Kapitola 5

Hlubší trigonometrické vztahy

5.1 Trigonometrické identity

Trigonometrie, jak jsme ji poznali v kapitolách 2 a 3, je matematický obor, který vznikl z potřeb lidí prakticky počítat délky stran a velikosti úhlů konkrétních trojúhelníků. K tomu matematikové vyvinuli aparát goniometrických funkcí, s jejichž pomocí dokázali teoreticky vyjádřit vztahy mezi zkoumanými prvky obecného rovinného trojúhelníku. Patří k nim nejen strany a vnitřní úhly, ale také výšky a těžnice trojúhelníku, poloměry opsané, vepsané a připsaných kružnic, délky os vnitřních úhlů. Seznam těchto prvků lze dále rozšiřovat např. o úhly mezi stranami a těžnicemi, vzdálenosti různých významných bodů, jako jsou průsečík výšek, těžiště, středy již zmíněných kružnic apod. Čeští zájemci o tyto výsledky dobře znají knihu [27], která je jejich bohatou kolekcí opatřenou podrobnými důkazy. Nebudeme proto výsledky odtud reprodukovat, místo toho se zaměříme detailně na vztahy, ve kterých vystupují pouze hodnoty goniometrických funkcí argumentů rovných vnitřním úhlům α, β, γ libovolného trojúhelníku ABC nebo různým jejich násobkům. Takové vztahy se objevují v rozličných příručkách či sbírkách v nepřeberném množství, nejznámější z nich (uvedené i v knize [29]) se „vytrvale“ opakují, proto v celém textu nebudeme uvádět žádné odkazy. Jeho přínosem bude výklad s důrazem na vzájemné souvislosti jednotlivých vztahů a metodologii jejich odvozování způsobem, jaký jsme v literatuře v takto ucelené podobě nenašli. Využijeme k tomu samozřejmě aparát goniometrických vzorců z předchozí kapitoly.

Výchozím poznatkem pro náš výklad bude závislost tří kosinů

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1,$$

kterou jsme v podkapitole 3.4 odvodili jako lineárně-algebraický důsledek trigonometrické věty o průmětech, tedy bez užití jakéhokoliv goniometrického vzorce. S ohledem na zaměření našeho textu nebude zbytečné, když nyní podáme ještě druhý důkaz uvedené základní *trigonometrické identity.*[1] Psali jsme o ní i v řešení příkladu 4.5.13, v němž jsme se na důkaz této identity, který uvedeme až nyní, odvolali. Z rovnosti $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ plyne $\cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta)$, takže rozdíl levé a pravé strany

[1] Termínem *identita* budeme zdůrazňovat, že dotyčný vztah platí pro vnitřní úhly α, β, γ libovolného trojúhelníku.

dokazované identity můžeme s využitím běžných goniometrických vzorců upravit takto:

$$\begin{gathered}\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1=\\=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos(\alpha+\beta)\,[2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)]-1=\\=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)-1=\\=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\frac{1}{2}\cdot(\cos[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]+\cos[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)])-1=\\=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+\frac{1+\cos 2\beta}{2}-\frac{\cos 2\alpha}{2}-\frac{\cos 2\beta}{2}-1=0.\end{gathered}$$

Tím je druhý důkaz ukončen. Jeho přínos spočívá v tom, že jsme zkoumanou rovnost odvodili z jediného předpokladu $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, který splňují i jiné trojice (α,β,γ) *reálných* čísel než ty, které jsou vnitřními úhly některého trojúhelníku – takové jsou právě ty trojice (α,β,γ), jež jsou tvořeny *kladnými* čísly, neboť z rovnosti $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ pak plyne $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\pi)$. Jak uvidíme, je to společný rys většiny trigonometrických identit, že totiž platí pro každou trojici z množiny

$$\mathscr{T}=\left\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3\colon \alpha+\beta+\gamma=\pi\right\},$$

zatímco trojice vnitřních úhlů všech trojúhelníků tvoří užší množinu

$$\mathscr{T}_+=\left\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3_+\colon \alpha+\beta+\gamma=\pi\right\},$$

kde $\mathbb{R}_+$ značí interval $(0,\infty)$. První výsledek této kapitoly tedy zapíšeme vztahem

$$\boxed{\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}\colon\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\tag{5.1}$$

a z provedeného důkazu ještě „vytěžíme“ metodický obrat: pro libovolnou funkci F tří proměnných platí implikace, kterou zapíšeme v neobvyklém směru[2]

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}\colon F(\alpha,\beta,\gamma)=0\quad\Leftarrow\quad\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\colon F(\alpha,\beta,\pi-\alpha-\beta)=0.\tag{5.2}$$

Přináší práce s množinou $\mathscr{T}$ (namísto $\mathscr{T}_+$) při zkoumání trigonometrických identit nějaké skutečné (neformální) výhody? Kladnou odpověď nám přinese úvaha o dvou implikacích

$$\begin{gathered}(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}\Rightarrow\left(\frac{\pi-\alpha}{2},\frac{\pi-\beta}{2},\frac{\pi-\gamma}{2}\right)\in\mathscr{T},\\(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}\Rightarrow(\pi-2\alpha,\pi-2\beta,\pi-2\gamma)\in\mathscr{T},\end{gathered}$$

které platí díky tomu, že z $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ plynou rovnosti

$$\begin{gathered}\frac{\pi-\alpha}{2}+\frac{\pi-\beta}{2}+\frac{\pi-\gamma}{2}=\frac{3\pi-(\alpha+\beta+\gamma)}{2}=\frac{3\pi-\pi}{2}=\pi,\\(\pi-2\alpha)+(\pi-2\beta)+(\pi-2\gamma)=3\pi-2(\alpha+\beta+\gamma)=3\pi-2\pi=\pi.\end{gathered}$$

K odvozovacímu pravidlu (5.2) tak můžeme připojit další dvě pravidla, totiž

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}\colon F(\alpha,\beta,\gamma)=0\quad\Rightarrow\quad\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}\colon F\left(\frac{\pi-\alpha}{2},\frac{\pi-\beta}{2},\frac{\pi-\gamma}{2}\right)=0\tag{5.3}$$

[2]Místo implikace jsme samozřejmě mohli napsat ekvivalenci, chtěli jsme však zdůraznit směr, který při odvozování identit využíváme.

a

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}\colon F(\alpha,\beta,\gamma)=0 \quad\Rightarrow\quad \forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}\colon F\left(\pi-2\alpha,\pi-2\beta,\pi-2\gamma\right)=0. \qquad (5.4)$$

Kdybychom pracovali pouze s množinou $\mathscr{T}_+$, byli bychom „ochuzeni“ o pravidlo (5.4), neboť hodnoty $\pi-2\alpha,\pi-2\beta,\pi-2\gamma$ jsou kladné pouze v případě, kdy trojice (α,β,γ) je tvořena vnitřními úhly *ostroúhlého* trojúhelníku, takže rovnost $F(\pi-2\alpha,\pi-2\beta,\pi-2\gamma)=0$ bychom museli pro ostatní trojúhelníky dokazovat jinými prostředky.

Seznam pravidel pro odvozování složitějších trigonometrických identit bychom mohli neomezeně rozšiřovat, například přidat pravidlo

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}\colon F(\alpha,\beta,\gamma)=0 \quad\Rightarrow\quad \forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}\colon F\left(2\pi-5\alpha,2\pi-5\beta,2\pi-5\gamma\right)=0,$$

pro účel našeho textu jsou však výše uvedená pravidla postačující.

Nyní již máme vše připraveno k tomu, abychom z jediného základního výsledku (5.1) odvodili osm dalších trigonometrických identit. Nejprve užitím pravidel (5.3) a(5.4) díky převodním vzorcům

$$\cos\frac{\pi-x}{2}=\sin\frac{x}{2} \qquad \text{a} \qquad \cos(\pi-2x)=-\cos 2x$$

z identity (5.1) obdržíme

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}\colon\ \sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}=1-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \qquad (5.5)$$

a

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}\colon\ \cos^2 2\alpha+\cos^2 2\beta+\cos^2 2\gamma=1+2\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma. \qquad (5.6)$$

Rovnosti (5.1), (5.5) a (5.6) lze na základě goniometrických jednotek přepsat do vyjádření pro součty

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma, \quad \cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2} \quad \text{a} \quad \sin^2 2\alpha+\sin^2 2\beta+\sin^2 2\gamma;$$

podobně na základě vzorců

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2} \quad \text{a} \quad \cos^2 2x=\frac{1+\cos 4x}{2}$$

lze tytéž výsledky (5.1), (5.5) a (5.6) převést na identity pro součty

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma, \quad \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \quad \text{a} \quad \cos 4\alpha+\cos 4\beta+\cos 4\gamma.$$

Shrneme-li všechny zmíněné důsledky (5.1), dostaneme přehlednou tabulku rovností

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$	$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$
$\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}=2+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$	$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}=1-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$
$\cos^2 2\alpha+\cos^2 2\beta+\cos^2 2\gamma=1+2\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma$	$\sin^2 2\alpha+\sin^2 2\beta+\sin^2 2\gamma=2-2\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma$
$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$	$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$
$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-1-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$	$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$
$\cos 4\alpha+\cos 4\beta+\cos 4\gamma=-1+4\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma$	$\sin 4\alpha+\sin 4\beta+\sin 4\gamma=-4\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$

s výjimkou posledních tří vztahů z pravého sloupce, které patrně žádnou algebraicky snadno vyjádřitelnou souvislost s ostatními identitami nemají. Dříve než se budeme věnovat jejich důkazům, povšimněme si tvaru pravých stran rovností z celé tabulky: jsou v nich zastoupeny všechny součiny tvaru $f(k\alpha)f(k\beta)f(k\gamma)$, kde f je libovolná z funkcí sinus, kosinus a $k \in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$.

