Matematika ve staré Indii

7. Aritmetika

In: Irena Sýkorová (author): Matematika ve staré Indii. (Czech). Praha: Matfyzpress, Vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, 2016. pp. 115–198.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404226

7 ARITMETIKA

Aritmetiku staří Indové nazývali *pátíganita* (*pāṭī-gaṇita*); tento termín je odvozen z *pátí* (*pāṭī*), což znamená deska nebo tabulka, a *ganita* (*gaṇita*) neboli věda o počítání.[1] Název *pátíganita* můžeme přeložit jako věda o počítání, které využívá desku pro zapisování.[2] V nejstarších dobách se však číslice používaly pouze pro zápis čísel nebo dat, počítalo se pomocí mušliček *kauri*,[3] čísla se tedy nepsala, ale „pokládala“. Podobná situace byla i ve staré Číně, kde k počítání sloužily početní tyčinky.[4]

Indičtí počtáři používali mušličky dvojího druhu: podlouhlé *ankaráši* (*aṅka-rāśi*) sloužily k vyjádření číslic 1 až 9, kulaté *šúnjaráši* (*śūnya-rāśi*) označovaly nulu. Mušličky se pokládaly ve skupinkách, například číslo 52 077 bylo znázorněno následujícím způsobem, svislé čárky představují podlouhlé mušličky, kroužek kulatou:[5]

$$\begin{array}{ccccc} ||| & || & \bigcirc & ||| & ||| \\ || & & & ||| & ||| \\ & & & | & | \end{array}$$

Při sčítání dvou čísel se jeden sčítanec znázornil na počítací desce a druhého sčítance si počtář pamatoval, při výpočtu ještě musel znát doplněk každé číslice do deseti. Při vlastním výpočtu bylo nutné rozlišovat tři případy.

a) Když přičítaná číslice byla menší než doplněk odpovídající číslice znázorněné na desce, pak se na desku přidal potřebný počet mušliček.

b) Jestliže se přičítaná číslice rovnala doplňku, přidala se jedna podlouhlá mušlička do nejbližšího vyššího řádu a sčítané mušličky se odebraly a nahradily jednou kulatou.

c) Pokud byla přičítaná číslice větší než doplněk do deseti odpovídající číslice na desce, odebral se od mušliček doplněk do deseti přičítané číslice a přidala se jedna podlouhlá mušlička do nejbližšího vyššího řádu.

Podobně se provádělo i odčítání, využívaly se vzorce

$$a + b = a - (10 - b) + 10\,, \qquad\qquad a - b = a + (10 - b) - 10\,.$$

Násobení se převádělo na opakované sčítání, dělení na opakované odčítání.

Později, když už se běžně počítalo s čísly vyjádřenými v desítkové poziční soustavě, se tata čísla zapisovala do prachu rozprostřeného na desce nebo na

[1] Původ slova není sanskrtský, ale pochází z dialektů ze severní Indie. Sanskrtský název pro tabulku je *paṭṭa* nebo *phalaka*. Slovo *pāṭī* se v sanskrtské literatuře objevuje až v 7. století.

[2] Pro počítání se používaly dřevěné tabulky ještě v 19. století, protože papír byl vzácný.

[3] *Kauri* jsou ulity různých měkkýšů z čeledi *Cypraeidae*, které se používaly také jako platidlo. Jejich sanskrtský název je *varátaka* (*varāṭaka*).

[4] Počítání pomocí čínských početních tyčinek je popsáno např. v [Hu].

[5] Podle [Ju], str. 115.

zemi. Proto se provádění matematických výpočtů také někdy nazývalo *dhúlikarman* (*dhūli-karman*, tj. prachová práce). Někteří pozdější autoři používali i název *vjaktaganita* (*vyakta-gaṇita*, tj. věda o počítání se „známými"), na rozdíl od názvu pro algebru *avjaktaganita* (*avyakta-gaṇita*, tj. věda o počítání s „neznámými"). Termíny *pátíganita* a *dhúlikarman* byly přeloženy do arabštiny jako *věda o počítání na tabulce* (*ilm-hisāb-al-takht*) a *počítání na prachu* (*hisāb-al-ghobār*).

Podle Brahmagupty (7. stol.) staří Indové rozlišovali dvacet aritmetických operací nazývaných *parikarman* (*parikarman*) a k nim řadili osm tzv. určení neboli *vjavahára* (*vyavahāra*). Určení představovalo jakýsi postup či metodu, jak řešit úlohu daného typu, jak „určit" neznámou veličinu.

Brahmagupta uvedl:[6]

BrSpSi/xii.1
Ten, kdo jasně zná sčítání a další z dvaceti operací jednu po druhé a osm určení včetně měření pomocí stínů, je matematikem.

Mezi dvacet aritmetických operací patřilo:[7]

1. sčítání – *samkalita* (*saṃkalita*),
2. odčítání – *vjavakalita* (*vyavakalita*),
3. násobení – *gunana* (*guṇana*),
4. dělení – *bhágahára* (*bhāga-hāra*),
5. druhá mocnina – *varga* (*varga*),
6. druhá odmocnina – *vargamúla* (*varga-mūla*),
7. třetí mocnina – *ghana* (*ghana*),
8. třetí odmocnina – *ghanamúla* (*ghana-mūla*),

9.–13. pět pravidel pro zlomky – *paňča džáti* (*pañca jāti*),

14. pravidlo tří – *trairášika* (*trai-rāśika*),
15. obrácené pravidlo tří – *vjastatrairášika* (*vyasta-trai-rāśika*),
16. pravidlo pěti – *paňčarášika* (*pañca-rāśika*),
17. pravidlo sedmi – *saptarášika* (*sapta-rāśika*),
18. pravidlo devíti – *navarášika* (*nava-rāśika*),
19. pravidlo jedenácti – *ékádašarášika* (*ekādaśa-rāśika*),
20. výměnný obchod – *bhánda-prati-bhánda* (*bhāṇḍa-prati-bhāṇḍa*).

Osm určení zahrnovalo:

1. různé úlohy – *mišraka* (*miśraka*),
2. posloupnosti – *šrédhí* (*średhī*),
3. rovinné obrazce – *kšétra* (*kṣetra*),
4. výkopy – *kháta* (*khāta*),
5. zásoby – *čiti* (*citi*),
6. řezy – *krákačika* (*krākacika*),
7. hromady – *ráši* (*rāśi*),
8. stíny – *čhájá* (*chāyā*).

Prvních osm operací bylo považováno za základní. Operace zdvojování a půlení, které byly pokládány za základní v Egyptě a Řecku, se v indických po-

[6] Podle [Col], str. 277.
[7] Podle [DS1], str. 124.

jednáních nevyskytovaly. Tyto operace byly důležité hlavně tam, kde neznali poziční zápis čísel.

Zdroje

Matematické poznatky nebyly zpočátku sepisovány do samostatných knih, ale byly součástí astronomických prací známých pod názvem *siddhánty*, ty nejstarší však ještě matematické partie neobsahovaly. Árjabhata I. (6. stol.) byl první, kdo zahrnul do své astronomické práce *Árjabhatíja* dvě kapitoly o matematice. Následoval ho Brahmagupta (7. stol.) a později se stalo běžným zvykem zařazovat do astronomických pojednání matematické pasáže.[8] Bháskara I. (7. stol.) je autorem komentáře k matematické části práce *Árjabhatíja*.

Nejstarší dostupné práce, které se téměř výhradně věnují aritmetice, jsou anonymní rukopis *Bakhšálí* (asi 7. stol.),[9] *Ganitasárasamgraha* (Mahávíra, 9. stol.),[10] *Trišatiká*, *Pátíganita* (Šrídhara, 10. stol.),[11] částečně se aritmetikou zabývá *Bráhmasphutasiddhánta* (Brahmagupta, 7. stol.).[12] Pozdější aritmetická díla jsou *Ganitatilaka* (Šrípati, 11. stol.),[13] *Lílávatí* (Bháskara II., 12. stol.),[14] *Ganitakaumudí* (Nárájana, 14. stol.).[15] Tato díla obsahují pravidla pro dvacet operací a osm určení, která jsou někdy doplněna příklady k ilustraci vyslovených pravidel.

Výklad a studium

V Indii byl výstižný a stručný výklad, zejména ve vědeckých pojednáních, vysoce ceněn. Indické práce byly psány velmi úsporně, obsahovaly jen známé vzorce a výsledky, někdy byla přílišná stručnost až na úkor srozumitelnosti. Zejména starší práce, například *Árjabhatíja*, jsou napsány ve velmi zhuštěné podobě, proto k nim později vznikaly různé komentáře.[16] Obliba stručného vyjadřování byla způsobena především nedostatkem psacího materiálu.

Vzdělání poskytovaly bráhmanské školy nebo buddhistické kláštery. Studium bylo založeno na ústní tradici, proto obvykle trvalo až dvanáct let. Základní vzdělání bráhmana vyžadovalo znalost filozofie, rétoriky, gramatiky, poetiky a literatury, ovšem jen málokterý student zvládl předepsanou látku v plném rozsahu. Z řad bráhmanů, kteří se věnovali studiu určitého oboru mnoho let, pak vyrůstali učitelé. V guptovské říši se staly centrem vzdělanosti hinduistické chrámy, v některých z nich byly i školy vyššího stupně. Nejznámější byly

---

[8] Např. *Mahásiddhánta* (950) nebo *Siddhántašekhara* (1036).

[9] Sanskrtský text doplněný anglickým překladem a komentáři je v knihách [Kay1], [Kay2], [Ha1].

[10] Sanskrtský text doplněný anglickým překladem a komentáři je v knize [Ran].

[11] Sanskrtský text s anglickým překladem obsahuje [Shu1].

[12] Anglický překlad včetně starých komentářů je uveden v [Col].

[13] Sanskrtský text s anglickým překladem obsahuje [KaHR].

[14] Anglický překlad včetně starých komentářů je uveden v [Col].

[15] Sanskrtský text s anglickým překladem obsahuje [DvP].

[16] Přehled komentátorů a jejich komentářů je uveden např. v [Ke2].

v Takšašile, Uddždžajiní a Váránasí. V budhistických klášterech bylo možno získat vzdělání nejen náboženské, ale i světské. Největší proslulost získala koncem 4. stol. n. l. buddhistická univerzita při klášteru v Nálandě poblíž Pátaliputry. Studenti za vzdělání neplatili, kláštery byly podporovány panovníky. Ke studiu se hlásilo mnoho adeptů z celé Indie i cizích zemí, kteří museli zvládnout obtížné přijímací zkoušky. Univerzita poskytovala vzdělání v mnoha oborech, bylo možno studovat například filozofii, literaturu, lékařství, matematiku.

Mladý člověk, který chtěl studovat aritmetiku, tj. zvládnout počítání na desce, se musel nejprve naučit nazpaměť všechna pravidla potřebná při řešení příkladů. Společně s každým krokem výpočtu opakoval příslušné pravidlo. Učitel dohlížel a pomáhal studentovi, když udělal chybu. Jakmile student získal dostatečnou zručnost a zvládl všechny příklady obsažené ve studovaném textu, předložil mu učitel další. Každý dobrý učitel měl zásoby příkladů odstupňovaných podle obtížnosti. Teprve na tomto stupni si student začínal uvědomovat podstatu každého problému a rozumět pravidlům, která se na začátku naučil. Nakonec učitel zkoušel žáka z nejobtížnějších úloh a vzorců. Výuka byla podle indické tradice založena na memorování. Student, který nedokončil celé studium, většinou neznal nic víc, než pouhé mechanické aplikování vzorců.[17] Jen málo učitelů zvládlo provést žáky všemi stupni výuky a člověk, který měl opravdový zájem o studium, musel jít do nějakého centra vzdělanosti nebo k nějakému slavnému učenci.

Výpočty se prováděly na desce pokryté prachem, čísla se zapisovala do prachu prstem nebo dřevěným rydlem. K psaní na desku se někdy používal i kousek steatitu[18] nebo křídy tzv. *pándu-lekha* (*pāṇḍu-lekha*). Napsaných čísel se na desku vešlo málo, proto bylo běžné mazat ty části výpočtu, které už nebyly potřebné, a tím uvolnit místo na další kroky výpočtu.

Studium matematiky bylo obtížné, rozumělo jí jen velmi málo lidí, přesto znalost vyšší matematiky nepřinášela materiální zisk. Jistou znalost matematiky a astronomie však vyžadovaly náboženské zvyky. Navíc vždy existovala třída lidí, kteří se věnovali věštění. Tito astrologové potřebovali určité znalosti matematiky a astronomie, aby svými vědomostmi mohli učinit dojem na své posluchače. Občas se některý z jejich žáků začal o matematiku zajímat více, usiloval o důkladné porozumění předmětu, začal psát nezávislá pojednání nebo komentáře ke starším textům.

V době zahraničních invazí, vnitřních konfliktů, špatné vlády a z toho vyplývající nejistoty byl zájem o studium matematiky, ostatních věd i umění poměrně malý. Od 13. století vznikalo v Indii velmi málo původních prací, byly však psány komentáře ke starším spisům. Nejvýznamnější byly stále práce Bháskary II. (12. stol.), které jako učebnice ovlivnily devět století.

[17] Detaily o studiu matematiky pocházejí z různých komentářů, například Ganéšova, viz [Bag3].

[18] Steatit je druh mastku.

Symbolika aritmetických operací

V rukopisu *Bakhšálí* neexistovaly žádné speciální symboly pro základní aritmetické operace, ty byly vyjádřeny jen zkratkami: *yu* (*yuta*, tj. přičtený), *gu* (*guṇa* nebo *guṇita*, tj. násobený), *bhā* (*bhāga* nebo *bhājita*, tj. dělený). Zvláštností rukopisu je výskyt symbolu +, který znamenal, že se mělo odečíst číslo stojící před tímto znaménkem.[19] Pro ilustraci uvedeme některé příklady:[20]

$$\begin{array}{|ccc|} 11 & yu & 5 \\ 1 & & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{znamenalo} \quad 11+5$$

$$\begin{array}{|ccccccccc|} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 10 & gu \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ \hline \end{array} \quad \text{znamenalo} \quad 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 10$$

$$\begin{array}{|ccccc|c|} 1 & 1 & 1 & 1 & bh\bar{a} & 36 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ 2+ & 3 & 4+ & 5 & & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{znamenalo} \quad \frac{36}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1+\frac{1}{5})}$$

Později byl symbol pro odčítání vyjádřen tečkou nebo malým kroužkem umístěným nad číslem, například $\dot{5}$ nebo $\mathring{5}$, pro ostatní operace žádné symboly neexistovaly, čísla nebo výrazy se zapisovaly vedle sebe.

7.1 Operace s nulou

V úvodu aritmetických textů bývaly definovány názvy desítkových řádů a uvedena pravidla pro operace s nulou. Nejstarší zmínka o sčítání a odčítání s nulou je v astronomické práci *Paňčasiddhántiká* (počátek 6. stol.), většina aritmetických operací s nulou je poprvé uvedena v komentáři Bháskary I. k *Árjabhatíje* (7. stol.), později je popisovali i další autoři.[21] Sčítání, odčítání a násobení bylo definováno stejně jako počítáme dnes, dělení však zpočátku působilo problémy.

$$a+0=0+a=a\,, \qquad a-0=a\,, \qquad a-a=0\,,$$
$$a\cdot 0=0\cdot a=0\,, \qquad 0:a=0\,.$$

[19] A. Hoernle odvozoval znaménko „+" ze starého symbolu pro *ka*, zkratku slova *kanita* (zmenšený), Diofantos pak podle obráceného písmena ψ, viz [Kay1]. B. Datta předpokládal, že symbol může být odvozen ze zkratky *kṣa* (*kṣaya*, tj. odečtený), viz [DS2].

[20] Folio 59 recto, viz [Kay2], str. 215, folio 47 recto, viz [Kay2], str. 229 a folio 13 verso, viz [Kay2], str. 204.

[21] Podle [DS1].

Mahávíra uvedl pro počítání s nulou toto pravidlo:[22]

> **GaSaSa/i.49**
> *Číslo násobené nulou je nula,* [číslo] *zůstane nezměněné, je-li dělené, sloučené nebo zmenšené nulou. Násobení a jiné operace ve spojení s nulou* [způsobí] *nulu; a při operaci sčítání nula se stane tím, co k ní je přidáno.*

Zdá se, že Mahávíra definoval chybně $a : 0 = a$. Dělení nulou indickým učencům působilo potíže, například Brahmagupta tvrdil, že nula dělená nulou je nula,[23] většinou však považovali dělení nulou za nemožné. Bháskara II. v práci *Lílávatí* tvrdil, že číslo dělené nulou je veličina, která se nemění, když k ní přičteme nebo odečteme nějaké číslo, v práci *Bídžaganita* své tvrzení ještě upřesnil:[24]

> **BiGa/i.14** (část)
> *Veličina dělená nulou je zlomek, jehož jmenovatelem je nula.*

K tomu komentátor Kršna v 17. stol. připojil vysvětlující poznámku, že tak, jak se dělitel zmenšuje, tak se podíl zvětšuje, až je nedefinovaně velký, nekonečný. V tomto zdůvodnění můžeme vidět náznak limitního přechodu

$$\lim_{x\to 0} \frac{a}{x} = \infty\,,$$

což společně s předchozím tvrzením z *Lílávatí* můžeme vnímat jako

$$\frac{a}{0} \pm b = \frac{a}{0}\,, \qquad \text{resp.} \qquad \infty \pm b = \infty\,.$$

Problém $0 : 0$, resp. $\frac{0}{0}$ však nedokázali indičtí učenci uspokojivě vysvětlit.

Za základní byly považovány operace sčítání, odčítání, násobení, dělení, výpočet druhé mocniny a odmocniny, výpočet třetí mocniny a odmocniny. Ne v každém textu však byly popsány všechny. Sčítání a odčítání bylo v aritmetických dílech zmiňováno jen okrajově nebo vůbec ne, některá díla obsahovala názvy různých metod násobení, ale vlastní metody byly často popsány jen velmi stručně. Složitější operace, jako metoda dělení stejně jako metody na výpočet druhé mocniny a odmocniny i třetí mocniny a odmocniny, byly uvedeny ve většině textů.

---

[22] Podle [Ran], str. 6–7. Podobná pravidla uvedli i další autoři, např. Šrídhara PaGa/21, podle [Shu1], str. 7, nebo Bháskara II. Lila/ii.44–45, podle [Col], str. 19, BiGa/i.16, podle [Col], str. 136–138.

[23] Viz sloky BrSpSi/xviii.31–36, podle [Col], str. 339.

[24] Podle [Col], str. 137.

Indičtí matematikové si velmi brzy uvědomili, že všechny matematické operace jsou odvozené ze sčítání a odčítání. Bháskara I. tvrdil:[25]

> *Všechny aritmetické operace jsou rozdělené do dvou skupin, i když se většinou uvažují čtyři* [sčítání, odčítání, násobení, dělení]. *Dvě základní skupiny jsou zvětšování a zmenšování. Sčítání je zvětšování a odčítání je zmenšování. Tyto dva druhy operací prostupují celou matematiku. Předchozí učitelé říkali: „Násobení a umocňování jsou zvláštní druhy sčítání, dělení a odmocňování jsou zvláštní druhy odčítání. Skutečně, každá matematická operace se skládá ze zvětšování a zmenšování.“ Mělo by se vědět, že celá ta věda se opravdu skládá jen z těchto dvou skupin.*

Stará indická aritmetika počítala s nezápornými celými čísly a se zlomky. Operace se zápornými čísly a výpočty kvadratických iracionalit bývaly řazeny do algebry.

7.2 Sčítání

Indický název pro sčítání byl *samkalita* (dané dohromady). Další užívané termíny pro sčítání byly například *samkalana*, *mišrana*, *sammélana*, *samjódžana*, *ékíkarana*, *jukti*, *jóga*.[26] Někteří pozdější autoři užívali název *samkalita* v obecném smyslu jako součet posloupnosti. Ve všech matematických a astronomických dílech byla znalost sčítání pokládána za samozřejmost. Árjabhata II. v práci *Mahásiddhánta* definoval sčítání takto:[27]

> **MaSi/xiv.2** (část)
> *Vytváření jednoho z několika čísel je sčítání.*

Velmi stručné zmínky jsou v některých pozdějších dílech. Bháskara II. uvedl:[28]

> **Lila/ii.12**
> *Součet čísel podle jejich míst je získán podle přímého nebo obráceného pravidla; nebo* [v případě odčítání] *jejich rozdíl.*

Přímý způsob

Při přímém způsobu, tzv. *krama* (*krama*), se postupovalo zprava doleva, algoritmus sčítání tedy začínal od jednotek. Čísla se zapsala jedno pod druhé tak,

---

[25] Z jeho komentáře k práci *Árjabhatíja*, podle [DS1], str. 130.

[26] *Saṃkalana* (dávání dohromady), *miśraṇa* (směšování), *sammelana* (smíchání dohromady), *saṃyojana* (spojování dohromady), *ekī-karaṇa* (dávání do jednoho), *yukti* (spojování), *yoga* (slučování). Poslední termín pro sčítání se uváděl pouze v *šulbasútrách*. Později vyjadřoval násobení.

[27] Podle [DS1], str. 130, [DvS], str. 14.

[28] Podle [Col], str 5.

aby jednotky všech čísel byly pod sebou, poslední číslo bylo podtržené linkou, pod ní se zapisoval součet, stejně jako dnes při písemném sčítání. Nejprve se pod linku zapsal součet číslic na místě jednotek, tím se získala číslice na místě jednotek celkového součtu. Pak se sečetly číslice na místě desítek, jejich součet se přičetl k číslici na místě desítek v částečném součtu pod linkou a výsledkem se tato číslice nahradila. Tak se získala číslice na místě desítek celkového součtu atd.

V jiné metodě se nahoru zapsal největší sčítanec a jeho číslice se postupně přepisovaly příslušnými číslicemi součtu.

Na příkladu $65 + 58 = 123$ jsou porovnány oba způsoby zápisu jednotlivých kroků:

65	65	65	nebo	65	73	123
<u>58</u>	<u>58</u>	<u>58</u>		58	58	58
	13	123				

Obrácený způsob

Obrácený způsob, tzv. *utkrama* (*utkrama*), probíhal zleva doprava, sčítání začínalo na místě nejvyššího řádu. V tomto případě se nejprve sečetly číslice nejvyšších řádů a výsledek se zapsal pod ně, tj. pod nejvyšší řád. Postupně následoval součet dalších, nižších řádů. Když bylo potřeba, částečné součty se opravily.

Příklad $65 + 58 = 123$ je nyní řešen obráceným způsobem:

65	65	65	nebo	65	115	123
<u>58</u>	<u>58</u>	<u>58</u>		58	58	58
	11	123				

Komentátor Gangádhara (Gaṅgādhara) v 15. stol. napsal:[29]

> *Podle pravidla číslice rostou* [podle hodnoty] *směrem doleva, sčítání nejprve jednotek je přímá metoda, sčítání nejprve číslic na posledním místě je obrácená metoda.*

Poznamenejme, že Arabové oddělovali jednotlivé řády svislými čarami, ale Indové nikoli.

7.3 Odčítání

Pro odčítání se užívaly názvy *vjavakalita*, *vjavakalana*, *šódhana*, *patana*, *vijóga* atd.[30] Výsledku se říkalo *šéša* (*śeṣa*, tj. zbytek) nebo *antara* (*antara*, tj. rozdíl). Menšenec se nazýval *sarvadhana* (*sarva-dhana*) nebo *vijódžja* (*viyojya*) a menšiteli se říkalo *šódhaka* (*śodhaka*) nebo *vijódžaka* (*viyojaka*).

[29] Podle [DS1], str. 131.

[30] *Vyavakalita* (oddělené), *vyavakalana* (oddělování), *śodhana* (čištění), *patana* (snižování), *viyoga* (rozdělení) atd.

Árjabhata II. podal tuto definici odčítání:[31]

MaSi/xiv.2 (část)
Odstranění [nějakého čísla] *z sarvadhana* [celkového počtu] *je odčítání; to, co zůstane, se nazývá śeṣa* [zbytek].

Odčítat se mohlo opět přímým nebo obráceným způsobem.

Přímý způsob

Při odčítání přímým způsobem se pod menšence zapsal menšitel tak, aby jednotky obou čísel byly pod sebou. Číslice menšence se postupně mazaly a nahrazovaly číslicemi rozdílu. Odčítat se začalo tím, že se od jednotek menšence odečetly jednotky menšitele, rozdílem se přepsaly jednotky menšence. Stejně se postupovalo dál směrem k nejvyššímu řádu. Jestliže číslice menšence byla menší než odpovídající číslice menšitele, „ubrala“ se jedna desítka následujícího řádu menšence, která se „přidala“ k číslici na nižším řádu, aby odečtení mohlo být provedeno.

Obrácený způsob

Obrácený způsob byl podobný, jediný rozdíl byl v tom, že se začínalo od místa nejvyššího řádu menšitele. Pokud to bylo nutné, částečné rozdíly se opravovaly. Tento postup byl vhodný pro počítání na desce, kde se čísla snadno mazala a přepisovala. Obrácený postup se v Indii běžně používal a byl považován za snadnější než přímý.

Na příkladu $10000-360=9640$ je porovnání přímého a obráceného způsobu:

přímý způsob:	10000	9940	9640
	360	360	360
obrácený způsob:	10000	9700	9640
	360	360	360

Následující příklad je od Bháskary II., uvádíme jej i s autorovým řešením.[32]

Lila/ii.13
Příklad. Krásná bystrá Lílávatí, jsi-li znalá sčítání a odčítání, řekni mi součet dvou, pěti, třiceti dvou, sto devadesáti tří, osmnácti, deseti a sta daných dohromady; a zbytek, když jejich součet je odečtený od deseti tisíc.

Vyjádření, 2, 5, 32, 193, 18, 10, 100.
[Odpověď.] *Výsledek sčítání,* 360.

Vyjádření pro odčítání, 10000, 360.
[Odpověď.] *Výsledek odčítání,* 9640.

[31] Podle [DS1], str. 132, [DvS], str. 14.
[32] Podle [Col], str. 5.

V díle *Manóraňdžana* (*Mano-rañjana*; 15. stol.), komentáři práce *Lílávatí*, je vysvětlen proces sčítání podle jednotlivých řádů, což byl postup použitelný pro přímý i obrácený způsob:[33]

Součet jednotek:	2,5,2,3,8,0,0	20
Součet desítek:	3,9,1,1,0	14
Součet stovek:	1,0,0,1	2
Součet součtů:		360

Súrjadása (Sūryadāsa) ve svém komentáři k *Lílávatí* vysvětloval odčítání na příkladu $1000 - 360$:[34]

> *Proto odčítání je přímé, šest nemůže být odečteno od nuly na místě desítek, tak vezmi deset a odečti šest, zbytek* [čtyři] *se zapíše nad* [šest] *a deset se odečte od následujícího místa. Protože řády jednotky, desítky atd. jsou násobky deseti, tak číslice menšitele, která se nemůže odečíst od odpovídající pozice menšence, se odečte od deseti, vezme se zbytek a deset se odečte od následující pozice. V tomto způsobu se ta desítka bere až k poslednímu místu, dokud není vyčerpaná poslední číslice. Jinými slovy čísla do devíti zabírají jedno místo, rozlišování pozic začíná od deseti. Takže je známé, „kolik desítek je v daném čísle“, proto čísla, která se nemohou odečíst od své pozice, se odečtou od následující desítky a vezme se zbytek.*

7.4 Násobení

Běžně užívaný indický název pro násobení byl *gunana*, tento výraz se objevil už ve védských dílech. Existovaly i další názvy, například *hanana*, *vadha*, *kšaja* (*hanana*, *vadha*, *kṣaya*), které znamenaly zabíjení nebo ničení. Tyto názvy se objevily později se vznikem nových metod a desítkovým pozičním zápisem: činitel – násobenec se postupně „ničil“ a na jeho místa se zapisovaly číslice součinu.[35]

V *šulbasútrách* se užíval výraz *abhjása* (*abhyāsa*) pro sčítání i násobení. To svědčí o tom, že v té době představoval proces násobení opakované sčítání. V rukopisu *Bakhšálí* se užíval pro násobení název *parasparakrtam* (*parasparakṛtaṃ*, tj. dávání dohromady). Starověká terminologie ukazuje, že násobení bylo „opakované sčítání činitele – násobence tolikrát, kolik byl činitel – násobitel“. Násobenec se nazýval *gunja* (*guṇya*), násobitel *gunaka* (*guṇaka*) nebo *gunakára* (*guṇa-kāra*), součin *gháta* (*ghāta*) nebo *pratjutpanna* (*pratyutpanna*). Tyto pojmy se vyskytovaly ve všech indických dílech.

