 253)$$

Těžiště kolmého kužele jest o $\frac{3}{4}$ OB (obr. 31.) vzdáleno od bodu O.

Podkapitola *e) Těžiště*; [Úu13], výřezy stran 98 a 99, 9,8 × 7,5 cm (oba).

V dolní části pravého obrázku je předveden pouze začátek paragrafu *93. Rotační těleso, jež vznikne, když se otočí cykloida*. Doplňme proto zbývající, resp. na ilustraci nezobrazenou část:

Postavíme-li tyto hodnoty do vzorce obecného $z = \pi \int y^2 . dx$,

$$\textit{bude} \qquad z = 8\pi r^3 \int \sin^6 \frac{\vartheta}{2} \, . \, d\vartheta \qquad 249)$$

Dle vz. 79. jest $\sin^6 \frac{\vartheta}{2} = -\frac{1}{32} \cos 3\vartheta + \frac{3}{16} \cos 2\vartheta - \frac{15}{32} \cos \vartheta + \frac{15}{16}$

proto $z = \pi r^3 \int \left[-\frac{1}{4} \cos 3\vartheta + \frac{6}{4} \cos 2\vartheta - \frac{15}{4} \cos \vartheta + \frac{10}{4} \vartheta \right] d\vartheta$

$$z = \pi r^3 \left[-\frac{1}{12} \sin 3\vartheta + \frac{3}{4} \sin 2\vartheta - \frac{15}{4} \sin \vartheta + \frac{10}{4} \right] \qquad 250)$$

Pro $\vartheta = 0$ *jest výraz v závorce* $= 0$ *a proto* $z = 0$, *pro* $\vartheta = 2\pi$ *jest* $\sin 3\vartheta,\ \sin 2\vartheta,\ \sin\vartheta = 0,\ \dfrac{10}{4}\vartheta = 5\pi$ *a*

$$z\Big|_0^{2\pi} = 5\pi^2 r^3 \qquad 251)$$

([Úu13], str. 97–98)[38]

O důvodech Úlehlova přístupu k popisu určitých integrálů a jejich aplikací lze pouze spekulovat. Za příčinu by bylo možné považovat nedostatek české literatury o této partii matematické analýzy. Šimerkův *Přídavek*, jímž se J. Úlehla evidentně inspiroval, totiž výklad určitých integrálů neobsahuje. Jedinou českou učebnicí integrálního kalkulu byl na počátku 20. století druhý díl Studničkových *Základů*. Můžeme usuzovat, že byl Úlehlovým hlavním zdrojem, a s jistou nadsázkou můžeme tvrdit, že se J. Úlehlovi nepodařilo „přeformulovat" Studničkův podrobný výklad této problematiky do stručné a výstižné podoby.

Stejné hodnocení lze vztahovat i na krátké kapitoly *III. Diferenciální rovnice* a *IV. Které úkoly se řeší diferenciálními rovnicemi?* Do první jmenované J. Úlehla zařadil pouze tři paragrafy. V úvodním označeném *105. O diferenciální rovnici vůbec* takto motivoval ke studiu problematiky:

Rovnice tyto obsahují vedle veličin stálých a proměnných také diferenciály dx *a* dy. *Za neznámou považuje se* y *a diferenciál* dy …

Budeme-li dvakrát diferencovati rovnici $y = ax^2 + bx + c$, *vymítnou se veličiny stálé a obdrží rovnice diferenciální.*

Bude   *I.* $\quad dy = 2ax\,.\,dx + b\,dx, \quad \dfrac{dy}{dx} = 2ax + b$

II. $\quad \dfrac{d^2y}{dx} = 2a\,dx, \qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = 2a$

Naopak z rovnice $\dfrac{d^2x}{dx^2} = 2a$ *bude* $\dfrac{d^2y}{dx} = 2a\,dx$

$$\int \frac{d^2y}{dx} = \frac{dy}{dx} = 2ax + b, \qquad dy = axdx + bdx$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

([Úu13], str. 105–106)

Ve zbývajících dvou paragrafech zmínil (v současné terminologii) homogenní nelineární diferenciální rovnice prvního řádu se separovanými, resp. separovatelnými proměnnými, diferenciální rovnice ve tvaru totálního diferenciálu a lineární

[38] Zmíněný 79. vzorec J. Úlehla uvedl v části *B) Počet diferenciální*, v kapitole *III. Funkce trigonometrické*, v paragrafu označeném *36.* $\sin^m x$, $\cos^m x$. Za předpokladu, že m je sudé přirozené číslo, jej formuloval takto:

$$(-1)^{\frac{m}{2}} 2^{m-1} \sin^m x = \cos mx - \binom{m}{1} \cos{(m-2)x}$$
$$+\binom{m}{2} \cos{(m-4)x}\ \dots\ \pm \frac{1}{2}\frac{m(m-1)\ \dots\ \left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ \dots\ \frac{m}{2}} \qquad 79)$$

([Úu13], str. 27)

diferenciální rovnice prvního řádu. Teorii se prakticky nevěnoval, neuvedl žádné poznámky k problematice existence řešení, Cauchyovu počáteční úlohu, partikulární a obecné řešení diferenciální rovnice, také nepopsal například metodu variace konstanty. Text zpracoval v podobě „letmého“ seznámení s danou problematikou. Přibližme jej několika citacemi, ukažme části paragrafu označeného *106. Rovnice prvního řádu prvního stupně*. Nejprve předveďme Úlehlovo řešení diferenciální rovnice se separovanými proměnnými:

a) Může-li se odděliti y a dy od x a dx, řeší se rovnice přímým integrováním.

1. $ax\,dy + by\,dx = 0, \quad a\,\dfrac{dy}{y} + b\,\dfrac{dx}{x} = 0$

$$a\,ly + b\,lx = lc$$

$ly^a + lx^b = lc, \quad l(y^a\,.\,x^b) = lc, \quad x^b\,.\,y^a = c$ ([Úu13], str. 106)

Připojme pro porovnání současné řešení. Rovnici můžeme formálně přepsat do tvaru $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{ax} \cdot by$ (kde $a,\, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) a chápat ji jako $y' = f(x) \cdot g(y)$, kde f a g jsou spojité funkce na jistých otevřených intervalech. Následně „separujeme“ proměnné, uvažujeme $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x$, resp. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{by} = -\int \frac{1}{ax}\,\mathrm{d}x$, obdržíme $a \ln|y| + b \ln|x| = abc$ (kde $c \in \mathbb{R}$) a platí, $y = K \cdot x^{-\frac{b}{a}}$, kde $K \in \mathbb{R}$.

Do následujících úloh věnovaným rovnicím ve tvaru totálního diferenciálu J. Úlehla „promítl“ analýzu reálných funkcí dvou proměnných. Vyšel přitom z výše prezentované derivace součinu, odkázal na příslušný 4. vzorec z 10. paragrafu kapitoly *Diferenciál a diferenciální poměr*. Nahlížel na něj jako na totální diferenciál a v podstatě předvedl a využil tzv. Schwarzovu větu o záměnnosti smíšených parciálních derivací. Charakter výkladu vystihneme delším úryvkem, z něhož je dobře patrné velmi intuitivní pojetí problematiky a matematicky nepřesné řešení:[39]

b) Dle vz. 4 jest úplný diferenciál funkce o dvou proměnných u a t $dy = \dfrac{\delta y}{\delta u}.du + \dfrac{\delta y}{\delta t}.dt$.

Poznává se diferenciál ten po tom, že

$$\frac{\delta^2 y}{\delta u\,.\,\delta t} = \frac{\delta^2 y}{\delta t\,.\,\delta u}\,.\ \textit{Na př.}$$

1. $y = u^3 + t^3 + 2u^2t + 3ut$

$$\frac{\delta y}{\delta u} = 3u^2 + 4ut + 3t, \qquad \frac{\delta y}{\delta t} = 3t^2 + 2u^2 + 3u$$

$$\frac{\delta^2 y}{\delta u\,.\,\delta t} = 4u + 3 \qquad \frac{\delta^2 y}{\delta t\,.\,\delta u} = 4u + 3\ \ldots$$

[39] Schwarzovu větu můžeme formulovat takto: Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Jsou-li její smíšené parciální derivace $f''_{xy} = \dfrac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$, $f''_{yx} = \dfrac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$ definované a spojité na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$, pak jsou totožné. Tj. $\forall [x, y] \in \mathbb{R}^2$ platí, že $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$. Důkaz je nastíněn v prvním dílu Studničkových *Základů* ([St78], str. 47–48) a podrobněji je rozepsán ve Weyerově *Počtu differenciálném* ([We02], str. 194–196). V učebnici Jarník V., *Diferenciální počet II* (4. vyd., Academia, Praha, 1984) se jedná o větu č. 192. Viz její znění a důkaz na str. 186–187.

Máme-li diferenciální rovnici
$2x\,dx + 2y\,dy + x\,dy + y\,dx = 0,$ *nejprve ji urovnáme*
$(2x + y)dx + (2y + x)dy = 0.$

Pak položíme $2x + y = \dfrac{\delta z}{\delta y}$, $2y + x = \dfrac{\delta z}{\delta x}$, *a zkoušíme, zdali* $\dfrac{\delta^2 z}{\delta x\,.\,\delta y} = \dfrac{\delta^2 z}{\delta y\,.\,\delta x}$; *v naší rovnici jest*

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x\,.\,\delta y} = \frac{\delta^2 z}{\delta y\,.\,\delta z} = 1\,.$$

Rovnají-li se tyto výrazy, jest daná rovnice úplný diferenciál neznámé funkce $f(x, y)$. *Integrujeme-li část* $(2x+y)dx = 2x\,dx+y\,dx$, *obdržíme* $\int 2x\,.\,dx+y\int dx = x^2 + xy$ *(y se považuje zde za veličinu stálou). Tento integrál jest menší než funkce původní o neznámou funkci veličiny y a neznámou konstantu. Jest tedy* $z = f(x, y) = x^2 + yx + f(y) + c$. *Diferencováním obdržíme z této rovnice* $dz = 2x\,dx + y\,dx + x\,dy + f'y\,.\,dy$. *Když tuto rovnici přirovnáme k rovnici původní, poznáme, že* $f'y\,.\,dy = 2y\,.\,dy$, *jest tedy* $\int f'y\,.\,dy = y^2$ *a rovnice hledaná*

$$z = x^2 + xy + y^2 + c.$$

Dá-li se tedy diferenciální rovnice upraviti ve formu $M\,dx + N\,dy$ *tak, že* $\dfrac{dM}{dy} = \dfrac{dN}{dx}$, *čili* $\dfrac{\delta^2 z}{\delta x\,.\,\delta y} = \dfrac{\delta^2 z}{\delta y\,.\,\delta x}$, *jest rovnice úplným diferenciálem. Pak se integruje* $M\,dx$ *dle* x, y *se považuje za veličinu stálou, přidá se neurčená funkce* fy, *obdržený integrál se opět diferencuje a srovná s veličinou* N.

