8 ALGEBRA

Indové nazývali algebru *bídžaganita* (*bīja-gaṇita*),[1] což můžeme volně přeložit jako věda o počítání s prvky. Brahmagupta používal pro algebru termín *kuttakaganita* (*kuṭṭaka-gaṇita*) nebo jen *kuttaka* (*kuṭṭaka*).[2] Někdy se algebře říkalo také *avjaktaganita* neboli věda o počítání s neznámými na rozdíl od pojmu *vjaktaganita*, tj. věda o počítání se známými, neboli aritmetika včetně geometrie a měřictví.

Ze středověkých indických algebraických prací je nejdůležitější *Bídžaganita* (Bháskara II., 12. stol.),[3] o algebře pojednává *Bídžaganitávatamsa* (Nárájana, 14. stol.), částečně je algebře věnována *Bráhmasphutasiddhánta* (Brahmagupta, 7. stol.), *Árjabhatíja* (Árjabhata I., 6. stol.).[4]

Bháskara II. definoval algebru takto:[5]

> *Analýza (bídža) je rozhodně přirozený rozum, kterému pomáhají různé symboly (varna).*

Staří Indové tak algebru chápali jako vědu, kde se počítá s čísly vyjádřenými pomocí symbolů a k tomu je potřeba znát chytré triky a důmyslné metody. Algebře se ve staré Indii přikládal větší význam než aritmetice. Podle Bháskary II. je věda o počítání s neznámými zdrojem vědy o počítání se známými. Charakteristickým rysem indické algebry je obecná formulace pravidel a pokusy o důkaz.

Důkazy

Staří Indové svá aritmetická pravidla nedokazovali, dokonce ani neuváděli žádná jejich odvození. V algebře však nějaké důkazy nalezneme. Bháskara II. chápal aritmetiku jako souhrn pravidel bez důkazů, zatímco v algebře se v některých případech snažil svá tvrzení zdůvodnit. Důkazy byly většinou geometrické, k pravidlu nebo příkladu byl připojen obrázek s velmi stručným komentářem. Například identitu

$$2ab + (a-b)^2 = a^2 + b^2$$

uvedl v aritmetické *Lílávatí* bez důkazu,[6] zatímco v algebraické *Bídžaganitě* za pravidlo doplnil obrázek se slovy: *položením stejných dílů obrazce do jiného tvaru, viz* [autor odkazuje na následující obrázek].[7]

---

[1] Název je složen ze slov *bídža* (prvek nebo analýza) a *ganita* (věda o počítání).

[2] Slovem *kuttakaganita* byla původně nazývána ta část algebry, která se zabývá řešením neurčitých rovnic prvního stupně. Ve staré Indii byla považována za velmi významnou.

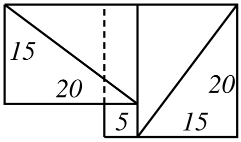
[3] Anglický překlad včetně starých komentářů je uveden v [Col].

[4] Komentovaný anglický překlad je v [Cla].

[5] Podle [DS2], str. 1.

[6] Viz sloka Lila/vi.135, podle [Col], str. 59.

[7] Viz sloka BiGa/v.147, podle [Col], str. 222–223.

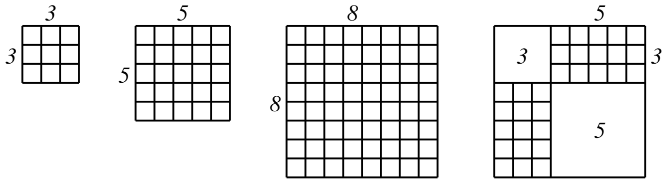


Důkaz je proveden pouze pro konkrétní hodnoty $a = 20$, $b = 15$, stejnou myšlenku však lze použít pro libovolná a, b.

Podobně Bháskara II. dokazoval vztah[8]

$$(a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab\,.$$

K důkazu si zvolil hodnoty $a = 5$, $b = 3$, pak určil jejich čtverce $a^2 = 25$, $b^2 = 9$ a čtverec jejich součtu $(a + b)^2 = 64$. K tomu podal vysvětlení: *odebráním součtu čtverců je zbytek* 30, toto své tvrzení doložil náčrtky.

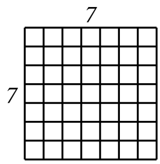


V průběhu řešení jistého příkladu se Bháskara II. opíral o identitu

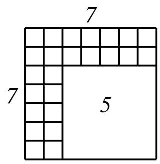
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

s konkrétními hodnotami $a = 7$, $b = 5$ a svoje úvahy podpořil geometricky:[9]

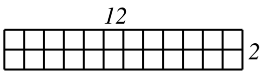
Čtverec sedmi, 49.



Po odečtení čtverce pěti je zbytek 24. *Viz:*



Zde je rozdíl dva a součet je dvanáct: a součin součtu a rozdílu se skládá z 24 *stejných částí.*



[8] Viz sloka BiGa/v.149, podle [Col], str. 224.

[9] Viz sloka BiGa/v.148, podle [Col], str. 223–224. Stejný vzorec popisoval už ve sloce Lila/vi.135, podle [Col], str. 59, ovšem bez vysvětlujících obrázků.