V Indii existovalo několik různých způsobů násobení – metoda dveřního pantu, metoda křížového násobení a ještě několik metod, kde se násobilo číslem

[33] Podle [Col], str. 5.
[34] Podle [DS1], str. 133.
[35] Staré indické metody násobení jsou porovnány v článku [Sy1].

rozděleným na části. Mezi tyto metody se řadily metoda násobení oddělením míst a jí velmi podobná metoda nazývaná cikcak, metoda násobení po částech a algebraická metoda.

Árjabhata I. nezmiňoval žádné běžné metody násobení, pravděpodobně je považoval za příliš elementární a všeobecně dobře známé. Brahmagupta vynechal běžně užívanou metodu dveřního pantu, Šrídhara a Mahávíra popsali metodu křížového násobení, metodu dveřního pantu, násobení po částech, a násobení oddělením míst. Bháskara II. kromě těchto čtyř metod uvedl ještě algebraickou metodu, Árjabhata II. vysvětlil pouze obvyklou metodu dveřního pantu.

7.4.1 Metoda dveřního pantu

Sanskrtský název metody je *kapátasamdhi* (*kapāṭa-saṃdhi*).[36] Tuto metodu popsali Šrídhara, Árjabhata II., Šrípati i někteří pozdější autoři.

Šrípati v práci *Siddhántašekhara* uvedl:[37]

> *Umísti násobence pod násobitele jako v pantu dveří a násob postupně* [číslice násobence] *posouváním* [násobitele] *v přímém nebo obráceném pořadí.*

Přímý způsob

Tato metoda nebyla příliš oblíbená, poslední, kdo se o ní zmiňoval, byl Šrípati v 11. století. Postup popíšeme na příkladu $435 \cdot 12 = 5220$.[38] Výpočet trochu připomíná dnešní písemné násobení, ale za násobitele bylo považováno horní číslo. Násobenec 435 se zapsal na desku pod násobitele 12 tak, aby jednotky násobence byly pod nejvyšším řádem násobitele. První číslice násobence, tj. 5, se postupně násobila oběma číslicemi násobitele od jednotek: $5 \cdot 2 = 10$, přitom se 0 zapsala pod 2 a 1 se zapamatovala,[39] pak se násobilo $5 \cdot 1 = 5$, k součinu se přičetla zapamatovaná 1, tedy dohromady 6. A protože číslo 5 už nebylo dál potřebné, smazalo se a na uvolněné místo se zapsala 6. Nyní se násobitel posunul o jedno místo doleva a násobila se další číslice násobence, tj. 3: nejprve $3 \cdot 2 = 6$, číslo 6 se přičetlo k 6 zapsané pod 2, součet je 12. Číslo 6 se nahradilo 2 a 1 se zapamatovala, pak $3 \cdot 1 = 3$, k tomu se přičetla zapamatovaná 1, tedy $3+1 = 4$, číslo 3 se smazalo a na jeho místo se zapsala 4. Násobitel se opět posunul o místo doleva. Následoval poslední krok násobení, $4 \cdot 2 = 8$, $8 + 4 = 12$, číslo 4 se nahradilo číslem 2 a 1 se zapamatovala, pak

[36] Slovo *kapáta* (*kapāṭa*) znamená dveře a *samdhi* (*saṃdhi*) můžeme přeložit jako závěs.

[37] Podle [DS1], str. 137.

[38] Pro jednodušší popis budeme místo termínu činitel rozlišovat násobence, tj. násobené číslo, a násobitele, tj. číslo, kterým se násobilo. V příkladu $435 \cdot 12$ je 435 násobencem a 12 násobitelem.

[39] Začátečníci si pravděpodobně poznamenávali tato čísla na jiné místo desky.

$4 \cdot 1 = 4$ a $4 + 1 = 5$, tato 5 se zapsala vlevo od 2. Nakonec se smazala i 12 a na desce zůstal pouze výsledek 5220. Na desce se tak postupně objevovaly tyto výpočty:

12	1**2**	**1**2	12	1**2**	**1**2	12	1**2**	**1**2	
43**5**	4350	4360	4**3**60	4320	4420	**4**420	4220	5220	5220

V předchozím postupu byla čísla 12 a 435 „zničena“ a číslo 5220 „vzniklo“ (*pratyutpanna*). Proto se termín *pratyutpanna* někdy používal pro součin.

Posun násobitele měl dva důvody:

a) Levá číslice násobitele stála nad tou číslicí násobence, která se právě násobila.
b) Dílčí součin se přičítal k číslici násobence umístěné pod číslicí násobitele, kterou se právě násobilo.

Někdy součin přesahoval za poslední číslici násobitele. V takovém případě se poslední číslice částečného součinu zapsala samostatně. Začátečníci se často dopouštěli chyb v tom, že špatně přičetli stranou poznačená čísla nebo smazali nesprávnou číslici násobence. Proto dostával přednost obrácený způsob.

Obrácený způsob

Existovaly dva typy obráceného způsobu. V prvním typu byla čísla zapsána pod sebou tak, že nejvyšší řád násobence byl pod jednotkami násobitele. Číslice násobence se začínaly násobit zleva číslicemi násobitele zprava, tedy ve stejném příkladu $435 \cdot 12$ se nejprve vynásobilo $4 \cdot 2 = 8$, číslo 4 se smazalo a nahradilo 8, pak $4 \cdot 1 = 4$, číslo 4 se zapsalo pod jedničku. Násobitel 12 se posunul o jedno místo doprava, aby se mohla násobit další číslice násobence – trojka. Tedy $3 \cdot 2 = 6$, číslo 3 se smazalo a na jeho místo se zapsala 6, pak $3 \cdot 1 = 3$ a tato 3 se musela přičíst k číslici pod jedničkou: $3 + 8 = 11$, proto ještě $4 + 1 = 5$. Číslo 48 se tedy nahradilo číslem 51 a opět následoval posun násobitele. Nakonec se násobila zbývající číslice násobence, tj. pětka. Tedy $5 \cdot 2 = 10$, číslo 5 se nahradilo číslem 0, 1 se zapamatovala, pak $5 \cdot 1 = 5$, $5 + 1 = 6$ a $6 + 16 = 22$, číslo 16 se nahradilo číslem 22. Tím se získal výsledek 5220. Jednotlivé mezivýpočty za sebou následovaly takto:

12	1**2**	**1**2	12	1**2**	**1**2	12	1**2**	**1**2	
435	835	4835	48**3**5	4865	5165	516**5**	5160	5220	5220

Druhý způsob se lišil tím, že se začínalo násobit číslicemi násobitele zprava. Čísla se zapsala pod sebe stejně jako v minulém příkladu a násobilo se nejprve $4 \cdot 1 = 4$, součin se zapsal pod 1, potom $4 \cdot 2 = 8$, číslo 8 nahradilo původní 4 a násobitel se posunul o pozici vpravo. Dál se násobila trojka $3 \cdot 1 = 3$ a $3 + 48 = 51$, číslo 48 se smazalo a nahradilo číslem 51, pak $3 \cdot 2 = 6$, číslo 3 v násobenci bylo nahrazeno číslem 6 a znovu se posunul násobitel. Jako poslední se násobila pětka, $5 \cdot 1 = 5$, $5 + 16 = 21$, číslo 16 se nahradilo číslem 21, nakonec $5 \cdot 2 = 10$, místo čísla 5 se zapsala 0 a ještě se musela k řádu desítek přičíst 1.

Tak se vypočítal výsledek 5220. Sled jednotlivých kroků je uveden v následující tabulce:

12	**1**2	1**2**	12	**1**2	1**2**	12	**1**2	1**2**	
435	4435	4835	48**3**5	5135	5165	516**5**	5215	5220	5220

Protože číslice násobence se postupně přepisovaly a násobitel se na konci výpočtu smazal, zůstal na desce jen výsledek. Při násobení s postupným mazáním mezivýsledků byla kontrola výpočtu velmi obtížná.

Takovéto násobení převzali Arabové, kteří se učili desítkovou aritmetiku od Indů. Popisoval ji například al-Chvárizmí nebo perský matematik al-Nasawi (asi 1010 až 1075).[40] Protože však psali na papír, číslice místo mazání škrtali. Následující příklad je z práce al-Nasawiho, který výpočet nazýval „indická metoda“.[41]

Příklad. Násob 435 · 12.

$$\begin{array}{cccc}
 & & 2 & \\
 & 2 & \cancel{1} & \\
5 & \cancel{1} & \cancel{5} & 0 \\
\cancel{4} & \cancel{3} & \underline{\cancel{1}} & \underline{\cancel{2}} \\
\underline{\cancel{4}} & \underline{\cancel{3}} & \underline{\cancel{5}} & \cancel{5} \\
 & \cancel{4} & \cancel{3} &
\end{array}$$

Součin je 5220.

K metodě *kapátasamdhi* přiřadil Ganéša v 16. století ještě další algoritmus násobení.[42] Postup výpočtu byl popsán takto:[43]

> [Sestav] *tolik přihrádek, kolik míst má násobenec a pod sebou tolikrát, kolik míst má násobitel. Šikmo rozděl první, spodní a všechny ostatní* [přihrádky]. *Násob každé místo násobence místy násobitele* [která jsou] *jedno pod druhým a polož výsledky do přihrádek. Součet, který se vezme šikmo po obou stranách šikmých čar, je součin. To je kapátasamdhi.*

Metoda spočívala v tom, že se nakreslila obdélníková tabulka, ve které počet sloupců byl roven počtu číslic násobence a počet řádků byl stejný jako počet číslic násobitele. Každé políčko se navíc rozdělilo úhlopříčkou. Nad tabulku se zleva doprava zapsal násobenec, vpravo svisle shora dolů násobitel. Násobila se každá číslice násobence s každou číslicí násobitele a výsledky se zapisovaly do příslušných políček (do pravé dolní poloviny jednotky, do levé horní desítky). Nakonec se sečetla čísla v šikmých sloupcích (podél úhlopříček) a zapsala dolů

[40] Vlastním jménem Alī ibn Aḥmad al-Nasawi.

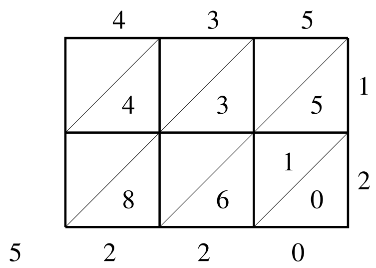
[41] Podle [DS1], str. 143.

[42] Existují však jisté pochybnosti, zda uvedený způsob výpočtu pochází skutečně z Indie, protože už ve 13. stol. jej používali Arabové.

[43] Podle [DS1], str. 145.

pod tabulku. Pokud byl součet v šikmém sloupci větší než deset, příslušný počet desítek se připočetl k následujícímu sloupci. Číslo pod tabulkou dávalo výsledný součin.

Výpočet $435 \cdot 12 = 5220$ je dobře vidět z obrázku.



Násobení podle tohoto postupu bylo jednoduché a názorné. Vzhledem k přehlednosti celého zápisu byla i kontrola výpočtu snadná. Ve středověké Itálii byl tento algoritmus známý pod názvem *gelosia* (žárlivost) nebo jako *násobení ve čtvercích* (viz [BeM1]).

7.4.2 Metoda křížového násobení

Tento postup popsali Šrídhara, Mahávíra, Šrípati i někteří pozdější autoři jako metodu *tatstha* (*tat-stha*). Je to metoda, v níž násobitel i násobenec zůstávali na místě, neposunovali se. Násobitel se zapsal pod násobence tak, aby jednotky obou čísel byly nad sebou. Jako první se násobily jednotky násobitele a násobence a součin se zapsal pod ně, resp. se zapsaly jen jednotky součinu a desítky se přenesly. Pak se násobily jednotky násobence desítkami násobitele a desítky násobence jednotkami násobitele, výsledky se sečetly a zapsaly dolů. Dále se násobily stovky jednotkami, desítky desítkami, jednotky stovkami, sečetly se a zapsaly do řádku dole. Takto se pokračovalo i se zbývajícími číslicemi. Ve spodním řádku pak byl uveden součin.

násobí se:		435
		12
jednotky:	$5 \cdot 2 = 10$	0
desítky:	$3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 1 = 12$	2
stovky:	$4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 = 12$	2
tisíce:	$4 \cdot 1 + 1 = 5$	5
výsledek:		5220

Tuto metodu znali indičtí učenci už v 8. století. Přes Arábii se dostala do Evropy, kde se objevila například ve známé knize *Suma*, kterou sepsal italský matematik Luca Pacioli (1445 – 1517). Byla považována za důmyslnější a lepší než ostatní metody.

7.4.3 Násobení oddělením míst

Tato metoda je známá jako metoda *sthánavibhága* (*sthāna-vibhāga*) nebo *sthánakhanda* (*sthāna-khaṇḍa*). Objevovala se ve všech dílech od 7. stol. n. l.

Metoda spočívala v tom, že se jeden z činitelů (násobenec nebo násobitel) rozdělil na jednotlivé číslice. Každá z nich se pak násobila druhým činitelem a vzniklé dílčí součiny se nakonec sečetly.

Používaly se různé způsoby zápisu, uvedeme tři:[44]

$$
\begin{array}{lll}
435 \\
12 \\
\hline
48 \\
36 \\
60 \\
\hline
5220
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
12\ \ 12\ \ 12 \\
4\ \ \ 3\ \ \ 5 \\
\hline
4860 \\
36 \\
\hline
5220
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
435\quad 435 \\
1\quad 2 \\
\hline
870 \\
435 \\
\hline
5220
\end{array}
$$

7.4.4 Metoda cikcak

Tato metoda se ve středověké Indii nazývala *gómútriká* (*go-mūtrikā*). Je velmi podobná metodě *sthánakhanda*. Brahmagupta ve svém dodatku k matematické části práce *Bráhmasphutasiddhánta* napsal:[45]

> **BrSpSi/xii.55**
> *Násobenec se opakuje tak dlouho, dokud jsou číslice v násobiteli, jedna po druhé se násobí a* [výsledky] *sečtou dohromady* [podle pozic]; *to dává součin. Nebo se násobenec opakuje tolikrát, kolik částí je v násobiteli.*

Komentátor Brahmaguptovy práce Prthúdakasvámin vysvětlil popsanou metodu na příkladu $235 \cdot 288 = 67\,680$. Násobenec 235 se zapsal pod sebou tolikrát, kolik pozic měl násobitel, v našem příkladu třikrát. Do každého řádku se vedle násobence zapsala jedna číslice násobitele vždy posunutá podle řádu. Číslo v prvním řádku se násobilo dvěma, začínalo se na místě jednotek: $5 \cdot 2 = 10$, číslo 0 se zapsalo, dále $3 \cdot 2 = 6$ a $6 + 1 = 7$, zapsala se 7, nakonec $2 \cdot 2 = 4$, zapsala se 4. Pak se stejným způsobem násobilo v dalších řádcích. Čísla v posledním sloupci pod sebou se nakonec sečetla.

$$
\begin{array}{l|l|l}
235 & 2 & 470 \\
235 & \ \ 8 & 1880 \\
235 & \ \ \ \ 8 & \underline{\ 1880} \\
 & & 67680
\end{array}
$$

Trochu jiný zápis je uveden v [DS1]. Čísla se zapsala pod sebe podobným způsobem. Tentokrát se však pod sebe do prvního sloupce umístily jednotlivé

[44] Podle Gangádharova komentáře k *Lílávatí*, viz [Col], str. 7, [DS1], str. 147.

[45] Podle [Col], str. 319.

číslice násobitele. Ke každé číslici se do druhého sloupce připojil násobenec, který byl v každém řádku posunutý o řád doprava. Čísla v každém řádku se násobila stejně jako v předchozím případě, ale dílčím součinem se přepsal násobenec. Nakonec se součiny v posledním sloupci sečetly:

2	235	2	470
8	235	8	1880
8	235	8	1880
			67680

Metody *sthánakhanda* a *gómútriká* se podobají moderním metodám násobení.

7.4.5 Metoda násobení po částech

Této metodě se říkalo *rúpavibhága* (*rūpa-vibhāga*), zmiňovaly se o ní všechny práce od 7. stol. n. l.

Existovaly dva způsoby:

a) Násobitel se rozdělil na součet dvou nebo více částí. Násobencem se pak násobila každá z nich zvlášť a výsledky se sečetly:

$$135 \cdot 12 = 135 \cdot (4 + 8) = (135 \cdot 4) + (135 \cdot 8) = 540 + 1\,080 = 1\,620\,.$$

Násobitel se však mohl rozdělit i na více částí. Například násobitel v součinu $235 \cdot 288$ se vyjádří jako $9 + 8 + 151 + 120$:[46]

235	9	2 115
235	8	1 880
235	151	35 485
235	120	28 200
		67 680

b) Násobitel se rozdělil na součin dvou nebo více částí. Násobencem se násobila jedna z nich, získaný součin se pak násobil další částí atd., dokud se nevyčerpaly všechny:

$$135 \cdot 12 = 135 \cdot (4 \cdot 3) = (135 \cdot 4) \cdot 3 = 540 \cdot 3 = 1\,620$$

$$235 \cdot 288 = 235 \cdot (9 \cdot 8 \cdot 4) = (235 \cdot 9) \cdot 8 \cdot 4 = (2\,115 \cdot 8) \cdot 4 = 16\,920 \cdot 4 = 67\,680\,.$$

Z uvedených algoritmů je patrné, že si Indové uvědomovali asociativitu násobení a distributivitu násobení vůči sčítání a využívali je.

Tuto metodu od Indů převzali Arabové a později i Italové. Italové ji nazývali *scapezzo* nebo *repiego* (viz [BeM1]).

[46] Viz komentář Prthúdakasvámina, podle [Col], str. 319.

7.4.6 Algebraická metoda

Tato metoda byla známá jako *ištagunana* (*iṣṭa-guṇana*). Popsal ji například Brahmagupta nebo Bháskara II. Uvedeme popis Brahmagupty.[47]

> **BrSpSi/x.56**:
> *Násobenec se násobí součtem nebo rozdílem násobitele a libovolné hodnoty a od výsledku se součin té libovolné hodnoty a násobence odečte nebo přičte.*

Existovaly dva způsoby podle toho, zda se vhodné číslo přičítalo nebo odčítalo. To vhodné číslo se volilo tak, aby násobení bylo jednodušší.

Oba způsoby jsou ukázány v následujícím příkladu $135 \cdot 12 = 1\,620$.

a) Násobitel se zvětšil:

$$135 \cdot 12 = 135 \cdot (12 + 8) - 135 \cdot 8 = 2\,700 - 1\,080 = 1\,620\,,$$

b) násobitel se zmenšil:

$$135 \cdot 12 = 135 \cdot (12 - 2) + 135 \cdot 2 = 1\,350 + 270 = 1\,62\,.$$

Tuto metodu také převzali Arabové, rozšířila se i do Evropy.

Bháskara II. ve své práci *Lílávatí* věnoval násobení dvě a půl sloky:[48]

> **Lila/ii.14–15**
> *Pravidlo násobení; dvě a půl sloky.*
> *Násob poslední číslici* [nejvyšší řád] *násobence násobitelem a pak předposlední a pak zbytek opakováním stejného. Nebo ať násobenec opakovaný podle různých částí násobitele se násobí těmi částmi: a součiny se sečtou dohromady. Nebo násobitele vyděl nějakým číslem, které je jeho dělitelem, vynásob násobence tímto číslem a pak podílem, výsledek je součinem. Toto jsou dvě metody rozdělení podle typu. Nebo vynásob odděleně podle pozic číslic a sečti součiny dohromady. Nebo vynásob násobitelem zmenšeným nebo zvětšeným o libovolně vybranou hodnotu; přičti nebo odečti součin násobence vynásobený tou hodnotou.*

Hned za pravidlo autor připojil následující vyřešený příklad:[49]

> **Lila/ii.16**
> *Příklad. Krásná a drahá Lílávatí, která máš oči jako koloušek, řekni mi, co jsou výsledná čísla ze sto třiceti pěti násobených dvanácti? Jsi-li znalá násobení celkem nebo po částech, zda rozdělením podle typu nebo oddělením číslic. Řekni mi, nadějná ženo, co je podíl dělený stejným násobitelem?*

---

[47] Podle [Col], str. 156.
[48] Podle [Col], str. 5–6.
[49] Podle [Col], str. 6–7.

Vyjádření, Násobenec 135, *Násobitel* 12.
Součin (násobením číslic násobence postupně násobitelem) 1 620.
Nebo rozdělením násobitele na části, jako 8 *a* 4*; a jednotlivým násobením násobence; sečtením součinů dohromady: výsledek je stejný* 1 620.
Nebo násobitele 12 *vyděl třemi, podíl je* 4*; tím a* 3 *postupně násob násobence, poslední součin je stejný* 1 620.
Nebo vezmi číslice po částech, jmenovitě 1 *a* 2*; násobence násob jimi odděleně, a součiny sečti dohromady, podle pozic číslic, výsledek je stejný* 1 620.

Nebo násobence násob násobitelem zmenšeným o dva, jmenovitě 10*, a přičti dvojnásobek násobence, výsledek je stejný* 1 620.
Nebo násobence násob násobitelem zvětšeným o osm, jmenovitě 20*, a osmkrát násobence odečti, výsledek je stejný* 1 620.

První postup popisuje metodu *kapátasamdhi* (metodu dveřního pantu). Neuvádělo se, zda se má užít přímý nebo obrácený způsob. Druhý a třetí návod je pro metodu *rúpavibhága* (násobení po částech). Čtvrté řešení je podle metody *sthánavibhága* (násobení oddělením míst). Pátý a šestý způsob se týká metody *ištagunana* (algebraické metoda).

Na ukázku připojíme ještě dva příklady na násobení, které uvádí Mahávíra.[50]

GaSaSa/ii.4
Sto třicet devět drahokamů musí být věnováno při obřadu v jednom džinistickém chrámu. Řekni, kolik drahokamů [musí být tak darováno] *ve* 109 *chrámech.*

GaSaSa/ii.9
V tomto [problému] *zapiš číslo* 157 683 *a násob je devíti a pak mi řekni, příteli, hodnotu* [výsledného] *množství.*

7.5 Dělení

Indické názvy pro operaci dělení byly *bhágahára*, *bhádžana*, *čhédana* (*bhāgahāra*, *bhājana*, *chedana*). Všechny tyto výrazy znamenají „rozdělit na části“. Někdy se užíval i název *haraṇa* (*haraṇa*), jehož význam je „odebrat“. Z názvů je patrná i podobnost dělení a odčítání. Dělenec se nazýval *bhádžja* (*bhājya*) nebo *hárja* (*hārya*). Dělitel byl *bhádžaka* (*bhājaka*), *bhágahara* (*bhāgahara*) nebo krátce *hara*. Podílu se říkalo *labdhi* nebo *labdha* (*labdhi*, *labdha*, tj. obdržené).

Evropští učenci ještě v 15. a 16. století považovali dělení za obtížné, únavné a pracné, ale v Indii tuto operaci nepokládali za těžkou. Árjabhata I. ve své práci *Árjabhatíja* nezmiňoval žádnou metodu dělení, přestože uváděl postupy

[50] Podle [Ran], str. 10. Číslo 139 je v prvním příkladu vyjádřeno jako $40 + (100 - 1)$. Více o tom, jak se ve staré Indii vyjadřovala čísla, je v 6. kapitole.

na výpočet druhé a třetí odmocniny, které dělení využívaly. Dělení zřejmě považoval za elementární.

V Indii zpočátku používali metodu odstraňování společných činitelů, dnešní krácení, která je popsána už v džinistických dílech. Popsal ji i Mahávíra, a to pravděpodobně pro srovnání, protože již znal modernější metody.[51]

GaSaSa/ii.18
Napiš dělence a pod něj dělitele a pak, při provádění dělení metodou odstraňování společných činitelů, dostaneš výsledek [podíl].

Moderní metoda dělení nebyla v rukopisu *Bakhšálí* nalezena, i když se jméno operace vyskytuje na několika místech. To může být dáno tím, že většina textu byla zničena. Je pravděpodobné, že metoda dělení už v této době (asi 7. stol.) byla známá.

7.5.1 Metoda dlouhého dělení

V Indii se běžně používala tzv. metoda dlouhého dělení. Před tím, než se operace začala provádět, bylo zvykem čísla zkrátit. Metoda dlouhého dělení odpovídá naší metodě písemného dělení, jen grafická úprava byla trochu odlišná. Moderní metoda dělení byla vysvětlena v mnoha dílech o aritmetice. Mahávíra dělení popsal stručně:[52]

GaSaSa/ii.19
Dělenec by měl být dělen [obráceným způsobem] *dělitelem umístěným pod ním, po provedení operace odstranění společných činitelů, je-li to možné.*

Bháskara II. uvedl podobné tvrzení.[53]

Lila/ii.17
Pravidlo dělení. Jedna sloka.
Číslo, kterým vynásobený dělitel vyrovná poslední číslici dělence [a tak dál], *je podílem při dělení: nebo pokud je možné, nejprve zkrať oba, dělitele a dělence, stejným číslem a přikroč k dělení.*

[Příklad.] *Vyjádření čísla vytvořeného násobením v předchozím příkladu a jeho násobitele pro dělitele: Dělenec* 1 620. [Dělitel 12.] *Podíl* 135*; shodný s původním násobencem.*

Nebo oba, dělenec a dělitel, zkrácené do nejmenšího tvaru společnou mírou tři, jsou 540 *a* 4*; nebo společnou mírou čtyři, se stanou* 405 *a* 3*. Dělení příslušnými zkrácenými děliteli, výsledek je stejný,* 135.

[51] Podle [Ran], str. 12.
[52] Podle [Ran], str. 12.
[53] Podle [Col], str. 8.

Bháskara II. si byl dobře vědom toho, že násobení a dělení jsou navzájem inverzní operace, v uvedeném příkladu na to upozornil a využil stejné numerické hodnoty jako v předchozí úloze na násobení.

Podrobněji popsal metodu Árjabhata II. v práci *Mahásiddhánta*:[54]

> **MaSi/xiv.4–5**
> *Dělení prováděj tak, že položíš dělitele pod dělence; odečteš* [od posledních číslic dělence] *vhodný násobek dělitele; ten* [násobek] *je částí podílu, pak posuň dělitele, děl, co zbývá atd.*

Metodu popíšeme na Bháskarově příkladu, 1 620 : 12 = 135.[55] Dělitel se zapsal pod dělence tak, aby pod sebou byly levé číslice. Dělení začínalo od číslic dělence, která byla nad dělitelem, tj. číslo 16 se dělilo dělitelem 12. Podíl 1 se zapsal na zvláštní linku, tzv. „linku podílu“, číslo 16 se smazalo a nahradilo zbytkem 4. Pak se dělitel posunul o jedno místo doprava a celý proces se opakoval, postupně se na desce vyskytovaly následující mezivýsledky. Citované části Bháskarova pravidla jsou zapsány italikou.

___	1620	*položíš dělitele pod dělence* tak,
	12	aby levé číslice byly pod sebou
1	1620	[16 : 12 = 1 (zb. 4)]
	12	podíl 1 se zapsal na linku podílu
1	420	*odečteš vhodný násobek dělitele*
	12	číslo 16 se nahradilo zbytkem dělení
1	420	*posuň dělitele*
	12	
13	420	[42 : 12 = 3 (zb. 6)]
	12	podíl 3 se zapsal na linku podílu
13	60	*odečteš vhodný násobek dělitele*
	12	číslo 42 se nahradilo zbytkem dělení
13	60	*posuň dělitele*
	12	
135	60	[60 : 12 = 5 (zb. 0)]
	12	podíl 5 se zapsal na linku podílu
135		*odečteš vhodný násobek dělitele*
	12	číslo 60 se smazalo, dělilo se beze zbytku

[54] Podle [DS1], str. 152, [DvS], str. 14.