Dokážeme-li jeden ze tří dosud neověřených vztahů

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathscr{T}\colon\ \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma, \tag{5.7}$$

budeme moci k (5.7) uplatnit pravidla (5.3) a (5.4) a získat tak zbývající dvě identity pro součty $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ a $\sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma$ díky převodním vztahům

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \sin\frac{\pi - x}{2} = \cos\frac{x}{2}, \quad \sin 2(\pi - 2x) = -\sin 4x, \quad \sin(\pi - 2x) = \sin 2x.$$

Zabývejme se proto pouze důkazem (5.7). Využijeme při něm (i když ne úplně důsledně) osvědčené univerzální pravidlo (5.2). Ze substituce $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ plynoucí vztahy $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$ a $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$ aplikujeme spolu s běžnými vzorci takto:

$$\begin{aligned}\underbrace{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} + \sin 2\gamma &= \underline{2\sin(\alpha+\beta)}\cos(\alpha-\beta) + \underline{2\sin\gamma}\cos\gamma = \\ &= 2\sin\gamma\underbrace{[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]} = 2\sin\gamma\cdot 2\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

Důkaz (5.7) je hotov, takže všechny rovnosti z naší tabulky platí pro libovolnou trojici $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathscr{T}$. Z řady jejich důsledků vypíšeme ještě dvojici identit s poměrně jednoduchým zápisem

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} &= 4\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\beta+\gamma}{4}\cos\frac{\gamma+\alpha}{4}\\ \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} &= 1 + 4\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\sin\frac{\beta+\gamma}{4}\sin\frac{\gamma+\alpha}{4}\end{aligned}}$$

plynoucích z identit pro $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ a $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$ užitím odvozovacího pravidla (5.3), převodních vztahů $\sin x = \cos y$ za podmínky $x + y = \frac{\pi}{2}$ a rovností

$$\frac{\pi - \alpha}{4} = \frac{\beta+\gamma}{4}, \quad \frac{\pi - \beta}{4} = \frac{\alpha+\gamma}{4}, \quad \frac{\pi - \gamma}{4} = \frac{\alpha+\beta}{4}.$$

K první uvedené tabulce ještě dodejme, že poslední tři rovnosti z jejího pravého sloupce se v literatuře někdy zapisují v podobě z následující tabulky:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} + \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} + \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} &= 2\\ \frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} + \frac{\cos\beta}{\sin\alpha\sin\gamma} + \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} &= 2\\ \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\beta\sin 2\gamma} + \frac{\cos 2\beta}{\sin 2\alpha\sin 2\gamma} + \frac{\cos 2\gamma}{\sin 2\alpha\sin 2\beta} &= -2\end{aligned}}$$

Odvodíme je, když užijeme vzorec $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ pro sčítance z levých stran rovností z tabulky a poté rovnosti vydělíme součiny z jejich pravých stran. Zdůrazněme, že vypsané rovnosti platí jen pro ty trojice $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathscr{T}$, pro něž mají zastoupené zlomky nenulové jmenovatele. Znamená to, že první dvě z těchto tří rovností platí pro vnitřní úhly α, β, γ libovolného trojúhelníku, u třetí rovnosti však musíme předpokládat, že trojúhelník není pravoúhlý.

V druhé části našeho výkladu o trigonometrických identitách s funkcemi sinus a kosinus uvedeme a dokážeme zajímavé vztahy poněkud jiného druhu, totiž

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathscr{T}\colon\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \tag{5.8}$$

a

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}:\ \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma=1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma. \quad (5.9)$$

Pro rozdíl levé strany a pravé strany rovnosti z (5.8) platí

$$\begin{aligned}&(\sin\alpha\cos\beta\underline{\cos\gamma}+\cos\alpha\sin\beta\underline{\cos\gamma})+(\cos\alpha\cos\beta\underline{\sin\gamma}-\sin\alpha\sin\beta\underline{\sin\gamma})=\\&=\cos\gamma\cdot\sin(\alpha+\beta)+\sin\gamma\cdot\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\pi=0,\end{aligned}$$

čímž je důkaz (5.8) ukončen. Podobně přistoupíme i k důkazu (5.9), kdy upravíme rozdíl levé strany rovnosti a součinu $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ z pravé strany:

$$\begin{aligned}&(\cos\alpha\sin\beta\underline{\sin\gamma}+\sin\alpha\cos\beta\underline{\sin\gamma})+(\sin\alpha\sin\beta\underline{\cos\gamma}-\cos\alpha\cos\beta\underline{\cos\gamma})=\\&=\sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\beta)-\cos\gamma\cdot\cos(\alpha+\beta)=\sin^2\gamma+\cos^2\gamma=1,\end{aligned}$$

přitom jsme znovu využili vztahů $\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$ a $\cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta)$, známých důsledků rovnosti $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ určující trojice (α,β,γ) z $\mathscr{T}$. Tím je i důkaz (5.9) hotov. Je možné, že k výsledkům (5.8) a (5.9) přivedl matematiky nápad využít rovnosti

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=0 \qquad \text{a} \qquad \cos(\alpha+\beta+\gamma)=-1$$

a rozvinout jejich levé strany podle součtových vzorců na součet činitelů $\pm f(\alpha)g(\beta)h(\gamma)$, kde (f,g,h) jsou různé variace z funkcí sinus a kosinus.

K dokázaným vztahům (5.8) a (5.9) můžeme jako dříve uplatnit odvozovací pravidla (5.3) a (5.4). Nebudeme už tentokrát vypisovat převodní vzorce, které nás takto dovedou k celkovému závěru, že pro libovolnou trojici $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}$ platí rovnosti z další tabulky:

$$\boxed{\begin{gathered}\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\\
\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma=1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\
\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\\
\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=1+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\\
\sin2\alpha\cos2\beta\cos2\gamma+\cos2\alpha\sin2\beta\cos2\gamma+\cos2\alpha\cos2\beta\sin2\gamma=\sin2\alpha\sin2\beta\sin2\gamma\\
\cos2\alpha\sin2\beta\sin2\gamma+\sin2\alpha\cos2\beta\sin2\gamma+\sin2\alpha\sin2\beta\cos2\gamma=-1+\cos2\alpha\cos2\beta\cos2\gamma\end{gathered}}$$

Všimněme si, že v pravých stranách všech šesti zapsaných rovností vystupují stejné součiny $f(k\alpha)f(k\beta)f(k\gamma)$, které jsme vypozorovali v pravých stranách rovností z první tabulky. Z dvojích vyjádření těchto součinů tak můžeme získat řadu dalších (poněkud „delších“) trigonometrických identit, jako je například vztah

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}:\ (\sin^2 2\alpha+\dots)+2(\cos2\alpha\sin2\beta\sin2\gamma+\dots)=0,$$

v obou závorkách jsme vypsali pouze první ze tří sčítanců příslušných symetrických součtů. Poznamenejme k tomu, že jsme se dosud zabývali pouze trigonometrickými rovnostmi $F(\alpha,\beta,\gamma)=0$, ve kterých byla F symetrická funkce proměnných α,β,γ. Trigonometrické identity bez této vlastnosti takový význam v teorii nemají a najdeme je v literatuře jen poskrovnu. Příkladem je vztah

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}:\ \sin(\alpha-\beta)\cdot\sin\gamma=\sin^2\alpha-\sin^2\beta,$$

jehož ověření je triviální, když za $\sin\gamma$ dosadíme $\sin(\alpha+\beta)$ a upravíme. Za pozornost stojí i další nesymetrická identita, kterou dostaneme, když v rovnosti z kosinové věty nahradíme délky a, b, c stran trojúhelníku ABC trojicí hodnot $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$, jež je podle sinové věty trojici a, b, c úměrná:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Poslední rovnost tedy platí pro libovolnou trojici $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathscr{T}_+$. Abychom ji dokázali i pro všechny trojice z $\mathscr{T}$, mohli bychom zvolit osvědčený postup eliminace jedné z proměnných α, β, γ a následných ekvivalentních úprav. Poučnější však bude, když zkoumanou rovnost porovnáme s první rovností z pravého sloupce dříve uvedené tabulky, kterou zřejmou úpravou přepíšeme do tvaru

$$\sin^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Vidíme, že z této již dokázané identity dostaneme novou identitu evokující kosinovou větu pomocí nového odvozovacího pravidla

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathscr{T} \colon F(\alpha,\beta,\gamma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathscr{T} \colon F\left(\pi - \alpha, \frac{\pi}{2} - \beta, \frac{\pi}{2} - \gamma\right) = 0,$$

jehož platnost plyne ze zřejmého výpočtu

$$(\pi - \alpha) + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = 2\pi - \pi = \pi.$$

Tímto novým pravidlem lze „opracovat“ každou ze symetrických rovností původní tabulky a získat tak novou tabulku nesymetrických identit pro trojice $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathscr{T}$, kterou nyní uvedeme. Podrobná odvození pro jejich zřejmost zde vypisovat nebudeme, kromě nového pravidla lze v průběhu těchto výpočtů používat i dřívější pravidla (5.3), (5.4) a rovněž goniometrické jednotky spolu se vzorci $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$. Výsledné identity zapíšeme v podobě analogické jako v první tabulce na str. 165.

$\cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma = -1 + 2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$	$\sin^2\alpha - \sin^2\beta - \sin^2\gamma = -2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$
$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\gamma}{2} = -2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$	$\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2} = -1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$
$\cos^2 2\alpha - \cos^2 2\beta - \cos^2 2\gamma = 2\cos 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$	$\sin^2 2\alpha - \sin^2 2\beta - \sin^2 2\gamma = -1 - 2\cos 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$
$\cos\alpha - \cos\beta - \cos\gamma = 1 - 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$	$\sin\alpha - \sin\beta - \sin\gamma = -4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$
$\cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2\gamma = -1 + 4\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$	$\sin 2\alpha - \sin 2\beta - \sin 2\gamma = -4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$
$\cos 4\alpha - \cos 4\beta - \cos 4\gamma = -1 - 4\cos 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$	$\sin 4\alpha - \sin 4\beta - \sin 4\gamma = 4\sin 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma$

Přejdeme nyní k trigonometrickým identitám s funkcemi tangens a kotangens. Protože tyto dvě funkce jsou podíly funkcí sinus a kosinus, můžeme každou takovou identitu přepsat jako identitu s funkcemi sinus a kosinus. Zápisům s funkcemi tangens a kotangens dáváme přednost zejména tehdy, když mají jednodušší tvar než příslušné zápisy s funkcemi sinus a kosinus. Nevýhodou těchto zápisů ovšem je, že pro některé trojice $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathscr{T}$ ztrácejí smysl, neboť hodnoty $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ pro některá $x \in \mathbb{R}$ nejsou definovány.

Prakticky všechny jednoduché trigonometrické identity s funkcemi tangens a kotangens jsou v uvedeném smyslu přepisy identit s funkcemi sinus a kosinus, které jsme dříve odvodili a zapsali šesti vztahy z tabulky na str. 167. Předpokládáme-li například, že pro trojici $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathscr{T}$ platí

$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \neq 0$, jako je tomu v případě, kdy $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathscr{T}_+$, pak po vydělení rovnosti (5.8) uvedeným součinem dostaneme rovnost

$$\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cotg}\beta\operatorname{cotg}\gamma = 1,$$

která proto platí pro vnitřní úhly α,β,γ libovolného trojúhelníku.