Bháskara II. svá tvrzení nedokazoval systematicky, tyto snahy jsou ojedinělé a svou formou připomínají některé důkazy z řecké matematiky.

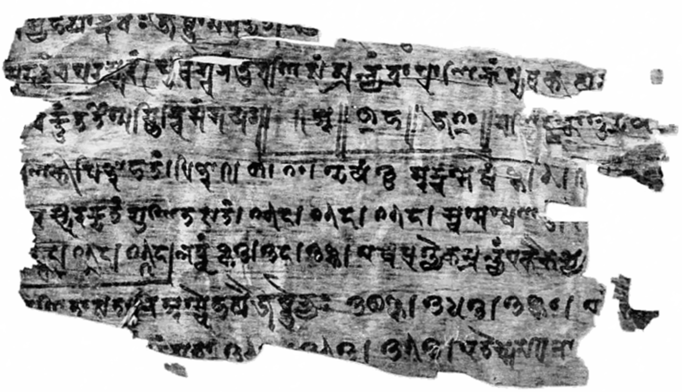
8.1 Terminologie a symbolika

Neznámé

Neznámá byla nazývána *jávat-távat* (*yāvat-tāvat*, tj. tolik-kolik) a označována zkratkou *yā*. Pokud bylo potřeba pojmenovat více neznámých, termín *jávat-távat* označoval první z nich a pro ostatní se užívaly zpravidla zkratky barev nebo písmena abecedy.[10]

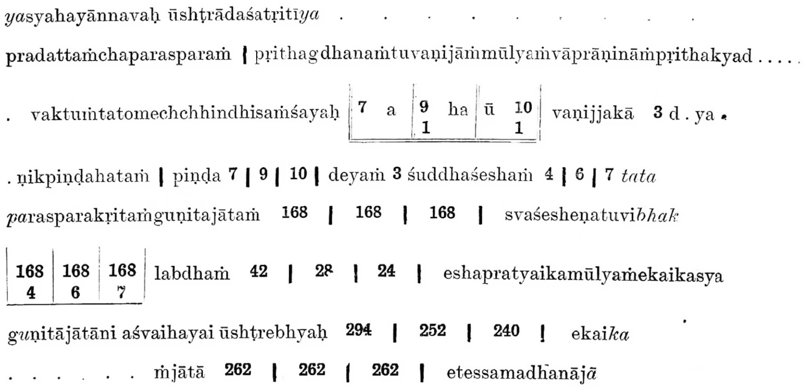
Název	**Zkratka**	**Význam**
jávat-távat	*yā*	první neznámá
kálaka (*kālaka*, tj. černá)	*kā*	druhá neznámá
nílaka (*nīlaka*, tj. modrá)	*nī*	třetí neznámá
pítaka (*pītaka*, tj. žlutá)	*pī*	čtvrtá neznámá
lóhitaka (*lohitaka*, tj. červená)	*lo*	pátá neznámá
haritaka (*haritaka*, tj. zelená)	*ha*	šestá neznámá

Bháskara II. uvedl ještě další termíny pro označení neznámých, například *švétaka* (*śvetaka*, tj. bílá), *čitraka* (*citraka*, tj. pestrá), *kapilaka* (*kapilaka*, tj. žlutohnědá), *pingalaka* (*piṅgalaka*, tj. červenohnědá), *dhúmraka* (*dhūmraka*, tj. šedá), *pátalaka* (*pāṭalaka*, tj. růžová), *šabalaka* (*śabalaka*, tj. tečkovaná), *šjámalaka* (*śyāmalaka*, tj. načernalá), *méčaka* (*mecaka*, tj. tmavomodrá) atd.[11]



[10] Pojmenování neznámých podle barev pochází pravděpodobně z jejich původního značení barevnými kuličkami při počítání.

[11] Podle [DS2], str. 18–19.



*ya*syahayānnavaḥ ūshṭrādaśatṛitī*ya* . . . .

pradattaṁchaparasparaṁ | pṛithagdhanaṁtuvaṇijāṁmūlyaṁvāprāṇināṁpṛithakyad . . . . .

. vaktuṁtatomechchhindhisaṁśayaḥ | 7 a | 9/1 ha | ū 10/1 | vaṇijjakā 3 d . ya •

. ṇikpiṇḍahataṁ | piṇḍa 7 | 9 | 10 | deyaṁ 3 śuddhaśeshaṁ 4 | 6 | 7 *tata*

*pa*rasparakṛitaṁguṇitajātaṁ 168 | 168 | 168 | svaśesheṇatuvi*bhak*

| 168/4 | 168/6 | 168/7 | labdhaṁ 42 | 28 | 24 | eshapratyaikamūlyaṁekaikasya

*gu*ṇitājātāni aśvaihayai ūshṭrebhyaḥ 294 | 252 | 240 | ekai*ka*

. . . . . . ṁjātā 262 | 262 | 262 | etessamadhanājā

Obr. 8.1: Rukopis *Bakhšálí*, folio 3 verso a jeho přepis[12]