[55] Viz sloka Lila/ii.17 a připojený komentář *Manóraňdžana*, podle [Col], str. 8, [MaVM].

Za zmínku stojí i Bháskarova poznámka o krácení – upozornil na skutečnost, že místo 1 620 : 12 se může dělit 540 : 4 nebo 405 : 3.

Tato metoda se objevila v Indii asi ve 4. století n. l., možná i dříve. Z Indie se rozšířila do arabského světa, vyskytuje se v arabských dílech z 9. století. Odtud se dostala do Evropy, kde byla známá jako metoda *galea* nebo *batello*. V evropské variantě se čísla získaná z jednotlivých kroků postupně zapisovala a škrtala, protože se psalo na papír, kde se nemohlo snadno mazat. Tato metoda byla v Evropě velmi oblíbená v 15. až 18. století.

Předchozí příklad by podle metody *galea* vypadal takto:

		$\cancel{1}$		$\cancel{1}\cancel{1}$	
4		$\cancel{4}6$		$\cancel{4}\cancel{6}$	
$\cancel{1}\cancel{6}20$	1	$\cancel{1}\cancel{6}\cancel{2}0$	13	$\cancel{1}\cancel{6}\cancel{2}\cancel{0}$	135
$\cancel{1}\cancel{2}2$		$\cancel{1}\cancel{2}\cancel{2}2$		$\cancel{1}\cancel{2}\cancel{2}\cancel{2}$	
1		$\cancel{1}1$		$\cancel{1}\cancel{1}$	

Pro zajímavost uvedeme ještě dva příklady na dělení, které předložil Mahávíra.[56]

> **GaSaSa/ii.21**
> *Řekni mi podíl jedné osoby, když* 2 701 *kusů zlata je rozděleno mezi* 37 *osob.*
>
> **GaSaSa/ii.26**
> *Drahokamy v množství* 36 261 *jsou darovány* 9 *osobám* [stejným dílem]*. Kolik dostane jedna osoba?*

Dělení bývalo ve starověku a středověku považováno za velmi obtížnou operaci, například mezopotámští počtáři složitější dělení $a : b$ nahrazovali násobením převrácenou hodnotou $a \cdot \frac{1}{b}$ a používali k tomu tabulky s uvedenými převrácenými hodnotami. Staří Egypťané si uvědomovali, že dělení a násobení jsou inverzní operace, a dělení prováděli postupným zdvojnásobováním dělitele, dokud z vhodných násobků nesložili dělence.

Dělení posouváním dělitele se vyskytuje rovněž v dílech al-Chwárizmího, al-Nasawiho a dalších. Ve středověkých latinských dílech se tento způsob nazýval *antirioratio*.

V Evropě popsal základní operace s celými čísly například Jordanus Nemorarius (asi 1225 až 1260)[57] a Jan Sacrobosco.

---

[56] Ve druhém příkladu bylo číslo 36 261 vyjádřeno jako 30 000 + 1 + (60 + 200 + 6 000), podle [Ran], str. 12.

[57] Známý také jako Jordanus de Nemore.

7.6 Druhá mocnina

Sanskrtský název druhé mocniny je *varga* nebo *krti* (*kṛti*). Slovo *varga* znamená „řady“ nebo „vojsko“. Význam slova *varga* je jasný z grafického znázornění čtverce $n \times n$, který může být rozdělen do n řad, z nichž každá obsahuje n jednotkových čtverců. Slovo *krti* znamená „činnost, vytváření, akce“ a souvisí s představou přesného provedení, pravděpodobně geometrické konstrukce.

V matematice byla tímto termínem označována druhá mocnina nebo čtverec jako geometrický obrazec i jeho plocha. Árjabhata I. napsal:[58]

> **Ar/ii.3** (část)
> *Čtverec a jeho plocha se nazývají varga. Součin dvou stejných veličin je také varga.*

V matematických pojednáních se užívaly oba termíny *varga* i *krti*, ale přednost se dávala termínu *varga*.

Výpočet druhé mocniny byl základní operací v indické aritmetice, a to přesto, že tato metoda není jednodušší než přímé násobení. Pravděpodobně její důležitost souvisela s tím, že výpočet druhé odmocniny je inverzní operací k výpočtu druhé mocniny. Brahmagupta popsal metodu velmi stručně, nikoli však v kapitole o aritmetice, ale až v dodatku.

Před vysvětlením postupu umocňování připomeneme, že jednotlivé číslice v daném čísle se „počítaly“ zprava doleva; poslední číslice byla ta, která stála co nejvíc vlevo, tedy číslice na místě nejvyššího řádu.

Mahávíra popsal umocňování takto:[59]

> **GaSaSa/ii.31**
> *Vezmi čtverec poslední číslice a pak násob tu poslední* [číslici], *potom co je zdvojnásobená a posunutá* [doprava o jedno místo], *zbývajícími místy. Každou ze zbývajících číslic posuň* [o jedno místo] *a zacházej s ní podobně. To je metoda umocňování.*

Bháskara II. uvedl:[60]

> **Lila/ii.18–19** (část)
> *Pravidlo pro druhou mocninu veličiny: dvě sloky. Násobení dvou stejných čísel je druhá mocnina. Umísti čtverec poslední* [číslice] *nad ni a pak součin dvojnásobku poslední* [číslice] *a ostatních* [tj. zbývajících] *nad ně. Pak posuň číslo bez poslední číslice a opakuj postup.*

Postup výpočtu vycházel ze vzorce

$$
\begin{aligned}
&& (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\,, \\
\text{resp.} && [a+(b+c)]^2 &= a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 \qquad (7.1)\\
\text{nebo} && [(a+b)+c]^2 &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2\,.
\end{aligned}
$$

---

[58] Podle [Cla], str. 21.
[59] Podle [Ran], str. 14.
[60] Podle [Col], str. 8–9.

Výpočet druhé mocniny předvedeme na příkladu $125^2 = 15\,625$.[61] Důsledné zapisování odpovídajících řádů pod sebou umožňovalo vynechávat nuly, které by se v dalších krocích výpočtu stejně nahrazovaly jinými číslicemi. Citované části Bháskarova pravidla jsou zapsány italikou.

125	zapiš číslo
1 125	$[1^2 = 1]$ *umísti čtverec poslední číslice nad ni*
1 25 2	 číslice 1 se smazala, její dvojnásobek se zapsal pod zbývající $[2 \cdot 1 = 2]$
150 25	$[2 \cdot 25 = 50, \quad 100 + 50 = 150]$ *součin dvojnásobku poslední číslice a ostatních*
150 25	 *posuň číslo bez poslední číslice*

Tím bylo dokončeno první kolo operací, dál se pokračovalo stejným způsobem.

154 25	$[2^2 = 4, \quad 150 + 4 = 154]$ *umísti čtverec poslední číslice nad ni*
154 5 4	 číslice 2 se smazala, její dvojnásobek se zapsal pod zbývající $[2 \cdot 2 = 4]$
1560 5	$[4 \cdot 5 = 20, \quad 1\,540 + 20 = 1\,560]$ *součin dvojnásobku poslední číslice a ostatních*
1560 5	 *posuň číslo bez poslední číslice*

Skončilo druhé kolo operací, dál se postupovalo stejně.

15625 5	$[5^2 = 25, \quad 15\,600 + 25 = 15\,625]$ *umísti čtverec poslední číslice nad ni*

Protože už nezbývaly žádné číslice, výpočet skončil. Nakonec se smazala i poslední číslice 5 a na desce zůstala pouze hledaná druhá mocnina: $15\,625$.

Další metody umocňování

a) Někteří autoři základní vzorec $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ zobecnili pro více

[61] Podle [DS1], str. 157–159.

sčítanců, při výpočtu tedy využívali vztah

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} 2\, a_i\, a_j\,.$$

Mahávíra popisuje umocňování takto:[62]

GaSaSa/ii.30
Součet čtverců dvou nebo více částí čísla dohromady s jejich součiny každého s ostatními násobenými dvěma dává čtverec.

V originále je uvedeno slovo *sthána* (*sthāna*), které bývalo užíváno ve smyslu „pozice zápisu" při vyjádření čísla v poziční desítkové soustavě. Pozdější komentátor je přeložil jako „část". Například číslo 125 může být rozděleno na části jako $125 = 100 + 20 + 5$ nebo jako $125 = 50 + 40 + 35$ a v obou případech lze aplikovat uvedené pravidlo. Platí:

$$\begin{aligned} 125^2 &= 100^2 + 20^2 + 5^2 + 2 \cdot 100 \cdot 20 + 2 \cdot 100 \cdot 5 + 2 \cdot 20 \cdot 5 = \\ &= 10\,000 + 400 + 25 + 4\,000 + 1\,000 + 200 = 15\,625 \end{aligned}$$

stejně jako

$$\begin{aligned} 125^2 &= 50^2 + 40^2 + 35^2 + 2 \cdot 50 \cdot 40 + 2 \cdot 50 \cdot 35 + 2 \cdot 40 \cdot 35 = \\ &= 2\,500 + 1\,600 + 1\,225 + 4\,000 + 3\,500 + 2\,800 = 15\,625\,. \end{aligned}$$

Není tedy podstatné, zda je slovo *sthána* chápáno jako „pozice" nebo jako „část".[63]

b) Někdy indičtí matematikové nabízeli k umocňování ještě další metodu založenou na identitě

$$n^2 = (n - a)(n + a) + a^2\,.$$

Brahmagupta popsal postup takto:[64]

BrSpSi/xii.63 (část)
Nebo libovolné číslo přičti a odečti od množství, součin součtu a rozdílu přidaný ke čtverci toho libovolného čísla je požadovaný čtverec.

Libovolné číslo se zvolilo tak šikovně, aby se součin $(n - a)(n + a)$ snadno vypočítal. Například 25^2 je možné počítat tak, že se zvolí číslo 5 a podle uvedeného postupu se počítá $25^2 = (25 + 5) \cdot (25 - 5) + 5^2 = 30 \cdot 20 + 25 = 625$.

[62] Podle [Ran], str. 13.
[63] Podle [DS1], str. 161.
[64] Podle [Col], str. 363.

Uvedeme ještě jeden Bháskarův vyřešený příklad:[65]

Lila/ii.20
Příklad. Řekni mi, drahá ženo, druhé mocniny devíti, čtrnácti, tří set bez tří a deset tisíc zvětšených o pět, znáš-li metodu počítání druhé mocniny.

Vyjádření: 9, 14, 297, 10 005.

[Odpověď.] *Postup přímý, druhé mocniny jsou nalezeny:* 81, 196, 88 209, 100 100 025.

Nebo vezmi 4 *a* 5*, části devíti. Jejich zdvojnásobený součin* 40*, sečtený s jejich druhými mocninami* 41*, vytvoří* 81*.*

Tak vezmi 10 *a* 4*, části čtrnácti. Jejich součin je* 40*, zdvojnásobený je* 80*; což, přičtené k* 116*, součtu druhých mocnin* 100 *a* 16*, vytvoří celou druhou mocninu* 196.

Nebo vezmi 6 *a* 8*. Jejich součin je* 48*, zdvojnásobený je* 96*; což přičtené k součtu druhých mocnin* 36 *a* 64*, jmenovitě* 100*, vytvoří totéž* 196.

Opět, 297*, zmenšené o tři je* 294 *a na jiném místě zvětšené o totéž je* 300*. Jejich součin je* 88 200*; k němu přičtená druhá mocnina tří, tj.* 9*, součet je stejný jako před tím druhá mocnina* 88 209.

Kromě přímého umocňování použil autor při řešení i další dříve uvedené metody:

$$\begin{aligned}
9^2 &= (4+5)^2 = 4^2 + 5^2 + 2\cdot 4\cdot 5 = 16 + 25 + 40 = 41 + 40 = 81\,,\\
14^2 &= (10+4)^2 = 10^2 + 4^2 + 2\cdot 10\cdot 4 = 100 + 16 + 80 = 196\,,\\
14^2 &= (6+8)^2 = 6^2 + 8^2 + 2\cdot 6\cdot 8 = 36 + 64 + 96 = 196\,,\\
297^2 &= (297-3)(297+3) + 3^2 = 294\cdot 300 + 9 = 88\,200 + 9 = 88\,209\,.
\end{aligned}$$

c) Mahávíra a Šrídhara popsali také výpočet n^2 pomocí součtu prvních n lichých čísel

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1)\,.$$

Jejich tvrzení byla velmi podobná, uvedeme jen Mahávírovo:[66]

GaSaSa/ii.29 (část)
Nebo součet aritmetické posloupnosti, ve které jednička je první člen a dvojka je diference, a počet členů je tolik [co se umocňuje]*, dává požadovaný čtverec.*

---

[65] Podle [Col], str. 9.
[66] Podle [Ran], str. 13.

d) Nárájana pro nalezení druhé mocniny čísla A ještě přidal vyjádření pomocí vzorce[67]

$$A^2 = (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab\,.$$

Tyto postupy byly používány pouze pro výpočet druhých mocnin přirozených čísel. Metody na umocňování zlomků byly popsány v kapitolách věnovaných počítání se zlomky.

7.7 Druhá odmocnina

Indové odmocninu nazývali *múla* (*mūla*) nebo *pada*. Běžný význam slova *múla* je kořen rostliny nebo stromu, přeneseně se užívalo ve smyslu spodek, základ, příčina, počátek. Slovo *pada* znamená dolní část nohy, spodek, základ, část, příčina. Společný význam obou je tedy spodek nebo základ, příčina, počátek. Je zřejmé, že Indové termínem *vargamúla* (druhá odmocnina) označovali „příčinu“ či „původ“ druhé mocniny nebo geometricky stranu uvažovaného čtverce.

Nejstarší výraz pro kořen je *mūla*, který se vyskytoval už v díle *Anujógadvárasútra*. Termín *pada* se objevil později, asi v 7. stol. n. l. V *šulbasútrách* se pro druhou odmocninu užíval výraz *karaní*, který v geometrii znamenal „strana“. Později se tento termín vyhradil pro označení iracionality, tj. druhé odmocniny, která „nemůže být vyčíslena“, ale lze ji vyjádřit úsečkou.

Při výpočtu druhé odmocniny se jednotlivé číslice daného čísla rozdělily podle pozic na *varga* (liché) a *avarga* (sudé). Rozdělení probíhalo zprava doleva; jednotky byly vždy na liché pozici. Árjabhata I. formuloval výpočet velmi stručně:[68]

> **Ar/ii.4**
> *Vždy vyděl avarga* [sudé místo] *dvojnásobkem druhé odmocniny* [až k sudému místu]; *po odečtení čtverce* [podílu] *od varga* [lichého místa], *podíl zapsaný na jiném místě* [na lince kořene] *dává kořen.*

Výpočet druhé odmocniny popisovali Mahávíra, Šrídhara a Šrípati. Bháskara II. uvedl:[69]

> **Lila/ii.21**
> *Pravidlo pro druhou odmocninu: jedna sloka.*
> *Odečti od posledního lichého místa největší čtverec. Zapiš dvojnásobek jeho kořene* [na linku kořene] *a po vydělení dalšího sudého místa tímto odečti čtverec podílu od dalšího lichého místa a zapiš dvojnásobek podílu na linku. Vyděl* [číslem na lince] *další sudé místo a odečti čtverec podílu od následujícího lichého a zapiš dvojnásobek podílu na linku. Takto opakuj operace* [dokud číslice nebudou vyčerpané]. *Polovina* [čísla na lince] *je kořen.*

[67] Podle [DS1], str. 162.

[68] Podle [Cla], str. 22.

[69] Podle [Col], str. 9–10. Na lince je podle Bháskary dvojnásobek kořene, zatímco podle Árjabhatova mírně modifikovaného postupu je tam přímo kořen.

Na příkladu $\sqrt{54\,756} = 234$ ukážeme postup výpočtu.

linka	výpočet	popis
	| – | – |	
	5 4 7 5 6	zapsalo se číslo, označily sudé (–) a liché (|) pozice
	– 4	*odečti od posledního lichého místa největší čtverec*
	1	tj. největší čtverec menší než 5 $[5 - 2^2 = 1]$
4		*zapiš dvojnásobek jeho kořene na linku* $[2 \cdot 2 = 4]$
	1 4	*vyděl další sudé místo tímto* [14 : 4 = 3 (zb. 2)]
	– 1 2	odečetl se součin $[4 \cdot 3 = 12]$
	2	tj. číslo 14 se nahradilo zbytkem dělení 2
		podíl 3 se poznamenal na jiném místě tabulky
	2 7	připojila se číslice na další liché pozici
	– 9	*odečti čtverec podílu od dalšího lichého místa*
	1 8	$[27 - 3^2 = 18]$
46		*zapiš dvojnásobek podílu na linku* $[2 \cdot 3 = 6]$
		dokončeno první kolo operací
	1 8 5	*vyděl další sudé místo tímto* [185 : 46 = 4 (zb. 1)]
	– 1 8 4	odečetl se součin $[4 \cdot 46 = 184]$
	1	tj. číslo 185 se nahradilo zbytkem dělení 1
		podíl 4 se poznamenal na jiném místě tabulky
	1 6	připojila se číslice na další liché pozici
	– 1 6	*odečti čtverec podílu od dalšího lichého místa*
	0	$[16 - 4^2 = 0]$
468		*zapiš dvojnásobek podílu na linku* $[2 \cdot 4 = 8]$

Nakonec se vzala polovina čísla na lince, to byl hledaný kořen: 468 : 2 = 234.

Tento způsob odmocňování je založen na vzorci (7.1), konkrétně v našem příkladu

$$\begin{aligned}234^2 &= [(200+30)+4]^2 = (200+30)^2 + 2\cdot(200+30)\cdot 4 + 4^2 = \\ &= 200^2 + 2\cdot 200\cdot 30 + 30^2 + 2\cdot 230\cdot 4 + 4^2 = \\ &= 40\,000 + 12\,000 + 900 + 1\,840 + 16\,.\end{aligned}$$

V některých případech může algoritmus selhat – když je zbytek po dělení malý, může vycházet rozdíl záporný. Potom je nutné počítat znovu a při „problematickém" dělení vzít menší podíl a větší zbytek. Problém se ukáže například při výpočtu $\sqrt{61\,504} = 248$.

linka	výpočet	popis
	| – | – |	
	6 1 5 0 4	zapsalo se číslo, označily sudé (–) a liché (|) pozice
	– 4	*odečti od posledního lichého místa největší čtverec*
	2	$[6 - 2^2 = 2]$
4		*zapiš dvojnásobek jeho kořene na linku* $[2 \cdot 2 = 4]$
	2 1	*vyděl další sudé místo tímto* [21 : 4 = 5 (zb. 1)]
	1	číslo 21 se nahradilo zbytkem dělení 1
	1 5	připojila se číslice na další liché pozici
	– 2 5	*odečti čtverec podílu od dalšího lichého místa*

Rozdíl je záporný, podíl 5 byl příliš velký, proto je potřeba se vrátit k dělení a uvažovat 21 : 4 = 4 (zb. 5).

<table>
<tr><td></td><td></td><td>|</td><td>−</td><td>|</td><td>−</td><td>|</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>6</td><td>1</td><td>5</td><td>0</td><td>4</td><td>zapsalo se číslo, označily sudé (−) a liché (|) pozice</td></tr>
<tr><td></td><td>−</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>odečti od posledního lichého místa největší čtverec</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>[$6 - 2^2 = 2$]</td></tr>
<tr><td><u>4</u></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>zapiš dvojnásobek jeho kořene na linku [$2 \cdot 2 = 4$]</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>2</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>vyděl další sudé místo tímto [21 : 4 = 4 (zb. 5)]</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td>číslo 21 se nahradilo zbytkem dělení 5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>5</td><td>5</td><td></td><td></td><td>připojila se číslice na další liché pozici</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>−</td><td>1</td><td>6</td><td></td><td></td><td>odečti čtverec podílu od dalšího lichého místa</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>3</td><td>9</td><td></td><td></td><td>[$55 - 4^2 = 39$]</td></tr>
<tr><td><u>48</u></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>zapiš dvojnásobek podílu na linku [$2 \cdot 4 = 8$]</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>dokončeno první kolo operací</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>3</td><td>9</td><td>0</td><td></td><td>vyděl další sudé místo tímto [390 : 48 = 8 (zb. 6)]</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>6</td><td></td><td>číslo 390 se nahradilo zbytkem dělení 6</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>6</td><td>4</td><td>připojila se číslice na další liché pozici</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>−</td><td>6</td><td>4</td><td>odečti čtverec podílu od dalšího lichého místa</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>0</td><td>[$64 - 8^2 = 0$]</td></tr>
<tr><td><u>496</u></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>zapiš dvojnásobek podílu na linku [$2 \cdot 8 = 16$]</td></tr>
</table>

Hledaná odmocnina byla polovinou čísla na lince, tj. 496 : 2 = 248.

Nejstarším historicky doloženým algoritmem výpočtu druhé odmocniny je čínská metoda, která je popsána například ve 4. kapitole textu *Matematika v devíti kapitolách* (viz [Hu]). Úloha byla chápána geometricky, prováděl se „rozklad čtverce“, tj. hledala se strana čtverce, jehož obsah byl znám. Metoda byla založena na vzorci $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, při výpočtu se však používala lineární substituce a využíval se vztah $ax^2 + bx = (ax + b)x$, který byl později využíván v tzv. Hornerově schématu. Podobným způsobem popsal výpočet odmocnin i al-Káší. V řecké literatuře je výpočet druhé odmocniny popsán v komentáři Theóna z Alexandrie (asi 335 až 405) k Ptolemaiově astronomické práci *Almagest*.

V Evropě se objevil výpočet druhé odmocniny v podobné podobě jako indický, například v dílech rakouského matematika Georga von Peuerbacha (1423 – 1461) a francouzských matematiků N. Chuqueta a Estienna de La Roche (1470 – 1530). Ještě ve 20. století se takto učilo odmocňovat na základních školách.

7.8 Třetí mocnina

Indický název třetí mocniny je *ghana*. Původně slovo *ghana* znamenalo těleso, tento termín se vyskytoval ve všech matematických dílech. Používal se v geometrickém i aritmetickém smyslu, tj. sloužil k označení tělesa – krychle, stejně jako součinu čísla, které se násobí třikrát samo sebou.

Árjabhata I. definoval:[70]

Ar/ii.3 (část)
Součin tří stejných veličin a těleso mající dvanáct [stejných] *hran se nazývá ghana.*

Metoda na výpočet třetí mocniny byla známá v Indii už v 5. stol. n. l. Árjabhata I. tuto metodu znal, i když ji nepovažoval za tak důležitou jako inverzní operaci, tj. výpočet třetí odmocniny.

Pro výpočet se používaly vzorce

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\,, \\ [a+(b+c)]^3 &= a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + (b+c)^3\,, \\ [(a+b)+c]^3 &= (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3\,. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Mahávíra pro výpočet třetí mocniny uvedl:[71]

GaSaSa/ii.47
Třetí mocnina poslední [levé] *číslice a trojnásobek čtverce* [té číslice] *musí být posunutý* [o jedno místo doprava] *a násobený zbývajícími* [místy]*; pak čtverec zbývajících* [míst] *se musí posunout a násobit trojnásobkem poslední číslice. Tyto* [tři veličiny] *se musí umístit na pozice* [a sečíst]. *Takové je pravidlo.*

Bháskara II. popsal výpočet třetí mocniny trochu podrobněji:[72]

Lila/ii.23–25
Pravidlo pro třetí mocninu: tři sloky.
Postupné násobení tří stejných veličin je třetí mocnina. Třetí mocnina poslední [číslice] *se musí zapsat a dále čtverec poslední* [číslice] *násobený trojnásobkem první* [číslice] *a pak čtverec první* [číslice] *se vynásobí poslední ztrojnásobenou a nakonec třetí mocnina první* [číslice]; *toto se vždy posune o jedno místo a sečtené dává třetí mocninu.*
Dané číslo [mající více než dvě číslice] *se rozdělí na dvě části, jedna z nich se pak bere jako poslední* [ta druhá jako první] *a tímto způsobem opakovaně* [pokud je příležitost].
Nebo stejný proces pro nalezení třetí mocniny může začít od prvního místa čísla buď pro třetí mocninu nebo pro druhou.

Metodu výpočtu třetí mocniny popíšeme na příkladu $1\,234^3 = 1\,879\,080\,904$.[73]

[70] Podle [Cla], str. 21.
[71] Podle [Ran], str. 17.
[72] Podle [Col], str. 10.
[73] Podle [DS1], str. 165–166.

Dané číslo má čtyři číslice. Algoritmus se aplikoval nejprve na dvě levé číslice, tedy v prvním kroku se počítalo pouze s číslicí 1 („poslední“) a číslicí 2 („první“) a umocňovalo se 12^3.

1	*třetí mocnina poslední číslice* $[1^3 = 1]$
6	*čtverec poslední číslice násobený trojnásobkem první* $[1^2 \cdot 3 \cdot 2 = 6]$ zapsal se na následující pozici, tj. jednotky byly posunuté o 1 místo doprava
12	*čtverec první číslice se vynásobí poslední ztrojnásobenou* $[2^2 \cdot 3 \cdot 1 = 12]$ zapsal se o jedno místo vpravo
8	*třetí mocnina první číslice* $[2^3 = 8]$ zapsala se o jedno místo vpravo
1728	součet je $12^3 = 1\,728$

Nyní se připojila další číslice, tj. 3. Celkem se počítalo s číslem 123, kde 12 představovalo *poslední* číslo a 3 *první*. Umocňovalo se 123^3 stejným postupem jako v prvním kroku.

1728	*třetí mocnina poslední číslice* $[12^3 = 1\,728]$ využil se výsledek z prvního kroku
1296	*čtverec poslední číslice násobený trojnásobkem první* $[12^2 \cdot 3 \cdot 3 = 1\,296]$ zapsal se o jedno místo vpravo
324	*čtverec první číslice se vynásobí poslední ztrojnásobenou* $[3^2 \cdot 3 \cdot 12 = 324]$ zapsal se o jedno místo vpravo
27	*třetí mocnina první číslice* $[3^3 = 27]$ zapsala se o jedno místo vpravo
1860867	součet je $123^3 = 1\,860\,867$

Nakonec se přidala zbývající číslice, tj. 4. Opět se opakoval stejný postup, v němž 123 bylo *poslední* číslo a 4 *první*.

1860867	*třetí mocnina poslední číslice* $[123^3 = 1\,860\,867]$ využil se výsledek z druhého kroku
181548	*čtverec poslední číslice násobený trojnásobkem první* $[123^2 \cdot 3 \cdot 4 = 181\,548]$ zapsal se o jedno místo vpravo
5904	*čtverec první číslice se vynásobí poslední ztrojnásobenou* $[4^2 \cdot 3 \cdot 123 = 5\,904]$ zapsal se o jedno místo vpravo
64	*třetí mocnina první číslice* $[4^3 = 64]$ zapsala se vpravo
1879080904	součet je $1234^3 = 1\,879\,080\,904$

Kromě tohoto přímého postupu se mohl použít i postup obrácený, kdy výpočet začínal od jednotek.

Další metody na výpočet třetí mocniny

a) Bháskara II. zmínil ještě další variantu výpočtu:[74]

Lila/ii.23–25 (část)
Nebo trojnásobek daného čísla násobený svými dvěma částmi přičtený k součtu třetích mocnin těch částí dává třetí mocninu.