([Úu13], str. 107–108)

Opravme ještě překlep. Ve vztahu $\dfrac{\delta^2 z}{\delta x\,.\,\delta y} = \dfrac{\delta^2 z}{\delta y\,.\,\delta z} = 1$ má být ve jmenovateli druhého zlomku druhý činitel roven δx. Překvapivé je, že chyba je opomenuta v opravách uvedených na poslední straně učebnice[40] a je obsažena i v druhém vydání knihy, jež popisujeme níže. Ke studovanému 106. paragrafu pro úplnost poznamenejme, že je zakončen celkem třemi příklady prezentujícími využití poměrně elementární substituce.[41]

Lineární diferenciální rovnice jsou v Úlehlově učebnici zařazené do 107. paragrafu. Nelze tvrdit, že jsou matematicky i didakticky adekvátně vyložené. Spíše jsou stručně „ukázané“ v rozsahu dvou stran textu. Zavedené jsou takto:

107. Lineární rovnice diferenciální.

Tyto rovnice mají podobu

$\dfrac{d^3y}{dx^3} + p\dfrac{d^2y}{dx^2} + q\dfrac{dy}{dx} + ry = t$, *kde p, q, r, t jsou funkce veličiny x.*

[40] Za obsahem knihy jsou pod nadpisem *Opravte* uvedeny celkem čtyři korektury chyb, jež lze svojí „závažností“ přirovnat k výše zmíněné.

[41] Doplňme k tomu Úlehlovu úvodní poznámku a poslední řešenou úlohu:

c) Druhdy se dá rovnice upraviti na úplný diferenciál, když se do ní zavede nová proměnná veličina.

...

3. $a\,dx = (y-x)dy$. *Položíme-li* $y-x = u$ *bude* $dx = dy-du$, $a\,dy-a\,du = u\,dy$, $dy = \dfrac{a\,du}{a-u}$
$y = c - a\,l(a-u)$ $\quad y = c - a\,l(a+x-y)$ ([Úu13], str. 109–110)

J. Úlehla zde zapsal nehomogenní lineární diferenciální rovnici třetího řádu. Za tímto „zavedením“ pokračoval řešením první úlohy:

Nejjednodušší forma této rovnice jest

$$\frac{dy}{dx} + py = q \qquad \text{I.}$$

Píšeme-li $\int p\, dx = z$, *bude* $\frac{dz}{dx} = p$. *Obecné rozřešení rovnice* I. *pak jest*

$$y = e^{-z}(\int e^z q\, dx + c) \qquad \text{II.}$$

kde c je konstanta libovolná. Že toto řešení jest správné dokáže se takto. Z II. *plyne* $ye^z = \int e^z q\, dx + c$. *Diferencováním obdržíme* $e^z y\, dz + e^z\, dy = e^z q\, dx$, $\frac{y\, dz}{dx} + \frac{dy}{dx} = q$, *a poněvadž* $\frac{dz}{dx} = p$, *jest*

$$\frac{dy}{dx} + py = q$$

([Úu13], str. 110–111)

Rovnice označená I. představuje nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu (p, q jsou funkce proměnné x, viz výše). Úlehlovo *rozřešení* lze podle současného značení interpretovat takto. Uvažujeme rovnici tvaru $y' + p(x)y = q(x)$, kde funkce p, q jsou spojité a definované na nějakém otevřeném intervalu (a, b). Nejprve nalezneme separací proměnných řešení příslušné homogenní rovnice $y' + p(x)y = 0$. Má tvar $y = ce^{-P(x)}$, kde $c \in \mathbb{R}$, $x \in (a, b)$ a $P(x) = \int p(x)\mathrm{d}x$. Tedy Úlehlovo z je rovno $P(x)$. Následně funkci $y = ce^{P(x)}$ volíme za tzv. integrační faktor a vynásobíme jí rovnici $y' + p(x)y = q(x)$. Obdržíme $y'e^{P(x)} + p(x)ye^{P(x)} = q(x)e^{P(x)}$ a dalšími úpravami získáme tvar $ye^{P(x)} = \int q(x)e^{P(x)} + c$, který odpovídá rovnosti na prohlášením *z II. plyne*.

Na dalších řádcích J. Úlehla vždy uvažoval $p = a$ (resp. $p(x) = a$), význam „a“ však nekomentoval[42] a nastínil řešení pro tři různé pravé strany rovnice I. Za prvé předvedl řešení homogenní rovnice (resp. jej zopakoval), za druhé volil $q = n$ a za třetí $q = e^{bx}$.[43]

Na otázku z názvu kapitoly *IV. Které úkoly se řeší diferenciálními rovnicemi?* J. Úlehla stroze, avšak velmi poutavě odpověděl: *Jest mnoho úkolů, při kterých se musí řešiti rovnice diferenciální.* ([Úu13], str. 112) V textu ale příslušné aplikace spíše zmínil a nepředložil čtenáři mnoho matematického aparátu a příkladů k užití diferenciálních rovnic. Uvedl pouze „soupis výsledků“, jímž úzce navázal na výše přiblížený paragraf *44. Úkol tangentový*:

109. *Vyhledati křivku, jejíž normála jest veličina stálá.*

$$a = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$a^2(dx)^2 = y^2(dx)^2 + y^2(dy)^2$$

[42] Z kontextu je zřejmé, že Úlehlovo a je libovolné reálné číslo.
[43] Je patrné, že n, $b \in \mathbb{R}$.

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \qquad x = -\sqrt{a^2 - y^2}, \qquad x^2 + y^2 = a^2$$

Tou křivkou jest kruh.
([Úu13], str. 112)

V ostatních úlohách obdobně předvedl křivky, jejichž tangenta, subtangenta nebo subnormála je konstantní délky. Kapitolu zakončil paragrafem *115. Trajektorie*, v němž přiblížil nalezení analytického vyjádření křivky, jež *protíná řadu křivek o dané rovnici pod daným úhlem.* ([Úu13], str. 116)

Poslední, pátou kapitolu *Příklady z fysiky* napsal profesor pražského *Českého vysokého učení technického* František Nachtikal (1874–1939).[44] Přiblížil v ní aplikace kalkulu v mechanice, uvedl úlohy o pohybu, svislém vrhu, vztahu síly, hmotnosti a zrychlení, harmonickém kmitání a kyvadle. Na Úlehlův text se přímo neodkazoval, výklad pojal jako stručnou ukázku dané problematiky, strukturoval jej do pěti paragrafů a formuloval jej velmi podobně s představením aplikací diferenciálních rovnic v předchozí kapitole. Jakým způsobem se dostal ke spolupráci na Úlehlově učebnici, se nepodařilo dohledat. Rovněž není jasné, proč se J. Úlehla nepokusil sám popsat jmenované fyzikální problémy. Mohl se přitom inspirovat Šimerkovým *Přídavkem*, resp. příslušným paragrafem *30. O pohybu v přímkách*, v němž je zajímavě předveden vztah infinitezimálního počtu a rychlosti, zrychlení, svislého vrhu a pádu. Předveďme nejprve úryvky dvou Nachtikalových paragrafů:

116. *Rychlost a zrychlení. 1. Značí-li s dráhu, kterou probíhá daný bod v čase t, bude pohyb ten určen rovnicí $s = f(t)$.* 274)

Za krátkou dobu dt urazí bod krátkou dráhu ds, poměr $ds/dt = v$ 275)
značí proto rychlost tohoto pohybu.

Jestliže se tato rychlost zvětšuje, bude toto zvětšení za dobu dt rovnati dv. Pak znamená dv/dt okamžité zrychlení.

Jest tedy $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$ 276)

...

117. *O vrhu svislém. 1. Vyhodíme-li těleso svisle do výšky, bude na ně působiti tíže, bude je vraceti dolů; původní rychlost vrženého tělesa v_0 bude se zmenšovati zrychlením $g = 981\ cm/sek^2$.*

[44] F. Nachtikal se narodil v Kralovicích u Plzně. V letech 1885 až 1893 studoval reálné gymnázium v Klatovech, v roce 1897 dokončil studia matematiky a fyziky na Filosofické fakultě pražské univerzity. Tamtéž získal o rok později doktorát na základě disertační práce z oboru elektřiny. Potom pokračoval ve svém vzdělávání na univerzitě v Göttingen a Paříži. Od roku 1899 působil na pražských reálkách na Malé Straně a v Ječné ulici, od roku 1900 vyučoval jako středoškolský profesor fyziky v Brně. Na zdejší technice obhájil roku 1920 habilitaci a v roce 1926 získal místo profesora na pražském Českém vysokém učení technickém. Od roku 1936 byl předsedou *Jednoty československých matematiků a fyziků.* Zemřel v Praze. Během celého života publikoval desítky prací z teoretické fyziky, napsal také středoškolské učebnice. O Nachtikalově životě a díle viz *Dr. František Nachtikal.* Časopis pro pěstování matematiky a fyziky 68(1939), str. D174 (nekrolog), Valouch M., *K šedesátce prof. dr. Fr. Nachtikala.* Časopis pro pěstování matematiky a fyziky 64(1935), str. D1–D4.

Pohybová rovnice tohoto tělesa jest

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \tag{280)}$$

Z toho vyjde integrací

$$v = \frac{ds}{dt} = -gt + c$$

V čase $t = 0$ mělo těleso dle podmínky rychlost v_0, jest tudíž $c = v_0$, a vzorec

$$v = \frac{ds}{dt} = -gt + v_0 \tag{281)}$$

Další integrací dostaneme

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + c_1$$

Měříme-li vykonanou dráhu od bodu, z něhož jsme těleso vyhodili, jest pro $t = 0$, také $s = 0$, a proto $c_1 = 0$. Jest tedy konečný vzorec pro vykonanou dráhu

$$s = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{282)}$$

([Úu13], str. 117–118)

V. Šimerka analogicky s těmito úvahami rozebral pád tělesa v gravitačním poli a předvedl platnost vztahu $s = ct + \frac{1}{2}gt^2$ (c opět představuje počáteční rychlost). Vyzdvihnul přitom zanedbání odporu vzduchu. Nutnost tohoto předpokladu elegantně předvedl při popisu vrhu tělesa na klasickém příkladu (vystřelení dělové koule) a následně přiblížil vztahy pro zpomalený pohyb a vrh bez zanedbání odporu vzduchu. Zdůrazněme, že touto problematikou ani praktickými ukázkami se F. Nachtikal nezabýval. Pro srovnání proto uzavřeme rozbor *Příkladů z fysiky* citací příslušného úryvku Šimerkovy učebnice:

c) Při kolmém vrhu vzhůru v prostoru vzduchu prázdnou působí tíže proti počátečné síle vrhu, protož třeba zrychlení čili g záporně vzíti, čímž se $v = c - gt$, $s = ct - \frac{1}{2}gt^2$ objeví. Když těleso při vrhu takovém nejvyššího místa dosáhne, jest tam $v = 0$, což dává čas výstupu $t^1 = \dfrac{c}{g}$, a výšku výstupu $s^1 = \dfrac{c^2}{2g}$. Ten samý výsledek podává maximum veličiny s.