Jiné značení neznámých bylo v rukopisu *Bakhšálí*, kde pro neznámou byl použit stejný symbol jako pro nulu,[13] tj. tečka • či kroužek ∘,[14] v jiné úloze na folio 27 verso jsou neznámé označeny zkratkami *pra, dvi, tṛ, ca, pañ*,[15] na lístku folio 3 verso jsou pro neznámé zvoleny zkratky slov z textu zadání problému *a*, *ha*, *ū* (viz obr. 8.1).[16]

Mocniny a odmocniny

Druhá mocnina se nazývala *varga* (čtverec), třetí mocnina *ghana* (krychle, těleso). Výrazy pro další mocniny byly tvořeny pomocí těchto slov multiplikativním způsobem, tj. *varga-varga* byla čtvrtá mocnina, *varga-ghana* značilo šestou mocninu, *ghana-ghana* devátou mocninu, *ghana-varga-varga* byl výraz pro dvanáctou mocninu atd.[17] Mocniny, jejichž exponent není násobkem dvou nebo tří, se vyjadřovaly pomocí termínu *gháta* (*ghāta*), který označoval sčítání exponentů. Tedy například pátá mocnina byla vyjádřena *varga-ghana-gháta*, sedmá jako *varga-varga-ghana-gháta*.

Název	**Zkratka**	**Význam**
varga	*va*	druhá mocnina
ghana	*gha*	třetí mocnina
varga-varga	*va-va*	čtvrtá mocnina
varga-ghana-gháta	*va-gha-ghā*	pátá mocnina
varga-ghana	*va-gha*	šestá mocnina
varga-varga-ghana-gháta	*va-va-gha-ghā*	sedmá mocnina
varga-varga-varga	*va-va-va*	osmá mocnina
ghana-ghana	*gha-gha*	devátá mocnina

[12] Převzato z [Kay1].

[13] Jako neznámé, nepřítomné množství.

[14] Např. na folio 59 recto, podle [Kay2], str. 215.

[15] Jde o zkratky slov *prathama* (první), *dvitīya* (druhý), *tṛtīya* (třetí), *caturtha* (čtvrtý) a *pañcama* (pátý), podle [Kay2], str. 167.

[16] Zkratky slov *aśva*, *haya* (druhy koní), *uṣṭra* (velbloud), podle [Kay2], str. 170.

[17] Podobně vyjádřené mocniny najdeme v Diofantově *Aritmetice*, viz [Baš].

Tyto symboly se zapisovaly až za neznámou, například *yā va* (*yāvat varga*) znamenalo x^2, *yā va-gha-ghā* (*yāvat varga-ghana-ghāta*) značilo x^5. V případě, kdy bylo potřeba vyjádřit součin mocnin více neznámých, následovala za celým výrazem ještě zkratka *bhā*, první slabika slova *bhávita* (*bhāvita*, tj. součin), například x^3y^2 bylo zapsáno jako *yā gha kā va bhā* (*yāvat ghana kālaka varga bhāvita*).

Absolutní člen v rovnici se nazýval *rúpa* (*rūpa*, tj. viditelný),[18] pouze v rukopisu *Bakhšálí* se užíval termín *dršja* (*dṛśya*, tj. viditelný, zřejmý):[19]

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \circ & 2 & 3 & 4 & \textit{dṛśya} & 200 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \text{znamenalo} \qquad x + 2x + 3x + 4x = 200\,.$$

Brahmagupta používal jiný systém značení mocnin neznámé s exponentem větším než čtyři pomocí číslovky a termínu *gata*. Pátou mocninu tedy nazýval *paňčagata* (*pañca-gata*, tj. povýšený, umocněný na pátou).

Pro druhou odmocninu se v rukopisu *Bakhšálí* používala slabika *mū*, zkratka slova *múla* (kořen), zatímco symbol *yu*, zkratka slova *juta* (připojený), označoval sčítání; například zápis[20]

$$\begin{array}{|ccccc|} 11 & \textit{yu} & 5 & \textit{mū} & 4 \\ 1 & & 1 & & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \text{vyjadřoval} \qquad \sqrt{11 + 5} = 4\,.$$

V ostatních dílech se druhá odmocnina označovala pomocí zkratky *ka*, ze slova *karaní* (kořen nebo iracionalita), uvedené před příslušnou veličinou, tedy[21]

$$\textit{ka}9\ \textit{ka}450\ \textit{ka}75\ \textit{ka}54 \quad \text{znamenalo} \quad \sqrt{9} + \sqrt{450} + \sqrt{75} + \sqrt{54}\,.$$

Ve většině případů se stejně jako v uvedeném příkladu symboly pro aritmetické operace neuváděly, výrazy se pouze zapsaly vedle sebe. Jaký druh operace se má provést, vyplynulo ze zadání nebo bylo vyjádřeno slovy.

Koeficienty

V indické algebře neexistovaly žádné speciální názvy pro koeficienty u neznámých. Brahmagupta nazýval koeficient *samkhjá* (*saṃkhyā*, tj. číslo) nebo *gunaka* či *gunakára* (násobitel). Prthúdakasvámin, komentátor Brahmaguptova díla, používal termíny *anka* (*aṅka*, tj. číslo) nebo *prakrti* (*prakṛti*, tj. násobitel). Tyto názvy se vyskytují i u jiných autorů jako je Šrípati nebo Bháskara II. Obvykle byl připojen i název stupně neznámé při odkazu na její koeficient. Koeficienty byly tvořeny pouze číselnými hodnotami.