Jednalo se pouze o jiné vyjádření základního vzorce

$$A^3 = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 3ab(a+b) + a^3 + b^3 = 3abA + a^3 + b^3\,.$$

b) K předchozím postupům ještě Bháskara II. připojil:[75]

Lila/ii.23–25 (část)
Nebo druhá odmocnina daného čísla umocněná na třetí a násobená sama sebou dá třetí mocninu daného čísla.

$$(\sqrt{a})^3 \cdot (\sqrt{a})^3 = a^3\,.$$

V následujícím příkladu vysvětlil výpočet $9^3 = 729$ takto:[76]

Lila/ii.26 (část)
Dané číslo devět, jeho druhá odmocnina 3*, umocněná na třetí* 27*. Čtverec toho, tj.* 729*, je třetí mocninou devíti. Krátce: druhá odmocnina z třetí mocniny je totéž jako třetí mocnina druhé odmocniny.*

Bháskara tímto vysvětlil, že při umocňování a odmocňování je možno pořadí operací zaměnit, tj.

$$(\sqrt{9})^3 = 27 = \sqrt{9^3}\,, \qquad \sqrt{a^3} = (\sqrt{a})^3\,.$$

c) Další možnosti výpočtu třetí mocniny uvedl Mahávíra. Jeho metody můžeme vyjádřit vzorci[77]

$$n^3 = n(n+a)(n-a) + a^2(n-a) + a^3\,,$$

$$n^3 = n + 3n + 5n + \cdots + (2n-1)n = n\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\,,$$

$$n^3 = n^2 + (n-1)[1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)]\,.$$

[74] Podle [Col], str. 10.
[75] Komentátor Ganéša zmínil, že takto je možné zavést i vyšší mocniny než třetí. Podrobněji to je uvedeno v 8. kapitole věnované algebře.
[76] Podle [Col], str. 11.
[77] Viz sloky GaSaSa/ii.43 a GaSaSa/ii.44, podle [Ran], str. 16.

d) Vyjádření n^3 jako součet konečné posloupnosti popsali například Šrídhara Mahávíra a Nárájana. Mahávíra vyjádřil slovy vzorec[78]

$$n^3 = 3\sum_{i=2}^{n} i(i-1) + n\,.$$

7.9 Třetí odmocnina

Pro třetí odmocninu se používal název *ghanamúla* nebo *ghanapada* (*ghanapada*). První vysvětlení výpočtu třetí odmocniny se vyskytuje v práci *Árjabhatíja*. Jednotlivé číslice čísla, jehož třetí odmocnina se hledala, byly rozděleny do trojic (vždy jedno místo *ghana* a dvě *aghana*). Při popisu se tedy pozice jednotek daného čísla označovala jako *ghana*, pozice desítek byla *první aghana*, pozice stovek byla *druhé aghana*, pozice tisíců byla *ghana*, pozice desetitisíců byla *první aghana*, pozice stotisíců byla *druhé aghana* atd. Vyjádření Árjabhaty I. bylo velmi stručné:[79]

Ar/ii.5
Vyděl druhé místo aghana trojnásobkem čtverce třetí odmocniny [předchozí] *ghana. Čtverec podílu násobeného trojnásobkem předchozího* [třetí odmocniny] *odečti od prvního místa aghana a třetí mocninu* [podílu] *odečti od místa ghana;* [podíl zapsaný na jiném místě (na lince kořene) dává třetí odmocninu].

Stejná metoda na výpočet třetí odmocniny se vyskytovala ve všech matematických dílech, Brahmagupta ji popsal takto:[80]

BrSpSi/xii.7
Dělitel druhého místa aghana je trojnásobek čtverce třetí odmocniny; čtverec podílu vynásobený třemi a předchozím [kořenem] *musí být odečten od následujícího* [místa aghana vpravo] *a třetí mocnina* [podílu] *od místa ghana;* [opakovaný postup dává] *třetí odmocninu.*

Podobně zformulovali pravidla Šrídhara a Árjabhata II. Postup předvedeme na příkladu $\sqrt[3]{1\,860\,867} = 123$. Jednotlivé číslice daného čísla byly nejprve rozděleny do trojic – jedno místo *ghana* a dvě *aghana*. Číslice až k poslednímu místu *ghana* (zleva doprava) tvořily první číslo třetí odmocniny atd. Během práce na desce se nejprve označily číslice jako *ghana* (budeme značit $|$), a *aghana* (budeme značit $-$).

[78] Viz sloka GaSaSa/ii.45, podle [Ran], str. 17.
[79] Podle [Cla], str. 24.
[80] Podle [Col], str. 280.

		|	–	–	|	–	–	|	
		1	8	6	0	8	6	7	zapsalo se číslo a označily číslice
	−	1							od posledního místa *ghana* se odečetla
		0							největší třetí mocnina $[1 - 1^3 = 0]$
1									kořen se zapsal na linku
			8						*dělitel druhého místa aghana je trojnásobek*
									čtverce třetí odmocniny $[3 \cdot 1^2 = 3]$
									$[8 : 3 = 2$ (zb. 2)$]$
		−	6						odečetl se součin $[3 \cdot 1^2 \cdot 2 = 6]$
			2						tj. číslo 8 se nahradilo zbytkem dělení 2
12									podíl 2 se zapsal na na linku
			2	6					připojila se první číslice *aghana*
									čtverec podílu vynásobený třemi a kořenem
		−	1	2					$[2^2 \cdot 3 \cdot 1 = 12]$ *musí být odečten*
			1	4					$[26 - 12 = 14]$
			1	4	0				*musí být odečtena třetí mocnina*
		−			8				*podílu* $[2^3 = 8]$ *od místa ghana*
			1	3	2				$[140 - 8 = 132]$
									dokončeno první kolo operací
			1	3	2	8			*dělitel druhého místa aghana je trojnásobek*
									čtverce třetí odmocniny $[3 \cdot 12^2 = 432]$
									$[1\,328 : 432 = 3$ (zb. 32)$]$
		−	1	2	9	6			odečetl se součin $[3 \cdot 12^2 \cdot 3 = 1\,296]$
					3	2			tj. číslo 1 328 se nahradilo zbytkem dělení 32
123									podíl 3 se zapsal na na linku
					3	2	6		připojila se první číslice *aghana*
									čtverec podílu vynásobený třemi a kořenem
				−	3	2	4		$[3^2 \cdot 3 \cdot 12 = 324]$ *musí být odečten*
							2		$[326 - 234 = 2]$
							2	7	*musí být odečtena třetí mocnina*
						−	2	7	*podílu* $[3^3 = 27]$ *od místa ghana*
								0	$[27 - 27 = 0]$

Výpočet skončil, protože všechny číslice byly vyčerpány. Třetí odmocninou bylo číslo na lince, tj. 123. Protože nezůstal žádný zbytek, výsledek byl přesný. Výpočet vycházel ze vzorce (7.2):

$$\begin{aligned}123^3 &= [(100+20)+3]^3 = (100+20)^3 + 3\cdot 120^2\cdot 3 + 3\cdot 120\cdot 3^2 + 3^3 = \\ &= 100^3 + 3\cdot 100^2\cdot 20 + 3\cdot 100\cdot 20^2 + 20^3 + 129\,600 + 3\,240 + 27 = \\ &= 1\,000\,000 + 600\,000 + 120\,000 + 8\,000 + 129\,600 + 3\,240 + 27\,.\end{aligned}$$

Kvůli nedostatku místa na desce bylo nutné během počítání některé číslice mazat. Tři číslice, které tvořily skupinu (jedno místo *ghana* a dvě *aghana*), se považovaly za celek. Číslice až k dalšímu druhému místu *aghana* se musely přepsat dolů a dělení se provádělo odděleně, protože se podíl získával zkusmo. Mohlo se stát, podobně jako při výpočtu druhé odmocniny, že metoda selhala, když byl zbytek dělení malý. V tom případě bylo nutné dělení opakovat a vzít menší podíl s větším zbytkem.

Třetí odmocninu zručně počítali v Číně, jejich metoda byla analogická jako pro druhou odmocninu, při výpočtu koeficientů se práce zjednodušila využitím vztahu $ax^3 + bx^2 + cx = ((ax + b)x + c)x$.

7.10 Zlomky

V Indii byly zlomky známé velmi dávno. Zmínky o zlomcích můžeme najít už v nejstarších védských textech, například *Rgvéda* (asi 1000 př. n. l.) obsahuje termíny *ardha* ($\frac{1}{2}$) a *tri-pāda* ($\frac{3}{4}$). V díle *Maitrájanísamhitá* (*Maitrāyaṇīsaṃhitā*) byly zmíněny zlomky *kalā* ($\frac{1}{16}$), *kuṣṭha* ($\frac{1}{12}$), *śapha* ($\frac{1}{8}$), *pāda* ($\frac{1}{4}$). V nejstarších indických dílech o geometrii, tzv. *šulbasútrách* (asi 500 př. n. l.), se vyskytují zlomky při popisu řešení úloh.[81]

Na rozdíl od starých Egypťanů, kteří používali pouze zlomky s čitatelem rovným jedné (tzv. kmenné zlomky),[82] v Indii počítali i se zlomky s čitatelem větším než jedna. Zlomek $\frac{3}{4}$ zmiňovaný v *Rgvédě* je pravděpodobně nejstarším známým zlomkem s větším čitatelem, který je dochovaný v indické literatuře.

Zlomky byly potřebné zejména při vyjadřování jednotek času, délky, váhy, objemu atd. Staré práce o aritmetice začínaly uvedením různých jednotek a obsahovaly speciální pravidla na zjednodušení zápisu série měr pomocí vhodných zlomků. Systémy měr byly popsány názvy, které se v jednotlivých oblastech i obdobích lišily.

Váhy a míry

V každé společnosti existovalo dělení jednotek délky, váhy, peněz atd. na menší jednotky kvůli tomu, aby se mohlo lépe vyjádřit i velmi malé množství. V práci *Šatapathabráhmana* (asi 8. stol. př. n. l.) je popsáno přesné dělení času:[83]

$$\begin{aligned} 1 \text{ den} &= 30 \; \textit{muhúrtů}, \\ 1 \; \textit{muhúrta} \; (\textit{muhūrta}) &= 15 \; \textit{kšiprů}, \\ 1 \; \textit{kšipra} \; (\textit{kṣipra}) &= 15 \; \textit{étarhi}, \\ 1 \; \textit{étarhi} \; (\textit{etarhi}) &= 15 \; \textit{idáni}, \\ 1 \; \textit{idáni} \; (\textit{idāni}) &= 15 \; \textit{pránů} \; (\textit{prāṇa}). \end{aligned}$$

Jednotka *prána* tak odpovídala asi $\frac{1}{17}$ vteřiny:

$$\frac{1}{30 \cdot 15^4} \approx 6{,}5843621 \cdot 10^{-7}, \qquad \frac{1}{24 \cdot 3600 \cdot 17} \approx 6{,}80827887 \cdot 10^{-7}.$$

---

[81] Zápisy zlomků ve staré Indii a operace se zlomky jsou popsány v článku [Sy2].

[82] Ve Staré říši byly používány i zlomky $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$; později se pracovalo pouze s kmennými zlomky, ke kterým se ještě přidával zlomek $\frac{2}{3}$, viz např. [BBV].

[83] Podle [DS1], str. 186.

Je pravděpodobné, že tak jemné dělení mělo význam asi jen pro filozofické otázky. Musela však už existovat pravidla pro počítání s takovými čísly.

Různé práce obsahovaly další jednotky, například v díle *Lílávatí* jsou uvedeny následující jednotky délkové míry.[84]

Jednotka	**Vztahy**	**Poznámka**
java (*yava*)		šířka semínka ječmene
angula (*aṅgula*)	8 *javů* (asi 1,8 cm)	šířka prstu
vitasti (*vitasti*)	12 *angulů* (asi 22 cm)	píď
hasta (*hasta*)	2 *vitasti* = 24 *angulů*	loket
danda (*daṇḍa*)	4 *hasty*	
króša (*krośa*)	2 000 *dandů*	
jódžana (*yojana*)	4 *króši*	vzdálenost, kterou lze ujet na jeden zápřah

Bháskara II. kromě jednotek délky, objemu a váhy připomněl soustavu platidel:[85]

$$
\begin{aligned}
1\ \textit{kákiní}\ (\textit{kākinī}) &= 20 \text{ mušliček } \textit{kauri},\\
1\ \textit{pana}\ (\textit{paṇa}) &= 4\ \textit{kákiní},\\
1\ \textit{dramma}\ (\textit{dramma}) &= 16\ \textit{panů},\\
1\ \textit{niška}\ (\textit{niṣka}) &= 16\ \textit{drammů}.
\end{aligned}
$$

Terminologie

Indové zlomek nazývali *bhinna* (*bhinna*), což znamená zlomený. Další výrazy používané pro zlomek byly *bhága* nebo *amša* s významem část nebo díl. Později se používal i termín *kalá* (*kalā*), který původně, ve védském období, znamenal jednu šestnáctinu. Ganéša, komentátor *Lílávatí*, nazýval čitatele zlomku (to, co se mělo dělit) *bhága*, *vibhága* (*vibhāga*) nebo *lava* (*lava*), pro jmenovatele (to, čím se dělilo) uváděl názvy *amša*, *hara* nebo *čhéda* (*cheda*).

Ve védských dílech *šulbasútrách* se kmenné zlomky označovaly základními číslovkami ve spojení se slovem *bhága* nebo *amša*, například *paňča-bhága* (*pañca-bhāga*, tj. pět dílů) znamenalo jednu pětinu. Často byly se slovy *bhága* nebo *amša* spojovány i řadové číslovky, tedy *paňčama-bhága* (*pañcama-bhāga*, tj. pátý díl) vyjadřovalo rovněž jednu pětinu. Dokonce i slovo *bhága* se někdy vynechávalo, patrně kvůli metrice verše, tedy například *paňčama* (*pañcama*, tj. pátý) označovalo též jednu pětinu. Zlomky $\frac{3}{8}$ nebo $\frac{2}{7}$ se nazývaly tři osmé nebo dva sedmé. V rukopisu *Bakhšálí* je vyjádřeno číslo $3\frac{3}{8}$ jako *trayastraya-aṣṭha* (tři-tři-osmé).

[84] Podle [Col], str. 2. Další jednotky měr a vah jsou uvedeny například v [Do].
[85] Podle [Col], str. 1–2.

Zápis zlomků

Asi od 2. stol. př. n. l. se zlomky zapisovaly přibližně stejným způsobem jako dnes – čitatel nad jmenovatelem, ale bez zlomkové čáry. Smíšená čísla měla celé číslo umístěné nad čitatelem zlomku. Pokud se v jednom problému vyskytovalo několik zlomků, oddělovaly se vzájemně vodorovnými a svislými čarami.

Na obrázku 7.1 je uprostřed číslo $3\frac{3}{8}$ znázorněno jako $\begin{array}{|c|} 3 \\ 3 \\ 8 \\ \hline \end{array}$.

. . . . pra*tyayaṁ*

. . . . tṛibhitryashṭabhāgasaṁyutaṁ .

. . . . tadā $\begin{array}{c|} 3+ \\ 1 \\ 3+ \end{array}$ shṭottaraśatā χ kiṁ $\begin{array}{|c|c|c|} 27 & 1 & 108 \\ 8 & 1 & 1 \end{array}$ pha śe .

. . . . yadyekasyatrayastraya ashṭha

bhāgātadādvātṛiṅśānāṁkimiti $\begin{array}{|c|c|} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ & 8 \end{array}$ 32 | phalaṁ $\begin{array}{c} 108 \\ 1 \end{array}$ | udā ||

. . kṛiddhāntasyalohasyadaśāṁshākshīya | testrayaṁ | saptatedviguṇa

. . śchakiṁśeshaṁvadapaṇḍitaḥ $\begin{array}{|c|c|} 3 & 140 \\ 10 & 1 \end{array}$ kṛitvārūpakshayaṁpāsthamiti

. . rūpaṁ $\begin{array}{|c|c|} 1 & 3 \\ & 10 \end{array}$ kshayaṁkṛitvā jātaṁśesha $\begin{array}{|c|} 7 \\ 10 \end{array}$ mūlaṁ

40 | anenaguṇitaṁjātaṁ | 98 | kshayaṁ | 42 | evaṁ | 140 | *pra* . .

. . . . . . na $\begin{array}{|c|c|c|} 7 & 1 & 98 \\ .\,. & 1 & . \end{array}$ phalaṁ 140 | . . . .

Obr. 7.1: Rukopis *Bakhšálí*, folio 10 verso a jeho přepis[86]

Protože neexistovala vhodná symbolika k tomu, aby bylo možné vyjadřovat

[86] Převzato z [Kay1].

aritmetické operace se zlomky, rozdělovaly se výrazy se zlomky do několika tříd, kterým se říkalo *džáti* (*jāti*). Existovala pravidla, podle nichž bylo možné tyto třídy vyjádřit pomocí vhodných zlomků. Jediným používaným symbolem byla tečka, která značila záporné číslo, resp. číslo, které se má odečíst. Někdy bylo slovo *bhinna* užíváno i pro celou třídu zlomků.

Krácení zlomků

Před prováděním operací se zlomky se pokládalo za samozřejmé zlomky zkrátit. Tento proces se nazýval *apavartana* (*apavartana*), ale sám nebyl považován za operaci. Nikde není popsán jako pravidlo, zřejmě se znalost předávala ústně. Určitě byl rozšířen v Indii již na počátku našeho letopočtu, zmiňuje se o něm například i nematematická práce *Tattvárthasútra*, jejímž autorem je Umásváti (asi 150 př. n. l.). Jedná se o přirovnání ve filozofické diskusi.[87]

> *Nebo když odborník matematik z důvodu zjednodušení operací odstraní společného dělitele čitatele i jmenovatele zlomku, zlomek se nezmění, tak ...*

Převedení na společného jmenovatele

Tato operace se nazývala *kalá-savarnana* (*kalā-savarṇana*), *savarnana* (*savarṇana*) nebo *samačhéda-vidhi* (*samacheda-vidhi*). Používala se, když bylo potřeba sečíst nebo odečíst zlomky. Tato úprava byla důležitá a vždy se připomínala spolu se sčítáním a odčítáním. Brahmagupta popsal tuto situaci následujícími slovy:[88]

> **BrSpSi/xii.2**
> *Veličiny, stejně jako čitatelé a jmenovatelé, násobením ostatními jmenovateli se převedou na společného jmenovatele. Při sčítání čitatelé jsou sloučení. Při odečítání se vezme jejich rozdíl.*

K lepšímu pochopení Brahmaguptova pravidla připojil komentátor Prthúdakasvámin tento příklad:[89]

> *Příklad sčítání. Kolik je součet jedna a jedna třetina, jedna a jedna polovina, jedna a jedna šestina a číslo tři dané dohromady?*
>
> *Vyjádření:* $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{6}$, 3. *Neboli* $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{3}{1}$.
>
> *Vynásobením čitatele a jmenovatele prvního členu jmenovatelem druhého,* 2, *a čitatele a jmenovatele druhého jmenovatelem prvního,* 3, *jsou převedeny na společného jmenovatele* ($\frac{8}{6}$, $\frac{9}{6}$, *sloučením čitatelů* $\frac{17}{6}$). *Se třetím členem se nemusí provádět žádná operace, protože jeho jmenovatel je stejný, musí se jen sloučit čitatelé,* $\frac{24}{6}$, *což je po zkrácení* 4. *Zbývá přičíst čtvrtý člen,* 3, *a sčítání je dokončeno, výsledek je* 7.

---

[87] Podle [DS1], str. 190.
[88] Podle [Col], str. 277.
[89] Podle [Col], str. 278.

Mahávíra byl prvním z indických matematiků, který užíval pojem *niruddha* (*niruddha*) pro nejmenší společný násobek, aby zjednodušil počítání se zlomky.[90]

GaSaSa/iii.56
Niruddha [nejmenší společný násobek] *se získá pomocí násobení* [všech] *společných činitelů jmenovatelů a* [všech] *jejich* [maximálních] *podílů. V případě, že* [všichni] *jmenovatelé a čitatelé* [daných zlomků] *jsou získáni jejich násobením pomocí podílů niruddha děleného jmenovatelem, jmenovatelé budou stejní.*

Pokud se měly například zlomky $\frac{a}{xy}$ a $\frac{b}{yz}$ (předpokládáme, že x, y a z jsou prvočísla) převést na společného jmenovatele, znamenalo to nalézt společné činitele všech jmenovatelů, v našem případě y, a pak vzít podíl každého jmenovatele tímto činitelem; pro první zlomek se dostalo $\frac{xy}{y} = x$, pro druhý $\frac{yz}{y} = z$. Tedy nejmenším společným násobkem byl součin xyz. První zlomek pak bylo třeba rozšířit číslem $\frac{xyz}{xy} = z$, tím se dostalo $\frac{az}{xyz}$, druhý zlomek se rozšířil číslem $\frac{xyz}{yz} = x$, tím se získalo $\frac{bx}{xyz}$. Tyto zlomky $\frac{az}{xyz}$ a $\frac{bx}{xyz}$ mají stejné jmenovatele, jmenovatel je nejmenším společným násobkem původních jmenovatelů.

Bháskara II. nepoužíval pojem *niruddha*, společného jmenovatele získal jako součin jmenovatelů. Existenci nejmenšího společného násobku zmínil takto:[91]

Lila/ii.29
Čitatel a jmenovatel vynásobeni jmenovateli jsou tak převedeni na společného jmenovatele. Nebo oba, čitatel a jmenovatel, mohou být šikovným počtářem násobeni jiným jmenovatelem, který je zkrácený společným dělitelem.

Bháskara II. v jednom příkladu[92] převáděl na společného jmenovatele zlomky $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$. Jmenovatelé 1, 5, 3 jsou čísla nesoudělná, společného jmenovatele vypočítal jako jejich součin $1 \cdot 5 \cdot 3 = 15$, zlomky pak vyjádřil jako $\frac{45}{15}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{5}{15}$. Když však hledal společného jmenovatele zlomků $\frac{1}{63}$, $\frac{1}{14}$, postupoval trochu jinak, protože jmenovatelé 63 a 14 mají společného dělitele 7, a tedy jejich součin není nejmenším společným násobkem. Proto, podle druhé části předchozího pravidla, nejprve jmenovatele vydělil sedmi $63 : 7 = 9$, $14 : 7 = 2$. Nejmenší společný násobek získal jako součin $7 \cdot 9 \cdot 2 = 126$ a zlomky zapsal jako $\frac{2}{126}$, $\frac{9}{126}$.

V Evropě většina matematiků při převádění na společného jmenovatele používala součin všech jmenovatelů, až Leonardo Pisánský začal prosazovat nejmenší společný násobek jmenovatelů (viz [BeM2]).

Operace se zlomky byly v Indii známé už dávno a prováděly se téměř stejně jako dnes. Árjabhata I. se o elementárních operacích přímo nezmiňoval, ale

[90] Podle [Ran], str. 51.
[91] Podle [Col], str. 13.
[92] Viz sloka Lila/ii.30, podle [Col], str. 13.

z jeho textu je evidentní, že znal metodu dělení zlomkem jako násobení převrácenou hodnotou.

Smíšená čísla se před vlastním počítáním převedla na nepravé zlomky, a když to bylo možné, zlomky se zkrátily. Převedení smíšeného čísla na zlomek popsal Brahmagupta:[93]

BrSpSi/xii.3 (část)
Celá čísla se násobí jmenovateli a mají přičtené čitatele.

7.10.1 Sčítání a odčítání

Sčítání zlomků se nazývalo *bhinnasamkalita* (*bhinna-saṃkalita*), odčítání *bhinnavjavakalita* (*bhinna-vyavakalita*). Tyto operace se prováděly až po převedení zlomků na společného jmenovatele. Pokud se sčítaly nebo odčítaly zlomky společně s celými čísly, bylo celé číslo považováno za zlomek se jmenovatelem rovným jedné. Vyjádření dnešní symbolikou odpovídá běžně užívaným vzorcům:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}, \qquad z \pm \frac{a}{b} = \frac{zb \pm a}{b}.$$

Bháskara II. tuto situaci popsal takto:[94]

Lila/ii.36
Pravidlo pro sčítání a odčítání zlomků. Půl sloky.
[Vezmi] *Součet nebo rozdíl zlomků majících společného jmenovatele. Jedničkou je vyjádřený jmenovatel celého čísla.*

Lila/ii.37
Příklad. Řekni mi, drahá ženo, rychle, kolik je pětina, čtvrtina, třetina, polovina a šestina když se sečtou dohromady? Řekni okamžitě, co je zbytek, když se tyto zlomky odečtou od tří.

Vyjádření: $\frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{6}$.

Odpověď. Sečteno dohromady, součet je $\frac{29}{20}$

Odečtením těchto zlomků od tří, zbytek je $\frac{31}{20}$.

Při výpočtu se použilo pravidlo převedení na společného jmenovatele, tím byl pravděpodobně nejmenší společný násobek jmenovatelů, tj. 60, pak se zlomky sečetly a výsledek se zkrátil. Výpočet tedy mohl vypadat takto:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{12}{60}+\frac{15}{60}+\frac{20}{60}+\frac{30}{60}+\frac{10}{60}=\frac{87}{60}=\frac{29}{20}.$$

[93] Podle [Col], str. 278.
[94] Podle [Col], str. 16–17.

Odčítání se provádělo podobně:

$$3 - \frac{29}{20} = \frac{3}{1} - \frac{29}{20} = \frac{60}{20} - \frac{29}{20} = \frac{31}{20}\,.$$

7.10.2 Násobení

Výraz *bhinnagunana* (*bhinna-guṇana*) se užíval pro násobení zlomků. Před vlastním násobením se nejprve smíšená čísla převedla na zlomky; Brahmagupta tento proces popsal následujícím způsobem:[95]

BrSpSi/xii.3 (část)
Součin čitatelů dělený součinem jmenovatelů je [výsledkem] *násobení dvou nebo více zlomků.*

Násobení odpovídá současnému vzorci

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}\,.$$

Postup ukážeme na následujícím příkladu, který patrně připojil komentátor Prthúdakasvámin:[96]

Příklad. Řekni rychle, jaký je obsah obdélníku, ve kterém strana je deset a půl a výška sedmdesát šestin.

Vyjádření. $10\frac{1}{2}$ $11\frac{4}{6}$.

Vynásobením celých čísel jmenovateli a přičtením čitatelů, ve druhém případě ještě zkrácením, dostaneme $\frac{21}{2}$ *a* $\frac{35}{3}$*. Součin čitatelů* 735 *vydělený součinem jmenovatelů* 6 *dává podíl* $122\frac{1}{2}$*. To je obsah obdélníku.*

Ostatní autoři popisovali tyto operace podobným způsobem, jen Mahávíra ještě odkazoval na krácení křížem, aby se zjednodušil výpočet.[97]

GaSaSa/iii.2
Při násobení zlomků se čitatelé násobí čitateli a jmenovatelé jmenovateli poté, co se provede křížové krácení, je-li to možné.

Při krácení křížem, pokud je to možné, se krátí čitatel prvního zlomku se jmenovatelem druhého nebo čitatel druhého zlomku se jmenovatelem prvního.

[95] Podle [Col], str. 278.
[96] Podle [Col], str. 278.
[97] Podle [Ran], str. 38.

7.10.3 Dělení

Bhinnabhágahára (*bhinna-bhāgahāra*) byl název užívaný pro dělení zlomků. V práci *Árjabhatíja* nebyly zmiňovány elementární operace, násobení zlomků bylo popsáno v části pojednávající o pravidle tří.

Brahmagupta popsal dělení zlomků takto:[98]

BrSpSi/xii.4
Jmenovatel a čitatel dělitele se vymění, pak jmenovatel dělence se násobí [novým] *jmenovatelem a čitatel* [novým] *čitatelem. Tak je dělení zlomků provedeno.*

Dělení zlomků se provádělo stejně jako dnes – první zlomek se násobil převrácenou hodnotou druhého

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}\,.$$

Podobným způsobem popisovali dělení zlomků i další autoři. V [Col] je připojen podobný příklad jako u násobení, autorem je komentátor Prthúdakasvámin.[99]

Příklad. V obdélníku, jehož obsah je daný, sto dvacet dva a půl, a strana deset a půl. Řekni výšku.

Vyjádření: $122\frac{1}{2}$ $10\frac{1}{2}$. *Převedeno na* $\frac{245}{2}$ $\frac{21}{2}$.