Podobně za předpokladu $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \neq 0$ dostaneme vydělením (5.9) rovnost

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma,$$

která tudíž platí vždy, když trojúhelník s vnitřními úhly α,β,γ není pravoúhlý. Zopakujeme-li proceduru dvojího dělení s každou z dalších identit v tabulce na str. 167, dostaneme dohromady 12 rovností, které nyní zapíšeme do dvou tabulek. V první z nich

$$\boxed{\begin{aligned}
\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma &= \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\\
\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}2\beta + \operatorname{tg}2\gamma &= \operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}2\beta\operatorname{tg}2\gamma\\
\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} &= 1\\
\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cotg}\beta\operatorname{cotg}\gamma &= 1\\
\operatorname{cotg}2\alpha\operatorname{cotg}2\beta + \operatorname{cotg}2\alpha\operatorname{cotg}2\gamma + \operatorname{cotg}2\beta\operatorname{cotg}2\gamma &= 1\\
\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} &= \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}
\end{aligned}}$$

jsou všechny rovnosti tvaru $x+y+z = xyz$, resp. $xy+xz+yz = 1$, jež po přepisu do podoby

$$z = \frac{x+y}{1-xy}, \qquad \text{resp.} \qquad z = \frac{1-xy}{x+y}$$

evokují součtové vzorce pro tangens a kotangens a tak naznačují, že rovnosti z tabulky lze dokázat přímým postupem pomocí substituce $\gamma = \pi - \alpha - \beta$. Ve druhé tabulce

$$\boxed{\begin{aligned}
\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma &= 1 + \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\\
\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}2\beta + \operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}2\gamma + \operatorname{tg}2\beta\operatorname{tg}2\gamma &= 1 - \frac{1}{\cos2\alpha\cos2\beta\cos2\gamma}\\
\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} &= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}\\
\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma &= \operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\operatorname{cotg}\gamma + \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\\
\operatorname{cotg}2\alpha + \operatorname{cotg}2\beta + \operatorname{cotg}2\gamma &= \operatorname{cotg}2\alpha\operatorname{cotg}2\beta\operatorname{cotg}2\gamma - \frac{1}{\sin2\alpha\sin2\beta\sin2\gamma}\\
\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} &= 1 + \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}
\end{aligned}}$$

jsou zapsány složitější rovnosti, ve kterých vystupuje vždy dvojice funkcí tangens a kosinus, resp. kotangens a sinus. Zdůrazněme, že každá z 12 rovností v posledních dvou tabulkách platí vždy pro všechny ty trojice $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathscr{T}$, pro které mají všechny zastoupené hodnoty funkce tangens, resp. kotangens smysl.

Na úplný závěr našeho výkladu o trigonometrických identitách uveďme pozoruhodnou skutečnost, že tutéž poměrně jednoduchou algebraickou rovnici

$$(1+x)(1+y)(1+z) = 2(1+xyz)$$

splňují hodnoty x, y, z rovné jednak $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}, \operatorname{tg}\frac{\beta}{4}, \operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}$, jednak $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{4}, \operatorname{cotg}\frac{\beta}{4}, \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{4}$ pro libovolnou trojici $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathscr{T}$, pro kterou je uvedená trojice hodnot tangens, resp. kotangens definována. Oba dotyčné vztahy

$$\boxed{\begin{gathered}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}\right)=2+2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}\\ \left(1+\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{4}\right)\left(1+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{4}\right)\left(1+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{4}\right)=2+2\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{4}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{4}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{4}\end{gathered}}$$

ověříme současně tak, že je předem přepíšeme do téže identity

$$\left(\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}\right)\left(\sin\frac{\beta}{4}+\cos\frac{\beta}{4}\right)\left(\sin\frac{\gamma}{4}+\cos\frac{\gamma}{4}\right)=2\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\beta}{4}\sin\frac{\gamma}{4}+2\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\beta}{4}\cos\frac{\gamma}{4}.$$

Tu nyní dokážeme tak, že nejprve v levé straně roznásobíme jen podle třetí závorky, členy z pravé strany převedeme na levou stranu, v níž pak členy sdružíme do dvojic částečným vytýkáním. Dostaneme ekvivalentní rovnost $A\sin\frac{\gamma}{4}+B\cos\frac{\gamma}{4}=0$ s koeficienty A, B, které vypíšeme a rovnou upravíme:

$$\begin{aligned}A&=\left(\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}\right)\left(\sin\frac{\beta}{4}+\cos\frac{\beta}{4}\right)-2\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\beta}{4}=\\&=\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\beta}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\beta}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\beta}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\beta}{4}=\sin\frac{\alpha+\beta}{4}+\cos\frac{\alpha+\beta}{4},\\B&=\left(\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}\right)\left(\sin\frac{\beta}{4}+\cos\frac{\beta}{4}\right)-2\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\beta}{4}=\\&=\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\beta}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\beta}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\beta}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\beta}{4}=\sin\frac{\alpha+\beta}{4}-\cos\frac{\alpha+\beta}{4}.\end{aligned}$$

Proto s ohledem na $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ platí

$$\begin{aligned}A\sin\frac{\gamma}{4}+B\cos\frac{\gamma}{4}&=\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{4}+\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\right)\sin\frac{\gamma}{4}+\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{4}-\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\right)\cos\frac{\gamma}{4}=\\&=\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\gamma}{4}+\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\sin\frac{\gamma}{4}\right)-\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\gamma}{4}-\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\sin\frac{\gamma}{4}\right)=\\&=\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}-\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}=\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0,\end{aligned}$$

a tím je zkoumaná identita dokázána pro každou trojici $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathscr{T}$.

5.2 Trigonometrické nerovnosti

V druhé části naší kapitoly věnované hlubším trigonometrickým vztahům se budeme věnovat *nerovnostem* pro různé goniometrické výrazy závislé na vnitřních úhlech α, β, γ libovolného trojúhelníku. Jednotlivé příklady takových nerovností najdeme především ve sbírkách úloh matematických soutěží, asi desítka nejznámějších nerovností je dokázána v kapitole II knížky [33]. Snad nejúplnější přehled dotyčných nerovností je podán v kapitole 2 sbírky [23], u většiny ze zhruba 60 zařazených příkladů je však namísto důkazu uveden odkaz na časopisecký zdroj, odkud byl výsledek převzat. Využijme proto – stejně jako u trigonometrických identit – příležitost k ucelenějšímu výkladu o trigonometrických nerovnostech, nežli mohou podat autoři sbírek při řešení izolovaných úloh. Elementárnímu úvodu do zkoumané problematiky jsme nedávno věnovali článek [39].

Začněme metodickým výkladem postupů, které využíváme při důkazech tvrzení, že určitá nerovnost $F(\alpha,\beta,\gamma) \geq 0$ platí pro vnitřní úhly α,β,γ každého trojúhelníku. V podstatě je vždy možné jednu z proměnných α,β,γ eliminovat, tedy například dosadit $\gamma = \pi-\alpha-\beta$, poté dokazovat nerovnost $F(\alpha,\beta,\pi-\alpha-\beta) \geq 0$ pro libovolná $\alpha,\beta \in (0,\pi)$ splňující podmínku $\alpha+\beta<\pi$. Pokud však máme k dispozici nějakou trigonometrickou identitu s výrazem zastoupeným v zadané funkci F, vyplatí se často od zmíněné eliminace upustit a hledat rovnou algebraický důkaz původní nerovnosti $F(\alpha,\beta,\gamma) \geq 0$. U většiny příkladů přitom vystačíme s poznatky o kvadratických nerovnostech a se znalostí některých klasických nerovností, jakými jsou zejména nerovnosti mezi kvadratickým, aritmetickým, geometrickým a harmonickým průměrem nebo Cauchyova-Schwarzova nerovnost.[3] Uveďme proto nejdříve přehled nerovností, které budeme v našich důkazech skutečně potřebovat. Budou to především kvadratické nerovnosti

$$\text{N1: } xy+xz+yz \leq x^2+y^2+z^2, \qquad \text{N2: } (x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2),$$
$$\text{N3: } 3(xy+xz+yz) \leq (x+y+z)^2,$$

které splňují libovolná *reálná* čísla x,y,z. Pro rozdíl pravé a levé strany nerovnosti N1 totiž platí

$$(x^2+y^2+z^2)-(xy+xz+yz) = \frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(x-z)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2,$$

což je kladná hodnota, neplatí-li $x=y=z$, kdy v N1 nastane rovnost. Nerovnosti N2 a N3 jsou zřejmě s dokázanou nerovností N1 ekvivalentní, jak je možné se přesvědčit snadným roznásobením. Další potřebná nerovnost

$$\text{N4: } 3abc \leq a^3+b^3+c^3$$

platí pro libovolná *nezáporná* čísla a,b,c. Plyne to z rozkladu

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc),$$

přitom druhý činitel v pravé straně je nezáporný podle N1. Nerovnosti mezi geometrickým, aritmetickým a kvadratickým průměrem

$$\text{N5: } \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt[2]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

platí rovněž pro každou trojici *nezáporných* čísel a,b,c, neboť levá, resp. pravá nerovnost je důsledkem N4, resp. N2. Poslední potřebný výsledek, totiž nerovnosti mezi geometrickým, harmonickým průměrem a mocninným průměrem stupně -2 libovolné trojice *kladných* čísel a,b,c zapíšeme v poněkud upraveném tvaru

$$\text{N6: } \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \sqrt[2]{3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}$$

a dodáme, že nerovnosti N6 plynou z nerovností N5 po záměně čísel a,b,c čísly převrácenými. Zdůrazněme nakonec, že v kterékoliv z nerovností N1 – N6 nastane rovnost právě tehdy, když zastoupené proměnné x,y,z či a,b,c mají stejnou hodnotu.

Podaný přehled algebraických nerovností doplňme postřehem dosvědčujícím téměř nepřebernou

[3] Efektivním prostředkem důkazů řady trigonometrických nerovností je také Jensenova nerovnost pro konvexní nebo konkávní funkce. Nebudeme ji však v našem textu s ohledem na jeho elementární zaměření používat.

bohatost trigonometrických nerovností.[4] Jakmile například později dokážeme, že vnitřní úhly α, β, γ libovolného trojúhelníku splňují vztah

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \leq \frac{9}{4},$$

bude to podle N5 a N6 znamenat, že rovněž platí nerovnosti

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8},$$
$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma} \geq 2\sqrt{3}, \qquad \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} \geq 4$$

(neboť funkce sinus je na $(0, \pi)$ kladná). Díky identitě $\sin^2 x \cdot (1 + \operatorname{cotg}^2 x) = 1$ lze ještě poslední nerovnost přepsat jako „další“ výsledek

$$\operatorname{cotg}^2\alpha + \operatorname{cotg}^2\beta + \operatorname{cotg}^2\gamma \geq 1.$$

Z pohledu na takové skupiny provázaných nerovností je zajímavá situace u hodnot $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ splňujících, jak se později ukáže, dvě opačným směrem „zaměřené“ nerovnosti

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2} \qquad \text{a} \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geq \frac{3}{4},$$

takže číslo $\frac{1}{2}$ vždy leží *mezi* aritmetickým a kvadratickým průměrem těchto tří kosinů.