[18] Absolutní člen byl známý, tj. viditelný, na rozdíl od neznámých, tj. neviditelných.
[19] Např. na folio 22 verso, podle [Kay2], str. 193.
[20] Folio 59 recto, viz [Kay2], str. 215, viz odstavec 8.12.
[21] Podle [Ju], str. 129.

8.2 Operace se zápornými čísly

Není jasné, kdy se v Indii objevila záporná čísla, v dochovaných pramenech nalezneme první zmínky v díle Brahmagupty. Je však pravděpodobné, že Indové mohli převzít znalosti o záporných číslech od Číňanů, kteří používali záporné hodnoty při řešení soustav lineárních rovnic.[22] V Indii se kladná čísla nazývala *dhana* nebo *sva* (*dhana*, *sva*, tj. majetek), záporným číslům se říkalo *rna* nebo *kšaja* (*ṛṇa*, *kṣaya*, tj. dluh, snížení). Pravidla pro počítání se zápornými čísly a s nulou nalezneme například v Brahmaguptově práci *Bráhmasphutasiddhánta*:[23]

BrSpSi/xviii.31–36
Pravidlo pro součet. Součet dvou kladných veličin je kladný; dvou záporných je záporný; součet kladného a záporného je jejich rozdíl nebo jsou-li stejné nula. Součet nuly a záporného je záporný, kladného a nuly je kladný, dvou nul je nula.

Pravidlo pro rozdíl. Menší se musí odečíst od většího; [výsledek] *je kladný, jestliže odčítáme kladné od kladného, záporné od záporného. Když je větší odečtené od menšího, rozdíl je opačný. Záporné odečtené od nuly se stane kladným, kladné záporným. Záporné mínus nula je záporné, kladné* [mínus nula] *je kladné, nula* [mínus nula] *je nula. Když se kladné má odečíst od záporného a záporné od kladného, je nutné je sečíst.*

Pravidlo pro násobení. Součin záporné veličiny a kladné je záporný, dvou záporných kladný, dvou kladných kladný. Součin nuly a záporného nebo nuly a kladného je nula, dvou nul je nula.

Pravidlo pro dělení. Kladné dělené kladným nebo záporné dělené záporným je kladné. Nula dělená nulou je nula. Kladné dělené záporným je záporné. Záporné dělené kladným je záporné. Kladné nebo záporné dělené nulou je zlomek s nulou ve jmenovateli.

Čtverec záporného nebo kladného je kladný, nuly je nula. Druhá odmocnina čtverce je taková, jako to, z čeho byl čtverec získán.

V případě součtu kladného a záporného čísla Brahmagupta nespecifikoval znaménko rozdílu.

Operace se zápornými čísly uvedli i další autoři, například Mahávíra je definoval tak, jak je známe dnes:[24]

a) Součin a podíl dvou kladných, resp. záporných čísel je kladný; je-li jedno číslo kladné a druhé záporné, je záporný.

[22] Čínská metoda nazývaná *fang čcheng* se podobá dnešní Gaussově eliminační metodě. Staří Číňané čísla vyjadřovali pomocí počítacích tyčinek; kladná čísla byla znázorněna červenými tyčinkami, záporná černými, podle [Hu], str. 186–208.

[23] Podle [Col], str. 339.

[24] Viz sloky GaSaSa/i.50–52, podle [Ran], str. 7.

b) Součet dvou kladných, resp. záporných čísel je kladný, resp. záporný. Rozdíl záporného a kladného čísla je záporný, rozdíl kladného a záporného čísla je kladný.
c) Druhá mocnina kladného i záporného čísla je kladná. Odmocnina kladného čísla je kladná nebo záporná.[25] Záporné číslo není čtvercem, proto ho nelze odmocnit.

Později Bháskara II. doplnil ještě operace se zápornými čísly a nulou:[26]

d) Jestliže se ke kladnému, resp. zápornému číslu přičte nebo odečte nula, číslo zůstane stejné kladné, resp. záporné. Ale když se odčítá od nuly, stane se opačným.

Ke znaménku u druhé odmocniny poznamenal Prthúdakasvámin:[27]

> *Druhá odmocnina se může vzít kladná nebo záporná, podle toho, co lépe vyhovuje dalším operacím.*

V Číně jsou záporná čísla poprvé doložena v 8. kapitole knihy *Matematika v devíti kapitolách*, kde byla potřebná při řešení soustav lineárních rovnic metodou *fang čcheng*.

8.3 Operace s iracionalitami

Indové neznali imaginární čísla, soudili, že odmocnina ze záporného čísla neexistuje, protože takové číslo nemůže být čtvercem. Znali ovšem kvadratické iracionality, nazývané *karaní*, se kterými počítali velmi zručně. Výpočet iracionalit a počítání s nimi patřily do algebry.