Koule dělová rychlostí 2300 stop kolmo vzhůru vystřelená dosáhla by dle toho výšky as 85300′ t. j. $3\frac{1}{2}$ míle; což ovšem znamenitě menší vypadne, poněvadž tření se vzduchem jí veliký odpor činí.[45]

d) Byloliby těleso na hladkou obzornou rovinu na př. led vrhnuto počátečnou rychlostí c, nepůsobí naň tíže, ale tření se vzduchem a ledem činí odpor, ten pak berou mechanikové co poměrný čtverci rychlosti, tedy $\varphi = -mv^2$, jelikož se jím běh umenšuje. ([Ši64], str. 43)

V závěrečné části *Přídavek* je vysvětleno obecné řešení algebraické rovnice třetího stupně uvažované v normovaném tvaru $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$. Nejprve

[45] Apostrof „′“ u koulí dosažené výšky vyjadřuje stopy. Uvedená počáteční rychlost je uvažována ve stopách za sekundu, tedy přibližně 700 m/s.

je zvolena známá substituce $x = y - \frac{A}{3}$, díky níž je obdržena tzv. redukovaná kubická rovnice $y^3 + ax + b = 0$, kde $a = -\frac{A^2}{3} + B$, $b = \frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C$.

Následně jsou zavedeny nové neznámé u, v, resp. je položeno $y = u + v$ a dosazením do redukované rovnice je po úpravách získán vztah (nazývaný jako *Kardanův*):

$$y = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Toto jest vzorec Kardanův. 295)

([Úu13], str. 124)

V dalším textu J. Úlehla intuitivně vyložil potřebné primitivní n-té, resp. třetí odmocniny z jedné a prakticky bez komentáře tímto způsobem formuloval řešení y_1, y_2 a y_3:

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 + v_1 = u + v \\ y_2 &= u_2 + v_3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right) u + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\right) v \\ y_3 &= u_3 + v_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\right) u + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right) v \end{aligned} \qquad 298)$$

([Úu13], str. 124)

Můžeme konstatovat, že výklad zpracoval poměrně pečlivě. Překvapivě však nezapsal vztahy pro původní neznámou x a nepřipojil žádné úlohy na procvičení. Závěrem nastínil přibližné řešení kubické rovnice.

Poslední strany *Počtu infinitesimálního* předkládají výčet analytického vyjádření křivek (např. konchoidy, cykloidy, epicykloidy, lemniskáty, závitnice nebo kardioidy). Celkem jsou zde uvedeny předpisy dvaceti devíti křivek daných explicitně, implicitně, parametricky nebo polárními souřadnicemi.

Recenze

Na *Počet infinitesimální* byly krátce po jeho vydání publikovány tři recenze. Byly napsány jako stručné články [Re07], [KB07a] a [KB07b] v časopisech Komenský, Škola měšťanská a Pedagogické rozhledy, přičemž byly zařazeny v rubrikách upozorňujících na nově vydanou literaturu. Nebyly podepsány. Druhá a třetí byly pravděpodobně od jednoho autora, neboť byly obě signovány iniciálami K.B. a obsahovaly podobné myšlenky nebo místy stejné stylistické obraty.

První a zároveň kratší neobsahovala prakticky žádné hodnocení Úlehlovy práce. Pouze na ni upozorňovala téměř totožnými větami z její předmluvy a zahrnovala soupis jejích kapitol:

V literatuře naší dosud nebylo knížky, která by stručně učila pravidlům počtu diferenciálního a integrálního. Obšírná učebnice Studničkova a Weyrova jsou nesnadny pro začátečníky. Počtu diferenciálnímu a integrálnímu učí autor dle Leibnizovy metody infinitesimální; o základních pojmech diferenciálu a integrálu vykládá tak, jak základní ty pojmy určil a vymezil původce jejich Leibniz. A v tom *se odlišuje kniha autorova od učebnic, kde se učí tomuto počtu metodou limitní, vzniklé z Newtonovy metody fluxionové.*

Obsah spisu vysvitne nejlépe z kapitol, jež spis zahrnuje …

([Re07], str. 123–124)

Autor zbývajících dvou kritik rovněž uvedl tyto informace. Připomněl navíc nedostatečnou výuku matematiky na učitelských ústavech a evidentně přitom toužil společně s J. Úlehlou po dalším sebevzdělávání pedagogů. Velmi totiž vyzdvihoval koncept jeho učebnice jako vstřícného a jednoduchého textu pro samouky a také připomínal Úlehlovy osobní studijní zkušenosti a pedagogické kvality. Textu vytýkal pouze některé tiskové chyby, celkově jej však považoval za naprosto kvalitní, jak můžeme doložit několika větami ze druhé recenze:

Ředitel Úlehla vzal na se nesnadný úkol, odhodlal-li se napsati pro Encyklopedickou knihovnu Dědictví Komenského uvedení do počtu infinitesimálního, které by tak jako ostatní publikace této knihovny především bylo přechodem od vzdělání, jehož poskytují učitelské ústavy, ke studiu vyššímu …

Přes nesnadnost úkolu nelze řediteli Úlehlovi upříti, že se mu práce zdařila. Je z ní vidět zkušeného dobrého učitele a bystrého samouka, jenž z blízka poznal obtíže a úskalí soukromého studia a bezpečně vede učně, aby se jim vyhýbal.

([KB07a], str. 21–22)

Pro adekvátní hodnocení Úlehlovy učebnice bohužel nemůžeme pokládat tyto kritiky za příliš nosné. Za jejich „potíž“ totiž považujeme, že byly vydány v pedagogických časopisech a byly evidentně napsány autory, kteří nebyli v matematické analýze příliš erudovaní, nýbrž byly orientováni na pedagogiku a vzdělávání na úrovni současné základní školy. Nechceme tvrdit, že publikovali chybné recenze, pouze přibližovali jinou než matematickou stránku textu. Ve třetím příspěvku bylo k této otázce zodpovědně poznamenáno:

Není úkolem Pedagogických rozhledův, aby posoudily nový spis ředitele Úlehly se stanoviska matematického, stane se tak jistě v listech odborných. Nám jde především o to, abychom vytkli, pokud nová knížka v řadě Encyklopedické knihovny vyhovuje jejímu přednímu úkolu, totiž aby podporovala ušlechtilé snahy sebevzdělávání v českém učitelstvu … ([KB07a], str. 615)

Bohužel jakékoliv reakce na *Počet infinitesimální* z řad matematické veřejnosti, článků v odborných žurnálech nebo vysokoškolské komunity se nepodařilo objevit. Zejména byl pečlivě prohledán *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, resp. jeho rubrika *Věstník literární* (též *Literatura*), v níž byly představovány a recenzovány nové publikace. J. Úlehla je ve jmenovaném periodiku zmíněn pouze jednou v souvislosti s jeho monografií *Dějiny matematiky.*[46] Stejně tak nebyly na *Počet infinitesimální* nalezeny žádné reakce *Jednoty českých mathematiků.* Doplňme k tomu, že J. Úlehla byl jejím činným členem,[47] avšak o jeho zdejších aktivitách nebo o spolupráci s tímto odborným spolkem se opět nepovedlo cokoliv dohledat. O důvodech této situace lze pouze spekulovat.

Můžeme usuzovat, že Úlehlova práce nebyla české, resp. pražské matematické

[46] Pro podrobnosti viz následující kapitolu.

[47] Úlehlovo členství v Jednotě je doloženo v soupisu *Činní členové s ročním příspěvkem 4 K* uvedeném v historické práci Posejpal V., *Dějepis Jednoty českých mathematiků. K padesátému výročí jejího založení.* JČM, Praha, 1912, str. 129.

komunitě příliš známá či dokonce nebyla záměrně studována a potažmo reflektována recenzemi nebo stručnými upozorněními. Předpokladem těchto domněnek by mohla být nepříliš dobrá Úlehlova „výchozí pozice“, neboli jeho působení na Moravě v menších sídlech a „pouze“ na obecných a měšťanských školách. Za další důvod lze považovat citované „opovržení“ učebnicemi V. Šimerky, F. J. Studničky a Ed. Weyra, jež je obsaženo v předmluvě Úlehlovy práce. Vzhledem k nepochybnému významu těchto učebnic mohlo být na takové distancování nahlíženo kriticky a přeneseně mohlo vést k nezájmu o Úlehlovu učebnici. Ještě můžeme poznamenat, že *Počet infinitesimální* na sebe neupozorňuje závažnými matematickými chybami a nebyl přímo určen vysokoškolským studentům. I z toho důvodu nemusel vstoupit do povědomí naší odborné veřejnosti.

Druhé vydání

Význam učebnice pro samostudium diferenciálního a integrálního počtu byl oceněn jejím druhým vydáním po Úlehlově smrti v roce 1944 a byl zdůrazněn novým pojmenováním knihy titulem *Vyšší matematika bez učitele* [Úu25]. Náklad připravili Miroslav Litomiský[48] a František Navara (1901–1973)[49] v rámci edice *Věda všem* přibližující stručnými a výstižnými publikacemi nejrůznější vědní obory.[50] K textu připojili předmluvu, v níž zmínili Úlehlovu práci pro českou pedagogiku, vysvětlili svůj záměr znovu otisknout *Počet infinitesimální* a přiblížili učiněné změny původního zpracování:

> *Vydáváme nyní toto dílo znovu, ale ne především z piety k autorovi. „Počet infinitesimální“ je totiž také první česká publikace svého druhu, napsaná pro široké kruhy zájemců o hlubší studium matematiky ...*
>
> *Od původního úmyslu, doplnit knihu zevrubnými důkazy všech pouček v ní uvedených, upustili jsme jednak proto, aby její rozsah příliš nevzrostl, jednak, aby nebyl porušen její svéráz. Původní text byl tudíž pozměněn jen nepatrně, názvosloví a symbolika upravena podle norem dnes závazných a přidány nejnutnější poznámky.* ([Úu25], str. 10)

Pro vystihnutí drobných odchylek druhého vydání od prvotního textu předveďme novou formulaci Úlehlova komentáře k geometrickému významu derivace, jenž jsme citovali výše. Všimněme si modernější terminologie a také zmiňovaného „přidání nejnutnějších poznámek“ (druhý a třetí odstavec první původní vydání neobsahuje):

[48] Životopisná data a informace o díle M. Litomiského se nepovedlo dohledat. Ze *Spolkového věstníku* Jednoty (Časopis pro pěstování matematiky a fyziky 67(1938), str. D76 a D89) plyne, že M. Litomiský byl jejím členem a byl profesorem reálného gymnázia v Užhorodě.