K metodice dokazování trigonometrických nerovností učiňme ještě jednu důležitou poznámku. Jak jsme se přesvědčili v první části této kapitoly, prakticky všechny identity pro vnitřní úhly α, β, γ libovolného trojúhelníku, tedy pro trojice $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathscr{T}_+$, bylo možné dokázat pro širší obor $\mathscr{T}$ všech trojic reálných čísel α, β, γ svázaných podmínkou $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Nebylo to samoúčelné, neboť jsme tím získali možnost využít obě odvozovací pravidla (5.3) a (5.4), které nyní připomeneme zápisy příslušných transformací trojic

$$(\alpha, \beta, \gamma) \to \left(\frac{\pi - \alpha}{2}, \frac{\pi - \beta}{2}, \frac{\pi - \gamma}{2}\right) \quad \text{a} \quad (\alpha, \beta, \gamma) \to (\pi - 2\alpha, \pi - 2\beta, \pi - 2\gamma)\,, \tag{5.10}$$

zatímco v množině $\mathscr{T}_+$ bychom mohli používat pouze první transformaci. U trigonometrických nerovností je stejné rozšíření oboru $\mathscr{T}_+$ na obor $\mathscr{T}$ obecně nemožné ze zřejmého důvodu, který doložíme jednoduchým příkladem: trojice $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathscr{T}_+$ jistě splňují nerovnost

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 0,$$

jejíž levá strana má však například pro trojici $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 2\pi) \in \mathscr{T}$ hodnotu -2. Proto také v literatuře najdeme příklady nerovností, které platí pouze pro vnitřní úhly ostroúhlých nebo tupoúhlých trojúhelníků. Na druhou stranu je pozoruhodné, že trigonometrické nerovnosti s širším oborem pravdivosti $\mathscr{T}$ existují a jsou natolik významné, že je lze využít k důkazům většiny běžně uváděných nerovností s oborem $\mathscr{T}_+$. Věnujeme jim první část následujícího výkladu, v níž tedy budeme moci využívat obě zmíněná odvozovací pravidla. Ta sice byla ve vztazích (5.3) a (5.4) zapsaná pro *rovnosti*, avšak je jasné, že platí pro jakékoliv *výrokové formy* proměnných α, β, γ s definičním oborem $\mathscr{T}$, tedy i pro *nerovnosti.*

[4]K sestavování dalších trigonometrických nerovností lze využít také mocninné průměry dalších stupňů i exponenciální nebo logaritmickou funkci.

Jako první uvedeme a dokážeme trigonometrickou nerovnost, která bude v dalších úvahách hrát podobnou prioritní úlohu, jakou sehrála v našem výkladu trigonometrických identit závislost tří kosinů zapsaná vztahem (5.1). Její zápis s uvedením oboru

$$\boxed{\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}:\ \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\le\frac{1}{8}} \tag{5.11}$$

ještě doplníme konstatováním, že rovnost v (5.11) je možná jen tehdy, když platí rovnosti $|\cos\alpha| = |\cos\beta| = |\cos\gamma| = \frac{1}{2}$. Celý důkaz založený na základní identitě (5.1) provedeme tak, že pro libovolnou trojici $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}$ ověříme platnost implikace s opačnou nerovností

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\ge\frac{1}{8}\qquad\Rightarrow\qquad|\cos\alpha|=|\cos\beta|=|\cos\gamma|=\frac{1}{2}. \tag{5.12}$$

Předpokládejme tedy, že nerovnost z (5.12) pro určitou trojici $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}$ platí. Pak z (5.1) vyplývá

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\le1-2\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4},$$

takže z nerovnosti N4 s čísly $a=|\cos\alpha|^{\frac{2}{3}}, b=|\cos\beta|^{\frac{2}{3}}, c=|\cos\gamma|^{\frac{2}{3}}$ s ohledem na odvozenou nerovnost $a^3+b^3+c^3\le\frac{3}{4}$ plyne

$$3|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma|^{\frac{2}{3}}\le\frac{3}{4}\qquad\text{neboli}\qquad|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma|\le\frac{1}{8}.$$

To spolu s nerovností z (5.12) znamená, že $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{1}{8}$ a že nerovnost N4 byla použita pro tři sobě rovná čísla, tedy $|\cos\alpha|=|\cos\beta|=|\cos\gamma|=\frac{1}{2}$. Tím je důkaz hotov. Dodejme, že rovnost v (5.11) může nastat i pro trojice $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}$, které nesplňují podmínku $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{2}$. Příkladem je trojice $(\alpha,\beta,\gamma)=(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{-2\pi}{3})$, pro niž $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ a $\cos\beta=\cos\gamma=-\frac{1}{2}$. Takový příklad však nenajdeme v oboru $\mathscr{T}_+$, v němž rovnost $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{1}{8}$ zaručuje, že všechny tři hodnoty $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ jsou kladné, a proto je splněna pouze v případě $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

Uplatníme-li k dokázanému výsledku (5.11) obě odvozovací pravidla založená na transformacích (5.10), pak vzhledem ke zřejmým důsledkům převodních vzorců

$$\cos\frac{\pi-\alpha}{2}\cos\frac{\pi-\beta}{2}\cos\frac{\pi-\gamma}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$
$$\cos(\pi-2\alpha)\cos(\pi-2\beta)\cos(\pi-2\gamma)=-\cos2\alpha\cos2\beta\cos2\gamma$$

dostaneme dvě nové trigonometrické nerovnosti s oborem pravdivosti $\mathscr{T}$, totiž

$$\boxed{\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}:\ \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}\quad\wedge\quad\cos2\alpha\cos2\beta\cos2\gamma\ge-\frac{1}{8},} \tag{5.13}$$

přitom jednotlivé rovnosti znamenají, že absolutní hodnoty všech tří zastoupených činitelů jsou rovny $\frac{1}{2}$.

Výsledky (5.11) a (5.13) umožňují odhadnout pravé strany devíti z 12 rovností v tabulce identit na straně 165. Tímto způsobem dostaneme 9 nových trigonometrických nerovností, které platí pro libovolnou trojici $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}$. Zapíšeme je do následující tabulky.

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\ge\frac{3}{4}$	$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\le\frac{9}{4}$	$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2}$
$\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}\le\frac{9}{4}$	$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\ge\frac{3}{4}$	$\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma\ge-\frac{3}{2}$
$\cos^2 2\alpha+\cos^2 2\beta+\cos^2 2\gamma\ge\frac{3}{4}$	$\sin^2 2\alpha+\sin^2 2\beta+\sin^2 2\gamma\le\frac{9}{4}$	$\cos4\alpha+\cos4\beta+\cos4\gamma\ge-\frac{3}{2}$

Snadným rozborem podmínek uvedených k případům rovností v (5.11) a (5.13) lze zjistit, že v případě $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}_+$ rovnosti v prvních dvou řádcích tabulky nastanou, právě když je trojúhelník s vnitřními úhly α,β,γ rovnostranný; u rovností ze třetího řádku jsou to navíc trojúhelníky s vnitřními úhly $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{2\pi}{3}$. Zdůrazněme, že všechny nerovnosti z tabulky jsme odvodili z výchozí „součinové“ nerovnosti (5.11), která nás nejdříve přivedla k součinovým nerovnostem (5.13).[5] Další významné důsledky dosud odvozených nerovností platné v oboru $\mathscr{T}$ zapíšeme do druhé tabulky. Zdůvodnění zařazených nerovností uvedeme vzápětí.

$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{3}{2}$	$\lvert\sin\alpha\rvert+\lvert\sin\beta\rvert+\lvert\sin\gamma\rvert\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$
$\left\lvert\cos\frac{\alpha}{2}\right\rvert+\left\lvert\cos\frac{\beta}{2}\right\rvert+\left\lvert\cos\frac{\gamma}{2}\right\rvert\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\lvert\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\rvert\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$
$\lvert\sin 2\alpha\rvert+\lvert\sin 2\beta\rvert+\lvert\sin 2\gamma\rvert\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\left\lvert\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right\rvert\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$
$\lvert\sin 4\alpha\rvert+\lvert\sin 4\beta\rvert+\lvert\sin 4\gamma\rvert\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\lvert\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma\rvert\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$

První nerovnost z levého sloupce pro součet $\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}$ bychom ještě mohli připsat do první tabulky, neboť je podle odvozovacích pravidel ekvivalentní s výsledkem o součtu $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$. Ostatní nerovnosti druhé tabulky tuto vlastnost již nemají, jsou to skutečně „nevratné“ algebraické důsledky nerovností první tabulky. Vysvětlíme to pouze pro první dvě nerovnosti z pravého sloupce, neboť zbylých pět nerovností tabulky z nich opět plyne užitím transformací (5.10). Zmíněné dvě nerovnosti jsou odhady součtu $a+b+c$ a součinu abc pro hodnoty $a=\lvert\sin\alpha\rvert, b=\lvert\sin\beta\rvert$ a $c=$ $=\lvert\sin\gamma\rvert$. Jejich platnost proto okamžitě plyne z N5, neboť podle první nerovnosti z prostředního sloupce první tabulky platí $a^2+b^2+c^2\le\frac{9}{4}$. Tím jsou všechny nerovnosti druhé tabulky pro libovolnou trojici $(a,b,c)\in\mathscr{T}$ dokázány.

Učiňme ještě poznámku o absolutních hodnotách, které se objevily v druhé tabulce nerovností. Protože pro každé $x\in\mathbb{R}$ platí $x\le|x|$, mohli jsme absolutní hodnoty v tabulce vynechat a uvést tak „slabší“ výsledky. Byla by to však pro obecné trojice $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}$ zbytečná ztráta. Je ovšem zřejmé, že pro trojice $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}_+$ je vynechání některých absolutních hodnot v tabulce ekvivalentní úprava, neboť například funkce $\sin x$ a $\cos\frac{x}{2}$ jsou na $(0,\pi)$ kladné. Proto jsou například známé výsledky

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{2}\qquad\text{a}\qquad\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

pro vnitřní úhly α,β,γ libovolného trojúhelníku „přesnými“ kopiemi nerovností, které jsme dokázali pro všechny trojice $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}$. Na druhou stranu není možné pro obecnou trojici $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}$ připsat absolutní hodnoty sčítancům první nerovnosti levého sloupce tabulky, neboť například pro trojici $(3\pi,-\pi,-\pi)\in\mathscr{T}$ platí

$$\left\lvert\sin\frac{3\pi}{2}\right\rvert+\left\lvert\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\rvert+\left\lvert\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\rvert=|-1|+|-1|+|-1|=3.$$

Stejně tak nelze ani „vylepšit“ tři nerovnosti z pravého sloupce první tabulky.