Už v 1. tisíciletí před naším letopočtem v textech zvaných *šulbasútry* jsou uvedeny přibližné hodnoty některých odmocnin, například $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ a dalších.[28] V raném džinistickém díle *Džambúdvípapradžňapti* (4. stol. př. n. l) byla druhá odmocnina počítána podle vztahu[29]

$$\sqrt{Q} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a},$$

kde a^2 byl největší čtverec menší než Q, a tento odhad byl používán po mnoho století až do středověku.[30]

Velmi podrobně byl popsán výpočet první a druhé aproximace v rukopisu *Bakhšálí*, nezachovalo se však obecné pravidlo, postup je rekonstruován z čitelných příkladů.[31]

---

[25] Staří Indové druhou odmocninu chápali jako inverzní operací k druhé mocnině, pokud tedy nějaké číslo vzniklo jako druhá mocnina záporného, po odmocnění byl výsledek záporný.

[26] Viz sloka BiGa/i.12, podle [Col], str. 136. Operace s nulou a kladnými čísly Bháskara II. uvedl i v aritmetické *Lílávatí*, viz sloka Lila/ii.44–45, podle [Col], str. 20.

[27] Podle [Col], str. 340.

[28] Viz 3. kapitola, odstavec 3.9.

[29] Podle [DS8], str. 266.

[30] Viz 4. kapitola, odstavec 4.1.

[31] Výkladem metody se zabývá [Cha].

Místo $\sqrt{Q} = \sqrt{a^2+b} = q$ se uvažovala hodnota

$$q_1 = a + \frac{b}{2a} \qquad \text{nebo přesnější} \qquad q_2 = a + \frac{b}{2a} - \frac{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}{2\left(a+\frac{b}{2a}\right)}\,. \tag{8.1}$$

Platí totiž

$$\sqrt{Q} = \sqrt{a^2+b} < \sqrt{a^2+b+\left(\frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\left(a+\frac{b}{2a}\right)^2} = a + \frac{b}{2a} = q_1\,.$$

Takto získaná aproximace q_1 je větší než správná hodnota $\sqrt{Q}$. Proto se často počítala ještě druhá aproximace, která dávala lepší výsledek.

Podobný postup je použit v rukopise *Bakhšálí* i pro výpočet druhé aproximace hledané odmocniny. Při označení $r_1 = q_1^2 - Q = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ je

$$\sqrt{Q} = \sqrt{q_1^2 - r_1} \approx q_1 - \frac{r_1}{2q_1} = a + \frac{b}{2a} - \frac{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}{2\left(a+\frac{b}{2a}\right)} = q_2\,,$$

protože

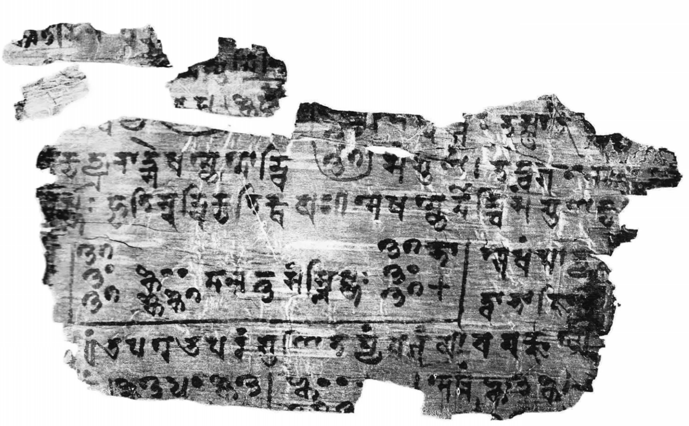
$$\sqrt{Q} = \sqrt{q_1^2 - r_1} < \sqrt{q_1^2 - r_1 + \left(\frac{r_1}{2q_1}\right)^2} = \sqrt{\left(q_1 - \frac{r_1}{2q_1}\right)^2} = q_1 - \frac{r_1}{2q_1}\,.$$

Na zachovaných lístcích rukopisu je uvedeno řešení úlohy,[32] kde bylo třeba stanovit hodnotu $\sqrt{481}$. Na lístku s označením folio 65 verso je výpočet první aproximace

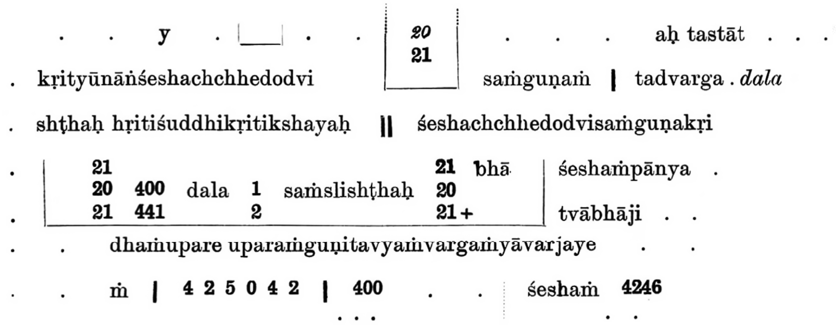
$$\sqrt{481} = \sqrt{441+40} \approx 21 + \frac{40}{42} = \frac{882+40}{42} = \frac{922}{42}\,,$$

na lístku folio 56 recto (viz obr. 8.2), je ještě čitelná část výpočtu druhé aproximace

$$q_2 = 21\frac{20}{21} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{20}{21}\right)^2}{21\frac{20}{21}} = \frac{461}{21} - \frac{400}{441}\cdot\frac{21}{2\cdot 461} = \frac{425\,042}{19\,362} - \frac{400}{19\,362} = \frac{424\,642}{19\,362}\,.$$



[32] Šlo o problém určit počet členů aritmetické posloupnosti, když byl znám první člen, diference a součet prvních n členů, viz 7. kapitola, odstavec 7.17.1.