[49] F. Navara byl absolventem reálky v Telči a následně matematiky a deskriptivní geometrie na Přírodovědecké fakultě pražské univerzity. Jako středoškolský profesor působil na gymnáziu ve Strážnici, dále v Jihlavě, Třebíči a Telči, po válce přešel do výzkumného technického ústavu v Praze a svoji kariéru uzavřel jako vedoucí ústavu matematiky na Vysoké škole zemědělské v Jihlavě. Znal-li J. Úlehlu osobně, se nepodařilo dohledat. Pro základní informace o Navarově životě a díle viz Svoboda J., *Profesor František Navara sedmdesátníkem.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 16(1971), str. 99–100.

[50] Edice *Věda všem* byla vydávána od 30. do 50. let 20. století nakladatelstvím České grafické unie a později Československé akademie věd. Během 2. světové války ji redigoval Vladimír Úlehla, Úlehlův syn.

Diferenciální poměr jest tangenta úhlu, který svírá tečna dané křivky v daném bodě s osou OX

(Nesmíme však zapomínati, že obr. 3 slouží jen k znázornění. Ve skutečnosti jsou délky dy a dx nekonečně malé, to jest menší než jakékoliv malé číslo.)

Hodnota tohoto diferenciálního poměru čili směrnice tečny v každém bodě křivky závisí na úsečce příslušného bodu, jest tedy obecně také funkcí nezávisle proměnné, což píšeme $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Tuto novou funkci $f'(x)$ nazýváme derivací původní funkce $f(x)$ a značíme ji y'. ([Úu25], str. 16)

Editoři textu se pokusili zpřesnit vysvětlení důležitých pojmů nebo vlastností, drželi se však původního zcela intuitivního chápání problematiky, neboť se ani v náznaku nezabývali precizním pojetím matematické analýzy. Velmi zajímavá je také jejich snaha o mírnění některých expresivních Úlehlových vyjádření. Například z předmluvy k prvnímu vydání bylo zcela vynecháno hodnocení učebnic V. Šimerky, F. J. Studničky a Ed. Weyra. Výše citované prohlášení o vzniku kalkulu, *vynálezcem tohoto počtu jest G. W. Leibniz* bylo přeformulováno na *zakladatelem vyšší analysy jest G. W. Leibniz* ([Úu25], str. 14) nebo poznámka k algebraické řešitelnosti rovnic čtvrtého stupně v *Přídavku*:

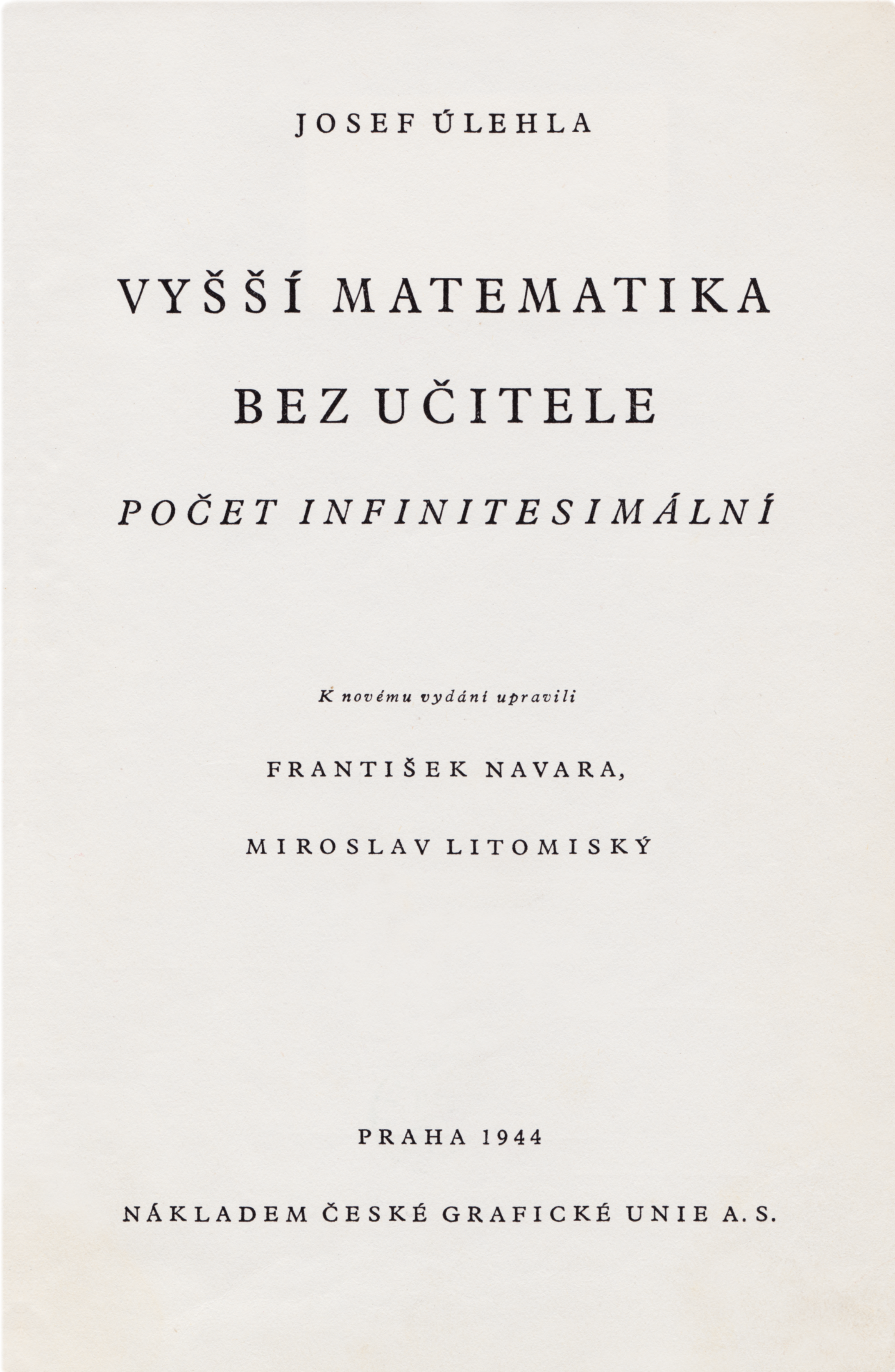
Rozřešiti obecnou rovnici stupně vyššího tvarem konečným dosud se matematikům nepodařilo. ([Úu13], str. 128)

Byla nahrazeno slovy:

Algebraické řešení obecné rovnice stupně vyššího než čtvrtého není možné. ([Úu25], str. 136)

Tato „vylepšení“ původního textu prezentujeme pochopitelně s jistou nadsázkou. Abychom uvedli na pravou míru poslední zmíněnou rozdílnost, zdůrazněme, že J. Úlehla věděl o nemožnosti obecně řešit algebraické rovnice pátého a vyššího stupně. Ve druhém díle *Dějin matematiky* zmínil existenci důkazu této věty norského matematika Nielse Abela (1802–1829). Dlužno jen připomenout, že uvedenou monografii publikoval až v roce 1912, tudíž v době vydání *Počtu infinitesimálního* nemusel mít historii řešení rovnic zcela nastudovanou.[51]

[51] Vedle N. Abela se řešení algebraické rovnice pátého stupně věnoval také Francouz Evariste Galois (1811–1832). Životní osudy, odborné výsledky obou matematiků a další dobové souvislosti byly populárně přiblíženy v nedávné době např. v práci Mareš M., *Příběhy matematiky.* Pistorius & Olšanská, Praha, 2008, str. 134–141.



JOSEF ÚLEHLA

VYŠŠÍ MATEMATIKA

BEZ UČITELE

POČET INFINITESIMÁLNÍ

K novému vydání upravili

FRANTIŠEK NAVARA,

MIROSLAV LITOMISKÝ

PRAHA 1944

NÁKLADEM ČESKÉ GRAFICKÉ UNIE A. S.

[Úu25], titulní list, 12,4 × 19 cm.

Celkové hodnocení

Kladné a záporné stránky *Počtu infinitesimálního* včetně dobových i matematických souvislostí byly již ve značné míře předvedeny. Pokud bychom měli shrnout hodnocení Úlehlova textu, zdůraznili bychom tyto závěry. Učebnice byla naprostým odrazem osobnosti svého tvůrce, neboť byla sepsána na základě jeho iniciativy a nebyla vázána jakýmikoliv učebními předpisy. Byla dalším dokladem autorovy obětavé i kvalitní pedagogické činnosti, zejména jeho schopnosti poutavě vykládat tu či onu problematiku.

Zatímco Šimerkův *Přídavek* byl významný pro středoškolské studenty a učebnice F. J. Studničky a Ed. Weyra pro vysokoškolskou matematickou komunitu, Úlehlův text byl užitečný pro kandidáty učitelství a pedagogy na obecných a měšťanských školách. Na základě takového určení byl formulován velmi přívětivě se zřetelem na samostudium čtenářů. V důsledku toho byl pojat poměrně encyklopedicky a po odborné stránce neúplně. Byl naplněním jistého prázdného místa v tehdejší české matematické literatuře a svým charakterem byl nadčasovým. Mohli bychom jej řadit k popularizačním pracím nebo polytechnickým knihám vznikajícím u nás od 30. let 20. století, takové přirovnání totiž můžeme podtrhnout druhým vydáním ve zmiňované edici *Věda všem* a rovněž slovy z jeho názvu, jež navíc poukazují na neblahou situaci našeho vysokého školsví během druhé světové války.

M. Litomiský a F. Navara pochopitelně nemohli do předmluvy nového nákladu uvést tehdejší uzavření českých vysokých škol, formulací *Vyšší matematika bez učitele* však svůj odpor proti německé okapaci nenápadně projevili. Navíc v Navarově případě je tento kontext na místě vzhledem k jeho pobytu ve Spojených státech v roce 1938, při němž spolupracoval na vývoji amerických námořních torpéd a přeneseně vzato docílil úspěchu při jejich významném uplatnění proti německým lodím po roce 1943.[52]

České učebnice vyšší matematiky první poloviny 20. století

Pro zasazení Úlehlova *Počtu infinitesimálního* do kontextu dalších prací uzavřeme tuto kapitolu stručnou charakteritikou studijních textů podobného zaměření, jež u nás vznikly v 1. polovině 20. století. Můžeme je rozdělit na vysokoškolské učebnice matematické analýzy a na méně podrobné příručky připravené pro seznámení se základy kalkulu. V soupisu publikací uvádíme dataci prvních nákladů příslušných titulů a odkazujeme čtenáře na literaturu o jejich autorech, případně podáváme doplňující informace. Citacemi některých textů ilustrujeme různé přístupy k výkladu základních pojmů nebo tvrzení. Vyslovená hodnocení knih opíráme o jejich recenze.

V prvních desetiletích 20. století byly vydány učebnice matematické analýzy Karla Petra (1868–1950), profesora pražské univerzity, resp. University Karlovy (po roce 1920).[53] Byly rozděleny do dvou dílů a pojmenovány jako *Počet integrál-*

[52] F. Navara vnesl do amerického armádního výzkumu myšlenku navádět pumy za hlukem lodního šroubu a připravil konkrétní technická řešení. Následně na vývoji spolupracoval s Albertem Einsteinem (1879–1955). Tyto informace včetně dalších aktivit regionálního českého odboje uvádí publikace Vybíhal J., *Jihlavsko ve stínu říšské orlice*. Nákl. vl., Jihlava, 2012.