[5] Je dobré si uvědomit, že díky trigonometrickým identitám lze naopak z každé z 9 nerovností v tabulce odvodit příslušnou ze tří součinových nerovností (5.11) nebo (5.13), jež jsou ostatně také – díky transformacím (5.10) – navzájem ekvivalentními tvrzeními.

Přejdeme nyní k nerovnostem s funkcemi tangens a kotangens, které platí pro libovolnou trojici $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}$ vždy, když mají zastoupené hodnoty smysl. Využijeme přitom trigonometrické identity s funkcemi tangens a kotangens, které jsme dříve odvodili a shrnuli do dvou tabulek na str. 169. V první z nich jsou jednak rovnosti tvaru $xy+xz+yz=1$, z něhož podle nerovností N1 a N3 plynou odhady

$$x^2+y^2+z^2\geq 1 \qquad \text{a} \qquad (x+y+z)^2\geq 3 \qquad \text{neboli} \qquad |x+y+z|\geq\sqrt{3},$$

jednak rovnosti tvaru $x+y+z=xyz$, z něhož podle N2 a N3 vyplývá

$$x^2+y^2+z^2\geq\frac{x^2y^2z^2}{3} \qquad \text{a} \qquad xy+xz+yz\leq\frac{x^2y^2z^2}{3}.$$

Dostáváme tak první skupinu nerovností

$$\boxed{\begin{array}{c}
\begin{array}{rr}
\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geq 1 \qquad\qquad & \left|\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\right|\geq\sqrt{3}\\
\mathrm{cotg}^2\alpha+\mathrm{cotg}^2\beta+\mathrm{cotg}^2\gamma\geq 1 \qquad\qquad & |\mathrm{cotg}\,\alpha+\mathrm{cotg}\,\beta+\mathrm{cotg}\,\gamma|\geq\sqrt{3}\\
\mathrm{cotg}^2 2\alpha+\mathrm{cotg}^2 2\beta+\mathrm{cotg}^2 2\gamma\geq 1 \qquad\qquad & |\mathrm{cotg}\,2\alpha+\mathrm{cotg}\,2\beta+\mathrm{cotg}\,2\gamma|\geq\sqrt{3}
\end{array}\\
\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta+\mathrm{tg}^2\gamma\geq\frac{\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta\,\mathrm{tg}^2\gamma}{3}\geq\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\gamma+\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma\\
\mathrm{tg}^2 2\alpha+\mathrm{tg}^2 2\beta+\mathrm{tg}^2 2\gamma\geq\frac{\mathrm{tg}^2 2\alpha\,\mathrm{tg}^2 2\beta\,\mathrm{tg}^2 2\gamma}{3}\geq\mathrm{tg}2\alpha\,\mathrm{tg}2\beta+\mathrm{tg}2\alpha\,\mathrm{tg}2\gamma+\mathrm{tg}2\beta\,\mathrm{tg}2\gamma\\
\mathrm{cotg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{cotg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{cotg}^2\frac{\gamma}{2}\geq\frac{\mathrm{cotg}^2\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{cotg}^2\frac{\beta}{2}\,\mathrm{cotg}^2\frac{\gamma}{2}}{3}\geq\mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{cotg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{cotg}\frac{\gamma}{2}+\mathrm{cotg}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{cotg}\frac{\gamma}{2}
\end{array}}$$

s platností v oboru $\mathscr{T}$ s výše zmíněným omezením.

K odvození nerovností plynoucích z druhé tabulky identit na str. 169 uplatníme dříve získané odhady pro součiny typu $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)$. Tak podle základní nerovnosti (5.11) pro libovolnou trojici (α,β,γ) platí, že hodnota součinu $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ leží v intervalu $\left\langle -1,\frac{1}{8}\right\rangle$, jehož levá mez je zaručena triviálními odhady $|\cos x|\leq 1$ pro $x=\alpha,\beta,\gamma$. Odtud plyne poznatek

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}\colon\ \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 8,\infty)\,,$$

z něhož podle identity pro součet $\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\gamma+\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma$ vyplývá odhad

$$\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\gamma+\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma\in(-\infty,0\rangle\cup\langle 9,\infty)\,.$$

Podobně z dříve odvozené nerovnosti $|\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma|\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$ plyne

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}\colon\ \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{|\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma|}\geq\frac{8\sqrt{3}}{9},$$

takže z identity pro součet $\mathrm{cotg}\alpha+\mathrm{cotg}\beta+\mathrm{cotg}\gamma$ vychází odhad

$$|\mathrm{cotg}\alpha+\mathrm{cotg}\beta+\mathrm{cotg}\gamma-\mathrm{cotg}\alpha\,\mathrm{cotg}\beta\,\mathrm{cotg}\gamma|\geq\frac{8\sqrt{3}}{9}.$$

Takovým postupem získáme druhou skupinu nerovností s funkcemi tangens a kotangens platných v oboru $\mathscr{T}$, které zapíšeme do následující tabulky, a to v pořadí odpovídajícím příslušným identitám z výše zmíněné tabulky.

$$\begin{array}{|r|}\hline
\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\gamma + \mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma \in (-\infty,0)\cup\langle 9,\infty) \\
\mathrm{tg}2\alpha\,\mathrm{tg}2\beta + \mathrm{tg}2\alpha\,\mathrm{tg}2\gamma + \mathrm{tg}2\beta\,\mathrm{tg}2\gamma \in (-\infty,0)\cup\langle 9,\infty) \\
\left|\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} - \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\right| \geq \frac{8\sqrt{3}}{9} \\
|\mathrm{cotg}\alpha + \mathrm{cotg}\beta + \mathrm{cotg}\gamma - \mathrm{cotg}\alpha\,\mathrm{cotg}\beta\,\mathrm{cotg}\gamma| \geq \frac{8\sqrt{3}}{9} \\
|\mathrm{cotg}2\alpha + \mathrm{cotg}2\beta + \mathrm{cotg}2\gamma - \mathrm{cotg}2\alpha\,\mathrm{cotg}2\beta\,\mathrm{cotg}2\gamma| \geq \frac{8\sqrt{3}}{9} \\
\mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{cotg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{cotg}\frac{\gamma}{2} + \mathrm{cotg}\frac{\beta}{2}\mathrm{cotg}\frac{\gamma}{2} \in (-\infty,0)\cup\langle 9,\infty) \\ \hline
\end{array}$$

Zdůrazněme ještě jednou, že odhady v tabulce platí pro libovolnou trojici $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}$ vždy, když mají všechny hodnoty v příslušné nerovnosti smysl.

V druhé části našeho výkladu se budeme věnovat nerovnostem, které platí pro libovolné trojice $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}_+$, tedy trojice tvořené vnitřními úhly trojúhelníků. Platí pro ně samozřejmě všechny dosud odvozené nerovnosti, z nichž mnohé budeme schopni ještě upřesnit, avšak také řada nových nerovností, a to díky tomu, že hodnoty α,β,γ leží v intervalu $(0,\pi)$. Všechny tyto nerovnosti uvedeme přehledně v několika tabulkách podle zastoupených goniometrických funkcí. Za každou tabulkou vždy vzápětí uvedeme zdůvodnění nerovností, které jsme do tabulky zahrnuli.

Nejdříve uvedeme tabulku nerovností s funkcí sinus, které platí pro všechny trojice $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}_+$.

$0 <$	$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$	$\leq \frac{9}{4}$	$1 >$	$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}$	$\geq \frac{3}{4}$
$0 <$	$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$	$\leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$1 <$	$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}$	$\leq \frac{3}{2}$
$0 <$	$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$	$\leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$	$0 <$	$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$	$\leq \frac{1}{8}$
$\infty >$	$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}$	$\geq 2\sqrt{3}$	$\infty >$	$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}$	≥ 6
$\infty >$	$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}$	≥ 4	$\infty >$	$\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\gamma}{2}}$	≥ 12

Všimněme si, že v zapsaných nerovnostech vystupují pouze hodnoty $\sin\alpha,\sin\beta,\sin\gamma$ a $\sin\frac{\alpha}{2},\sin\frac{\beta}{2}$, $\sin\frac{\gamma}{2}$, které jsou v $\mathscr{T}_+$ kladné. Víme již, že první neostrá nerovnost v levém sloupci a první dvě neostré nerovnosti v pravém sloupci platí dokonce v oboru $\mathscr{T}$. Ostatní neostré nerovnosti jsou v $\mathscr{T}_+$ jejich algebraickými důsledky. Pro nerovnosti z levého sloupce jsme to podrobně ukázali v úvodní části této podkapitoly bezprostředně za přehledem nerovností N1 – N6. Pro neostré nerovnosti z pravého sloupce je zdůvodnění analogické – poslední tři nerovnosti plynou z nerovnosti

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\leq\frac{3}{2}$$

díky tomu, že hodnoty $\sin\frac{\alpha}{2},\sin\frac{\beta}{2},\sin\frac{\gamma}{2}$ jsou kladné. Ke každé neostré nerovnosti v tabulce lze dodat, že rovnost v ní nastane, jedině když $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$. To ostatně bude platit pro neostré nerovnosti i v dalších tabulkách, nebudeme to proto již zmiňovat (nenastane-li rovnost jindy).