Obr. 8.2: Rukopis *Bakhšálí*, folio 56 recto a jeho přepis[33]

Pro zajímavost ještě uvedeme porovnání přesnosti jednotlivých aproximací čísla $\sqrt{481}$ s jeho správnou hodnotou:

$$\sqrt{481} \approx q_1 = \frac{922}{42} = 21{,}95238\ldots,$$
$$\sqrt{481} \approx q_2 = \frac{424\,642}{19\,362} = 21{,}93172\ldots,$$
$$\sqrt{481} = 21{,}9317121\ldots$$

Je vidět, že výpočet odmocniny pomocí druhé aproximace je poměrně přesný, vypočítaná hodnota se liší až na pátém místě za desetinnou čárkou.

Iterační algoritmus na výpočet druhé odmocniny uvedený v rukopisu byl znám už ve staré Mezopotámii, používal jej Hérón a později al-Hassár (12. stol.)[34] a Leonardo Pisánský. Čínský matematik Liu Hui (asi 220 až 280) vyjádřil odhad přibližné hodnoty nerovnostmi $a + \frac{b}{2a+1} < \sqrt{a^2 + b} < a + \frac{b}{2a}$. S přibližnou hodnotou $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a+1}$ počítali perští učenci al-Nasawi a al-Káší.[35]

V Indii se pro zlepšení přesnosti někdy doporučovalo vynásobit odmocňované číslo čtvercem nějakého velkého čísla, často sudé mocniny deseti. Například Šrídhara uvedl:[36]

PaGa/118

Číslo, které není čtvercem, se vynásobí nějakým velkým čtvercovým číslem, odmocní, a přitom se zanedbá zbytek; pak se tato odmocnina vydělí druhou odmocninou násobitele [čtvercového čísla].

Podle Šrídhary bylo výhodné počítat

$$\sqrt{Q} = \frac{\sqrt{Qm^2}}{m} \approx \frac{R}{m},$$

[33] Převzato z [Kay1].

[34] Vlastním jménem Abū Bakr Muḥammad ibn Abdallāh al-Ḥaṣṣār.

[35] Podle [BBV], [BeJ1b], [Hu], [Ju]. Dá se ukázat, že $\frac{b}{2a+1}$ je dolním odhadem $\sqrt{Q}$, tj. že platí $a + \frac{b}{2a+1} < \sqrt{a^2 + b} < a + \frac{b}{2a}$, viz [BeJ4].

[36] Podle [Shu1], str. 91.

kde m je vhodně zvolené velké číslo, a přitom odmocninu $\sqrt{Qm^2} \approx R$ vypočítat podle algebraického pravidla se zanedbáním zbytku. Tímto způsobem vypočítal $\sqrt{3}$, když volil „velké číslo“ $m = 1\,000$:

$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3 \cdot 1\,000\,000}}{1\,000} = \frac{\sqrt{3\,000\,000}}{1\,000} \approx \frac{1\,732}{1\,000} = 1{,}732\,,$$

přičemž výpočet podle (8.1) ze vztahu pro druhou aproximaci dává $\sqrt{3} \approx 1{,}75$.

Podobnou metodu, kterou sám označil jako přibližnou, využil rovněž Bháskara II. při řešení příkladu,[37] kde potřeboval určit $\sqrt{\frac{169}{8}}$. Zlomek šikovně rozšířil jmenovatelem a pro zvýšení přesnosti ještě *velkým čtvercovým číslem*. Obecnému vzorci

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{abm^2}{b^2m^2}} = \frac{\sqrt{abm^2}}{bm} \approx \frac{R}{bm}$$

odpovídal výpočet s volbou $m^2 = 10\,000$

$$\sqrt{\frac{169}{8}} = \frac{\sqrt{169 \cdot 8 \cdot 10\,000}}{8 \cdot 100} \approx \frac{3\,677}{800} = 4\frac{477}{800}\,.$$

Sčítání a odčítání

Brahmagupta, a po něm i další učenci, uvedl několik pravidel pro počítání s iracionalitami. Cílem patrně bylo co nejvíc omezit počítání s přibližnými hodnotami.[38] Pravidlo pro součet, resp. rozdíl iracionalit bychom mohli vyjádřit vzorcem[39]

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{n}} \pm \sqrt{\frac{b}{n}}\right)^2 \cdot n}\,,$$

kde $\sqrt{a}$ a $\sqrt{b}$ byly dané iracionality a n bylo libovolné číslo, které bylo vhodně zvoleno tak, aby odmocniny $\sqrt{\frac{a}{n}}$ a $\sqrt{\frac{b}{n}}$ byly celočíselné. V zadání příkladů volil Brahmagupta takové hodnoty, aby tento postup bylo možno použít; například v úloze, kde bylo třeba vypočítat součet $\sqrt{2} + \sqrt{8}$, volil $n = 2$. Jednotlivé kroky šly za sebou takto:[40]

dělení číslem $n = 2$	$\sqrt{\frac{2}{2}} + \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{1} + \sqrt{4} = 1 + 2$
druhá mocnina toho	$(1+2)^2 = 9$
násobení číslem $n = 2$	$9 \cdot 2 = 18$
z toho druhá odmocnina	$\sqrt{18}\ (= \sqrt{2} + \sqrt{8})$

[37] Jde o výpočet délky přepony pravoúhlého trojúhelníku, sloka Lila/vi.137, podle [Col], str. 760.