[53] K. Petr se narodil ve Zbyslavi u Čáslavi. Studoval na gymnáziích v Čáslavi a Chrudimi,

ní [Pe15] (1915)[54] a *Počet differenciální* (1923).[55] Byly významné systematickým zpracováním i precizním výkladem látky pomocí definic a vět s důkazy, jímž by z hlediska přesnosti matematického vyjadřování takřa vyhovovaly současným požadavkům.

V *Počtu integrálním* K. Petr podrobně vyložil primitivní funkci, metody stanovení neurčitých integrálů, teorii a aplikace Riemannova integrálu, nevlastní, dvojnásobné a křivkové integrály, Fourierovy řady a integrály funkcí více proměnných. Knihu sepsal na základě podnětu *Jednoty českých mathematiků a fysiků* a jako doplnění Weyrova *Počtu differenciálného*. Hodnotu této učebnice oceňoval, odkazoval se v textu na její paragrafy a nezmiňoval její záporné stránky, případně J. V. Pexiderem vyvolaný spor o její kvalitu.[56] Předveďme na ukázku, jakým způsobem K. Petr zavedl neurčitý integrál, resp. primitivní funkci. Všimněme si zejména srozumitelného vyjadřování, proti Úlehlovu *Počtu infinitesimálnímu* přesnější práce s interpunkcí, matematické správnosti i odkazu na Weyrovu učebnici:[57]

1. *Buď dána funkce $f(x)$ proměnné x. Jestliže derivace funkce $F(x)$ jest stále rovna dané funkci $f(x)$, to jest, jestliže jest pro každé x*

$$\frac{d\,F(x)}{dx} = F'(x) = f(x), \tag{1}$$

sluje $F(x)$ integrálem funkce $f(x)$.

Vedle $F(x)$ jest též integrálem $F(x)+k$, kde k jest jakékoliv číslo na x nezávislé (konstanta) a naopak dle věty (W., 68., str. 153), že dvě funkce mající pro všecky hodnoty neodvisle proměnné stejné derivace mají rozdíl konstantní, jsou všecky integrály funkce $f(x)$ obsaženy ve výrazu $F(x)+k$.[58]

v roce 1893 absolvoval Karlo-Ferdinandovu universitu v Praze a vykonal zkoušky učitelské způsobilosti z matematiky a fyziky. Jako středoškolský profesor působil v Chrudimi, Brně, Přerově a Olomouci. Habilitaci v oboru matematické analýzy obhájil roku 1902 na České technické vysoké škole Františka Josefa v Brně. Od roku 1903 jako mimořádný profesor, resp. od roku 1908 jako řádný profesor přednášel na *České universitě Karlo-Ferdinandově* v Praze. V letech 1925 a 1926 ji jako rektor vedl. Do penze odešel roku 1938. Zemřel v Praze. Napsal vysokoškolské učebnice matematické analýzy a více než 100 vědeckých prací. Zabýval se teorií čísel, numerickou matematikou, geometrií a algebraickými formami. O Petrově osobnosti, pedagogické a odborné činnosti viz diplomovou práci *Život a dílo Karla Petra* [Cr92].

[54] Učebnice [Pe15] byla v roce 1931 vydána podruhé v upravené podobě v rozsahu 724 stran. Lišila se zejména připojením dodatku *Úvod do teorie množství* napsaným V. Jarníkem.

[55] Petr K., *Počet differenciální.* Edice Sborník Jednoty československých mathematiků a fysiků, svazek č. 16, JČSMF, Praha, 1923, 466 stran.

[56] K. Petr vztah své a Weyrovy učebnice přiblížil těmito slovy: *Kniha tato, v jejíž sepsání jsem se uvázal na podnět výboru Jednoty Českých mathematiků a fysiků, má být pokračováním knihy Ed. Weyra »Počet differenciálný« … Ed. Weyr zamýšlel, jak z předmluvy k »Počtu diff.« vyplývá, napsati učebnice o celém počtu infinitesimálním …* ([Pe15], *Předmluva*) Přímé vazby na Weyrův text následně vysvětlil takto: *Odkazy ke knize Weyrově »Počet differenciálný« vyznačeny jsou v závorce písmenem W a řadovou číslovkou; značí ku př. (W., 17) odkaz ku 17. odstavci (paragrafu) knihy Weyrovy.* ([Pe15], *Vysvětlení zkratek*)

[57] Jedná se o přepis části prvního paragrafu, jež byl v obsahu učebnice pojmenován *Definice integrálu neurčitého (primitivní funkce).*

[58] Zmíněný 68. paragraf Weyrovy učebnice je pojmenován *Věty o derivaci.* Na uvedené straně obsahuje toto tvrzení a jeho zdůvodnění: *Mají-li dvě funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$ v daném intervallu stejné derivace, jest v něm jejich rozdíl stálý.*

Zavádíme pak pro integrál funkce $f(x)$ označení

$$\int f(x)dx \tag{2}$$

a můžeme tudíž psáti (se zřetelem ku (1)*)*

$$F(x) + k = \int f(x)dx. \tag{3}$$

Rovnice (1) *a* (3) *jsou tedy úplně ekvivalentní. Integrál* (2) *sluje integrál neurčitý; neboť funkce, které se dle* (3) *integrál ten obecně rovná, obsahuje neurčenou konstantu. Této konstantě se říká integrační konstanta.* ([Pe15], str. 1)[59]

Petrův *Počet differenciální* byl svým způsobem nahrazením „rozebrané" Weyrovy učebnice *Počet differenciálný*. Byl rozdělen do tří částí obsahujících konstrukci reálných čísel (pomocí Dedekindových řezů), limity posloupností, nekonečné řady a součiny, teorii elementárních funkcí, dále diferenciální počet reálné funkce jedné proměnné, mocninné řady, a konečně diferenciální počet reálných funkcí více proměnných a teorii implicitních funkcí. Obě zmíněné Petrovy učebnice byly reflektovány odbornými recenzemi a celkově byly velmi kladně přijaty.[60]

Ještě před vznikem první republiky publikoval učebnici infinitezimálního počtu také profesor brněnské a později pražské techniky Jan Vojtěch (1879–1953).[61] Nazval ji *Základy mathematiky ke studiu věd přírodních a technických* (1916),[62]

Učiníme-li

$$F(x) = f(x) - \varphi(x),$$

máme dle supposice

$$F'(x) = f'(x) - \varphi'(x) = 0,$$

a tedy jest $F(x)$ v intervallu stálou. ([We02], str. 153)

[59] Zavedené pojmy, vlastnosti nebo formulace vět byly v Petrově učebnici zvýrazněny. V posledním odstavci této citace bylo sousloví *integrál neurčitý* vysázeno tučným sans-serifovým písmem a označení *integrační konstanta* italikou.

[60] Jedná se o články Vojtěch J., *Karel Petr, Počet intgrální.* Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 45(1916), str. 225–229; Rychlík K., *K. Petr: Počet differenciální.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 53(1924), str. 324–326. Druhé vydání [Pe15] bylo (rovněž kladně) hodnoceno v recenzi Čech E., *K. Petr: Počet integrální.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 53(1924), str. 59–61. Pro více informací o Petrových učebnicích matematické analýzy a jejich hodnocení viz [Cr92], str. 39–73.

[61] J. Vojtěch se narodil v Kyjově. Nedaleko odsud, v Uherském Hradišti, absolvoval v roce 1898 gymnázium. Studium matematiky na Karlo-Ferdinandově universitě v Praze dokončil roku 1902. Působil jako středoškolský profesor na gymnáziích v Praze, Olomouci, na reálce v Lipníku nad Bečvou a v Brně. Habilitaci z matematiky získal v roce 1909 na České technické vysoké škole Františka Josefa v Brně, zde byl v roce 1920 jmenován řádným profesorem. V letech 1923 až 1949 přednášel jako řádný profesor na Českém vysokém učení technickém v Praze. Zemřel v Praze. Věnoval se zejména projektivní geometrii, rovinným křivkám a teorii transformací. Je autorem středoškolských učebnic matematiky. O Vojtěchově životě a díle viz Vojteková L., *Jan Vojtěch a jeho stredoškolské učebnice.* In. Bečvář J., Bečvářová M. (ed.), *Matematika v proměnách věků V.* Edice Dějiny matematiky, svazek č. 33, Matfyzpress, Praha, 2007, str. 152–165; Vyčichlo F., *Prof. Dr. Jan Vojtěch zemřel.* Časopis pro pěstování matematiky 78(1953), str. 283–286.

[62] Vojtěch J., *Základy mathematiky ke studiu věd přírodních a technických.* Edice Knihovna spisů mathematických a fysikálních, svazek č. 2, JČMF, Praha, 1916, 304 stran. Učebnice byla vydána celkem osmkrát. Pro třetí náklad byla rozšířena a rozdělena do dvou svazků (*Část první,*

čímž zdůraznil její určení příslušným vysokoškolským oborům. V textu se zaměřil na užití diferenciálního a integrálního počtu, věnoval se zejména aplikačním úlohám. V *Předmluvě* se přitom zmínil, že z hlediska matematické exaktnosti se rozhodl jít *střední cestou.* Výklad se snažil pečlivě strukturovat, avšak místy zjednodušovat například neuvedením důkazů všech užívaných tvrzení, aby se mu podařilo docílit srozumitelnosti a účelnosti učebnice pro technická studia. Nevyvaroval se přitom některých chyb, což mu bylo vytýkáno v recenzi. Na ukázku se podívejme na Vojtěchovo vysvětlení významu druhé derivace (reálné funkce jedné proměnné), jež bylo naopak kladně reflektováno a jež můžeme porovnat s výše citovaným strohým Úlehlovým přístupem k popisu průběhu funkce:[63]

V bodech, pro které jest $y' = 0$, může křivka míti vrcholy; má tam vrchol dolní, je-li (zdola) vypuklá, má vrchol horní, je-li vydutá. Proto:

Křivka $y = f(x)$ má vrchol dolní v bodě, pro nějž vedle $y' = 0$ platí také $y'' > 0$, má vrchol horní, jestliže vedle $y' = 0$ platí $y'' < 0$.

b) Zbývá vyšetřiti případ, kdy $y'' = 0$. Předpokládejme nejprve, že $y' \neq 0$, křivka nemůže tam tedy míti vrchol. Hodnotou nulovou prochází y'' buď od hodnot záporných ke kladným nebo od hodnot kladných k záporným (nemá-li tam hodnotu extrémní); v prvém případě přechází křivka od tvaru vydutého k vypuklému, v druhém od vypuklého k vydutému (v každém z obou případů ovšem buď stoupá nebo klesá). Tečna křivky ve všech těchto případech, kdy $y'' = 0$ (a $y''' \neq 0$; nebo $y^{(k)} = 0$ pro $k = 2, 3, \ldots, n$ a $y^{(n+1)} \neq 0$ pro n sudé), mění smysl svého otáčení; pravíme, že křivka v bodě, pro který jest $y'' = 0$, má tečnu obratu (tečnu inflexní), a ten bod sluje bod obratu neboli bod inflexní …

Také v případě, kdy jest $y' = 0$, má křivka pro $y'' = 0$ bod inflexní, nemá-li tam po případě vrchol (nemá-li tam totiž funkce hodnotu extrémní, t. j. je-li její třetí derivace různá od nuly, po případě první nenulová z vyšších derivací je-li řádu lichého); inflexní tečna je zde rovnoběžná s osou x (I_5 a I_6 na obr. 67).[64] *Platí tedy:*

Křivka $y = f(x)$ má inflexi v bodech, pro které $y'' = 0$ (a současně $y''' \neq 0$, nebo obecně končí-li řada vyšších derivací nule rovných derivací řádu sudého).