Pokud jde o ostré nerovnosti v předchozí tabulce, ty s číslem 0, resp. ∞ na levé straně jsou splněny triviálně. Jejich zápisem chceme zdůraznit, že výraz na pravé straně nerovnosti může nabývat libovolně malé, resp. velké kladné hodnoty. Dosvědčují to příklady trojic

$$\alpha = \varepsilon, \quad \beta = \varepsilon, \quad \gamma = \pi - 2\varepsilon \tag{5.14}$$

s malým parametrem $\varepsilon > 0$. Stejné trojice dokazují i přesnost ostrých nerovností s číslem 1 na levé straně, které však nejsou triviální. Jejich platnost plyne z identit

$$\begin{aligned} \sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} &= 1 - 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}, \\ \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} &= 1 + 4\sin\frac{\pi-\alpha}{4}\sin\frac{\pi-\beta}{4}\sin\frac{\pi-\gamma}{4}, \end{aligned}$$

jejichž pravé strany jsou zřejmě menší, resp. větší než 1. Zatímco první z těchto identit jsme v podkapitole 5.1 odvodili, na druhou identitu se tam nedostalo, i když je odvození celkem jasné: stačí uplatnit odvozovací pravidlo (5.3) k identitě pro součet $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$. Tím jsou všechny nerovnosti s funkcí sinus z naší tabulky dokázány. Přidejme k nim ještě čtveřici nerovností

$0 < \sin^2 2\alpha + \sin^2 2\beta + \sin^2 2\gamma \le \frac{9}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{8} \le \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$
$0 < \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} \ge \sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma \ge -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

pro hodnoty sinů dvoj- a čtyřnásobků úhlů α, β, γ, které v oboru $\mathscr{T}_+$ nabývají kladných i záporných hodnot. Všechny čtyři zapsané neostré nerovnosti jsme dokázali již dříve (s absolutními hodnotami) v oboru $\mathscr{T}$. Proto jsou v pravém sloupci dva odhady v každém řádku zapsány nezvykle vždy dvěma neostrými nerovnostmi. Jejich opačné směry v řádcích jsme zvolili kvůli identitě, podle které se součet $\sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma$ rovná (-4)-násobku součinu $\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma$. Zabývejme se proto pouze tímto součinem. Pro něj levá či pravá nerovnost přejde v rovnost, právě když bude platit

$$|\sin 2\alpha| = |\sin 2\beta| = |\sin 2\gamma| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

takže nyní (v oboru $\mathscr{T}_+$) každý z úhlů α, β, γ bude roven jedné z hodnot $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ nebo $\frac{2\pi}{3}$. Kromě obvykle jediného případu $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, kdy některá neostrá trigonometrická nerovnost přechází v rovnost, jakou je v našem případě rovnost

$$\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma = \pm\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

se znaménkem $+$, existují rovněž trojice $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathscr{T}_+$, pro které posuzovaná rovnost bude platit se znaménkem $-$. Až na pořadí prvků jsou všechny tyto trojice shodné s trojicí $\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \gamma = \frac{\pi}{6}$. Našli jsme tak první příklad netriviální, v oboru $\mathscr{T}_+$ obecně platné nerovnosti, v níž nastane rovnost pro trojúhelníky, které nejsou rovnostranné. (Triviálním příkladem je nerovnost $\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma \ge 0$.) Pokud jde o dvě ostré nerovnosti v poslední tabulce, první z nich je triviální; platnost druhé nerovnosti plyne z identity, podle které je součet $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$ roven součinu $4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. Přesnost obou ostrých nerovností znovu dosvědčují trojice (5.14).

Přejdeme k nerovnostem s funkcí kosinus, jež platí pro libovolnou trojici $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathscr{T}_+$. Předtím než je zapíšeme do tabulky, zdůrazněme, že zatímco hodnoty $\cos\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\beta}{2}, \cos\frac{\gamma}{2}$ jsou kladné, hodnoty $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ stejně jako hodnoty $\cos 2\alpha, \cos 2\beta, \cos 2\gamma$ mohou mít libovolná znaménka.

$3 > \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geq \frac{3}{4}$	$2 < \cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} \leq \frac{9}{4}$
$1 < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$	$2 < \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$
$-1 < \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leq \frac{1}{8}$	$0 < \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$
$3 > \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geq -\frac{3}{2}$	$\infty > \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}} \geq 2\sqrt{3}$
$1 > \cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma \geq -\frac{1}{8}$	$\infty > \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\gamma}{2}} \geq 4$
$3 > \cos^2 2\alpha + \cos^2 2\beta + \cos^2 2\gamma \geq \frac{3}{4}$	

V levém sloupci platí všechny neostré nerovnosti (jak víme) dokonce v oboru $\mathscr{T}$, přitom rovnosti v posledních dvou nerovnostech nastanou i pro trojice α, β, γ tvořené úhly $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$, o kterých jsme již psali u nerovností pro hodnoty $\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma$. Všechny ostré nerovnosti v levém sloupci – s výjimkou druhé shora – jsou triviální a uvádíme je ze stejného důvodu jako triviální nerovnosti z první tabulky. Výjimečná (netriviální) ostrá nerovnost je důsledkem identity

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

neboť druhý sčítanec na pravé straně je zřejmě kladný.

V pravém sloupci platí první neostrá nerovnost (jak víme) v oboru $\mathscr{T}$; ostatní neostré nerovnosti jsou v $\mathscr{T}_+$ jejími algebraickými důsledky. Pro triviální ostré nerovnosti v pravém sloupci, tj. pro nerovnosti s 0 a ∞, platí totéž co pro ostré nerovnosti z levého sloupce. Zbývá posoudit první dvě ostré nerovnosti z pravého sloupce (obě s číslem 2). Protože pro každé $c \in (0, 1)$ zřejmě platí $c > c^2$, máme

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} > \cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2},$$

takže obě posuzované ostré nerovnosti plynou z identity

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} = 2 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

jejíž pravá strana je větší než 2. Tím jsou všechny nerovnosti s funkcí kosinus z naší tabulky dokázány, přitom přesnost všech ostrých nerovností opět prokazují trojice (5.14).

Výklad o nerovnostech s funkcemi sinus a kosinus, které platí v oboru $\mathscr{T}_+$, završíme odhady součtů $f(\alpha)f(\beta) + f(\alpha)f(\gamma) + f(\beta)f(\gamma)$, jež jsou o to cennější, že pro tyto součty s funkcí sinus nebo kosinus neexistují žádné zjednodušující identity. Z těchto nových odhadů sestavíme další tabulku odhadů platných v oboru $\mathscr{T}_+$.

$0 < \sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin\gamma \leq \frac{9}{4}$	$1 < \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{9}{4}$
$-1 < \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma \leq \frac{3}{4}$	$0 < \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{4}$
$\infty > \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta} + \frac{1}{\sin\alpha\sin\gamma} + \frac{1}{\sin\beta\sin\gamma} \geq 4$	$\infty > \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} \geq 4$
	$\infty > \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} \geq 12$

První dvě neostré nerovnosti v každém z obou sloupců plynou užitím N3 k dříve uvedeným odhadům kladných součtů $f(\alpha) + f(\beta) + (\gamma)$. Ostatní neostré nerovnosti platí díky N6 a horním odhadům součinů $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)$. Všechny ostré nerovnosti – s výjimkou těch s čísly -1 a 1 – jsou triviální a přesnost všech (bez výjimky) opět potvrzují trojice (5.14). Ostrá nerovnost s číslem 1 je zřejmě důsledkem identity

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=1+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

odvozené v 5.1. Ostrou nerovnost s číslem -1 stačí jistě dokázat pouze v případě, kdy α,β,γ jsou vnitřní úhly *tupoúhlého* trojúhelníku. Dosáhneme toho například v případě $\alpha > \frac{\pi}{2}$ sečtením nerovností

$$\cos\alpha\cos\gamma > -1 \quad \text{a} \quad (\cos\alpha+\cos\gamma)\cos\beta > 0,$$

z nichž první je zřejmá a druhá plyne z toho, že oba činitelé na levé straně mají kladnou hodnotu, neboť $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ a $0<\gamma<\pi-\alpha<\frac{\pi}{2}$. Tím je důkaz všech nerovností z tabulky ukončen.

V další tabulce uvedeme nerovnosti, které platí v oboru $\mathscr{T}_+$ pro výrazy s funkcemi tangens a kotangens.

$$\begin{array}{|llll|}\hline \infty > \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geq 1 & & \infty > \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} & \geq 3\sqrt{3} \\ \infty > \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} & \geq \sqrt{3} & \infty > \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} & \geq 3\sqrt{3} \\ 0 < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} & \leq \frac{\sqrt{3}}{9} & \infty > \operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}^2\frac{\gamma}{2} & \geq 9 \\ \hline\end{array}$$

První dvě neostré nerovnosti v levém sloupci jsme již dříve dokázali v oboru $\mathscr{T}$ jako algebraické důsledky identity $xy+xz+yz=1$, nyní jsme jen v druhé nerovnosti odstranili absolutní hodnoty, neboť čísla $x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, y=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, z=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ jsou v oboru $\mathscr{T}_+$ kladná. Novou třetí neostrou nerovnost z levého sloupce odvodíme užitím nerovnosti N5 pro trojici čísel xy, xz a yz, podle které pro naše čísla x,y,z platí

$$\sqrt[3]{xy\cdot xz\cdot yz}\leq\frac{xy+xz+yz}{3}=\frac{1}{3}, \text{ odkud } xyz\leq\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Kladná čísla $x=\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}, y=\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}, z=\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$ z nerovností v pravém sloupci tabulky splňují jak víme identitu $x+y+z=xyz$. Pro hodnotu $s=xyz>0$ to podle N5 znamená

$$\sqrt[3]{s}=\sqrt[3]{xyz}\leq\frac{x+y+z}{3}=\frac{s}{3}, \text{ odkud } s\leq\frac{s^3}{27} \text{ neboli } s\geq 3\sqrt{3},$$

což dokazuje první dvě neostré nerovnosti, třetí nerovnost je jejich důsledkem díky N2. Přesnost všech (triviálních) ostrých nerovností z poslední tabulky dosvědčují v některých případech trojice (5.14), v ostatních případech trojice

$$\alpha=2\varepsilon,\quad \beta=\frac{\pi}{2}-\varepsilon,\quad \gamma=\frac{\pi}{2}-\varepsilon.$$

K dokázaným nerovnostem z tabulky připojme ještě dvojici nerovností

$$\begin{array}{|lll|}\hline \infty > & \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} & \geq 9 \\ \infty > & \operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\gamma & \geq\sqrt{3} \\ \hline\end{array}$$

První z nich je snadným upřesněním výsledku, který jsme dokázali v oboru $\mathscr{T}$ a podle něhož příslušný součet leží v množině $(-\infty, 0\rangle \cup \langle 9, \infty)$; v oboru $\mathscr{T}_+$ je ovšem tento součet kladný. Protože jsme dříve v oboru $\mathscr{T}$ dokázali rovněž nerovnost

$$|\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma| \geq \sqrt{3},$$

je naším úkolem nyní pouze vysvětlit, proč v případě $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathscr{T}_+$ je součet „uvnitř absolutní hodnoty" kladný. Jistě to platí, není-li trojúhelník s úhly α, β, γ tupoúhlý; v opačné situaci, kdy např. $\alpha > \frac{\pi}{2}$ a $\beta + \gamma = \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$, dostaneme potřebné sečtením nerovností

$$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta > 0 \quad \text{a} \quad \operatorname{cotg}\gamma > 0,$$

z nichž druhá je zřejmá a první plyne z $0 < \beta < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$. Pokud jde o přesnost obou (triviálních) ostrých nerovností, vše opět řeší trojice (5.14), stejně jako u nerovností v další tabulce.
K nerovnostem s funkcemi tangens a kotangens v oboru $\mathscr{T}_+$ poznamenejme, že jsme uvedli *jedinou* netriviální nerovnost pro hodnoty $\operatorname{cotg}\alpha, \operatorname{cotg}\beta, \operatorname{cotg}\gamma$, zatímco pro hodnoty $\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta, \operatorname{tg}\gamma$ jsme dokonce neuvedli žádnou takovou nerovnost (u které by ovšem bylo nutné doplnit předpoklad $\alpha, \beta, \gamma \neq \frac{\pi}{2}$), když nepočítáme složitější nerovnosti, které jsme uvedli a dokázali dříve v rozšíření $\mathscr{T}$ oboru $\mathscr{T}_+$. Z nich za připomenutí stojí snad jedině odhady dvou součtů

$$\boxed{\begin{array}{l} \infty > \quad \operatorname{cotg}^2\alpha + \operatorname{cotg}^2\beta + \operatorname{cotg}^2\gamma \quad \geq 1 \\ \infty > \operatorname{cotg}^2 2\alpha + \operatorname{cotg}^2 2\beta + \operatorname{cotg}^2 2\gamma \geq 1 \end{array}}$$

(druhý součet však existuje, jen když $\alpha, \beta, \gamma \neq \frac{\pi}{2}$). Tato absence není projevem neúplnosti našeho výkladu – žádné takové nerovnosti s obvyklými součty a součiny se nevyskytují ani v literatuře, protože v $\mathscr{T}_+$ ani jedna z nich obecně neplatí.