Zde je strana dělitelem. Její čitatel a jmenovatel jsou prohozené $\frac{2}{21}$. *Čitatel dělence násobený tímto čitatelem se stává* 490*; a jmenovatel dělence násobený jmenovatelem vytváří* 42*. Jedno dělené druhým dává podíl* $11\frac{2}{3}$. *To je výška.*

7.10.4 Druhá mocnina a druhá odmocnina

Pravidla pro umocňování a odmocňování zlomků nebývala uvedena v kapitolách o umocňování a odmocňování, ale v kapitolách o počítání se zlomky. Výpočet druhé odmocniny zlomků byl nazýván *bhinnavarga* (*bhinna-varga*). Brahmagupta jej vyjádřil takto:[100]

BrSpSi/xii.5
Čtverec čitatele zlomku dělený čtvercem jmenovatele dává čtverec. Druhá odmocnina čitatele zlomku dělená druhou odmocninou jmenovatele dává druhou odmocninu.

---

[98] Podle [Col], str. 278–279.
[99] Podle [Col], str. 279.
[100] Podle [Col], str. 279.

Ostatní autoři uváděli podobná vyjádření. V dnešní symbolice lze výše uvedené poznatky zapsat pomocí vzorců

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}, \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Následující příklady, které připojil komentátor Prthúdakasvámin, sloužily k objasnění výpočtu.[101]

Příklad. Řekni mi obsah rovnostranného čtyřúhelníku [čtverce] *jehož strana a výška jsou stejné sedm polovin.*

Vyjádření: Strana $\frac{7}{2}$. *Výška* $\frac{7}{2}$. *Součin čitatelů* 49. *Součin jmenovatelů* 4. *Tyto součiny jsou druhé mocniny, protože strana a výška jsou stejné.*

Čtverec čitatele 49 *dělený čtvercem jmenovatele* 4, *podíl* $12\frac{1}{4}$ *je plocha čtyřúhelníku.*

Příklad. Řekni stejnou stranu a výšku rovnostranného čtyřúhelníku [čtverce], *jehož obsah je daný dvanáct a jedna čtvrtina.*

Vyjádření po převedení: $\frac{49}{4}$. *Odmocnina z čitatele* 49 *je* 7, *totéž pro jmenovatele* 4 *je* 2. *Po dělení odmocniny čitatele tímto dá podíl druhou odmocninu* $\frac{7}{2}$. *To je délka výšky a strany.*

7.10.5 Třetí mocnina a třetí odmocnina

Výpočet třetí odmocniny zlomků byl nazýván *bhinnaghana* (*bhinna-ghana*). Šrídhara formuloval pravidlo takto:[102]

PaGa/35
Třetí mocnina čitatele dělená třetí mocninou jmenovatele dává třetí mocninu a třetí odmocnina čitatele dělená třetí odmocninou jmenovatele dává třetí odmocninu.

Ostatní autoři popisovali výpočet třetí mocniny a odmocniny podobným způsobem. V dnešní symbolice zapíšeme vzorci

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}, \qquad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}.$$

7.10.6 Třídy výrazů se zlomky

Protože neexistovala vhodná symbolika, zápis výrazů se zlomky byl nejednoznačný. Indové dělili výrazy se zlomky do několika tříd nazývaných *džáti* a příslušnost k určité třídě pomohla pochopit správný význam zápisu.

[101] Podle [Col], str. 279.
[102] Podle [Shu1], str. 16–17.

1. *Bhága* (*bhāga*, tj. „jednoduché zlomky“) neboli výraz se dvěma zlomky $\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}\right)$ nebo se třemi zlomky $\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \pm \frac{e}{f}\right)$, případně i pro větší počet zlomků $\left(\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} \pm \frac{a_3}{b_3} \pm \dots \pm \frac{a_n}{b_n}\right)$, který se obvykle zapisoval ve tvaru

$\begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{a} & \mathrm{c} \\ \mathrm{b} & \mathrm{d} \\ \hline\end{array}$ nebo $\begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{a} & \bullet\mathrm{c} \\ \mathrm{b} & \mathrm{d} \\ \hline\end{array}$, kde tečkou je naznačeno odčítání.

Výraz se třemi zlomky se vyjadřoval podobnám způsobem $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{a} & \mathrm{c} & \mathrm{e} \\ \mathrm{b} & \mathrm{d} & \mathrm{f} \\ \hline\end{array}$ nebo $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{a} & \bullet\mathrm{c} & \bullet\mathrm{e} \\ \mathrm{b} & \mathrm{d} & \mathrm{f} \\ \hline\end{array}$.

2. *Prabhága* (*prabhāga*, tj. „zlomky ze zlomků“) neboli součin $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)$, resp. $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$, se obvykle zapisoval jako $\begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{a} & \mathrm{c} \\ \mathrm{b} & \mathrm{d} \\ \hline\end{array}$, resp. $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{a} & \mathrm{c} & \mathrm{e} \\ \mathrm{b} & \mathrm{d} & \mathrm{f} \\ \hline\end{array}$.

3. *Bhágánubandha* (*bhāgānubandha*, tj. „spojení zlomků“) znamenalo buď
   a) *rúpa-bhágánubandha* (*rūpa-bhāgānubandha*, tj. „spojení přirozeného čísla a zlomku“), tedy $\left(a + \frac{b}{c}\right)$, v zápisu $\begin{array}{|c|}\hline \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \\ \mathrm{c} \\ \hline\end{array}$ nebo
   b) *bhága-bhágánubandha* (*bhāga-bhāgānubandha*, tj. „spojení dvou nebo více zlomků“), tedy $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}\right)$ či $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} + \frac{e}{f} \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}\right)\right)$, které se zapisovaly $\begin{array}{|c|}\hline \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \\ \hline \mathrm{c} \\ \mathrm{d} \\ \hline\end{array}$ nebo $\begin{array}{|c|}\hline \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \\ \hline \mathrm{c} \\ \mathrm{d} \\ \hline \mathrm{e} \\ \mathrm{f} \\ \hline\end{array}$.

4. *Bhágápaváha* (*bhāgāpavāha*, tj. „oddělení zlomků“) mohlo znamenat
   a) *rúpa-bhágápaváha* (*rūpa-bhāgāpavāha*, tj. „oddělení přirozeného čísla a zlomku“), tedy $\left(a - \frac{b}{c}\right)$, v zápisu $\begin{array}{|c|}\hline \mathrm{a} \\ \bullet\mathrm{b} \\ \mathrm{c} \\ \hline\end{array}$ nebo

b) *bhága-bhágápaváha* (*bhāga-bhāgāpavāha*, tj. „oddělení dvou nebo více zlomků“), tedy $\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}\right)$ či $\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}-\frac{e}{f}\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}\right)\right)$, které se zapisovaly $\begin{array}{|c|}\hline \mathrm{a}\\ \mathrm{b}\\ \hline \mathrm{c}\\ \mathrm{d}\\ \hline\end{array}$ nebo $\begin{array}{|c|}\hline \mathrm{a}\\ \mathrm{b}\\ \hline \bullet\mathrm{c}\\ \mathrm{d}\\ \hline \bullet\mathrm{e}\\ \mathrm{f}\\ \hline\end{array}$.

Kromě těchto tříd uváděli někteří autoři ještě další dva typy.

5. *Bhágabhága* (*bhāga-bhāga*, tj. „složené zlomky“) neboli výrazy, které naznačovaly dělení $\left(a:\frac{b}{c}\right)$ nebo $\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)$. Zápis byl stejný jako pro třídu *bhāgabhāgānubandha*, tedy $\begin{array}{|c|}\hline \mathrm{a}\\ \mathrm{b}\\ \mathrm{c}\\ \hline\end{array}$ nebo $\begin{array}{|c|}\hline \mathrm{a}\\ \mathrm{b}\\ \hline \mathrm{c}\\ \mathrm{d}\\ \hline\end{array}$.

Je zajímavé, že v zápisu se nikde neobjevoval symbol pro dělení. To, že se má dělit, vyplývalo ze zadání problému.[103]

6. *Bhágamátr* (*bhāga-mātṛ*) neboli kombinace tvarů uvedených výše. Mahávíra poznamenal, že těchto kombinací může být 26. Zřejmě tedy už byly známé postupy na výpočet kombinací. Jestliže bylo 5 základních tříd, pak celkový počet kombinací je 26, neboť

$$C_2(5)+C_3(5)+C_4(5)+C_5(5)=\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=10+10+5+1=26\,.$$

Pravidla pro zjednodušení prvních dvou tříd jsou pravidly pro sčítání nebo odčítání a násobení zlomků, úpravy výrazů *rúpa-bhágánubandha* a *rúpa-bhágápaváha* odpovídaly přičítání nebo odčítání zlomku od celého čísla.

Pravidla pro zjednodušení třídy *bhága-bhágánubandha* a *bhága-bhágápaváha* popsal Brahmagupta takto:[104]

BrSpSi/xii.9
Horní jmenovatel se vynásobí jmenovatelem a horní čitatel tím stejným [jmenovatelem] *zvětšeným nebo zmenšeným o svého vlastního čitatele.*

---

103 Pouze v rukopisu *Bakhšálí* se někdy před příslušnou veličinu nebo za ni uváděl výraz *bhā* (zkratka vytvořená ze slova *bhājana* nebo *bhāga-hāra*, což byly výrazy pro dělení).

104 Podle [Col], str. 282.

Tedy $\begin{array}{|c|}\hline a\\ b\\ \hline c\\ d\\ \hline\end{array}$ nebo $\begin{array}{|c|}\hline a\\ b\\ \hline \bullet c\\ d\\ \hline\end{array}$ v dnešní symbolice znamená:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot (d \pm c)}{b \cdot d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d \pm c}{d}$$

Podobná pravidla zformuloval také Šrídhara,[105] který uvedl následující příklady:[106]

PaGa/Ex.19
Jaký je součet $3\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 3\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \left(3\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 3\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)$?

Toto bylo zapsáno jako $\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & \\ 1 & 1\\ 2 & 2\\ \hline 1 & 1\\ 4 & 3\\ \hline 1 & 1\\ 6 & 4\\ \hline\end{array}$.

Převedením smíšeného čísla na zlomek a přičtením jmenovatelů k čitatelům zlomků ve dvou dolních řádcích, tj. vyjádřením výrazu $\frac{d+c}{d}$ z pravidla, se dostalo

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 7 & 1\\ 2 & 2\\ \hline 5 & 4\\ 4 & 3\\ \hline 7 & 5\\ 6 & 4\\ \hline\end{array}.$$

Nyní se vypočítaly součiny zlomků v každém sloupci:

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{245}{48} \quad \text{(v levém sloupci)} \quad \text{a} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{20}{24} \quad \text{(v pravém sloupci)},$$

které se zapsaly vedle sebe $\begin{array}{|c|c|}\hline 245 & 20\\ 48 & 24\\ \hline\end{array}$

a převedly na společného jmenovatele, tj. provedla se operace *savarnana*, tedy

$\begin{array}{|c|c|}\hline 245 & 40\\ 48 & 48\\ \hline\end{array}$.

Nakonec se zlomky sečetly a tím se získal výsledek $\frac{285}{48}$ neboli $5\frac{15}{16}$.

[105] Viz sloky PaGa/39–40, podle [Shu1], str. 19.
[106] Podle [Shu1], str. 20, 22.

PaGa/Ex.23

Kolik je výsledek, jestliže jedna polovina, jedna čtvrtina z jedné čtvrtiny, jedna dělená jednou třetinou, polovina plus polovina ze sebe, jedna třetina zmenšená o jednu polovinu ze sebe, se dá dohromady?

Problém, který bychom dnes zapsali jako

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)+\left(1:\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right),$$

byl v indické symbolice vyjádřen takto:[107]

<table>
<tr><td rowspan="2">1
2</td><td rowspan="2">1
4</td><td rowspan="2">1
4</td><td rowspan="2">1
1
3</td><td>1
2</td><td>1
3</td></tr>
<tr><td>1
2</td><td>•1
2</td></tr>
</table>

Při zápisu výrazů se zlomky je zřejmá nejednoznačnost: Zápis $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ \hline\end{array}$ mohl být interpretován jako $(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4})$ stejně jako $(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})$, podobně vyjádření $\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ 1 \\ 3 \\ \hline\end{array}$ mohlo znamenat $(1:\frac{1}{3})$, ale také $(1\frac{1}{3})$. Správný význam zápisu bylo nutno poznat z kontextu podle formulace problému.

Kmenné zlomky

Mahávíra popsal několik pravidel, v nichž počítal s kmennými zlomky. Tato pravidla se nevyskytovala v žádné jiné práci, snad proto, že je ostatní autoři nepovažovali za užitečná a důležitá.

a) Vyjádření jedničky jako součtu n kmenných zlomků.[108]

GaSaSa/iii.75

Když součet různých veličin, jejichž čitatelé jsou 1, *je roven* 1, [požadovaní] *jmenovatelé jsou takoví, že počínaje jedničkou jsou postupně násobení* 3, *první a poslední se vynásobí ještě* 2 *a* $\frac{2}{3}$.

Tedy

$$\begin{aligned}1&=\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-2}}+\frac{1}{\frac{2}{3}\cdot 3^{n-1}}=\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-2}}+\frac{1}{2\cdot 3^{n-2}}=\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3^{n-2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1-(\frac{1}{3})^{n-2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3^{n-2}+1}{2\cdot 3^{n-2}}+\frac{3^{n-2}-1}{2\cdot 3^{n-2}}=\frac{2\cdot 3^{n-2}}{2\cdot 3^{n-2}}\,.\end{aligned}$$

[107] Podle [DS1], str 192.

[108] Podle [Ran], str. 54.

Při úpravě byl použit vzorec pro součet $n-2$ členů (prostřední sčítanci v rozepsaném součtu) geometrické posloupnosti s prvním členem rovným $\frac{1}{3}$ a kvocientem také $\frac{1}{3}$.

b) Vyjádření jedničky jako součtu lichého počtu kmenných zlomků. Metoda má smysl, pokud jsou zlomky alespoň tři ($2n-1$ pro $n \geq 2$), přičemž poslední z nich musí být roven $\frac{1}{n}$, i když se o tom pravidlo nezmiňuje.[109]

GaSaSa/iii.77
Když součet veličin [zlomků], *jejichž čitatelé jsou* 1, *je roven* 1, *jmenovatelé jsou takoví, že počínaje dvojkou pokračuje se zvyšováním o jednu, každý se násobí tím, co* [bezprostředně] *následuje, a* $\frac{1}{2}$.

Jednoduchou úpravou se můžeme snadno přesvědčit o platnosti vzorce:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2\cdot 3\cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot \frac{1}{2}} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n\cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{2n\cdot \frac{1}{2}} = \\
&= 2\left(\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n} + \frac{1}{2n}\right) = \\
&= 2\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n}\right] = 2\cdot \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

c) Vyjádření kmenného zlomku jako součtu několika zlomků, jejichž čitatelé jsou daní.[110]

GaSaSa/iii.78
Když součet [určitých zlomků] *má jedničku jako čitatele, pak jmenovatel prvního* [z daných sčítanců] *je jmenovatelem součtu, jmenovatel následujícího je tento* [jmenovatel] *sloučený se svým čitatelem a tak dále; a pak se násobí* [každý jmenovatel] *následujícím, poslední je násobený svým vlastním čitatelem.* [To dává požadované jmenovatele.]

Zlomek $\frac{1}{n}$ tedy vyjádříme jako součet p zlomků, přičemž jejich čitatelé jsou dané hodnoty $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_p$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} =& \frac{a_1}{n(n+a_1)} + \frac{a_2}{(n+a_1)(n+a_1+a_2)} + \frac{a_3}{(n+a_1+a_2)(n+a_1+a_2+a_3)} + \\
&+ \cdots + \frac{a_{p-1}}{(n+a_1+a_2+\cdots+a_{p-2})(n+a_1+a_2+\cdots+a_{p-1})} + \\
&+ \frac{a_p}{(n+a_1+a_2+\cdots+a_{p-1})a_p}\,.
\end{aligned}$$

[109] Podle [Ran], str. 55.
[110] Podle [Ran], str. 56.

Pro speciální volbu $a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 1$ dostáváme součet kmenných zlomků.

d) Vyjádření libovolného zlomku jako součtu kmenných zlomků. Pravidlo zní:[111]

GaSaSa/iii.80
Jmenovatel [daného zlomku] *když se sloučí s vhodně vybraným číslem, vydělí se čitatelem beze zbytku,* [podíl] *se stává jmenovatelem prvního čitatele,* [který je 1] *vhodně zvolená veličina, když se dělí tím* [podílem] *a jmenovatelem součtu, je zbytek. Na zbytek se aplikuje stejný postup.*

Označíme-li daný zlomek $\frac{a}{b}$ a i je číslo vybrané tak, aby platilo $\frac{b+i}{a} = n$, kde n je celé číslo, pravidlo říká:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n} + \frac{i}{n \cdot b} = \frac{b+i}{n \cdot b} = \frac{b+i}{n} \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}\,.$$

První zlomek je kmenný ($\frac{1}{n}$), podobný postup se použije na zbytek ($\frac{i}{n \cdot b}$), tím se získá další kmenný zlomek. Výsledek závisí na tom, jak byla zvolena konstanta i.

e) Vyjádření kmenného zlomku jako součtu dvou jiných kmenných zlomků. Pravidlo zní:[112]

GaSaSa/iii.85
(i) *Jmenovatel daného kmenného zlomku násobený vhodně vybraným číslem je* [prvním] *jmenovatelem a tento dělený dříve vybraným číslem zmenšeným o* 1 *dává dalšího; nebo*
(ii) *dva jmenovatelé jsou dělitelé jmenovatele daného kmenného zlomku, každý násobený jejich součtem.*

Pravidla můžeme zapsat takto:

(i) $$\frac{1}{n} = \frac{1}{p \cdot n} + \frac{1}{\frac{p \cdot n}{p-1}}\,.$$

Přirozené číslo p je zvolené tak, aby n bylo dělitelné číslem $p-1$.

(ii) $$\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)}\,.$$

Mahávíra ve čtvrté kapitole práce *Ganitasárasamgraha* ještě klasifikoval různé typy úloh, které obsahovaly zlomky, a popsal algoritmy jejich řešení.

[111] Podle [Ran], str. 57.
[112] Podle [Ran], str. 58.

Tyto úlohy bychom dnes řadili do algebry, protože vedly na řešení rovnic s jednou neznámou. Jednalo se například o úlohy typu: Každá z n různých částí celku má nějakou určitou vlastnost a ještě zbývá c. Kolik prvků tvořilo celek? Úloha může být vyjádřena rovnicí

$$\left(1-\frac{a}{b}\right)x=c\,,\qquad \text{odtud}\qquad x=\frac{c}{1-\frac{a}{b}}\,,$$

kde zlomek $\frac{a}{b}$ je součtem všech n částí s uvedenou vlastností. Tímto způsobem také Mahávíra řešení vyjadřoval.

Zlomky měly v indické matematice důležité místo, pravidla pro počítání se zlomky byla pečlivě roztříděna, podrobně popsána a demonstrována na příkladech.

Se zlomky počítala i egyptská matematika; jak už bylo řečeno, egyptští počtáři používali kmenné zlomky, k nimž se připojoval ještě zlomek $\frac{2}{3}$. V Mezopotámii se používaly šedesátinné zlomky, tj. zlomky, jejichž jmenovatelé byli ve tvaru 60^n, kde $n \in \mathbb{N}$. Dochovaly se tabulky reciprokých hodnot, v nichž byly uvedeny některé kmenné zlomky (viz [BBV]).

Dobře propracovanou teorii počítání se zlomky měli staří Číňané, kteří používali zlomky typu $\frac{p}{q}$, kde p, $q \in \mathbb{N}$. Speciální názvy a znaky měli jen pro nejčastěji používané zlomky $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, tzv. malá polovina, $\frac{2}{3}$, tzv. velká polovina, jinak zlomek zapisovali jako „p z q dílů“ (viz [Hu], [Ju]). Operace se zlomky se prováděly na počitadle a přitom se využívalo krácení zlomků.

Ve starém Řecku se pracovalo se zlomky $\frac{p}{q}$, kde p, $q \in \mathbb{N}$, k jejich zápisu se používala, stejně jako u přirozených čísel, písmena abecedy. K odlišení sloužil většinou apostrof; například γ, tj. třetí písmeno řecké abecedy, znamenalo 3, γ' značilo $\frac{1}{3}$, někdy se zapisoval jmenovatel nad čitatele (viz např. [Hea]).

V arabských zemích se používaly kmenné zlomky; pro ty, jejichž jmenovatel byl menší nebo roven deseti, existovaly speciální názvy, proto se jim někdy říkalo „vyslovitelné“, zatímco ostatní zlomky byly „nevyslovitelné“, neboť jejich hodnota byla opsána (např. $\frac{1}{13}$ byla vyjádřena jako „jedna část ze třinácti“, $\frac{3}{17}$ jako „tři části ze sedmnácti“). Zlomky typu $\frac{p}{q}$ se vyjadřovaly, asi podle egyptského vzoru, jako součty kmenných zlomků. Al-Chwárizmí počítal především se šedesátinnými zlomky, které zapisoval, stejně jako v Indii, pod sebou – nahoru stupně, pod ně minuty, dolů vteřiny (viz [Ju]).

Společně s desítkovou poziční soustavou se do Evropy dostaly i šedesátinné zlomky, které se používaly zejména při astronomických výpočtech. V Evropě se však příliš neujaly, kromě astronomických a trigonometrických výpočtů se používaly převážně zlomky kmenné. K prosazení desetinných zlomků v Evropě napomohla snaha o určení přibližné hodnoty iracionálních čísel, např. $\sqrt{2}$, a trigonometrické výpočty. Desetinné zlomky jako první uvedl německý astronom a matematik Johannes Müller zvaný Regiomontanus (1436 – 1476) ve svých trigonometrických tabulkách. O systematické zavedení desetinných zlomků se zasloužil holandský kupec, matematik a inženýr Simon Stevin (1548 – 1620), který vydal v roce 1585 vlámsky psanou brožurku *Desetina*. Název zlomek se objevil v Evropě jako překlad arabského slova *kasr* (rozbitý, zlomený), v překladu al-Chwárizmího spisu je uveden termín *fractio* (viz [Sis]).[113] Zlomky se většinou zapisovaly pomocí velké tečky, například zlomek $\frac{3}{4}$ byl vyjádřen jako $\frac{3}{4}\bullet$. Zlomková čára se poprvé objevila u Leonarda Pisánského v roce 1202 (viz [BeM2]). Desetinné zlomky ve tvaru desetinných čísel zavedl al-Káší, používal přitom několik způsobů, například oddělil celou část svislou čarou nebo zapisoval desetinná místa jinou barvou (viz [Ju]).

7.11 Pravidlo tří

Indický název pro pravidlo tří byl *trairášika* (tři členy), toto pravidlo bylo řazeno mezi aritmetické operace. O původu jeho názvu napsal Bháskara I.:[114]

> *Zde jsou nutné tři veličiny (ve tvrzení a počítání), proto se metoda nazývá trai-rāśika (pravidlo tří členů).*

Pravidlo řeší úlohy na přímou úměrnost: jestliže P dává F, kolik dá I? Dnes se podobné úlohy vyjádří rovností poměrů

$$x : F = I : P\,, \qquad \text{odtud} \qquad x = \frac{F \cdot I}{P}\,. \tag{7.3}$$

Tři dané členy jsou označeny P podle slova *pramána* (*pramāṇa*, tj. důvod), F podle slova *phala* (*phala*, tj. výsledek) a I podle slova *iččhá* (*icchā*, tj. požadavek). Tyto názvy se vyskytovaly ve všech matematických dílech, někdy se jim však říkalo jen první, druhý a třetí, protože v tomto pořadí se dané veličiny zapisovaly do řádku: $P \mid F \mid I$. Úměru (7.3) snadno upravíme do tvaru $P : F = I : x$, kde pořadí známých veličin odpovídá indickému vyjádření. Pouze Árjabhata II. na rozdíl od ostatních používal názvy *mána* (*māṇa*), *vinimaja* (*vinimaya*) a *iččhá*. Většina autorů při popisu pravidla upozorňovala na to, že první a třetí člen jsou stejného typu. Například Mahávíra uvedl:[115]

> **GaSaSa/v.2** (část)
> *V pravidle tří se součin členů phala a iččhá dělený členem pramána stává* [hledaným] *řešením, když iččhá a pramána jsou podobné* [tj. přímo úměrné].

Pravidlo tří bylo ve staré Indii velmi ceněné, protože bylo snadné a bylo možné je jednoduchým způsobem použít při řešení běžných problémů. Varáhamihira napsal:[116]

> *Jestliže Slunce vykoná jednu otáčku za rok, kolik vykoná za daný počet dní? Copak i nevzdělaný člověk nevypočítá takové problémy jednoduchým čmáráním kouskem křídy?*

[113] Z latinského *frangere*, tj. lámat, rozbíjet, drobit.
[114] Ve svém komentáři k práci *Árjabhatíja*, podle [DS1], str. 204.
[115] Podle [Ran], str. 86.
[116] Podle [DS1], str. 209.

Za pravidlem tří bývalo uvedeno několik příkladů na procvičení, například komentátor práce *Bráhmasphutasiddhánta* uvedl:[117]

Člověk daruje sto osm krav za tři dny, kolik dobytka věnuje za rok a měsíc?

Vyjádření: Dny 3*, krávy* 108*, dny* 390.

Odpověď: 14 040.

Podle vyjádření je $P = 3$, $F = 108$, $I = 390$ a podle uvedeného postupu se hledaný počet krav x počítal ze vzorce

$$x = \frac{108 \cdot 390}{3} = 14\,040\,.$$

Před vlastním výpočtem bylo často potřeba převádět jednotky, aby první a třetí člen (P a I) byly vyjádřeny ve stejných jednotkách. V tomto příkladu byl rok (360 dní) a měsíc (30 dní) vyjádřen jako 390 dní.

7.12 Obrácené pravidlo tří

Toto pravidlo se nazývalo *vjastatrairášika* (obrácené pravidlo tří členů).[118] Za pravidlem tří byla většinou uvedena poznámka, že tato operace by měla být obrácená, jestliže úměrnost je nepřímá. Mahávíra napsal:[119]

GaSaSa/v.2 (část)
V případě, že [úměrnost] *je nepřímá, tato operace* [zahrnující násobení a dělení] *je obrácená* [tak, aby dělení bylo místo násobení a násobení místo dělení].

Výsledek F se musí násobit důvodem P a dělit požadavkem I. Obrácené pravidlo tří řeší úlohy na nepřímou úměrnost; hledalo se číslo x z rovnice

$$x : F = P : I\,, \qquad \text{odtud} \qquad x = \frac{F \cdot P}{I}\,.$$

Následující příklad předložil Bháskara II.:[120]

Lila/iii.78
Hromada pšenice byla měřena měrkou o objemu sedm ádhaka. Jestliže jich bylo nalezeno sto, jaký bude výsledek s měrkou o objemu pět ádhaka?

Vyjádření: 7 100 5. *Odpověď* 140.

[117] Podle [Col], str. 283. V příkladu se předpokládalo, že rok má 360 a měsíc 30 dní.

[118] Někdy se uváděl též název *vilómatrairášika* (*vyloma-trai-rāśika*).

[119] Podle [Ran], str. 86.

[120] Podle [Col], str. 35. Jednotka objemu *ádhaka* (*āḍhaka*) se používala k měření obilí, odpovídala asi 3 kg.

V komentáři bylo vysvětleno, že když se zvětší měrka, jejich počet bude menší, a naopak, budou-li se měrky zmenšovat, bude jich potřeba více. Tím byla zdůvodněna metoda obráceného pravidla tří, protože mezi počtem měrek a jejich obsahem je nepřímá úměra. Výpočet probíhal podle popsaného pravidla s danými hodnotami $P = 7$, $F = 100$, $I = 5$, proto se vypočítalo

$$x = \frac{100 \cdot 7}{5} = 140\,.$$

7.13 Pravidlo pěti, sedmi, devíti, jedenácti

Složené úměry byly řešeny pomocí dvojitého pravidla tří, tj. pravidla pěti, kterému se říkalo *paňčarášika*, případně pravidla sedmi nazvaného *saptarášika*, pravidla devíti neboli *navarášika* či pravidla jedenácti, tzv. *ékádašarášika*, podle toho, kolika členů se problém týkal. Tyto metody se někdy sdružovaly pod obecným názvem pravidlo lichých členů. V takových úlohách byly dány dvě skupiny členů. První, která byla kompletní, se nazývala *pramána pakša* (*pramāṇa pakṣa*, tj. strana důvodu), druhé, v níž jeden člen chyběl, se říkalo *iččhá pakša* (*icchā pakṣa*, tj. strana požadavku).