([Vo45], str. 274–275)

1922, 412 stran; *Část druhá*, 1923, 356 stran). Naposledy byla vydána v roce 1959. Níže citovaný úryvek Vojtěchovy učebnice je z prvního dílu šestého vydání z roku 1945 ([Vo45]). V impresu tohoto výtisku je uvedena „zajímavá“ dobová poznámka: *Toto šesté vydání bylo připraveno tajně za německé okupace.*

[63] Recenzi na Vojtěchovy *Základy mathematiky* představuje článek Hostinský B., *J. Vojtěch: Základy mathematiky ke studiu věd přírodních a technických.* Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 46(1917), str. 214–217. Zde bylo uvedeno toto kladné hodnocení příslušné části knihy: *IV. oddíl jedná o vyšších derivacích, o parciálních derivacích a o analytické geometrii v prostoru. U druhé derivace jest objasněn její význam geometrický a fysikální (zrychlení), vyšších derivací jest užito k úplnému rozboru extrémních hodnot a k odvození Taylorovy věty … Dále se pojednává o neurčitých výrazech, o základních pojmech vztahujících se k nekonečným řadám, o Taylorově řadě, o parciálních derivacích, o totálních diferenciálech, … stručně jest pojednáno o funkcích implicitních o extrémních hodnotách funkcí dvou nezávisle proměnných a o funkcích složených. Všecky tyto kapitoly jsou velmi pěkně vypracovány.*

[64] K textu je připojen jednoduchý srozumitelný obrázek, na kterém jsou načrtnuty různé křivky s vyznačenými inflexními body a *tečnami obratu.*

Základy diferenciálního a integrálního počtu J. Vojtěch shrnul ještě v práci *Přehled vyšší matematiky* (1926).[65] Vedle kalkulu ji věnoval představení lineární algebry, determinantů, algebraických struktur, diferenciální a analytické geometrii a připojil tabulky hodnot exponenciálních, goniometrických a hyperbolických funkcí a tabulky pro eliptické integrály. Knihu nepojal jako učebnici, formuloval ji jako stručné předvedení dané problematiky, ukázku aplikací a řešení úloh. Obdržel na ni recenzi, v níž byl oceněn význam knihy pro základní seznámení s vyšší matematikou, bylo doporučeno vynechání některých jednodušších témat a naopak bylo navrženo zařazení více vzorců užitečných pro aplikace.[66]

Nepříliš kvalitní učebnice infinitezimálního počtu byly u nás ve sledovaném období publikovány dvě. První, *Základy vyšší mathematiky. Díl I.* (1915) a *Díl II.* (1918) napsal profesor *Vysoké školy báňské* v Příbrami František Čuřík (1876–1944).[67] V prvním svazku se věnoval konstrukci reálných čísel, elementárním funkcím, limitám, spojitosti, diferenciálnímu počtu funkcí jedné i více proměnných a řadám, ve druhém neurčitému a Riemannovu integrálu a dvojným a trojným integrálům. V podstatě se snažil stručněji obsáhnout látku zpracovanou ve výše jmenovaných Petrových učebnicích. Dopustil se však značného množství věcných chyb a v některých kapitolách, zejména v popisu elementárních funkcí se omezil pouze na výklad na úrovni matematiky střední školy. Povrchně se také věnoval aplikacím kalkulu. Setkal se z velmi negativním ohlasem ve věcné a podrobné recenzi.[68]

Druhý, ne zcela úspěšný studijní text základů matematické analýzy publikoval profesor pražské techniky František Rádl (1876–1956),[69] nazval ji *Učebnice mate-*

[65] Vojtěch J., *Přehled vyšší matematiky.* Edice Sborník příruček pro učitelstvo a studentstvo, svazek č. 26, R. Promberger, Olomouc, 1926, 326 stran.

[66] Pro více informací viz Petr K., *Jan Vojtěch: Přehled vyšší matematiky.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 56(1927), str. 205–207.

[67] Jedná se o práce Čuřík F., *Základy vyšší matematiky. Díl I./II.* Česká matice technická, Praha, 1915/1918, 192/223 stran; 2. vydání 1923/1930, 149/176 stran. Doplňme informace o Čuříkově životě. Narodil se na Smíchově (dnes součást Prahy). V roce 1895 absolvoval gymnázium v Příbrami a roku 1904 dokončil studium strojnictví na české technice v Praze. Na Karlo-Ferdinandově universitě v Praze vykonal zkoušku učitelské způsobilosti a obhájil disertační práci. Od roku 1910 působil na *Státní průmyslové škole* na Praze 1. V letech 1920 až 1939 (resp. do uzavření českých vysokých škol) přednášel na Vysoké škole báňské v Příbrami. Zemřel v Příbrami. Zabýval se zejména deskriptivní geometrií, statistikou a aplikovanou matematikou. Jeho životní osudy jsou přiblíženy v článku Kotůlek J., *Hrdinou proti své vůli? Věnováno Františku Čuříkovi.* In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.), *35. mezinárodní konference Historie matematiky.* Matfyzpress, Praha, 2014, str. 189–192.

[68] V reflexi prvního dílu, resp. v článku Lerch M., *Základy vyšší mathematiky.* Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 46(1917), str. 52–59, bylo uvedeno: *Pokud se týče výběru příkladů, jsou tam mnohé úkoly předpokládající znalost jiných nauk, fysikálních neb technických, které čtenáři v době, kdy mu jest osvojiti si differenciální počet, najisto nejsou ještě známy; aby si jejich znalost opatřil, k tomu by potřeboval znalost základů analyse, v každém případě dokonalejší, než jakou mu může poskytnouti kniha p. Čuříkova. Ostatně příklady ty bývají po stránce mathematické často banální (lomená kvadratická funkce k vůli maximu a minimu, neb pod.), a chudý zisk, jejž mohou studentovi poskytnouti, nestojí za námahu spojenou se sháněním pomůcek … Kdo si dá práci, aby srovnal četná místa, výše uvedená, s příslušnými místy v dobrých dílech (psaných učenci a nikoli poseury), a zároveň porovnal celkový program knihy s jinými, musí dospěti k poznání, že kniha p. Čuříka se od dobrých známých knih literatury francouzské, německé a italské liší jen svými chybami a nedostatky. Kniha neobsahuje nic speciálně technického mimo snad příklady, o nichž jsme právě mluvili.*

[69] F. Rádl se narodil v Pyšelích u Prahy. Po absolvování gymnázia v Domažlicích studoval

matiky pro vysoké učení technické (1931).[70] Zpracoval ji proti Čuříkově učebnici podrobněji, připojil navíc kapitoly o analytické a diferenciální geometrii, Fourierových řadách a diferenciálních rovnicích. Knihu se snažil zpracovat účelně pro technické obory, s důrazem na užití kalkulu a ne se zřetelem na úplnost matematického výkladu. Dopustil se přitom řady více či méně závažných chyb a poněkud kontroverzních vyjádření. Například v *Předmluvě* uvedl: *Buďtež zde připomenuta mínění tolikrát opakovaná o výkladu matematiky posluchačům, pro něž tento předmět jest pouze vědou pomocnou. Obšírné důkazy nejsou tu daleko tak přesvědčivé, jak se někdy předpokládá, často mají za účel teorém zastříti, ne jej objasniti.* Obdržel dvě velmi kritické, avšak věcně správné recenze, které narážely i na citované věty z *Předmluvy* a které byly napsané K. Petrem a Karlem Rychlíkem (1885–1968).[71] F. Rádl reagoval neadekvátní statí *Odpověď k recensi prof. Petra*,[72] v níž se nevyvaroval nepravdivých tvrzení, osobních útoků a invektiv. Rozepři ukončil příspěvek Vojtěcha Jarníka *Poznámky k článku prof. Fr. Rádla* a prohlášení sedmnácti matematiků stojících za původní Petrovou kritikou.[73]

Stručnou, avšak poměrně kvalitní učebnici základů kalkulu publikoval profesor University Karlovy v Praze Miloš Kössler (1884–1961)[74] s názvem *Úvod do počtu diferenciálního* [Kö26] (1926).[75] Vyšel ze svých dlouholetých zkušeností

v letech 1895 až 1900 matematiku a fyziku na pražské Filosofické fakultě. Disertační práci zde obhájil v roce 1906. Jako středoškolský profesor vyučoval v Brně, Klatovech, Táboře a Praze. Habilitaci z matematiky získal v roce 1917 na pražské české technice. V letech 1926 až 1946 působil jako profesor matematiky na *Vysoké škole strojního a elektrotechnického inženýrství* v Praze. Zemřel v Praze. Ve svých více než třiceti odborných pracích se věnoval především diferenciálním rovnicím. Pro základní informace o Rádlově životě a díle viz nekrolog Rieger L., Rychlík K., *Profesor Dr. František Rádl zemřel.* Časopis pro pěstování matematiky. 82(1957), str. 378–382.

[70] Rádl F., *Učebnice matematiky pro vysoké učení technické.* Česká matice technická, Praha, 1931, 384 stran, 2. vydání, 1946, 323 stran.

[71] Jedná se o články Petr K., *Dr. Fr. Rádl: Učebnice matematiky pro vysoké učení technické.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 61(1932), str. 81–95, a Rychlík K., *Nová učebnice matematiky pro inženýry.* Národní listy 71(1931), příloha k č. 284 ze dne 17. října 1931, str. 9. Doplňme, že K. Rychlík byl profesorem matematiky na Českém vysokém učení technickém v Praze. O jeho životě a díle viz Hykšová M., *Karel Rychlík (1885–1968).* Edice Dějiny matematiky, svazek č. 22, Prometheus, Praha, 2003. Na stranách 222 až 227 této monografie jsou podrobně popsány zmíněné recenze (a reakce na ně).

[72] Viz Rádl F., *Odpověď k recensi prof. Petra.* Strojnický obzor 11(1931), str. 471–472.