Jak jsme se již zmínili, v různých sbírkách najdeme i jednotlivé příklady nerovností, které namísto oboru $\mathscr{T}_+$ platí v užším oboru všech trojic (α, β, γ) určených podmínkou

$$\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : \alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

tedy příklady nerovností, pro vnitřní úhly α, β, γ libovolného *ostroúhlého* trojúhelníku. Věnujeme jim třetí část našeho textu, v němž nyní máme jedinečnou příležitost odvodit téměř všechny takové nerovnosti rychle a pohodlně z dříve dokázaných nerovností platných v oboru $\mathscr{T}_+$ všech trojic vnitřních úhlů trojúhelníků libovolného druhu. Povšimneme si totiž, že α, β, γ jsou vnitřní úhly ostroúhlého trojúhelníku, právě když úhly

$$\alpha' = \pi - 2\alpha, \quad \beta' = \pi - 2\beta, \quad \gamma' = \pi - 2\gamma$$

jsou vnitřní úhly obecného trojúhelníku. Plyne to ze zřejmých ekvivalencí

$$\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha', \beta', \gamma' \in (0, \pi), \qquad \alpha + \beta + \gamma = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha' + \beta' + \gamma' = \pi.$$

Díky tomuto poznatku a obráceným převodním vztahům

$$\alpha = \frac{\pi - \alpha'}{2}, \quad \beta = \frac{\pi - \beta'}{2}, \quad \gamma = \frac{\pi - \gamma'}{2}$$

můžeme konstatovat, že pro každou dvojici funkcí F a G svázaných identitou

$$F(\alpha,\beta,\gamma)=G(\pi-2\alpha,\pi-2\beta,\pi-2\gamma)\quad\text{neboli}\quad G(\alpha',\beta',\gamma')=F\left(\frac{\pi-\alpha'}{2},\frac{\pi-\beta'}{2},\frac{\pi-\gamma'}{2}\right)$$

platí rovnost množin

$$\left\{F(\alpha,\beta,\gamma)\colon \alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\wedge\alpha+\beta+\gamma=\pi\right\}=\left\{G(\alpha',\beta',\gamma')\colon(\alpha',\beta',\gamma')\in\mathscr{T}_+\right\}.$$

Znamená to, že pro hodnoty funkce $F=F(\alpha,\beta,\gamma)$ vnitřních úhlů α,β,γ všech ostroúhlých trojúhelníků platí *stejné odhady* jako pro hodnoty příslušné funkce $G=G(\alpha',\beta',\gamma')$ vnitřních úhlů α',β',γ' všech obecných trojúhelníků. Proto také všechny obecně platné nerovnosti pro ostroúhlé trojúhelníky můžeme odvodit (alespoň principiálně) z nerovností obecně platných v oboru $\mathscr{T}_+$. Tak například z dříve dokázaných nerovností

$$2<\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}\le\frac{9}{4}\quad\text{a}\quad\infty>\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\ge3\sqrt{3}$$

po záměně trojice $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathscr{T}_+$ trojicí $(\pi-2\alpha,\pi-2\beta,\pi-2\gamma)$ dostaneme pro vnitřní úhly α,β,γ libovolného ostroúhlého trojúhelníku nerovnosti

$$2<\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\le\frac{9}{4}\quad\text{a}\quad\infty>\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\ge\sqrt{3}.\tag{5.15}$$

Na těchto dvou příkladech si všimněme některých společných rysů, které takto odvozené nerovnosti budou mít. V ostrých nerovnostech nastane rovnost jedině v případě, kdy bude platit

$$\pi-2\alpha=\pi-2\beta=\pi-2\gamma=\frac{\pi}{3}\quad\text{neboli}\quad\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3},$$

tedy opět pouze v případě rovnostranného trojúhelníku. Rovněž tak je jasné, že ostré odvozené nerovnosti jsou přesné v tom významu, který jsme zavedli u nerovností v oboru $\mathscr{T}_+$.
Povšimněme si ještě, že ve vztahu k našemu předchozímu textu o nerovnostech v oboru $\mathscr{T}_+$ má každá z nerovností (5.15) odlišné postavení. První z nich je *upřesněním* odhadu téhož výrazu v oboru $\mathscr{T}_+$, který měl tvar

$$0<\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\le\frac{9}{4}.$$

Druhá dvojice nerovností v (5.15) je odhadem *nového* výrazu $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, tedy výrazu, pro který v oboru $\mathscr{T}_+$ (za podmínky $\alpha,\beta,\gamma\ne\frac{\pi}{2}$) žádná netriviální nerovnost vyjma $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\ne0$ neexistuje. Dodejme, že některé odhady odvozené v $\mathscr{T}_+$, jako například

$$1<\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2}\quad\text{a}\quad0<\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

žádná upřesnění při přechodu od obecných k ostroúhlým trojúhelníkům nepřipouštějí. Přesně takové odhady totiž znovu dostaneme, když na nerovnosti platné v oboru $\mathscr{T}_+$

$$1<\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{3}{2}\quad\text{a}\quad0<\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

aplikujeme výše popsanou proceduru záměny trojice (α,β,γ) trojicí $(\pi-2\alpha,\pi-2\beta,\pi-2\gamma)$.

Těmito úvodními poznámkami o nerovnostech, které platí pro vnitřní úhly všech ostroúhlých trojúhelníků, jsme objasnili obecnou metodu jejich odvozování z nerovností v oboru $\mathscr{T}_+$ a zároveň jsme naznačili, v jakých skupinách budeme nové výsledky nyní prezentovat. Do první tabulky zařadíme ty z nich, které upřesňují odhady výrazů, jež jsme zkoumali již v oboru $\mathscr{T}_+$. Ještě jednou zdůrazněme, že nerovnosti v následujících čtyřech tabulkách platí pro vnitřní úhly α,β,γ *libovolného ostroúhlého trojúhelníku.*

$$2 < \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \le \frac{9}{4} \qquad 1 > \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \ge \frac{3}{4}$$

$$2 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad 0 < \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \le \frac{1}{8}$$

$$0 < \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{8} \qquad -1 > \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \ge -\frac{3}{2}$$

$$\sqrt{2} < \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{3}{2} \qquad \frac{1}{2} < \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$2 > \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \ge \sqrt{3} \qquad 1 + \sqrt{2} < \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$1 < \sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin\gamma \le \frac{9}{4}$$

$$0 < \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma \le \frac{3}{4}$$

S výjimkou čtyř výrazů s úhly $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$, odhady pro všechny ostatní výrazy v předchozí tabulce jsou získány z odhadů v oboru $\mathscr{T}_+$ výše popsaným postupem. Čtenář se o tom může přesvědčit postupem opačným: v každém výrazu tabulky zaměnit trojici α, β, γ trojicí $\frac{\pi-\alpha}{2}, \frac{\pi-\beta}{2}, \frac{\pi-\gamma}{2}$ a přesvědčit se, že odhady pro nový výraz byly v textu dříve dokázány v oboru $\mathscr{T}_+$ – stejně jako neostré nerovnosti pro výrazy s úhly $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$, které jsme do nové tabulky znovu zapsali. Proto nyní dokážeme pouze uvedené *ostré* nerovnosti pro tyto výrazy (u kterých se přechod k nerovnostem v oboru $\mathscr{T}_+$ nevyplatí). I když pro zřejmý důkaz jedné z těchto čtyř ostrých nerovností máme k dispozici identitu

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

jejíž levá strana je (jak už víme) větší než 2, popíšeme teď zajímavou metodu společného důkazu všech čtyř nerovností. Bude založena na tom, že pro libovolná čísla $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ platí nerovnosti

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &> \sin\frac{\pi}{4} + \sin\left(x + y - \frac{\pi}{4}\right), & \cos x\cos y &> \cos\frac{\pi}{4}\cos\left(x + y - \frac{\pi}{4}\right), \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y &< \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\left(x + y - \frac{\pi}{4}\right), & \cos x + \cos y &> \cos\frac{\pi}{4} + \cos\left(x + y - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Odložme na chvíli důkaz těchto nerovností a ukažme, jak z nich plynou posuzované nerovnosti z naší tabulky. Každou z nerovností (5.16) zapíšeme pro dvojice

$$(x, y) = \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) \quad \text{a} \quad (x, y) = \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{\gamma}{2}\right)$$

a obě takto získané nerovnosti pak sečteme, resp. vynásobíme. Takové užití (5.16) je korektní, neboť všechny hodnoty

$$\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{\gamma}{2}$$

leží v intervalu $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ díky tomu, že α, β, γ jsou vnitřní úhly ostroúhlého trojúhelníku. S přihlédnutím k rovnosti $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$ popsaným postupem dostaneme nerovnosti, které jsme chtěli dokázat:

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}>2\sin\frac{\pi}{4}+\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}>\cos^2\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}<2\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=2,$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}>2\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=1+\sqrt{2}.$$

Přesnost dokázaných nerovností dosvědčují ostroúhlé trojúhelníky s vnitřními úhly

$$\alpha=2\varepsilon,\quad \beta=\frac{\pi}{2}-\varepsilon,\quad \gamma=\frac{\pi}{2}-\varepsilon,$$

kde $\varepsilon>0$ je malý parametr.
Zbývá dokázat nerovnosti (5.16) pro libovolná čísla $x,y\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$. Nerovnosti pro součet sinů a pro součet kosinů plynou z identit

$$(\sin x+\sin y)-\left(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\left(x+y-\frac{\pi}{4}\right)\right)=4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{4}-x}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{4}-y}{2},$$

$$(\cos x+\cos y)-\left(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(x+y-\frac{\pi}{4}\right)\right)=4\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{4}-x}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{4}-y}{2},$$

o jejichž platnosti se lze nejlépe přesvědčit dosazením do pravých stran za součin druhého a třetího sinu podle vzorce

$$2\sin\frac{\frac{\pi}{4}-x}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{4}-y}{2}=\cos\frac{x-y}{2}-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x+y}{2}\right).$$

Podobně nerovnost v (5.16) pro součin kosinů plyne z identity

$$\cos x\cos y-\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(x+y-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right),$$

kterou lze dokázat úpravou obou stran na stejný výraz

$$\frac{\cos(x-y)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-(x+y)\right)}{2}.$$

Poslední nerovnost v (5.16) je důsledkem identit

$$\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y},\quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\left(x+y-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin(x+y)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(x+y-\frac{\pi}{4}\right)}$$

a již dokázané nerovnosti pro součin kosinů. Tím je náš výklad o nerovnostech z první tabulky nerovností pro vnitřní úhly ostroúhlých trojúhelníků ukončen.