Problémy řešené pravidlem pěti by se mohly řešit dvojnásobným užitím pravidla tří, které pravidlo pěti slučovalo do jednoho vztahu. Jednalo se o úlohy typu: Jestliže P_1 dává F_1 za P_2, kolik dá I_1 za I_2? Dnes bychom členy zapsali do řádku a řešili složenou trojčlenkou, indický postup byl podobný, jen se odpovídající členy zapisovaly do sloupců, v prvním byly všechny hodnoty známé (strana důvodu), ve druhém se musel jeden člen dopočítat (strana požadavku). V indickém zápisu tedy sloupce obsahovaly tyto veličiny:

$$\begin{array}{cc} P_1 & I_1 \\ P_2 & I_2 \\ F_1 & x \end{array}$$

Pro větší přehlednost se hodnoty někdy ještě oddělovaly čarami.

Podle indického pravidla se vyměnily členy v posledním řádku a neznámá se vypočítala jako podíl součinů ve sloupcích

$$\begin{array}{cc} P_1 & I_1 \\ P_2 & I_2 \\ x & F_1 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{I_1 I_2 F_1}{P_1 P_2}\,.$$

Bháskara II. metodu vyjádřil takto:[121]

Lila/iii.79
V pravidlech pěti, sedmi, devíti nebo více členů přemísti phala [výsledek] *a jmenovatele* [existuje-li] *na druhou stranu, součin větší skupiny členů dělený součinem menší skupiny dává výsledek* [nebo vytvoří požadavek].

[121] Podle [Col], str. 35.

Postup výpočtu dokresluje příklad převzatý z *Līlávatí*:[122]

Lila/iii.80
Jestliže úrok ze sta za jeden měsíc je pět, jaký bude úrok ze šestnácti za dvanáct měsíců?

První skupina členů (strana důvodu – *pramána pakša*) obsahovala hodnoty

$$100\,, \qquad 1\ (\text{měsíc})\,, \qquad 5\,.$$

Druhá skupina členů (strana požadavku – *iččhá pakša*) byla

$$16\,, \qquad 12\ (\text{měsíců})\,, \qquad x\,.$$

Nyní se členy zapsaly do „buněk“:[123]

100	16
1	12
5	○

Zde je 5 „výsledek“ první strany a na druhé straně je výsledek neznámý, jejich záměnou se dostalo:

100	16
1	12
○	5

Skupina s větším počtem členů byla ve druhém sloupci, součin těchto členů se vydělil součinem členů menší skupiny v prvním sloupci a tím se získalo řešení, které autor upravil a vyjádřil smíšeným číslem

$$x = \frac{16 \cdot 12 \cdot 5}{1 \cdot 100} = \frac{960}{100} = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}\,.$$

Pravidlo tří, resp. pravidlo pěti se často užívalo při řešení úloh o úrocích. Úvodní část příkladu (*úrok ze sta za jeden měsíc je pět*) udává vlastně dnešní úrokovou míru.[124]

Pravidlo tří se z Indie rozšířilo na západ, vyskytovalo se v arabských dílech, používali je autoři ve středověké Evropě, kteří přijali indický název pravidlo tří i stejný způsob zápisu členů do řádku. Pro svoji praktičnost bylo jedním z oblíbených témat středověké matematiky, protože v běžném životě se vyskytuje mnoho úloh založených na přímé nebo nepřímé úměrnosti.

V čínské *Matematice v devíti kapitolách* je uvedena řada praktických příkladů řešených pomocí pravidla tří.

---

[122] Podle [Col], str. 36.

[123] Neznámá byla označena kroužkem, podle [DS1], str. 213, v některých komentářích zůstávalo místo prázdné.

[124] Ve starých indických úlohách bývala úroková míra vyjádřena pomocí míry kapitálu K, míry doby úročení T a míry úroku U, tomu odpovídala úroková míra vyjádřená desetinným číslem $i = \frac{U}{KT}$ nebo v procentech $p = \frac{U}{KT} \cdot 100$. Více je v části o úrocích, viz odstavec 7.16.4.

Al-Bírúní věnoval pravidlu tří samostatnou práci *O indických rášíkátech* (*Fī rāshikāt al-Hind*), v níž vysvětloval, že pravidlo je možné provést s libovolným lichým počtem členů. Při výkladu se odvolával na Eukleida a jeho komentátory, jejichž poznatky se snažil uplatnit při dokazování (viz [Ju]).

7.14 Výměnný obchod

Indický název směny byl *bhánda-prati-bhánda*.[125] Všechny aritmetické práce obsahovaly problémy týkající se výměny zboží, tj. hledalo se řešení úloh tohoto typu: Jestliže můžeme koupit n_1 kusů určitého zboží za částku p_1 a n_2 kusů jiného zboží za částku p_2, kolik kusů x druhého zboží můžeme vyměnit za m_1 kusů zboží prvního druhu? Dnes bychom takovou úlohu řešili rovnicí

$$x\frac{p_2}{n_2} = m_1\frac{p_1}{n_1} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{p_1\, n_2\, m_1}{p_2\, n_1}\,.$$

Autoři upozorňovali, že problémy výměnného obchodu mohou být řešeny pravidlem tří, pěti atd. Platí zde ovšem úměra nepřímá – za stejnou cenu se dražšího zboží pořídí méně, proto bylo nutné pravidlo upravit. Brahmagupta to formuloval takto:[126]

BrSpSi/xii.13
Při výměně zboží se nejprve vymění ceny na prvním místě a další postup je stejný jako předchozí přímý [pro pravidlo tří nebo více členů].

Příklady, které sloužily k procvičení pravidla, jsou podobné, uvedeme například ten, který předložil Bháskara II.:[127]

Lila/iii.86
Kdyby bylo tři sta kusů manga na tomto trhu za jedno dramma a třicet zralých granátových jablek za pana. Řekni rychle, příteli, kolik granátových jablek by mělo být směněno za 10 kusů manga.

Před vlastním výpočtem se nejprve musely ceny převést na stejnou jednotku podle vztahu 1 *dramma* = 16 *panů*. Potom se odpovídající členy zapsaly pod sebe tak, že v prvním řádku byly ceny

16	1
300	30
10	○

a jejich pořadí se vyměnilo

1	16
300	30
10	○

. Tím byla tabulka připravená pro provedení pravidla

[125] Doslova „hrnec proti hrnci“, zde je však výstižnější překlad „zboží za zboží“.
[126] Podle [Col], str. 285.
[127] Podle [Col], str. 38.

pěti, tj. vyměnily se výsledky

1	16
300	30
○	10

a vypočítal se součin členů větší skupiny, který se vydělil součinem členů menší skupiny. Hledaný počet granátových jablek se tedy počítal ze vztahu

$$x = \frac{16 \cdot 30 \cdot 10}{1 \cdot 300} = \frac{4800}{300} = 16\,.$$

Pravidlo bylo oblíbené, protože mělo praktické uplatnění v běžném životě, v aritmetických textech najdeme mnoho podobných příkladů. V Evropě Leonardo Pisánský v knize *Liber abaci* formuloval různé úlohy kupeckých počtů založené na stejném principu jen s tím rozdílem, že veličiny příslušné jednomu druhu zboží zapisoval do řádku místo do sloupce (viz [BeJ1b]).

7.15 Určení

Indické aritmetické práce obsahovaly kromě aritmetických operací také osm určení, z nichž první část obsahovala úlohy různých typů. Mezi takové úlohy patřily příklady týkající se úroků, dělení v daném poměru, nákupu a prodeje, jemnosti zlata.[128] Některé úlohy vyžadovaly řešení kvadratických rovnic, proto byla v této části uvedena některá pravidla na jejich řešení. Na rozdíl od algebry, kde byla pravidla zformulována obecně, v aritmetických kapitolách bylo uvedeno pravidlo pro řešení daného konkrétního problému. Bháskara II. mezi určení zařadil i permutace a kombinace. Druhé určení se týkalo posloupností, zbývajících šest řešilo různé problémy z geometrie – měření obvodu a obsahu základních rovinných útvarů, výpočty objemů výkopů, hromad cihel, hromad písku, práce při řezání dřeva a měření pomocí stínů.

7.16 Různé úlohy

Indické aritmetické práce obvykle obsahovaly část zvanou *mišraka*, ve které byly uvedeny úlohy týkající se různých témat. V této části byla popsána i některá další pravidla, jež byla k jejich řešení potřebná, i když bychom je považovali spíš za algebraická. Jde hlavně o metodu chybného předpokladu.

7.16.1 Metoda chybného předpokladu

Metoda chybného (falešného) předpokladu, kterou znali už ve 2. tis. př. n. l. ve starém Egyptě a Mezopotámii (viz např. [BBV]), byla popsána ve všech starých indických matematických knihách. Většinou se užívala k řešení rovnice typu

$$ax = b\,, \tag{7.4}$$

[128] Jemnost zlata vyjadřovala jeho kvalitu, viz odstavec 7.16.6.

kde se s její pomocí obcházelo přímé dělení. Rovnice (7.4) se podle metody chybného předpokladu řešila tak, že se zvolilo za x libovolné číslo x^*, vypočítal se součin $ax^* = b^*$ a pokud $b^* \neq b$, řešení původní rovnice se vyjádřilo ze vztahu

$$x = \frac{b \cdot x^*}{b^*}\,. \tag{7.5}$$

Při vhodné volbě hodnoty x^* byl výpočet neznámé ze vztahu (7.5) jednodušší než ze vztahu $x = \frac{b}{a}$.

Bháskara II. metodu chybného předpokladu nazýval *ištakarman* (*iṣṭakarman*, tj. pravidlo předpokladu) a považoval ji za důležitou. Napsal o ní toto:[129]

Lila/iii.50
S jakýmkoli číslem zvoleným podle libosti se zachází, jak bylo stanoveno v konkrétním problému, násobí se a dělí, zvětšuje nebo zmenšuje o zlomek [sebe], *pak daná veličina násobená zvoleným číslem a dělená tím* [co bylo nalezeno] *dává hledané číslo. Toto se nazývá metoda předpokladu.*

K uvedenému pravidlu komentátor Ganéša připojil poznámku, že metoda používá pouze násobení, dělení a zlomky.

Metodou chybného předpokladu se řešila například následující úloha.[130]

Lila/iii.52
Z hromady pravých lotosových květů byly třetina, pětina a šestina obětovány pro bohy Šivu, Višnu a Súrju a čtvrtinu dostal darem Bhavání. Zbývajících šest bylo darováno ctihodnému učiteli. Řekni rychle počet lotosů.

Vyjádření: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, *známo* 6.

Zvolí se jedno libovolné číslo a podle procesu popsaného dříve je nalezeno množství 120.

Daný problém můžeme vyjádřit rovnicí

$$\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) x = 6\,, \qquad \text{odtud} \qquad \frac{x}{20} = 6 \qquad \text{a} \qquad x = 120\,.$$

Podle původního postupu se zvolilo číslo $x^* = 60$, tím byl patrně nejmenší společný násobek jmenovatelů.

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{5} - \frac{x}{6} - \frac{x}{4} = 6, \qquad x^* = 60\,,$$

[129] Podle [Col], str. 23.
[130] Podle [Col], str. 24.

po dosazení

$$60 - 20 - 12 - 10 - 15 = 3, \qquad b^* = 3\,,$$

a tedy podle (7.5)

$$x = \frac{6 \cdot 60}{3} = 120\,.$$

V rukopisu *Bakhšálí* byla metoda chybného předpokladu využita i při řešení rovnice

$$ax + b = c\,.$$

Libovolně zvolená hodnota x^* se dosadila za x do rovnice a stanovila se pravá strana

$$ax^* + b = c^*\,.$$

Pokud $c^* \neq c$, což bylo pravděpodobné, bylo potřeba provést „opravu". Správná hodnota x se vypočítala ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned} ax + b &= c\,, \\ ax^* + b &= c^*\,. \end{aligned}$$

Odečtením rovnic a snadnou úpravou se získalo

$$x = x^* + \frac{c - c^*}{a}\,. \tag{7.6}$$

Na listu s označením folio 29 recto (viz obr. 7.2) je příklad řešený metodou chybného předpokladu. Lístek je však silně poškozen, proto je úloha čitelná jen zčásti, snad by se dala vyjádřit takto:[131]

BMs/29R
[Tři lidé mají určité bohatství.] *Bohatství prvního a druhého dá dohromady množství* 13, *bohatství druhého a třetího dohromady je* 14 *a bohatství prvního a třetího společně je* 15. *Řekni bohatství každého.*

Měla se tedy vyřešit soustava lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 13\,, \\ x_2 + x_3 &= 14\,, \\ x_3 + x_1 &= 15\,. \end{aligned}$$

Pokud se od druhé rovnice odečte první, dostaneme $x_3 - x_1 = 1$. Z této rovnice pak můžeme vyjádřit x_3 a dosadit do třetí rovnice. Tím získáme

$$2x_1 + 1 = 15\,.$$

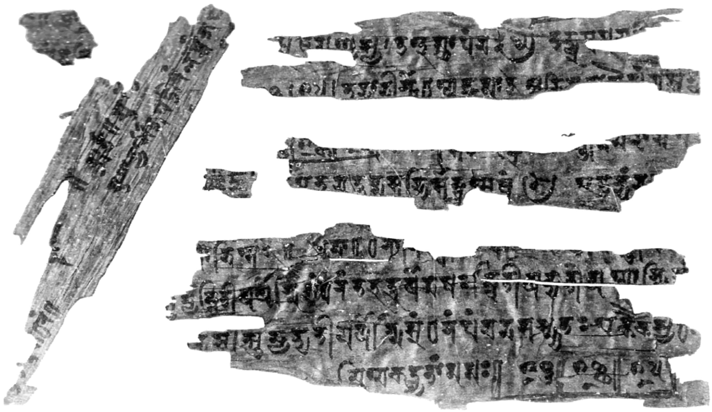
[131] Podle [DS2], str. 47.

Tato rovnice je jednoduchá, mohla by se řešit přímo. Příklad však měl pravděpodobně sloužit jako „demonstrační", proto se pro řešení této rovnice užila metoda chybného předpokladu.

Zvolilo se $x_1^* = 5$ a postupným dosazením do první a druhé rovnice se dopočítalo $x_2^* = 8$ a $x_3^* = 6$. Pak by však třetí rovnice byla $5 + 6 = 11$ ($\neq 15$). Nyní se užitím metody chybného předpokladu vypočítala správná hodnota podle vzorce (7.6)

$$x_1 = 5 + \frac{15 - 11}{2} = 7\,,$$

z dalších rovnic se získaly správné hodnoty zbývajících neznámých $x_2 = 6$ a $x_3 = 8$.



(a)* . . ‖ sūtraṁ ‖ gu*ṇau* . . . . .

. . . kadhanaṁ ‖ guṇanyāsorūpahīnaṁlabdhaṁrūpaṁ

(b) prathamaṇyasya | tatrechchhāpaṁchaḥ | 5 | tatprathamacha . .

. 4 | 15 | tadādīśśodhayetkramāt *ādina* . . . *paṁchaśadv* .

(c) | 1/1 4 | 1 . | . . . . . kr . . . t . i . ch . ś .

*eta*chaturdaśabhiśoddhyaśeshaṁ | 6 | e . *npaṁcha*

(d) . . diset ‖ udā ‖ dhanā . . . .

. syadvitīyayonmiśraṁdhanaṁtatrattrayodashaḥ dvitīyatṛitīyayonmi .

. . . *śa* | ādyatṛitīyayonmiśraṁdhanaṁpaṁchadaśasmṛitaḥ ekaikasyadh*a*

. . . . . . chchhichekatthyatāṁmamaḥ ‖ 13/1 | 14/1 ‖ 15/1 ‖

Obr. 7.2: Rukopis *Bakhšálí*, folio 29 recto a jeho přepis[132]

Ve staré Číně se dokonce používalo pravidlo dvou chybných předpokladů. Při řešení rovnice $ax = b$ se za neznámou x postupně dosadila libovolná čísla

[132] Převzato z [Kay1].

x_1, x_2, tím se pravé strany změnily o určité chyby r_1, r_2:

$$ax_1 = b + r_1\,, \qquad\qquad ax_2 = b + r_2\,,$$

odtud se snadnou úpravou vyjádřilo řešení původní rovnice $x = \dfrac{x_1r_2 - x_2r_1}{r_2 - r_1}$.
Podobný postup se prováděl u rovnice $ax + b = c$ a rovněž při řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1\,,\\ a_2x + b_2y &= c_2\,. \end{aligned}$$

V *Matematice v devíti kapitolách* jsou takto řešeny pouze úlohy, kde chyby r_1, r_2 mají různá znaménka.[133]

Metoda dvou chybných předpokladů byla známá i v arabských zemích. V latinském překladu arabského rukopisu je odvolání na indický původ (viz [Ju]), přestože v indické matematice užívání pravidla dvou chybných předpokladů není doloženo.

7.16.2 Metoda inverze

Tato metoda se nazývala *vilómagati* (*viloma-gati*, tj. prováděná pozpátku)[134] a v Indii byla užívána už na počátku našeho letopočtu. Nalezneme ji v dílech různých autorů, například Bháskara II. uvedl:[135]

Lila/iii.47–48
Pravidlo inverze: dvě sloky.

K vyšetření veličiny, která je daná, udělej dělitele násobitelem, násobitele dělitelem; čtverec druhou odmocninou a druhou odmocninu čtvercem; sčítání odčítáním a odčítání sčítáním.

Jestliže se veličina měla zvětšit nebo zmenšit o svou část, ať jmenovatel zvětšený nebo zmenšený o čitatele se stane [správným] *jmenovatelem a čitatel zůstane nezměněn; a pak postupuj s ostatními operacemi obráceně, jak bylo doporučeno.*

Druhá část pravidla vyjadřuje násobení hledaného čísla zlomkem, tedy

$$x\left(1 \pm \frac{a}{b}\right) = c\,, \qquad x\,\frac{b \pm a}{b} = c\,,$$

operace k ní inverzní je násobení převrácenou hodnotou

$$x = c\,\frac{b}{b \pm a}\,.$$

[133] Například úlohy (7.9) až (7.20), podle [Hu], str. 175–184.
[134] Někdy byly užívány i jiné názvy, například *vilómavidhi* (*viloma-vidhi*) nebo *vilómakrijá* (*viloma-kriyā*).
[135] Podle [Col], str. 21.

Tímto způsobem se řešila například následující úloha:[136]

Lila/iii.49
Příklad. Krásná dívko s rozechvělýma očima, znáš-li správnou metodu inverze, řekni mi, které číslo násobené 3 *a pak zvětšené o své* $\frac{3}{4}$ *a dělené* 7 *a zmenšené o svou* $\frac{1}{3}$ *a pak násobené samo sebou a pak z toho součinu zmenšeného o* 52 *je získána druhá odmocnina a přičteno* 8 *a součet dělený* 10 *dává dva?*

Vyjádření: Násobitel 3. *Přídavek* $\frac{3}{4}$. *Dělitel* 7. *Úbytek* $\frac{1}{3}$. *Čtverec. Odečteno* 52. *Druhá odmocnina. Přičteno* 8. *Dělitel* 10. *Dané číslo* 2.

Odpověď. Doporučeným postupem je výsledek 28*, číslo je nalezeno.*

Bylo třeba nalézt řešení rovnice

$$\frac{\sqrt{\left[\frac{3x\,(1+\frac{3}{4})}{7}(1-\frac{1}{3})\right]^2-52}+8}{10}=2\,.$$

Podle pravidla se postupovalo „odzadu“ a jednotlivé operace se nahradily „inverzními“:

$$x=\frac{\sqrt{(2\cdot 10-8)^2+52}\cdot\frac{3}{2}\cdot 7\cdot\frac{4}{7}}{3}=28\,.$$

Pravidlo inverze dokládá, že autoři znali dvojice navzájem inverzních aritmetických operací a uměli je využít.

7.16.3 Operace samkramana

Bháskara II. uvedl pravidlo pro operaci *samkramana* (*saṃkramaṇa*),[137] tedy pravidlo pro (souběžné) nalezení dvou čísel, známe-li jejich součet a rozdíl.[138]

Lila/iii.55
Pravidlo souběhu: polovina sloky.
Součet a rozdíl sečtený a odečtený a rozpůlený dává ty dvě veličiny.
Toto se nazývá souběh.

Čísla a, b jsou daná a hledají se čísla x a y, pro která platí

$$x+y=a\,,$$
$$x-y=b\,.$$

[136] Podle [Col], str. 23.

[137] Někdy psáno též *sankramana* (*saṅkramaṇa*). Název je možno volně přeložit jako operace souběhu.

[138] Podle [Col], str. 26. Brahmagupta však podobná pravidla řadil do algebry, viz sloka BrSpSi/xiii.37, podle [Col], str. 340.

Řešení získáme sečtením, resp. odečtením rovnic

$$x = \frac{a+b}{2}, \qquad y = \frac{a-b}{2}.$$

Provedení operace *samkramana* s „a ve spojení s b“ znamenalo vypočítat čísla $x = \frac{1}{2}(a+b)$ a $y = \frac{1}{2}(a-b)$. Operace byla využívána v mnoha úlohách a její znalost byla pokládána za samozřejmou.

Podobné pravidlo, ve kterém se místo součtu vyskytuje rozdíl druhých mocnin, Bháskara II. nazval *višamakarman* (*viṣama-karman*) a popsal takto:[139]

> **Lila/iii.57**
> *Pravidlo odlišných operací: polovina sloky.*
> *Rozdíl čtverců dělený rozdílem čísel dává jejich součet: odkud jsou veličiny nalezeny způsobem dříve doporučeným.*

Hledá se tedy řešení soustavy, kde a a b jsou daná čísla:

$$x^2 - y^2 = a\,,$$
$$x - y = b\,.$$

Platí

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{a}{b}, \qquad \text{tedy} \qquad x + y = \frac{a}{b}$$

a použije-li se předchozí pravidlo, tj. provede-li se operace *samkramana*, dostaneme

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + b\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - b\right).$$

7.16.4 Úroky

Půjčování peněz bylo v Indii běžné už v dávných dobách, dokonce indický gramatik Pāṇini (kolem 500 př. n. l.) ve své *Gramatice* používal termíny úrok, zisk a daň. Úroková míra se v průběhu času, v různých lokalitách a mezi různými vrstvami lidí lišila, ale úrok 15 procent za rok byl považován za přiměřený.[140] Úrok byl měsíční a úroková míra byla obvykle daná ze sta, i když to nebylo pravidlem.[141]

V mnoha úlohách byla úroková míra popsána pomocí míry kapitálu K, míry doby úročení T a míry úroku U. Tomu odpovídá úroková míra vyjádřená desetinným číslem $i = \frac{U}{KT}$ nebo v procentech $p = \frac{U}{KT} \cdot 100$. Pro výpočet úroku u z kapitálu k za dobu úročení t se používal vzorec

$$u = k \cdot t \cdot i = k \cdot t \cdot \frac{U}{KT}\,,$$

[139] Podle [Col], str. 26
[140] Podle [DS1].
[141] Některé staré indické úlohy z finanční matematiky jsou uvedeny v článku [Sy5].

podobným způsobem byl vyjádřen kapitál k, známe-li dobu úročení t a úrok u

$$k = \frac{u}{t \cdot i} = \frac{u}{t} \cdot \frac{KT}{U},$$

i doba úročení t, je-li dán kapitál k a úrok u

$$t = \frac{u}{k \cdot i} = \frac{u}{k} \cdot \frac{KT}{U}.$$

Pravidla pro řešení různých problémů týkajících se úroků bývala v knihách zařazena do oddílu nazvaného *mišrakavjavahára* (*miśraka-vyavahāra*, tj. smíšené úlohy). Obtížnost a počet úloh, které autoři tematice úroků věnovali, se však lišil. *Árjabhatíja* obsahovala jen jedno pravidlo vztahující se k úrokům, zatímco Mahávíra v díle *Ganitasárasamgraha* zformuloval 19 pravidel a doplnil je 35 příklady.

Jednoduché úlohy byly řešeny pomocí pravidla tří nebo pravidla pěti, některé složitější příklady vedly na kvadratické rovnice. Mahávíra v 6. kapitole výše zmíněné práce řešil i některé speciální teoretické problémy.

Brahmagupta popsal například pravidlo na výpočet doby úročení t, je-li dána míra úroku U z kapitálu k (zde platilo $K = k$) za míru doby úročení T, když se požaduje, aby výsledný kapitál byl n-násobkem původního, tj. aby součet kapitálu a úroku byl roven nk, tzn. $k + u = nk$, neboli hledala se doba úročení, za kterou je úrok roven $u = (n-1)k$.[142]

BrSpSi/xii.14 (část)
Kapitál se svým časem dělený úrokem a násobený násobkem zmenšeným o jedna je čas.

Uvedené pravidlo popisuje vzorec získaný pravidlem tří:

$$t = (n-1)\,\frac{kT}{U}.$$

To odpovídá vzorci $t = \frac{u}{ki}$, kde k je kapitál, i je úroková míra (v úloze zadaná jako $i = \frac{U}{kT}$) a u je úrok (pro který platí $u = (n-1)k$). Tedy

$$t = \frac{u}{ki} = \frac{(n-1)\,k}{k\frac{U}{kT}} = (n-1)\frac{kT}{U}.$$

Pro lepší pochopení pravidla připojil komentátor Prthúdakasvámin následující příklad:[143]

Jestliže úrok ze dvou set za měsíc je šest dramma, kdy se stejná částka ztrojnásobí?

[142] Podle [Col], str. 287.
[143] Podle [Col], str. 287.

Z uvedeného pravidla je zřejmé, že se počítalo podle vzorce

$$t = (3-1)\,\frac{200\cdot 1}{6} = \frac{400}{6} = 66\frac{2}{3} \quad \text{(měsíce)}\,.$$

Jiné Brahmaguptovo pravidlo řešilo tento problém: Částka zapůjčená se stejnou úrokovou mírou, která dává úrok U z kapitálu K za dobu úročení T, činí za t měsíců $m = k + u$. Kolik bylo zapůjčeno?[144]

BrSpSi/xii.14 (část)
Součet kapitálu a úroku dělený jedničkou přičtenou ke svému zisku je kapitál.

Podle pravidla se počítalo

$$k = \frac{m}{1 + t\frac{U}{KT}}\,.$$

Úroková míra je $i = \frac{U}{KT}$, pak úrok u, který se získá z neznámého kapitálu k, je $u = kti = kt\frac{U}{KT}$ a celkový majetek, tj. součet kapitálu a úroku

$$m = k + u = k + kt\frac{U}{KT} = k\left(1 + t\frac{U}{KT}\right),$$

a odtud snadno vyjádříme k.

Výpočet bylo možné procvičit na příkladu:[145]

Částka zapůjčená s úrokem pět ze sta za měsíc činila šest krát šest za deset měsíců. Jaká částka byla v tomto případě půjčena?

Počítalo se podle postupu popsaného v pravidle, tedy

$$k = \frac{6\cdot 6}{1 + 10\cdot\frac{5}{100\cdot 1}} = \frac{36\cdot 100}{150} = 24\,.$$

Podobné příklady, jen s jinými hodnotami, najdeme i v dílech jiných autorů, například u Mahávíry[146] nebo Bháskary II.,[147] který zadal hodnoty: $U = 5$, $K = 100$, $T = 1$ (měsíc), $t = 12$ (měsíců, v zadání je 1 rok), $m = 1000$. V odpovědi je uvedeno, že kapitál $k = 625$. K tomu Bháskara připojil poznámku, že tento příklad je možné řešit i pomocí metody chybného předpokladu. Do rovnice

$$k\left(1 + 12\cdot\frac{5}{100}\right) = m$$

[144] Podle [Col], str. 287.
[145] Podle [Col], str. 287.
[146] Viz sloka GaSaSa/vi.24, podle [Ran], str. 97.
[147] Viz sloka Lila/iv.89, podle [Col], str. 39.

nejprve dosadil $k_0 = 1$, z toho stanovil $m_0 = \frac{8}{5}$, a tedy $k = \frac{1000}{\frac{8}{5}} \cdot 1 = 625$.