[38] Operace s iracionalitami jsou podrobně popsány v článku [DS7].

[39] Viz sloka BrSpSi/xviii.39, podle [Col], str. 340, podobné pravidlo popsal Mahávíra ve sloce GaSaSa/vii.88$\frac{1}{2}$.

[40] Podle [Col], str. 341.

Místo výpočtu dvou přibližných hodnot a jejich součtu stačilo stanovit jen jednu odmocninu.

Bháskara II. doporučoval ještě jinou metodu,[41] která odpovídá vzorci

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{b\left(\sqrt{\frac{a}{b}} \pm 1\right)^2}\,.$$

Násobení a dělení

Při násobení výrazů s iracionalitami se využívaly vztahy

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{d}) = \sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}\,, \qquad \sqrt{a}\cdot(\sqrt{b}\pm c) = \sqrt{ab}\pm\sqrt{ac^2}\,.$$

Od Brahmagupty pochází i tento příklad, autor však uvedl jen zadání a výsledek:[42]

$$(5+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{12}-5) = \sqrt{75}+\sqrt{300}-25+\sqrt{9}+\sqrt{36}-\sqrt{75} = -16+\sqrt{300}\,.$$

Při dělení se uplatňovala identita $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$, úpravu výrazu s iracionalitami ve jmenovateli bychom mohli vyjádřit vzorcem[43]

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}+\sqrt{d}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}-\sqrt{d})}{(\sqrt{c}+\sqrt{d})(\sqrt{c}-\sqrt{d})} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}-\sqrt{d})}{c-d}\,.$$

I následující příklad uvedl Brahmagupta; při výpočtu doporučoval rozšířit výrazem $(\sqrt{18}-\sqrt{3})$, pak uvedl jen výsledek:[44]

$$\frac{3+\sqrt{450}+\sqrt{75}+\sqrt{54}}{\sqrt{18}+\sqrt{3}} = \frac{(3+\sqrt{450}+\sqrt{75}+\sqrt{54})\cdot(\sqrt{18}-\sqrt{3})}{(\sqrt{18}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{18}-\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{75+\sqrt{675}}{15} = 5+\sqrt{\frac{675}{225}} = 5+\sqrt{3}\,.$$

Numerické hodnoty v zadání jistě nebyly náhodné, autor měl příklad pečlivě připraven, aby dostal „hezký“ výsledek.

Druhá mocnina a odmocnina

Při výpočtu druhé mocniny součtu iracionalit se postupovalo podle vzorce

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+\sqrt{4ab}\,,$$

[41] Viz sloka BiGa/i.30, podle [Col], str. 145–146.

[42] Podle [Col], str. 341.

[43] Viz sloka BrSpSi/xviii.40, podle [Col], str. 341.

[44] Podle [Col], str. 342.

resp.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i\neq j}\sqrt{4a_ia_j}\,.$$

Výpočet druhé odmocniny součtu s iracionalitami odpovídá dnešnímu vzorci[45]

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\,.$$

Pokud rozdíl a^2-b byl čtvercem, tedy pro $a^2-b=c^2$, bylo možné vyjádřit vzorec v jednodušším tvaru

$$\sqrt{a\pm\sqrt{a^2-c^2}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}\,.$$

Pro ilustraci uvedeme ještě jeden příklad i s řešením tak, jak jej popsal Bháskara II.[46]

BiGa/i.39–40 (část)
Vyjádření odmocniny:
*ru*10 *ka*24 *ka*40 *ka*60 $\left[\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}\right]$.
Od čtverce racionálního čísla [10] 100 *odečti čísla odpovídající dvěma iracionalitám* [jejich čtvercům] 24 *a* 40*, zbytek je* 36 *a z toho odmocnina* 6*; odečtená od přirozeného čísla* 10 *a přičtená k němu vytvoří* 4 *a* 16*, jejich poloviny* 2 *a* 8*. První se odmocní ka*2 $\left[\sqrt{2}\right]$*, druhá se považuje za racionální číslo a stejné operace se provádějí se zbytkem iracionalit. Od čtverce racionálního čísla* [8] 64 *se odečte číslo* 60*, rozdíl je* 4*, z toho odmocnina* 2*, která odečtená od toho racionálního čísla a přičtená k němu vytvoří* 6 *a* 10*, z čehož poloviny jsou* 3 *a* 5*. Z nich odmocniny jsou iracionality ka*3 *ka*5 $\left[\sqrt{3},\sqrt{5}\right]$*. Vyjádření celé odmocniny nalezeno: ka*2 *ka*3 *ka*5 $\left[\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right]$.

Je třeba poznamenat, že před tímto příkladem Bháskara uvedl výpočet $(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$. Dobře si uvědomoval vztah mezi druhou mocninou a druhou odmocninou a věděl tedy, jaký dostane výsledek.