Do druhé tabulky zařadíme odhady pro takové výrazy s funkcemi sinus a kosinus, které jsme v širším oboru $\mathscr{T}_+$ vůbec nezkoumali.

$\infty>$	$\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 2\beta}+\frac{1}{\sin 2\gamma}$	$\geq 2\sqrt{3}$	$\infty>$	$\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma}$	≥ 6
$\infty>$	$\frac{1}{\sin^2 2\alpha}+\frac{1}{\sin^2 2\beta}+\frac{1}{\sin^2 2\gamma}$	≥ 4	$\infty>$	$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}$	≥ 12
$0>$	$\sin 4\alpha+\sin 4\beta+\sin 4\gamma$	$\geq -\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$1>$	$\cos 4\alpha\cos 4\beta\cos 4\gamma$	$\geq -\frac{1}{8}$
$0<$	$\sin^2 4\alpha+\sin^2 4\beta+\sin^2 4\gamma$	$\leq \frac{9}{4}$	$3>$	$\cos^2 4\alpha+\cos^2 4\beta+\cos^2 4\gamma$	$\geq \frac{3}{4}$

Čtenář se opět může přesvědčit, že všechny odhady v právě uvedené tabulce plynou ze dříve odvozených odhadů v oboru $\mathscr{T}_+$; platí to i pro odhady „nových“ výrazů s funkcemi tangens a kotangens, ze kterých sestavíme následující tabulku.

$$
\begin{array}{|ll|}
\hline
\infty > \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\gamma \geq 9 & -\infty < \mathrm{cotg}\, 2\alpha + \mathrm{cotg}\, 2\beta + \mathrm{cotg}\, 2\gamma \leq -\sqrt{3} \\
\infty > \mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma \geq 3\sqrt{3} & 0 < \mathrm{cotg}\,\alpha\,\mathrm{cotg}\,\beta\,\mathrm{cotg}\,\gamma \leq \dfrac{\sqrt{3}}{9} \\
\infty > \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma \geq 3\sqrt{3} & \\
\hline
\end{array}
$$

Do poslední tabulky nerovností pro vnitřní úhly α, β, γ ostroúhlých trojúhelníků zařadíme odhady „nových“ součtů $f(\alpha)f(\beta) + f(\alpha)f(\gamma) + f(\beta)f(\gamma)$. Také tyto odhady jsou důsledky předchozích výsledků v oboru $\mathscr{T}_+$.

$$
\begin{array}{|rcl|}
\hline
0 < & \sin 2\alpha \sin 2\beta + \sin 2\alpha \sin 2\gamma + \sin 2\beta \sin 2\gamma & \leq \dfrac{9}{4} \\
\infty > & \dfrac{1}{\sin 2\alpha \sin 2\beta} + \dfrac{1}{\sin 2\alpha \sin 2\gamma} + \dfrac{1}{\sin 2\beta \sin 2\gamma} & \geq 4 \\
-1 < & \cos 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cos 2\gamma + \cos 2\beta \cos 2\gamma & \leq \dfrac{3}{4} \\
\infty > & \dfrac{1}{\cos\alpha \cos\beta} + \dfrac{1}{\cos\alpha \cos\gamma} + \dfrac{1}{\cos\beta \cos\gamma} & \geq 12 \\
\infty > & \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\gamma + \mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma & \geq 9 \\
\hline
\end{array}
$$

V předchozích třech částech této podkapitoly jsme se věnovali trigonometrickým nerovnostem obecně platným postupně v oborech $\mathscr{T}, \mathscr{T}_+$ a v oboru tvořeném trojicemi vnitřních úhlů všech ostroúhlých trojúhelníků. V závěrečné čtvrté části zaměříme pozornost na nerovnosti, které splňují výrazy s vnitřními úhly α, β, γ libovolného *tupoúhlého* trojúhelníku, tedy na nerovnosti obecně platné v oboru všech trojic (α, β, γ) určených podmínkami

$$\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi) \colon \alpha + \beta + \gamma = \pi \text{ a } \max(\alpha, \beta, \gamma) > \frac{\pi}{2}.$$

Tyto nerovnosti uvedeme rozdělené do dvou tabulek. První z nich bude obsahovat pouze takové nerovnosti, které tupoúhlé trojúhelníky přesně charakterizují, tedy nerovnosti, jež neplatí pro vnitřní úhly α, β, γ žádného ostroúhlého nebo pravoúhlého trojúhelníku. Do prvního řádku tabulky zapíšeme dvě nerovnosti, které tuto vlastnost zřejmě mají, všechny ostatní nerovnosti jsou jejich důsledky díky identitám odvozeným v podkapitole 5.1.

$$
\begin{array}{|cc|}
\hline
\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma < 0 & \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma < 0 \\
\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma > 1 & \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma < 2 \\
\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma > -1 & \sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma > 0 \\
\multicolumn{2}{|c|}{\cos\alpha \sin\beta \sin\gamma + \sin\alpha \cos\beta \sin\gamma + \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma < 1} \\
\multicolumn{2}{|c|}{\sin 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma + \cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\gamma + \cos 2\alpha \cos 2\beta \sin 2\gamma < 0} \\
\hline
\end{array}
$$

K dokázaným nerovnostem z předchozí tabulky, které charakterizují tupoúhlé trojúhelníky, dodejme, že pokud v nich zaměníme znaky nerovností znaky rovností, resp. znaky opačných nerovností, dostaneme rovnosti, resp. nerovnosti, které charakterizují pravoúhlé, resp. ostroúhlé trojúhelníky.

Rovněž do druhé tabulky, kterou nyní uvedeme, zařadíme nerovnosti, o kterých vzápětí ukážeme, že platí pro vnitřní úhly α, β, γ libovolného tupoúhlého trojúhelníku. Z našeho postupu však vyplyne, že tyto nerovnosti splňují i vnitřní úhly některých jiných trojúhelníků, například všech pravoúhlých trojúhelníků, jež nejsou rovnoramenné, a proto také i jistých ostroúhlých trojúhelníků. Nejsou to tedy nerovnosti, které by tupoúhlé trojúhelníky charakterizovaly.

$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma < 2$	$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma < \frac{1}{2}$
$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma < 1 + \sqrt{2}$	$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} < \frac{1+\sqrt{2}}{4}$
$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma < \sqrt{2}$	$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} < \frac{\sqrt{2}-1}{4}$

Protože v každém ze tří řádků jsou uvedeny dvě nerovnosti, které jsou podle první tabulky identit z podkapitoly 5.1 ekvivalentní, budeme dokazovat pouze nerovnosti pro součty z levého sloupce tabulky. S ohledem na symetrii můžeme o úhlech α, β, γ libovolně zvoleného tupoúhlého trojúhelníku předpokládat, že $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ a $\beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. První dokazovaná nerovnost je pak zřejmým důsledkem odhadů

$$\sin 2\alpha < 0, \quad \sin 2\beta \le 1 \quad \text{a} \quad \sin 2\gamma \le 1.$$

Ukážeme-li, že za našich předpokladů na úhly α, β, γ platí rovněž odhady

$$\sin\alpha + \sin\beta < 1 + \cos\gamma \quad \text{a} \quad \cos\alpha + \cos\beta < \sin\gamma, \tag{5.17}$$

vyplynou z nich zbylé dvě nerovnosti, jež máme dokázat, následujícím postupem:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma < 1 + \cos\gamma + \sin\gamma = 1 + \sqrt{2}\sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) \le 1 + \sqrt{2},$$
$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma < \sin\gamma + \cos\gamma = \sqrt{2}\sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}.$$

Zbývá tedy dokázat nerovnosti (5.17). Pro rozdíl stran první z nich platí

$$(1 + \cos\gamma) - (\sin\alpha + \sin\beta) = 1 - \cos(\alpha + \beta) - \sin\alpha - \sin\beta =$$
$$= 1 - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta - \sin\alpha - \sin\beta = (1 - \sin\alpha)(1 - \sin\beta) - \cos\alpha\cos\beta.$$

Poslední výraz má skutečně kladnou hodnotu, neboť z $0 < \beta < \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ plyne

$$1 - \sin\alpha > 0, \quad 1 - \sin\beta > 0, \quad \cos\alpha < 0 \quad \text{a} \quad \cos\beta > 0.$$

Rozdíl stran druhé nerovnosti z (5.17) má vyjádření

$$\sin\gamma - (\cos\alpha + \cos\beta) = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Protože $\sin\frac{\gamma}{2} > 0$, bude poslední výraz kladný, když ověříme, že pro ostré úhly $\frac{\gamma}{2}$ a $\frac{\alpha-\beta}{2}$ platí nerovnost

$$\frac{\gamma}{2} < \frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{neboli} \quad \gamma + \beta < \alpha.$$

To je však zřejmé, neboť $\alpha > \frac{\pi}{2}$ a $\gamma + \beta = \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$. Obě nerovnosti (5.17) jsou tedy dokázány. Protože v případě $\alpha = \frac{\pi}{2}$ platí vztahy (5.17) zřejmě jako rovnosti, platí i tehdy odvozené ostré nerovnosti z naší tabulky, není-li ovšem $\beta = \gamma = \frac{\pi}{4}$. Tímto konstatováním celé naše pojednání o trigonometrických nerovnostech končí.