Mnohé problémy vyžadovaly znalost řešení kvadratických rovnic.

Pravidlo uvedené v *Árjabhatíje* bylo určeno k řešení následujícího problému. Základní kapitál k je zapůjčen na jeden měsíc s neznámým úrokem u. Tento neznámý úrok je pak zapůjčen se stejnou úrokovou mírou na t měsíců. Za tuto dobu původní úrok spolu s úrokem z úroku činí a. Požaduje se úrok u základního kapitálu k.

Tato úloha vede na řešení kvadratické rovnice

$$tu^2 + ku - ak = 0\,,$$

jejíž řešení popsal Árjabhata I. takto:[148]

Ar/ii.25
Násob součet úroku z kapitálu a z úroku časem a kapitálem. K tomu přičti druhou mocninu poloviny kapitálu. Z toho vezmi druhou odmocninu. Odečti polovinu kapitálu a zbytek vyděl časem. Výsledkem bude úrok základního jmění.

Tento postup odpovídá dnešnímu řešení kvadratické rovnice

$$u = \frac{-\frac{k}{2} \pm \sqrt{akt + \left(\frac{k}{2}\right)^2}}{t}\,.$$

Protože se však uvažovala pouze kladná řešení, výsledkem bylo

$$u = \frac{\sqrt{akt + \left(\frac{k}{2}\right)^2} - \frac{k}{2}}{t}\,.$$

Árjabhata předložil příklad s hodnotami $k = 100$, $t = 6$, $a = 16$, kde hledaný úrok byl $u = 10$. Je zřejmé, že autor musel znát kvadratické rovnice a jejich řešení, i když se o nich obecně ve své práci *Árjabhatíja* vůbec nezmínil.

Brahmagupta a Mahávíra řešili podobný problém ještě obecněji.[149] Kapitál k je zapůjčen na t_1 měsíců a z toho neznámý úrok u je zapůjčen na t_2 měsíců se stejnou úrokovou mírou a získá se a. Najdi u. Řešila se tedy kvadratická rovnice

$$u^2 + \frac{kt_1}{t_2}u - \frac{akt_1}{t_2} = 0\,,$$

jejíž řešení bylo počítáno jako

$$u = \sqrt{\frac{akt_1}{t_2} + \left(\frac{kt_1}{2t_2}\right)^2} - \frac{kt_1}{2t_2}\,.$$

[148] Podle [Cla], str. 38.
[149] Viz sloky BrSpSi/xii.15, podle [Col], str. 287–288, GaSaSa/vi.44, podle [Ran], str 102.

Opět se uvažovalo pouze jedno řešení s kladným znaménkem u odmocniny. Brahmagupta řešil příklad s hodnotami $k = 500$, $t_1 = 4$ (měsíce), $t_2 = 10$ (měsíců), $a = 78$ a řešením $u = 60$.[150]

Brahmagupta úlohy o úrocích a posloupnosti řadil do aritmetiky a postup řešení nepopisoval obecně, ale pouze pro daný typ úlohy.

Mahávíra řešil i několik úloh, kde byl dán součet dvou veličin a nějaká další podmínka. Tyto příklady však byly pravděpodobně vytvořeny uměle a sloužily pouze k procvičování výpočtů, neboť například součet kapitálu a doby úročení nemá praktický význam. Na ukázku uvedeme jen některé.

Pravidlo na separaci kapitálu a doby úročení z jejich „smíšeného“ součtu řešilo úlohu, kde byl dán součet kapitálu a času $m = k+t$, byl znám úrok $u = kti$ s úrokovou mírou i popsanou mírou úroku U, mírou kapitálu K a mírou doby úročení T, tedy $u = kt\frac{U}{KT}$, a úkolem bylo určit kapitál k a dobu úročení t.[151]

GaSaSa/vi.29

Od čtverce daného smíšeného součtu [kapitálu a času] *se odečte míra kapitálu dělená mírou úroku a násobená mírou doby úročení a čtyřnásobkem daného úroku. Druhá odmocnina toho* [výsledného rozdílu] *je použita ve spojení s daným smíšeným součtem tak, aby mohla být provedena operace samkramana.*

Podle pravidla se nejprve určilo

$$m^2 - 4u\frac{TK}{U} = (k+t)^2 - 4kt\frac{U}{KT}\frac{TK}{U} = (k+t)^2 - 4kt = (k-t)^2,$$

a pak[152]

$$\sqrt{(k-t)^2} = k - t\,.$$

Dále se provedla operace *samkramana* s m ve spojení s $\sqrt{m^2 - 4u\frac{TK}{U}}$, tj. hledalo se řešení soustavy

$$\begin{aligned} k + t &= m\,, \\ k - t &= \sqrt{m^2 - 4u\frac{TK}{U}}\,, \end{aligned}$$

odkud $\quad k = \frac{1}{2}\left(m + \sqrt{m^2 - 4u\frac{TK}{U}}\right) \quad$ a $\quad t = \frac{1}{2}\left(m - \sqrt{m^2 - 4u\frac{TK}{U}}\right).$

Za pravidlem byly připojeny příklady k procvičování, jeden z nich obsahuje tyto hodnoty: míra úroku $U = 2\frac{1}{2}$, míra kapitálu $K = 60$, míra doby úročení $T = 1\frac{1}{2}$ (měsíce), úrok $u = 24$, součet doby úročení s kapitálem $m = k+t = 60$.

---

[150] Podle [Col], str. 288.

[151] Podle [Ran], str. 98, a [Er], str. 108.

[152] Uvažovali pouze $\sqrt{a^2} = a$, nikoli $\sqrt{a^2} = |a|$.

Mahávírovo řešení je $k = 36$, $t = 24$ (měsíců).[153] Podobné pravidlo uvedl Mahávíra i pro smíšený součet doby úročení a míry úroku $m = t + U$.[154]

Mahávíra také uvedl pravidlo k oddělení různých úroků z různých kapitálů úročených po různé doby úročení ze smíšeného součtu úroků, tj. řešil úlohu, v níž byl znám součet úroků $m = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, kde $u_j = k_j t_j i$. I když to nebylo přímo uvedeno, předpokládalo se, že úroková míra je ve všech případech stejná:[155]

GaSaSa/vi.37
Nechť každé množství kapitálu násobené [odpovídající] *dobou úročení a násobené* [daným] *celkovým úrokem je samostatně vydělené součtem součinů získaných vynásobením každého kapitálu odpovídající dobou úročení a nechť úrok* [z kapitálu, se kterým se zacházelo] *je tak vyjádřen.*

Označíme-li postupně kapitály $k_1, k_2, \ldots, k_n$ a odpovídající doby úročení $t_1, t_2, \ldots, t_n$ a úroky $u_1, u_2, \ldots, u_n$, pak platí:

$$\begin{aligned} u_1 &= k_1 t_1 i\,, \\ u_2 &= k_2 t_2 i\,, \\ &\vdots \\ u_n &= k_n t_n i\,, \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_n &= m\,. \end{aligned}$$

Sečtením prvních n rovnic dostaneme

$$m = i(k_1 t_1 + k_2 t_2 + \cdots + k_n t_n)\,.$$

Odtud se vyjádří úroková míra

$$i = \frac{m}{k_1 t_1 + k_2 t_2 + \cdots + k_n t_n}$$

a pak se každý z úroků vypočítá podle vzorce

$$u_j = k_j t_j i = \frac{k_j t_j m}{k_1 t_1 + k_2 t_2 + \cdots + k_n t_n}\,.$$

Následoval příklad, kde byly jednotlivé kapitály $k_1 = 40$, $k_2 = 30$, $k_3 = 20$ a $k_4 = 50$, příslušné doby úročení $t_1 = 5$, $t_2 = 4$, $t_3 = 3$ a $t_4 = 6$ měsíců. Součet úroků je $m = 34$. Hledané úroky jsou $u_1 = 10$, $u_2 = 6$, $u_3 = 3$ a $u_4 = 15$.[156]

---

[153] Viz sloka GaSaSa/vi.32, podle [Ran], str. 98–99. Druhé řešení $k = 24$, $t = 36$ (měsíců) autor nezmínil.

[154] Viz sloka GaSaSa/vi.33, podle [Ran], str. 99.

[155] Podle [Ran], str. 100.

[156] Viz sloka GaSaSa/vi.38, podle [Ran], str. 100.

Podobné pravidlo sloužilo k separaci různých kapitálů úročených s různými úroky po různé doby úročení ze smíšeného součtu kapitálů. Byl dán součet $m = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$, kde $k_j = \frac{u_j}{t_j i}$, jednotlivé kapitály se počítaly jako

$$k_j = \frac{m}{\frac{u_1}{t_1} + \frac{u_2}{t_2} + \cdots + \frac{u_n}{t_n}} \cdot \frac{u_j}{t_j}\,.$$

Jiné Mahávírovo pravidlo sloužilo k oddělení kapitálu a úroku z jejich smíšeného součtu, přičemž kapitál byl ve všech případech stejný a úrok byl získán při různých dobách úročení:[157]

GaSaSa/vi.47
Věz, že když se rozdíl mezi [libovolnými dvěma danými] *smíšenými součty násobenými vždy dobou* [úročení] *toho druhého, vydělí rozdílem těchto časů, to, co je podíl, je požadovaný kapitál vzhledem ke* [všem] *těmto* [daným smíšeným součtům].

V takovýchto úlohách byly dány součty

$$\begin{aligned} m_1 &= k + u_1 = k + kit_1\,, \\ m_2 &= k + u_2 = k + kit_2\,, \\ &\vdots \\ m_n &= k + u_n = k + kit_n\,. \end{aligned}$$

K určení kapitálu k stačí libovolné dvě rovnice, pro $n > 2$ má úloha větší počet rovnic než neznámých (kromě kapitálu k je neznámou ještě úroková míra i). Uvažujeme-li například první dvě rovnice, pak podle Mahávírova pravidla se kapitál počítá postupem odpovídajícím vzorci

$$k = \frac{m_1 t_2 - m_2 t_1}{t_2 - t_1}\,,$$

protože

$$\frac{m_1 t_2 - m_2 t_1}{t_2 - t_1} = \frac{(k + kit_1)t_2 - (k + kit_2)t_1}{t_2 - t_1} = \frac{kt_2 - kt_1}{t_2 - t_1}\,.$$

Další pravidlo uvádělo, jak určit kapitál k, který byl zapůjčen dvakrát s různou dobou úročení t_1, t_2 a různou úrokovou mírou $i_1 = \frac{U_1}{K_1 T_1}$ a $i_2 = \frac{U_2}{K_2 T_2}$, když byl znám rozdíl zisků (úroků) $u_1 - u_2$.[158] Hledaný kapitál se počítal postupem odpovídajícím vzorci

$$k = \frac{u_1 - u_2}{\frac{t_1 U_1}{T_1 K_1} - \frac{t_2 U_2}{T_2 K_2}}\,.$$

[157] Podle [Ran], str. 102, 103.
[158] Viz sloka GaSaSa/vi.54, podle [Ran], str. 104.

Ve většině příkladů indických autorů převládalo jednoduché úrokování, náznak složeného úrokování pro dvě období je v úlohách vedoucích na kvadratické rovnice.

Poznamenejme, že úlohy týkající se úrokového počtu včetně složeného úrokování se dochovaly na mezopotámských tabulkách z 2. tisíciletí př. n. l.

7.16.5 Rozdělování v daném poměru

Na ukázku ještě uvedeme některá pravidla a příklady týkající se rozdělování v daném poměru a úlohy související s počítáním jemnosti zlata. Přestože většina těchto problémů je algebraická, bývaly zahrnuty do aritmetiky. Nejprve bylo popsáno pravidlo pro řešení každého typu, pak následovaly příklady.

Rozdělování v daném poměru se nazývalo *prakšépa* (*prakṣepa*). Mahávíra k tomu uvedl pravidlo:[159]

> **GaSaSa/vi.79$\frac{1}{2}$** (část)
> *Operace úměrného dělení je ta, ve které se* [dané] *společné množství* [které se má rozdělit] *nejprve dělí součtem čitatelů zlomků se společným jmenovatelem* [vyjadřující různé úměrné části], *jejich jmenovatelé jsou vyloučeni z úvahy; a* [pak] *se musí násobit* [jednotlivě] *těmi úměrnými čitateli.*

Má-li se rozdělit množství m na n dílů v poměru $p_1 : p_2 : \cdots : p_n$, podle tohoto pravidla se velikost d_i každého dílu vypočítá podle vzorce

$$d_i = \frac{m}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\, p_i\,.$$

Celý postup je patrný z následujícího příkladu:[160]

> **GaSaSa/vi.80$\frac{1}{2}$**
> *Zde* [v tomto problému] 120 *zlatých kusů je rozděleno mezi* 4 *služebníky v poměrných dílech* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ *a* $\frac{1}{6}$. *Ó, počtáři, řekni mi rychle, kolik dostanou.*

Poměr $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6}$ se vyjádřil pomocí zlomků se stejnými jmenovateli $\frac{6}{12} : \frac{4}{12} : \frac{3}{12} : \frac{2}{12}$ a v dalším výpočtu se počítalo pouze s čitateli. Takový čitatel se nazýval úměrný čitatel nebo *prakšépa* (stejně jako byl název operace dělení v daném poměru). Počet kousků zlata, které získal každý ze služebníků, se pak vypočítal podle pravidla

$$d_1 = \tfrac{120}{6+4+3+2}\,6 = 48\,, \qquad d_2 = \tfrac{120}{15}\,4 = 32\,,$$
$$d_3 = \tfrac{120}{15}\,3 = 24\,, \qquad d_4 = \tfrac{120}{15}\,2 = 16\,.$$

[159] Podle [Ran], str. 110.
[160] Podle [Ran], str. 110.

7.16.6 Počítání jemnosti zlata

Pro počítání zlata, tzv. *suvarnaganita* (*suvarṇa-gaṇita*), se uváděla jemnost zlata pomocí čísla zvaného *varna* (*varṇa*). Stupeň jemnosti byl tím vyšší, čím bylo zlato čistší. Pravidla pro počítání uváděla většina autorů, například Mahávíra formuloval jedno z nich takto:[161]

GaSaSa/vi.169
Musí být známo, že [součet různých] *výrobků zlata násobených* [svými] *varna, když se vydělí smíšeným zlatem* [celkovým počtem kusů], *způsobí* [výsledné] *varna.* [Původní *varna* každého dílu] *když je vydělené výsledným varna* [smíšeného celku] *a násobené množstvím zlata* [v tom dílu], *způsobí odpovídající množství* [smíšeného] *zlata.*

Vytvoří se směs zlata z n dílů, i-tý díl obsahuje k_i kusů s jemností zlata v_i *varna*, pak jemnost smíšeného zlata je

$$v = \frac{k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}\,.$$

Množství smíšeného zlata, které má hodnotu stejnou jako i-tý díl, se vypočítá podle vzorce

$$s_i = \frac{v_i}{v}\, k_i\,.$$

Za pravidlem byl uveden následující příklad:[162]

GaSaSa/vi.170–171$\frac{1}{2}$
Je 1 *kus* [zlata] 1 *varna,* 1 *kus* 2 *varna,* 1 *kus* 3 *varna,* 2 *kusy* 4 *varna,* 4 *kusy* 5 *varna,* 7 *kusů* 14 *varna a* 8 *kusů* 15 *varna. Hoď tyto do ohně, udělej ze všech jednu* [hmotu] *a pak řekni, jaká je varna smíšeného zlata. Toto smíšené zlato je rozděleno mezi vlastníky výše uvedených kusů. Co každý z nich dostane?*

7.16.7 Kombinatorika

Ve staré Indii byla známa a využívána pravidla k výpočtu kombinací a variací. Variace se uplatnily v prozódii, při výpočtu různých možností střídání dlouhých a krátkých slabik, kombinace ve farmacii při míchání směsí z různých přísad atd.

Používání kombinací mělo v Indii dlouhou tradici, už v 5. stol. př. n. l. byla v medicínské práci *Sušrutasamhitá* řešena úloha, kolik různých chutí lze vytvořit ze šesti základních – sladké, kyselé, slané, ostré, hořké a trpké.[163]

---

[161] Podle [Ran], str. 138-139.
[162] Podle [Ran], str. 139.
[163] Viz 4. kapitola, odstavec 4.4, podle [DS5].

Pravidla na výpočet kombinací k-té třídy z n prvků uvedli Mahávíra, Šrídhara i Bháskara II. Jejich metody odpovídají současným vzorcům, jen formulace se u různých autorů mírně lišila.

Bháskara II. pravidlo vyjádřil takto:[164]

Lila/iv.110–112 (část)
Nechť čísla od jedničky po jedné nahoru řazená v obráceném pořadí jsou dělená těmi stejnými v přímém pořadí; a nechť následný je násobený předchozím a další předcházejícím [výsledkem]. *Několik výsledků jsou změny, jedné, dvou, tří atd. Toto se nazývá obecné pravidlo.*

Tímto způsobem Bháskara definoval kombinační číslo pro výpočet kombinací k-té třídy z n prvků

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k},$$

využíval také vztah

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

V následujícím příkladu je uveden postup nalezení počtu všech možností střídání dlouhých a krátkých slabik v šestislabičném verši.[165]

Lila/iv.113
Jednoduchý příklad z prozódie: V permutacích metra gájatrí, řekni rychle, příteli, kolik je možných změn ve verši? A řekni zvlášť, kolik je kombinací s jednou [dvěma, třemi] *atd. dlouhými slabikami.*

Verš *gájatrí* (*gāyatrī*) se skládal ze šesti slabik, proto se zapsala čísla od jedné do šesti v přímém i obráceném pořadí:

$$\begin{array}{cccccc} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

Podle postupu uvedeného v pravidle se počítalo takto:

a) Pro jednu dlouhou slabiku se uvažoval pouze první sloupec tabulky a horní číslo se dělilo dolním, tedy $6 : 1 = 6$ možných změn ve verši.

b) Pro dvě dlouhé slabiky se vzala čísla ve druhém sloupci tabulky, vydělila se stejným způsobem a vynásobila předchozím výsledkem, tedy $6 \cdot \frac{5}{2} = 15$ možných změn ve verši.

[164] Podle [Col], str. 49.
[165] Podle [Col], str. 49. Metrum *gájatrí* popisovalo sloky skládající se z 24 slabik. Ve védské posvátné prozódii byly uspořádané do tří veršů po osmi slabikách, zatímco světský text se stejnou metrikou měl sloky tvořené šestislabičnými čtveřicemi.

c) Dál se postupovalo stejně. Ve verši se třemi dlouhými slabikami bylo možné provést $15 \cdot \frac{4}{3} = 20$ změn, pro čtyři dlouhé slabiky to bylo $20 \cdot \frac{3}{4} = 15$ změn, pro pět dlouhých slabik bylo $15 \cdot \frac{2}{5} = 6$ změn a ve verši se šesti dlouhými slabikami byla pouze jedna možnost $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$. Součet těchto všech možných změn je $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64\,(= 2^6)$.

K výpočtu Bháskara ještě přidal poznámku, že stejným způsobem by se určil i počet všech možností střídání dlouhých a krátkých slabik v celé sloce, tj. ve čtveřici šestislabičných veršů. Šlo o výpočet $2^{24} = 16\,777\,216$.

Kombinatorice věnoval Bháskara II. i dvanáctou kapitolu *Līlávatí*, kde uvedl pravidla na počítání počtu čísel, která mohou být vytvořena z daného počtu číslic, i když se některé číslice opakovaly. Zformuloval tak pravidla pro výpočet permutací bez opakování i s opakováním.[166]

Lila/xii.267 (část)
Pravidlo. Součin [členů] *aritmetické posloupnosti začínající jedničkou, po jedné rostoucí až k počtu míst budou permutace čísla se stanovenými číslicemi.*

Pravidlo vyjadřuje známý vzorec

$$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n\,.$$

K procvičení pravidla bylo uvedeno několik příkladů, jedním z nich je tento:[167]

Lila/vii.268 (část)
Příklad. Kolik může být variací čísla s trojkou, devítkou a osmičkou?

Vyjádření: 3, 9, 8.
Aritmetická posloupnost je 1, 2, 3, *její součin je* 6 *a tolik je variací čísla.*

Následovala pravidla pro počet permutací s opakováním, variací i variací s opakováním. Jejich formulace nejsou na první pohled příliš srozumitelné, ale odpovídají dnes používaným vzorcům:[168]

$$P'_{k_1,k_2,\dots,k_j}(n) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_j!}\,, \qquad \text{kde} \quad \sum_{i=1}^{j} k_i = n\,,$$

$$V_k(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)\,, \qquad V'_k(n) = n^k.$$

166 Podle [Col], str. 123.
167 Podle [Col], str. 123.
168 Viz sloky Lila/xii.270, 272, 274, podle [Col], str. 125–126.

Kromě běžných výpočtů variací a kombinací zformuloval Bháskara II. speciální pravidlo, jak nalézt počet všech m-ciferných čísel, jestliže je dán jejich ciferný součet n:[169]

$$\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n-m+1}{m-1},$$

za předpokladu, že součet $n < m + 9$.

Bháskara však nijak nevysvětlil, jak k pravidlu dospěl. Z dnešního pohledu bychom je mohli odvodit například následujícím způsobem. Pro úplnost ještě dodáváme, že Bháskara mezi číslice nepočítal nulu, tím odpadl problém vyloučení čísel, která by měla nulu na začátku. Podmínku $n < m + 9$ vysvětlíme snadno. Označíme-li

$$n = m + k$$

a uvažujeme možnost, že na $m-1$ místech jsou jedničky, pak na zbývající pozici je $k+1$, a musí tedy platit $k+1 \le 9$, tj. $k < 9$. Ciferný součet m číslic zapíšeme

$$n = c_1 + c_2 + \cdots + c_m\,,$$

kde každá cifra c_i je alespoň 1, tu označíme tučně, tedy

$$n = (\mathbf{1} + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k_1}) + (\mathbf{1} + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k_2}) + \cdots + (\mathbf{1} + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k_m})\,.$$

Součet „obyčejných“ jedniček je $\sum 1 = \sum_{i=1}^{m} k_i = k$, součet „tučných“ jedniček je $\sum \mathbf{1} = m$. Jako první je vždycky $\mathbf{1}$, proto počet všech možných seřazení se určí jako počet permutací z $(n-1)$ prvků s opakováním, kde $\mathbf{1}$ se opakuje $(m-1)$-krát a 1 se opakuje k-krát.

$$\frac{(n-1)!}{(m-1)!\,k!} = \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!} = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{(m-1)(m-2)\cdots 1}$$

Použití pravidla ukázal Bháskara II. na následujícím příkladu:[170]

Lila/xiii.275
Příklad. Kolik je různých čísel s číslicemi na pěti místech, jejichž součet je třináct? Jestli to víš, prozraď je.

Dosazením do vzorce odpovídajícího pravidla vypočítal počet čísel

$$\frac{12}{1}\cdot\frac{11}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{9}{4} = \frac{11880}{24} = 495\,.$$

Kombinatorika ve starých indických textech je podrobně popsána v článku [DS5].

[169] Viz sloka Lila/xiii.274, podle [Col], str. 126.
[170] Podle [Col], str. 126.

7.16.8 Úlohy o pohybu

Árjabhata I. popsal pravidlo na výpočet okamžiku setkání dvou planet, kde vysvětloval, že v případě pohybu stejným směrem se musí vzdálenost dělit rozdílem rychlostí obou planet; pohybují-li se proti sobě, je třeba dělit vzdálenost součtem rychlostí. Označíme-li neznámý čas x, vzdálenost d a rychlosti v_1 a v_2, jde o řešení rovnic:

$$xv_1 - xv_2 = d \quad \Rightarrow \quad x = \frac{d}{v_1 - v_2} \qquad \text{pro pohyb stejným směrem}\,,$$
$$xv_1 + xv_2 = d \quad \Rightarrow \quad x = \frac{d}{v_1 + v_2} \qquad \text{pro pohyb proti sobě}\,.$$

K tomu ještě Árjabhata poznamenal, že v případě záporného výsledku se setkání uskutečnilo v minulosti.[171]

Podobné úlohy se později v různých obměnách vyskytovaly jako „úlohy o poslech“. Zařadili je do své práce například Mahávíra a Šrídhara. Řešení některých takových úloh vyžadovalo znalost řešení kvadratických rovnic, rukopis *Bakhšálí* například obsahuje několik úloh typu:[172]

Jistý člověk cestuje rychlostí v_1 *jódžanů* první den a každý následující den má rychlost o d *jódžanů* větší. Jiná osoba cestující stejnoměrnou rychlostí v_2 *jódžanů* za den vyrazila o t dní dříve. Kdy první člověk dostihne druhého?

Kdybychom řešili stejný problém dnes, sestavili bychom kvadratickou rovnici. Označíme-li x hledaný počet dní, pak pro dráhy s_1, s_1, které ujde první a druhý člověk, platí

$$s_1 = \frac{x}{2}\left[2v_1 + (x-1)d\right]\,, \qquad s_2 = v_2(t+x)\,.$$

Protože oba ujdou stejnou vzdálenost, z rovnosti drah získáme kvadratickou rovnici pro neznámou x:

$$dx^2 - [2(v_2 - v_1) + d]x - 2tv_2 = 0\,,$$

jejíž řešení lze vyjádřit ve tvaru

$$x = \frac{\sqrt{[2(v_2 - v_1) + d]^2 + 8dtv_2} + [2(v_2 - v_1) + d]}{2d}\,. \tag{7.7}$$

Výrazu $2(v_2 - v_1) + d$ se říkalo *pratinihita* (*pratinihita*, tj. odložené stranou), jeho druhá mocnina $[2(v_2 - v_1) + d]^2$ se nazývala *kšépa* (*kṣepa*). Vzorci (7.7) odpovídá

[171] Viz Ar/ii.31, podle [Cla], str. 41.
[172] Podle [DS2], str. 60.

i postup výpočtu uvedený v rukopisu, i když žádnou rovnici nezmiňuje:[173]

BMs/5r – Pravidlo 19
Denní cesta [v_2] *je zmenšená o chůzi za první den* [v_1], *zdvojnásobená a zvětšená o přírůstek* [d]. [Výsledek se nazývá] *pratinihita, který když se násobí sám sebou, dostane se množství kšépa. Když je přičteno množství kšépa k součinu denní cesty a začátku* [t] *vynásobenému osminásobkem přírůstku, z toho druhá odmocnina zvětšená o pratinihita* [odložené množství] *a dělená dvojnásobkem přírůstku dá požadovaný počet dnů.*

Na lístku folio 5 verso (viz obr. 7.3) se zachoval celý postup řešení, který je detailně vysvětlen na konkrétním příkladu pro $v_2 = 5$, $t = 6$, $v_1 = 3$, $d = 4$. Jednotlivé kroky výpočtu byly řazené takto (zvýrazněná čísla jsou na lístku čitelná):

$\mathbf{5} - \mathbf{3} = \mathbf{2}$	*denní cesta zmenšená o chůzi za první den* [$v_2 - v_1$]
$2 \cdot 2 = \mathbf{4}$	*je zdvojnásobená* [$2(v_2 - v_1)$]
$4 + 4 = \mathbf{8}$	*a zvětšená o přírůstek* [$2(v_2 - v_1) + d$]
	(nazývá se pratinihita)
$8 \cdot 8 = \mathbf{64}$	*tento násobený sám sebou je určen*
	(jako množství kšépa) [$(2(v_2 - v_1) + d)^2$]
$5 \cdot 6 = \mathbf{30}$	*součin denní cesty a začátku* [$v_2 t$]
$30 \cdot 8 = \mathbf{240}$	*vynásobený osmi* [$8v_2 t$]
$240 \cdot \mathbf{4} = \mathbf{960}$	*vynásobený přírůstkem* [$8v_2 td$]
$64 + 960 = \mathbf{1024}$	*je přičten k množství kšépa*
$\sqrt{1024} = \mathbf{32}$	*z toho druhá odmocnina*
$32 + \mathbf{8} = \mathbf{40}$	*zvětšená o pratinihita*
[$40 : 8 = 5 = x$]	*dělená dvojnásobkem přírůstku*
	dá požadovaný počet dnů [$40 : (2d)$]

[173] Podle [Ha1], str. 293.