[73] Jedná se o příspěvky Jarník V., *Poznámky k článku prof. Fr. Rádla: Odpověď k recensi prof. Petra.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 61(1932), str. 211–223, a *Prohlášení*, tamtéž, str. 223, pod nímž jsou podepsáni B. Bydžovský, E. Čech, K. Čupr, K. Dusl, V. Hlavatý, J. Hronec, V. Hruška, J. Janko, V. Jarník, J. Klobouček, M. Kössler, V. Láska, K. Rychlík, L. Seifert, E. Schoenbaum, J. Svoboda a J. Vojtěch.

[74] M. Kössler se narodil v Praze. V roce 1903 úspěšně uzavřel studium na pražském akademickém gymnáziu a v roce 1907 na Filosofické fakultě Karlo-Ferdinandovy university v Praze. Vykonal zkoušky učitelské způsobilosti a jako suplent působil na své „středoškolské alma mater“ a na gymnáziu v Domažlicích a pražských Vinohradech. Na poslední jmenované škole byl ustanoven skutečným profesorem v roce 1918. Od roku 1920 přednášel na pražské Přírodovědecké fakultě, kde byl v roce 1927 jmenován řádným profesorem. V letech 1935 až 1936 ji jako děkan vedl. Byl aktivním členem Jednoty českých matematiků a fysiků a Královské české společnosti nauk. Zemřel v Praze. Kösslerova odborná práce je zaměřena na teorii analytických funkcí a na teorii čísel. O jeho osobnosti viz studii Pavlíková-Drábková P., *Život a dílo Miloše Kösslera.* Disertační práce, MFF UK v Praze, 2005.

[75] Kössler M., *Úvod do počtu diferenciálního.* Edice Kruh, svazek č. 4, JČSMF, Praha, 1926, 143 stran.

s výukou této problematiky na pražské Přírodovědecké fakultě. Určil ji širšímu okruhu zájemců. Výklad zaměřil na správné a hlubší pochopení základních pojmů a na rozšíření početních dovedností. Představil zavedení reálných čísel, posloupnosti, řady, spojitost a limitu funkcí a diferenciální počet funkcí jedné a dvou reálných proměnných. Do knihy téměř nezařadil aplikace látky v přírodovědných a technických oborech. Pro seznámení s užitím diferenciálního počtu odkazoval na Vojtěchovy učebnice a pro hlubší odborné studium matematické analýzy doporučoval Petrovy práce. Pro přiblížení charakteru Kösslerova textu a pro porovnání s Úlehlovým přístupem předveďme Kösslerův výklad derivace součtu a součinu:

Další výpočty usnadní nám některá obecná pravidla o derivacích. Jsou-li $f(x)$ *a* $g(x)$ *dvě funkce mající derivace* $f'(x)$ *a* $g'(x)$*, pak platí*

$$\begin{aligned}
[f(x) \pm g(x)]' &= f'(x) \pm g'(x) \\
[f(x) \,.\, g(x)]' &= f'(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, g'(x) \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x) \,.\, g(x) - f(x) \,.\, g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0
\end{aligned}$$

Důkazy. Označme $F(x) = f(x) \pm g(x)$*. Jest*

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

a tedy, když $h \to 0$, $F'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

Ve druhém vzorci klademe $F(x) = f(x) \,.\, g(x)$.

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} =$$

$$\frac{f(x+h) \,.\, g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \text{ \textit{a tedy, když} } h \to 0$$

$F'(x) = g(x) \,.\, f'(x) + f(x) \,.\, g'(x)$*, neboť* $g(x+h) \to g(x)$*, protože jest to spojitá funkce (má derivaci). Označíme-li* $f(x) = u$, $g(x) = v$*, můžeme si pravidlo o derivaci součinu z pamatovati ve tvaru*

$$(u \,.\, v)' = u' \,.\, v + u \,.\, v'$$

([Kö26], str. 73–74)

Na základě této ukázky poznamenejme, že M. Kössler se příliš nevěnoval motivaci ke studiu látky a proti J. Úlehlovi se nezabýval geometrickými ilustracemi dané problematiky. Přestože text formuloval co možná nejjednodušeji, velmi dbal na jeho matematickou správnost a srozumitelnost širšímu okruhu čtenářů, což bylo velmi pozitivně reflektováno.[76]

[76] Recenzi na Kösslerovu učebnici představuje nepodepsaný článek *Miloš Kössler: Úvod do počtu diferenciálního*. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 56(1927), str. 285. Obsahuje tento výstižný odstavec: *Knihu může studovati každý, kdo zná počátky algebry, goniometrie a analytické geometrie. Jsou to tedy v prvé řadě posluchači matematiky na přírodovědecké fakultě v prvých letech studií, studující nejvyšších tříd škol středních a ovšem též posluchači vysoké školy*

Podobně k prezentaci základů infinitezimálního počtu přistoupil profesor brněnské a později pražské univerzity Eduard Čech (1893–1960).[77] V roce 1942 vydal stručný spis *Co je a nač je vyšší matematika?* [Če42],[78] v němž takřka na úrovni matematiky střední školy ukázal elementární poznatky z diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné proměnné. Textem chtěl především čtenáře motivovat k hlubšímu studiu, proto připojil řadu názorných interpretací objasňované problematiky, jež účelně porovnával s formálnějším výkladem. Ukažme Čechův zajímavý přístup k výkladu derivace kvadratické funkce, jež můžeme položit do souvislosti s Úlehlovými geometrickými představami:

Poměr přírůstku funkce k přírůstku nezávisle proměnné je

$$\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a + h;$$

když h se blíží nule, blíží se tento poměr číslu $2a$. Tedy derivace funkce $y = x^2$ v čísle $x = a$ se rovná číslu $2a$ ...

Můžeme si věc znázornit jinak. Znamená-li x stranu čtverce, znamená x^2 obsah čtverce. Je-li x o málo větší než a, máme situaci znázorněnou v obr. 10. Přírůstek funkce je znázorněn pásem, který se skládá ze dvou obdélníků. Když jeden z nich přemístíme, jak je v obrazci naznačeno šipkou, bude přírůstek plochy čtverce (tedy přírůstek funkce) znázorněn obdélníkem se základnou $2a + h$ a výškou h, tedy obsahem $h(2a + h)$. Tedy poměr přírůstku funkce k přírůstku nezávisle proměnné je $2a + h$, což při menším a menším h je čím dále tím přesněji $2a$.[79]

([Če42], str. 23)

---

technické, pokud by ovšem měli na teoretických úvahách zájem. Čtenářům toho druhu možno spisek co nejvřeleji doporučiti tím spíše, že vyniká přesností u spisů pro začátečníky určených neobvyklou. Co bylo napácháno hříchů proti vědecké přesnosti pod rouškou ohledů pedagogických! A toho se uvedená knížka vystříhá. Než i pokročilému čtenáři poskytne spis mnoho zajímavých podnětů.

[77] E. Čech se narodil ve Stračově na Královéhradecku. Absolvoval gymnázium v Hradci Králové a začal studovat matematiku a deskriptivní geometrii na Filosofické fakultě pražské Karlo-Ferdinandovy university. Disertační práci zde obhájil v roce 1920. V letech 1921 až 1922 se vzdělával na stipendijním pobytu v italském Turíně. Na pražské Přírodovědecké fakultě se habilitoval v roce 1922. O rok později získal místo mimořádného profesora na brněnské Masarykově universitě a jako řádný profesor zde působil od roku 1928. Po druhé světové válce, resp. v roce 1945 přešel na pražskou Přírodovědeckou fakultu. Po dvou letech byl jmenován ředitelem nově založeného *Badatelského ústavu matematického* České akademie věd a umění. V roce 1954 začal přednášet na pražské Matematicko-fyzikální fakultě a od roku 1956 řídil Matematický ústav University Karlovy. Zemřel v Praze. Byl předním českým matematikem 20. století. Jeho vědecká práce přesahuje hranice naší republiky. Je zaměřena především na algebraickou topologii, diferenciální geometrii a funkcionální analýzu. O Čechově životě a díle viz monografii Katětov M., Simon P., *The Mathematical Legacy of Eduard Čech.* Birkhäuser, Boston, 1993.

[78] Práce byla publikována jako 20. svazek edice JČMF *Cesta k vědění*, která byla vydávána od roku 1940. Edice *Kruh* a *Knihovna spisů matematických a fysikálních* uvedené v poznámkách výše předkládaly soubory učebnic, spisů o aktuálních vědeckých otázkách a knih budících zájem o matematiku a fyziku. Pro více informací viz příslušné odstavce článku Bečvář J., Bečvářová M., *150. let Jednoty českých matematiků a fyziků.* In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.), *33. mezinárodní konference Historie matematiky.* Matfyzpress, Praha, 2012, str. 11–118.

[79] K textu E. Čech připojil ilustraci velmi podobnou s Úlehlovým obrázkem č. 5, který je přetištěn výše.

Čechovu „knížku" nelze pokládat za standardní plnohodnotnou učebnici. Její význam to však nesnižuje, neboť je zřejmé, že takové určení nebylo ambicí jejího autora. Spíše se jednalo o zajímavý a podnětný „můstek" od středoškolské matematiky k hlubšímu vzdělávání v analýze. V neposlední řadě mohl svazek dobře sloužit k samostudiu v době uzavření českých vysokých škol.

Představení studijních textů kalkulu zakončíme připomenutím dvou autorů, resp. jejich titulů.[80] Na konci první republiky vyšel u nás ještě soubor úloh pražského středoškolského profesora Vladimíra Ryšavého (1889–1950).[81] S určením *Příručka pro vysokoškoláky a samouky* byl pojmenován *Řešené úlohy z vyšší matematiky* (1939)[82] a byl sestaven výhradně z příkladů a jejich výpočtů. Sbírku lze vystihnout jejím podtitulem, *740 úloh, přehled vět, 22 obrazců. Diferenciály, integrály, diferenciální rovnice, integrály komplexní*, a její charakter lze naznačit těmito větami z *Předmluvy*: *Tato sbírka ovšem nemůže nahraditi učebnici, nýbrž předpokládá, že čtenář má učebnici po ruce, nebo již zná její obsah. Přes to vždy jsou uvedeny nejprve základní věty a pravidla, podle nichž se počítá ... Je samozřejmé, že podobná sbírka nemůže vyčerpati látku úplně. Také nesmí klásti důraz na původnost, ale na vhodnost a užitečnost úloh.*

Zásadní české studijní texty pro období po druhé světové válce napsal profesor pražské University Karlovy Vojtěch Jarník (1897–1970).[83] Matematické analýze věnoval práce *Úvod do počtu integrálního* (1938) a *Úvod do počtu diferenciál-*

[80] Pro úplnost poznamenejme, že o vyšší matematice byly u nás publikovány ještě překlady francouzských prací Théophila Moreuxe (1867–1954) a Georgese Duranda (1855–1942); konkrétně Moreux T., *Jak porozumím počtu diferenciálnímu* (1931, 216 stran) a Durand G., *Jak porozumím počtu integrálnímu* (také 1931, 216 stran). Byly vydány pražským nakladatelství Vladimíra Orla (1900–1974) jako 4., resp. 8. svazek edice *Orlovy příručky pro studující a samouky*, v níž byly zveřejňovány popularizační knihy o matematice a fyzice.