. . . . **hataṁ** | **30** |

. . . **dinagamanamādirahitaṁdinagamanayojana** ϕ **pañcha** | **5** | **ādi** .

. . . | **3** | **rahitaṁjātaṁ** | **2** | **dviguṇaṁ** | **4** | **tachchottareṇasaṁyutaṁ** | **8** |

. .*ātma*guṇaṁ | **64** | **eśakshepasaṁjñakorāsi** | **ashṭottarasaṁgu . i . .**

. *lab*dharāshi | **30** | **ashṭaguṇaṁ** | **240** | uttareṇaguṇaṁ uttaraṁ | **4** | .

. . . **guṇitaṁjātaṁ** | **960** | **kshepasaṁjñakodatvā** | **tatrakshepasaṁjñ . .**

4 | **yutaṁjātaṁ** | **1024** | **asyamūlaṁ** | **32** | **pratinahi***ta* . . . . .

i . m | *8* | *yu*taṁjātaṁ | **40** | u . . . . ṁ . . . .

Obr. 7.3: Rukopis *Bakhšálí*, folio 5 verso a jeho přepis[174]

7.17 Posloupnosti

Indické práce obsahovaly kapitolu věnovanou posloupnostem, hlavně aritmetické, někdy i geometrické. Posloupnost se nazývala *šrédhí*[175] a termín *šrédhívjavahára* (*średhī-vyavahāra*) znamenal „určování“ posloupností.

Pro člen posloupnosti byl obecně užíván název *dhana* (*dhana*), první člen byl *ádidhana* (*ādi-dhana*), jakýkoli další člen se nazýval *ištadhana* (*iṣṭa-dhana*, tj. hledaný člen). Pokud byla posloupnost konečná, zmiňoval se ještě střední člen *madhjadhana* (*madhya-dhana*) a poslední člen *antjadhana* (*antya-dhana*). Druhá část názvu se často vynechávala a místo složeného slova se používalo pouze *ádi*, *išta*, *madhja* a *antja*.

Počet členů posloupnosti se nazýval *pada* (*pada*, tj. stopa, krok) nebo *gaččha* (*gaccha*, tj. doba, perioda). Pro součet posloupnosti byl užíván název *sarvadhana* (*sarva-dhana*, tj. souhrn všech členů), *šrédhíphala* (výsledek posloupnosti), *šrédhíganita* (výpočet posloupnosti) nebo krátce *ganita*, tj. stejný název jako pro „počítání“, protože součet byl nalezen pomocí výpočtu.

7.17.1 Aritmetická posloupnost

Prvnímu členu aritmetické posloupnosti se někdy říkalo *prabhava* (*prabhava*, tj. počáteční člen), *mukha*, *vadana* či *vaktra* (*mukha*, *vadana vaktra*),[176] diference se nazývala *čaja*, *pračaja* nebo *uttara* (*caya*, *pracaya*, *uttara*), což jsou termíny vyjadřující přírůstek, zvýšení nebo přebytek.

Samotný pojem aritmetická posloupnost však nebyl nikde definován. Pravidla byla popsána slovy bez matematické symboliky a odpovídala vzorcům, které dnes používáme.

[174] Převzato z [Kay1].

[175] Někdy též *šréní* (*śreṇī*) nebo *šréni* (*śreṇi*); tyto termíny vyjadřovaly linku, řádek, řadu, posloupnost, podle [DS6].

[176] Slova *mukha*, *vadana*, *vaktra* jsou výrazy pro „obličej“ nebo „ústa“.

Všichni autoři uváděli pravidlo pro stanovení součtu prvních n členů aritmetické posloupnosti, které v současné symbolice můžeme vyjádřit vzorcem[177]

$$s_n = n\left(a_1 + \frac{n-1}{2}d\right),$$

kde a_1 je první člen, d diference, n počet členů, nebo

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n\frac{a_1 + a_n}{2},$$

kde $\frac{a_1+a_n}{2}$ je „průměr“ posloupnosti.

Árjabhata I. definoval také průměr m_k libovolných k po sobě jdoucích členů $a_{p+1}, \ldots, a_{p+k}$ a jejich součet:[178]

$$m_k = a_1 + \left(\frac{k-1}{2} + p\right) \cdot d, \qquad s_k^* = m_k \cdot k.$$

Indičtí autoři uváděli též pravidlo na výpočet prvního členu posloupnosti a_1, je-li znám součet s_n, diference d a počet členů n:[179]

$$a_1 = \frac{s_n}{n} - \frac{(n-1)\,d}{2}$$

i pravidlo pro určení diference d, je-li znám součet s_n, první člen a_1 a počet členů n:[180]

$$d = \left(\frac{s_n}{n} - a_1\right) : \frac{(n-1)}{2}.$$

Existovaly úlohy, kde bylo úkolem stanovit počet členů n, je-li znám součet s_n, první člen a_1 a diference d. Úpravou vzorce

$$s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)\,d]$$

pro součet prvních n členů se získá kvadratická rovnice

$$n^2 d + (2a_1 - d)\,n - 2s_n = 0$$

s neznámou n, odtud

$$n = \frac{\sqrt{(2a_1 - d)^2 + 8\,ds_n} - (2a_1 - d)}{2d}. \tag{7.8}$$

---

177 Viz sloky BrSpSi/xii.17, podle [Col], str. GaSaSa/vi.290, 290, podle [Ran], str. 168.
178 Viz sloka Ar/ii.19, podle [Cla], str. 35.
179 Viz sloky Lila/v.122, podle [Col], str. 53, GaSaSa/vi.292, podle [Ran], str. 168.
180 Viz sloky Lila/v.123, podle [Col], str. 54, GaSaSa/vi.292, podle [Ran], str. 168.

Tyto problémy vyžadovaly znalost řešení kvadratických rovnic, přesto bývaly zařazovány do aritmetiky, protože při jejich řešení se rovnice nevytvářela; algoritmus popisoval jednotlivé kroky výpočtu neznámé veličiny pomocí známých, byl však vytvořen pouze pro jeden konkrétní typ úlohy. Například Brahmagupta k postupu řešení uvedl:[181]

BrSpSi/xii.18
Přičti čtverec rozdílu mezi dvojnásobkem prvního členu a společného přírůstku [diference] *k součtu posloupnosti vynásobenému osminásobkem přírůstku. Odmocnina zmenšená o předchozí zbytek dělená dvojnásobkem přírůstku je doba* [počet členů].

Brahmaguptův postup odpovídá vzorci (7.8). Podobné pravidlo znal i Árjabhata I., jehož výpočet odpovídá vztahu[182]

$$n = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{(2a_1-d)^2+8s_nd}-2a_1}{d}+1\right).$$

Bháskara II. totéž vyjádřil ve tvaru[183]

$$n = \frac{\sqrt{2s_nd+(a_1-\frac{d}{2})^2}-a_1+\frac{d}{2}}{d}.$$

Na ukázku uvedeme příklad z *Lílávatí*:[184]

Lila/v.126
Příklad. Člověk dal první den tři dramma a pokračoval v rozdělování almužny zvětšované o dvě [denně] *a tak věnoval kněžím tři sta šedesát dramma. Řekni rychle, za kolik dní?*

Vyjádření: První člen 3*, diference* 2*, doba ?, součet* 360.
Odpověď: Doba 18.

Výsledek se získal výpočtem podle posledního vzorce:

$$n = \frac{\sqrt{2\cdot 360\cdot 2+(3-\frac{2}{2})^2}-3+\frac{2}{2}}{2} = \frac{\sqrt{1440+4}-2}{2} = \frac{36}{2} = 18\,.$$

V rukopisu *Bakhšálí* na listech folio 65 verso, 56 verso, 56 recto, 64 recto je řešení příkladu, v němž se má určit počet členů n aritmetické posloupnosti,

[181] Podle [Col], str. 291.
[182] Viz sloka Ar/ii.20, podle [Cla], str. 35.
[183] Viz sloka Lila/v.125, podle [Col], str. 54.
[184] Podle [Col], str. 54.

kde první člen je $a_1 = 1$, diference $d = 1$ a součet prvních n členů $s_n = 60$.[185] Počítalo se postupem odpovídajícím výše uvedenému vzorci (7.8), tedy

$$n = \frac{\sqrt{(2-1)^2 + 8 \cdot 1 \cdot 60} - (2-1)}{2} = \frac{\sqrt{481} - 1}{2}\,.$$

V tomto příkladu však číslo 481 není čtvercem a jeho hodnota byla určena pouze přibližně, ve výpočtu je uvedena první i druhá aproximace čísla $\sqrt{481}$:

$$\sqrt{481} \approx \frac{922}{42} = q_1\,, \qquad \sqrt{481} \approx \frac{424\,642}{19\,362} = q_2\,.$$

Tyto aproximace se určovaly tak, že místo čísla $\sqrt{Q} = \sqrt{A^2 + B} = q$ se uvažovala hodnota q_1, resp. q_2, určená následujícím způsobem:[186]

$$q_1 = A + \frac{B}{2A}\,, \qquad \text{resp.} \qquad q_2 = A + \frac{B}{2A} - \frac{\left(\frac{B}{2A}\right)^2}{2\left(A + \frac{B}{2A}\right)}\,.$$

Ve zmiňovaném rukopisu byl také řešen problém, kde se vyskytovala úloha o poslech, jejichž rychlosti tvořily aritmetickou posloupnost:[187]

Dvě osoby vyrazí různými počátečními rychlostmi v_1 a v_2. Každý následující den se jejich rychlost zvětší o d_1, resp. d_2. Za jakou dobu ujdou stejnou vzdálenost?

Pokud cesty obou osob trvají stejnou dobu, urazí stejnou vzdálenost tehdy, až budou mít stejné celkové rychlosti, tj. stejný součet rychlostí za stejný počet dnů. Označíme-li počet dnů x, pak rychlost první osoby tvoří aritmetickou posloupnost, kde první člen je v_1 a diference d_1:

$$v_1,\ v_1 + d_1,\ v_1 + 2d_1,\ \ldots,\ v_1 + (n-1)\,d_1,\ \ldots,$$

podobně i pro druhou osobu, kde první člen je v_2 a diference d_2:

$$v_2,\ v_2 + d_2,\ v_2 + 2d_2,\ \ldots,\ v_2 + (n-1)\,d_2,\ \ldots$$

Součet rychlostí každé osoby vypočítáme pomocí metody *rúpóná* (*rūponā*), vzorce pro součet prvních x členů aritmetické posloupnosti, tj.

$$s_1 = \left[\frac{(x-1)\,d_1}{2} + v_1\right] x\,, \qquad \text{resp.} \qquad s_2 = \left[\frac{(x-1)\,d_2}{2} + v_2\right] x\,,$$

tedy

$$\frac{(x-1)\,d_1}{2} + v_1 = \frac{(x-1)\,d_2}{2} + v_2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{2(v_2 - v_1)}{d_1 - d_2} + 1\,.$$

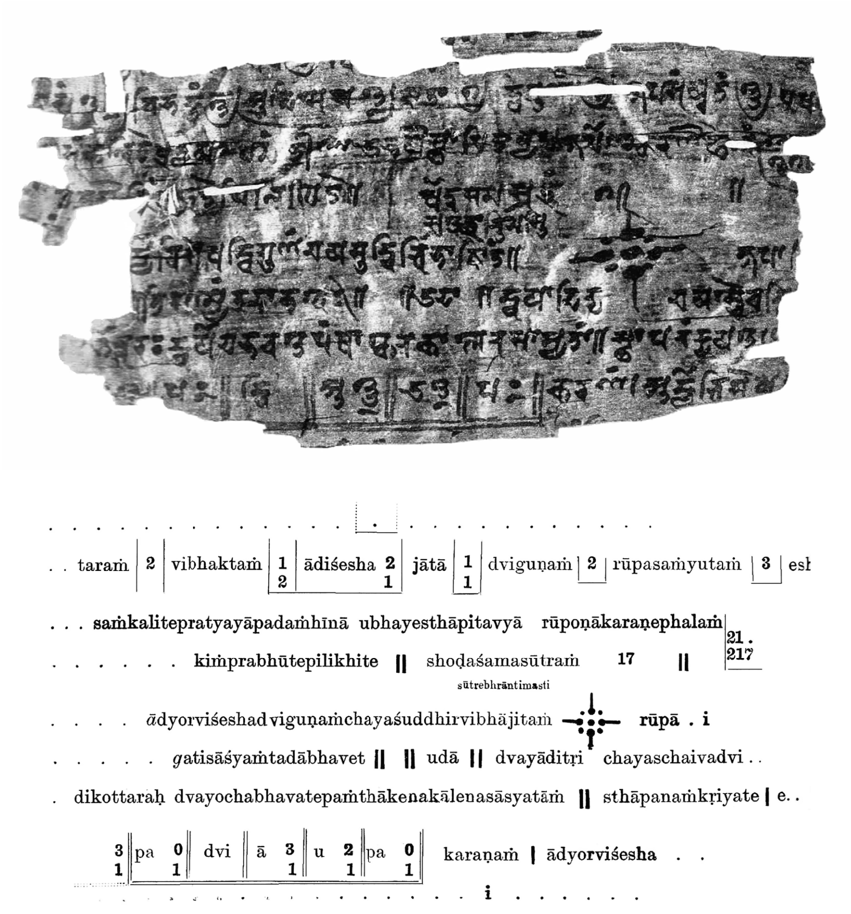
185 Podle [Kay2], str. 179.

186 O výpočtu přibližných hodnot druhých odmocnin je více informací uvedeno v 8. kapitole, v odstavci 8.3.

187 Podle Podle [DS2], str. 43.

Pravidlo uvedené v rukopisu na folio 4 verso (viz obr. 7.4) uvádí výpočet podle následujícího vzorce:[188]

> **BMs/4v – Pravidlo 17**
> *Dvojnásobek rozdílu původních* [prvních] *členů dělený rozdílem diferencí je zvětšen o jedna. To bude čas* [počet členů x], *kdy ušlé vzdálenosti* [dvou cestujících] *budou stejné.*



Obr. 7.4: Rukopis *Bakhšálí*, folio 4 verso a jeho přepis[189]

7.17.2 Geometrická posloupnost

Pro kvocient geometrické posloupnosti se užíval název *guna* či *gunaka* (násobitel). Když se chtělo zdůraznit, že jde o geometrickou posloupnost, použil se termín *gunašrédhí.* Geometrické posloupnosti věnovali indičtí učenci méně prostoru než posloupnosti aritmetické. Uváděli hlavně pravidlo pro výpočet součtu

---

[188] Podle [DS2], str. 43 a [Kay2], str. 176.
[189] Převzato z [Kay1].

prvních n členů geometrické posloupnosti, která byla určená prvním členem a_1 a kvocientem q. Mahávíra používal termín *gunadhana* (*guṇadhana*) pro „první člen posloupnosti vynásobený kvocientem tolikrát, co je počet členů", tj. $a_1 q^n$, neboli $(n+1)$-ní člen a_{n+1}.

Bháskara II. pravidlo o součtu geometrické posloupnosti zformuloval následujícím způsobem:[190]

Lila/v.127
Pravidlo: dvojverší a půl. Je-li doba [počet členů] *liché číslo, odečti jedna a poznamenej si „násobení", je-li sudá, vyděl dvěma a poznamenej si „druhá mocnina", dokud se doba nevyčerpá. Pak výsledek vzniklý násobením a umocňováním* [kvocientu] *v obráceném pořadí od posledního* [poznamenaného] *zmenši o jedna, ten rozdíl vydělený kvocientem méně jedna a násobený počátečním členem bude součtem posloupnosti zvětšující se společným násobkem.*

Tímto je vyjádřen vzorec pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti,

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

kde výpočet q^n se prováděl pomocí druhé mocniny a násobení číslem q. Například q^{10} se vypočítá jako $\left(\left(q^2\right)^2 \cdot q\right)^2 = \left(q^{4+1}\right)^2 = q^{10}$, protože (podle uvedeného pravidla):

10	sudé,	rozpůlí se,	poznamená se:	„druhá mocnina"
5	liché,	odečte se 1,	poznamená se:	„násobení"
4	sudé,	rozpůlí se,	poznamená se:	„druhá mocnina"
2	sudé,	rozpůlí se,	poznamená se:	„druhá mocnina"
1	liché,	odečte se 1,	poznamená se:	„násobení"
0				

Pak se vezme 1 a počítá se od konce:

je-li pozn. „násobení",	pak	$1 \cdot q = q$
je-li pozn. „druhá mocnina",	pak	$(q)^2 = q^2$
je-li pozn. „druhá mocnina",	pak	$(q^2)^2 = q^4$
je-li pozn. „násobení",	pak	$q^4 \cdot q = q^5$
je-li pozn. „druhá mocnina",	pak	$(q^5)^2 = q^{10}$

Ta část pravidla, která popisuje výpočet q^n, se využívala i v úlohách, kde bylo úkolem určit počet variací n-slabičného verše, ve kterém se střídají dlouhé a krátké slabiky.[191] Jednalo se o výpočet variací s opakováním n-té třídy ze dvou prvků, tj. $V'_n(2) = 2^n$. Stejný problém byl řešen i v kapitole o kombinatorice.

[190] Podle [Col], str. 55.
[191] Viz [Col], str. 56, 57, [Ran], str. 180–183.

Následující příklad uvedl Mahávíra.[192]

GaSaSa/ii.96
Poté, co získal 2 zlaté mince v jistém městě, muž jde od města k městu a vydělává všude třikrát více, než kolik vydělal bezprostředně předtím. Řekni, kolik získá osmý den.

Mahávíra zformuloval pravidla na výpočet prvního členu, kvocientu, počtu členů geometrické posloupnosti, je-li znám její součet.[193]

7.17.3 Jiné posloupnosti

Pro posloupnost přirozených čísel od jedné do n znali staří Indové metodu pro součet prvních n čísel a vyjádřili dokonce pravidlo pro součet prvních n částečných součtů.[194] V současné symbolice můžeme postup výpočtu vyjádřit vzorci:

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$S_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i = s_1 + s_2 + \cdots + s_n = s_n\frac{n+2}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Navíc hledali pravidla pro součet druhých mocnin, resp. třetích mocnin prvních n členů posloupnosti přirozených čísel,[195] která odpovídají dnešním vztahům:

$$D_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 = s_n\frac{2n+1}{3} = \frac{(n+1)(2n+1)n}{6},$$
$$T_n = \sum_{i=1}^{n} i^3 = s_n^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Poznamenejme ještě, že výpočet součtu druhých mocnin prvních n přirozených čísel se vyskytoval už v mezopotámské matematice a odpovídal indickému postupu.

Jednoduché příklady vedoucí na aritmetickou a geometrickou posloupnost obsahuje egyptský Rhindův papyrus i některé starobabylonské tabulky (viz [BBV]). Nejstarší dochovaná čínská matematická práce *Matematika v devíti kapitolách* (asi 3. stol. př. n. l.) obsahuje rovněž některé úlohy, které bychom dnes mohli vyjádřit aritmetickou posloupností.[196] Čínští učenci však k výpočtu

[192] Podle [Ran], str. 31, [SiAN].
[193] Viz sloky GaSaSa/ii.101, 103, podle [Ran], str. 33–34.
[194] Viz sloky Lila/v.115, podle [Col], str. 51, BrSpSi/xii.19, podle [Col], str. 292–293.
[195] Viz sloky Lila/v.115, podle [Col], str. 52, BrSpSi/xii.20, podle [Col], str. 293–294.
[196] Například příklad (6.19), podle [Hu], str. 162, [Ju], str. 84.

používali aritmetické průměry součtu členů. Hlubší znalosti o sčítání aritmetických posloupností uvedl čínský astronom a matematik Šen Kuo (11. stol.). Součty některých posloupností popsal též al-Karadží (asi 953 až 1029)[197] v algebraickém traktátu *Al-Fachri*.

7.18 Devítková zkouška

Ve staré Indii bylo zvykem kvůli nedostatku místa mazat v průběhu výpočtu nepotřebné číslice, proto byla kontrola výsledku velmi obtížná. Snad proto našla u počtářů oblibu *devítková zkouška*, která sloužila k ověření správnosti výsledků aritmetických operací. První se o ní zmínil Árjabhata II.[198] Zkouška je založena na porovnání zbytků po dělení devíti. Například při násobení dvou čísel musí platit, že „zbytek součinu“ je roven „součinu zbytků“. Jsou-li tedy r_1, r_2 a r „zbytky“ čísel n_1, n_2 a jejich součinu $n_1 \cdot n_2$, pak musí platit $r_1 \cdot r_2 = r$. Podobné vlastnosti mají i ostatní aritmetické operace. Výhodou devítkové zkoušky je to, že zbytky po dělení devíti daného přirozeného čísla a jeho ciferného součtu jsou stejné, takže dělení devíti nebylo nutné provádět, stačilo pouze zjistit ciferný součet.

Je třeba ovšem poznamenat, že devítková zkouška je jen podmínkou nutnou nikoli postačující. O tom se staří Indové nezmiňovali, není tedy jasné, zda si tuto skutečnost vůbec uvědomovali. Mohlo to být způsobeno i tím, že případy, kdy devítková zkouška selhává, jsou „málo pravděpodobné“.

Devítkovou zkoušku znali také arabští matematikové, doporučoval ji například al-Chvárizmí, později se rozšířila i do Evropy, kde ji používal například Leonardo Pisánský.

7.19 Magické čtverce

Obliba magických čtverců má v Indii dlouhou tradici, původně měly význam zejména v astrologii. Džinisté i hinduisté jim přikládali zázračné vlastnosti, nehledali však spojitost s aritmetikou. Systematickému studiu matematických vlastností magických čtverců se věnoval zejména Nárájana, který ve čtrnácté kapitole své práce *Ganitakaumudí* popsal pravidla pro konstrukci magických čtverců lichého i sudého řádu (viz např. obr. 7.5).

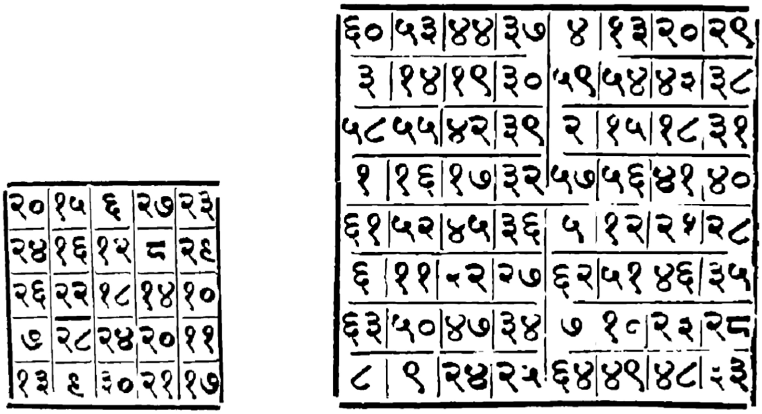
Nárájana rozdělil magické čtverce do tří skupin:

a) čtverce řádu $4n$, tzv. *samagarbha* (*samagarbha*),
b) čtverce řádu $4n + 2$, tzv. *višamagarbha* (*viṣamagarbha*),
c) čtverce lichého řádu, tzv. *višama* (*viṣama*).

Za základní považoval normální čtverce vytvořené přirozenými čísly 1 až $m = n^2$. Věděl, že magický součet je dán vztahem $S = \frac{1}{\sqrt{m}}s$, kde s je celkový součet všech prvků ve čtverci, tj. $s = \frac{m+m^2}{2}$. Z normálních čtverců pak

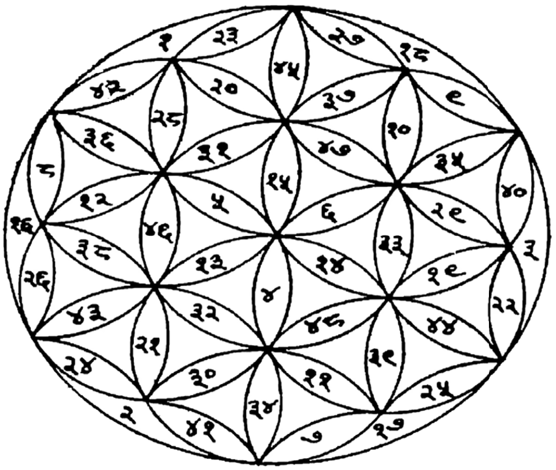
[197] Vlastním jménem Abū Bakr ibn Muḥammad ibn al-Ḥusayn al-Karajī.
[198] Viz sloky MaSi/xviii.67–70, podle [DvS], str. 20–22.

odvozoval konstrukce obecných čtverců, u nichž znal řád a magický součet. Přitom využíval aritmetickou posloupnost, kde první člen a diference byly stanoveny podle řádu čtverce a součtu, počet členů posloupnosti byl dán počtem políček ve čtverci. Nárájanovy metody včetně několika příkladů jsou popsány a komentovány například v [DS4], [SiP2] a [SS].



Obr. 7.5: Nárájanovy magické čtverce[199]

Ve studiu magických útvarů však došel ještě dál, kromě magických čtverců popsal i konstrukci magických obdélníků, trojúhelníků, kruhů a jiných obrazců. Na obrázku 7.6 je tzv. magický lotos, kde uvnitř velkého kruhu je sedm malých a v každém z nich je dvanáct čísel dávajících magický součet (viz [Pl1]). Další Nárájanovy magické obrazce jsou na obrázku 7.7.



Obr. 7.6: Nárájanův magický lotos[200]

[199] Převzato z [DvP].
[200] Převzato z [DvP].

Připomeňme, že první písemná zmínka o magických čtvercích byla nalezena v čínské legendě o *Lo Shu* ze 7. stol. př. n. l. Pýthagorejci vzájemným vztahům mezi čísly přikládali mnohdy až magické vlastnosti a studovali čísla *trojúhelníková*, *čtvercová* atd., přesto stará řecká matematika k magickým čtvercům nedospěla.

V Evropě se o těchto útvarech poprvé zmínil Řek Manuel Moschopoulus na počátku 14. stol., své znalosti čerpal z arabské literatury. Zhruba o sto let později pak Luca Pacioli popisoval magické čtverce jako objekty „rekreační" matematiky. Z dalších evropských matematiků se studiu magických čtverců věnovali například němečtí matematikové Adam Ries (1492 – 1559) a Michael Stifel (1487 – 1567), kteří uvedli některé originální konstrukce, magickými čtverci se zabýval i švýcarský matematik a fyzik Leonhard Euler (1707 – 1783).

Také v Evropě sehrávaly magické čtverce nematematickou roli, například německý lékař, filozof, přírodovědec i astrolog Philippus Aureolus Theophrastus Bombastus von Hohenheim (1493 – 1541), známý pod jménem Paracelsus, užíval magické čtverce k léčebným účelům.

Magické čtverce však přitahovaly i umělce; německý malíř Albrecht Dürer (1471 – 1528) na rytinu *Melencolia I* umístil různé matematické objekty, mezi nimi též magický čtverec (viz [Fu]).

Shrnutí

Zápis čísel v desítkové poziční soustavě silně ovlivnil provádění aritmetických operací. Vzhledem k tomu, že dnes čísla vyjadřujeme na stejném principu, většina současných operací se podobá indickým.

Staří Indové však obratně počítali nejen s celými čísly, ale i se zlomky. Pouze z nedostatku vhodné symboliky některé složitější výrazy se zlomky rozdělovali do tříd, podle toho, jaké operace s danými zlomky chtěli provést.

Indická aritmetika byla rozdělena na operace a určení. Kromě základních operací s celými čísly a zlomky patřilo mezi operace i ve středověku oblíbené pravidlo tří, zatímco další metody, například metoda chybného předpokladu, ale i jiné výpočty týkající se úroků nebo posloupností spadaly mezi určení. Některá z určení se však zabývala i geometrickými výpočty.