[81] V. Ryšavý se narodil ve Stanislavově (obec dnes nese název Rybne, leží u města Ivano-Frankivsk na Ukrajině). Studoval na středních školách v Chrudimi a v Praze a poté matematiku a fyziku na Filosofické fakultě Karlo-Ferdinandovy university v Praze. Disertační práci zde obhájil na jaře roku 1913. Následující školní rok vyučoval na reálce v pražské Ječné ulici, poté působil na gymnáziu v Havlíčkově Brodě (tehdy Německém Brodě). Od roku 1918 až do odchodu do penze v roce 1947 učil na gymnáziích a reálkách v Praze. V letech 1946 až 1948 ještě vypomáhal jako examinátor matematiky na Vysoké škole strojního a elektrotechnického inženýrství při Českém vysokém učení technickém v Praze. Zemřel v Praze. Ve svých publikacích se zabýval elementární matematikou a metodikou a popularizací matematiky a fyziky. Napsal středoškolské učebnice fyziky, redigoval časopis Rozhledy matematicko-přírodovědné. Základní informace o Ryšavého osobnosti jsou uvedeny v nekrologu Pírko Z., *PhDr. Vladimír Ryšavý zemřel.* Rozhledy matematicko-přírodovědné 30(1950–1951), č. 3, str. 94–95.

[82] Ryšavý V., *Řešené úlohy z vyšší matematiky.* Česká grafická unie, Praha, 1939, 226 stran; *Počátky vyšší matematiky v řešených úlohách. Díl první.* 2. vydání, 1945, 126 stran; *Řešené úlohy z vyšší matematiky. Díl první/druhý*, 1950, 126/218 stran.

[83] V. Jarník se narodil v Praze. Absolvoval reálnou školu v pražské Ječné ulici a studium matematiky a fyziky završil v roce 1921 obhajobou disertační práce na Přírodovědecké fakultě University Karlovy. V letech 1923 až 1925 a 1927 až 1929 se vzdělával na univerzitě v Göttingen. V roce 1925 se habilitoval z matematiky na pražské Přírodovědecké fakultě a od roku 1935 zde přednášel jako řádný profesor. Na stejné pozici působil na Matematicko-fyzikální fakultě (po jejím vzniku v roce 1952) a v letech 1958 až 1960 ji jako děkan vedl. Aktivně pracoval také na činnosti a rozvoji Československé akademie věd. Zemřel v Praze. Byl vynikajícím matematikem mezinárodního významu. Spolu se zmíněnými vysokoškolskými učebnicemi uveřejnil devadesát původních vědeckých studií, v nichž se zabýval širokým spektrem matematických oblastí (matematický analýza, teorie grafů, topologie, teorie čísel atd.). O Jarníkově životě a díle viz monografii Novák B., *Life and work of Vojtěch Jarník.* Prometheus, JČMF, Praha, 1999.

ního (1946),[84] na něž navázal podrobnějšími vícedílnými tituly, jež se dočkaly mnoha vydání. V rámci našeho textu stručně poznamenejme, že Jarníkovy učebnice byly zpracovány velmi podrobně, kvalitně a svým způsobem nadčasově, neboť byly významnými pro takřka dvě generace našich matematiků 2. poloviny 20. století.[85] Byly podmíněny Jarníkovým širokým odborným rozhledem, pedagogickými schopnosti a v neposlední řadě jeho studijními pobyty na univerzitě v Göttingen ve 20. letech 20. století.[86]

Na závěr přibližme inspirativní článek, který V. Jarník publikoval v roce 1941, tedy během uzavření českých vysokých škol a který výstižně pojmenoval *Návod ke studiu analysy pro začátečníky*.[87] Určil jej čtenářům s hlubším zájmem o matematiku a vysvětlil v něm svůj koncept vzdělávání v základech matematické analýzy. Doporučil se postupně seznámit s teorií reálných čísel, posloupností a řad, diferenciálním počtem funkcí jedné a více proměnných, integrálním počtem a základy diferenciálních rovnic. Odkazoval přitom na vhodné české učebnice. Nabádal systematicky číst a studovat Kösslerův *Úvod do počtu diferenciálního*, svůj *Úvod do integrálního počtu* a průběžně si doplňovat podrobnější poznatky z Petrových učebnic analýzy. Pro studium diferenciálních rovnic doporučoval příslušné kapitoly Vojtěchových *Základů mathematiky ke studiu věd přírodních a technických.*

Jarníkův příspěvek je dalším dokladem nezájmu české odborné veřejnosti o Úlehlův *Počet infinitesimální*. Nabízí se zde takřka řečnická otázka, koho a jakým způsobem Úlehlova učebnice zaujala či komu přispěla ke vzdělávání ve vyšší matematice? Dnes na ni neumíme dát odpověď.

Autor tohoto textu je názoru, že Úlehlovu knihu dnes nelze k samostudiu kalkulu doporučit. Stejně tomu mohlo být i v polovině 20. století, neboť výše přiblížené práce, jež byly kladně posouzeny recenzemi, byly didakticky i matematicky hodnotnější a byly oceněny V. Jarníkem, uznávaným matematikem a oblíbeným vynikajícím učitelem. Úlehlův text považujeme především za doklad neutuchávající snahy o sebevzdělávání „venkovského učitele“, v čemž spatřujeme jeho hlavní hodnotu a v čemž vidíme i možnou inspiraci pro současné učitele zejména druhého stupně základní školy.

---

[84] Jarník V., *Úvod do počtu integrálního.* Edice Kruh, svazek č. 12, JČSMF, Praha, 1938, 168 stran, 2. vyd., 1946, 113 stran, 3. přeprac. vyd., 1948, 323 stran, 4. vyd., 1953, 449 stran, 5. vyd., 1954, 295 stran. Jarník V., *Úvod do počtu diferenciálního.* Edice Knihovna spisů matematických a fysikálních, svazek č. 21, JČSMF, Praha, 1946, 444 stran, 2. vyd., 1948, 323 stran, 3. vyd., 1951, 449 stran, 4. vyd., 1953, 449 stran.

[85] Kvalita zpracování první jmenované práce je zdůrazněna v recenzi Kořínek V., *Vojtěch Jarník: Úvod do integrálního počtu.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 67(1938), str. D227–D230. Zde je napsáno: *Celá kniha jest psána velmi srozumitelně a krásně se čte. Výklad jest úplně přesný a jest při tom upraven tak, že všude ihned vyniká podstata důkazu nebo poučky. Těžší partie jsou vždy velmi podrobně vyloženy a to tak, aby jasně vystoupily všechny obtíže i cesty, jimiž se tyto obtíže překonají. Kniha vyplňuje velmi citelnou mezeru v české matematické literatuře a výtečně se hodí jako úvod do studia matematiky a to nejen pro posluchače prvního ročníku matematiky na universitě, nýbrž i pro všechny, kteří již integrální počet znají a přáli by si seznámiti se s přesným vědeckým vybudováním tohoto počtu.*

[86] O Jarníkově zahraničním studiu viz Bečvářová M., Netuka I., *Jarník's notes of the lecture course Punktmengen und reelle Funktionen by P. S. Aleksandrov (Göttingen 1928).* Edice Dějiny matematiky, svazek č. 43, Matfyzpress, Praha, 2010.

[87] Viz Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 70(1940), přídavek *Články a referáty*, str. D109–D116.

◊ ◊ ◊

LITERATURA

[BJ95] Bečvář J. (ed.), *Eduard Weyr (1852–1903).* Edice Dějiny matematiky, svazek č. 2, Prometheus, Praha 1995.

[BM98] Bečvářová-Němcová M., *František Josef Studnička (1836–1903).* Edice Dějiny matematiky, svazek č. 10, Prometheus, Praha 1998.

[BM08] Bečvářová M., *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918.* Edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, Prometheus, Praha, 2008.

[Cr92] Crkalová Z., *Život a dílo Karla Petra.* Diplomová práce, MFF UK v Praze, 1992.

[Če42] Čech E., *Co je a nač je vyšší matematika?* Edice Cesta k vědění, svazek č. 20, JČMF, Praha, 1942, 126 stran.

[KB07a] K.B., *Počet infinitesimální* (recenze). Škola měšťanská 9(1907), č. 7 ze dne 4. 4. 1907, str. 21–22.

[KB07b] K.B., *Josef Úlehla: Počet infinitesimální* (recenze). Pedagogické rozhledy 20(1906–1907), č. 8, květen 1907, str. 614–616.

[Kö26] Kössler M., *Úvod do počtu diferenciálního.* Edice Kruh, svazek č. 4, JČSMF, Praha, 1926, 143 stran.

[Pe15] Petr K., *Počet integrální.* Edice Sborník Jednoty českých mathematiků a fysiků, svazek č. 13, JČMF, Praha, 1915, 638 stran.

[Re07] –, *Počet infinitesimální* (recenze). Komenský 35(1907), č. 8 ze dne 14. 3. 1907, str. 123–124.

[St66] Studnička F. J., *Vyšší mathematika v úlohách.* Nákl. vl., Praha, 1866, 48 stran.

[St74] Studnička F. J., *Vyšší mathematika v úlohách.* 2. přeprac. vyd., Dr. E. Grégr a F. Dattel, Praha, 1874, 64 stran.

[St68] Studnička F. J., *Základové vyšší mathematiky. Díl I.* Nákl. vl., Praha, 1868, 240 stran.

[St78] Studnička F. J., *Základové vyšší mathematiky. Díl I.* 2. přeprac. vyd., Slavík & Borový, Praha, 1878, 280 stran.

[St71] Studnička F. J., *Základové vyšší mathematiky. Díl II.* Nákl. vl., Praha, 1871, 216 stran.

[St67] Studnička F. J., *Základové vyšší mathematiky. Díl III.* Nákl. vl., Praha, 1867, 296 stran.

[St80] Studnička F. J., *Všeobecné tvarosloví algebraické čili nauka o konečných i nekonečných součtech čili řadách, součinech a podílech čili řetězcích.* J. Otto, Praha, 1880, 239 stran.

[St92] Studnička F. J., *Výklady o funkcích monoperiodických neboli o nižších funkcích transcendentních*. Jednota českých mathematiků, Praha, 1892, 179 stran.

[Ši63] Šimerka V., *Algebra čili počtářství obecné pro vyšší gymnasia*. Dr. E. Grégr, Praha, 1863, 169 stran.

[Ši64] Šimerka V., *Přídavek k algebře pro vyšší gymnasia*. Dr. E. Grégr, Praha, 1864, 56 stran.

[Vo45] Vojtěch J., *Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických*. JČSMF, Praha, 1945, 424 stran.

[We02] Weyr Ed., *Počet differenciálný*. Jednota českých mathematiků, Praha, 1902, 416 stran.