Bháskara II. ještě upozornil na souvislost počtu iracionalit $\sqrt{q_i}$ v odmocňovaném výrazu typu

$$\sqrt{p_1+\sum_{i=1}^{m}\sqrt{q_i}}=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\,, \tag{8.2}$$

[45] Viz sloka BrSpSi/xviii.41, podle [Col], str. 342.
[46] Podle [Col], str. 150.

s počtem sčítanců n na pravé straně.[47] Počet iracionalit q_i v součtu na levé straně v (8.2), tj. číslo m, je vždy roven $(n-1)$-nímu částečnému součtu členů posloupnosti přirozených čísel, tj. $m = s_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} i$. Pro $m = 1$ vznikl výraz (8.2) umocněním dvou sčítanců ($n = 2$), pro $m = 3$ umocněním tří sčítanců ($n = 3$), pro $m = 6$ umocněním čtyř sčítanců ($n = 4$) atd. Při výpočtu druhé odmocniny byl tedy znám počet sčítanců, z nichž se skládal výsledek.

Ve výrazu

$$p_1 + \sqrt{q_1} + \sqrt{q_2} + \sqrt{q_3}$$

jsou obsaženy tři odmocniny (m), hledal se tedy výsledek ve tvaru součtu tří sčítanců (n)

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\,.$$

Protože číslo $p_1 + \sqrt{q_1} + \sqrt{q_2} + \sqrt{q_3}$ vzniklo umocněním,

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 = x + y + z + \sqrt{4xy} + \sqrt{4xz} + \sqrt{4yz}\,,$$

platí $p_1 = x + y + z\,,\ \ \sqrt{q_1} = \sqrt{4xy}\,,\ \ \sqrt{q_2} = \sqrt{4xz}\,,\ \ \sqrt{q_3} = \sqrt{4yz}\,.$

Vlastní výpočet probíhal v $n-1$ krocích. V prvním kroku se nejprve od druhé mocniny čísla p_1 odečetlo $n-1$ čtverců iracionalit $\sqrt{q_i}$ (v našem případě dva), tedy

$$p_1^2 - q_1 - q_2 = (x+y+z)^2 - 4xy - 4xz = (-x+y+z)^2\,,$$

a odmocněním se získala hodnota $y + z - x$. Součet $y + z + x$ byl určen podle zadání. Při označení $u = y + z$, $v = x$ tak byly známé hodnoty součtu $u + v$ a rozdílu $u - v$ a mohla se provést operace *samkramana*[48] pro $u + v = p_1$ a $u - v = \sqrt{p_1^2 - q_1 - q_2}$:

$$\begin{aligned} y + z + x &= p_1 \\ y + z - x &= \sqrt{p_1^2 - q_1 - q_2} \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(p_1 - \sqrt{p_1^2 - q_1 - q_2}\right) \\ y + z &= \frac{1}{2}\left(p_1 + \sqrt{p_1^2 - q_1 - q_2}\right). \end{aligned}$$

Odmocněním prvního se získal první sčítanec hledaného výrazu, tj. $\sqrt{x}$, k součtu $y + z = p_2$ se přičetl „vhodný“ počet zbývajících iracionalit $(n-2)$ a celý postup se opakoval, dokud všechny členy nebyly vyčerpány.

Ve druhém (v tomto případě posledním) kroku se tedy počítalo s výrazem

$$p_2 + \sqrt{q_3} = y + z + \sqrt{4yz}\,.$$

[47] Viz sloka BiGa/i.44–47, podle [Col], str. 152–153.

[48] Pomocí operace *samkramana* s „a ve spojení s b“ se počítala čísla u, v ze soustavy $u+v = a$, $u-v = b$ podle vztahu $u = \frac{1}{2}(a+b)$ a $v = \frac{1}{2}(a-b)$, viz 7. kapitola, odstavec 7.16.3.

Nejprve se vypočítalo $(y+z)^2 - 4yz = (z-y)^2$, z toho se vzala odmocnina a následně se podle operace *samkramana* dopočítaly hodnoty y a z, které se pak odmocnily:

$$\begin{aligned} z+y &= p_2 \\ z-y &= \sqrt{p_2^2 - q_3} \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(p_2 - \sqrt{p_2^2 - q_3}) \\ z &= \frac{1}{2}(p_2 + \sqrt{p_2^2 - q_3})\,. \end{aligned}$$

Nakonec se všechny odmocniny sečetly a tím se získal hledaný výsledek, tj. $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

Bháskara ilustroval na vhodných příkladech, že ne každý výraz typu

$$p_1 + \sum_{i=1}^{m} \sqrt{q_i}$$

může být po odmocnění vyjádřen ve tvaru $\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}$, a takové příklady označoval za chybné.[49]

V řecké matematice začaly být iracionality zkoumány po objevu nesouměřitelnosti, tj. asi v 5. stol. př. n. l. Podrobnějšímu studiu se věnoval Theaitétos, který provedl jejich klasifikaci (viz [BeJ3]). Úpravami výrazů s odmocninami i vyšších řádů se více zabývali arabští učenci, například al-Karadží a al-Bírúní.

8.4 Operace s mnohočleny

V indických algebraických dílech byla uvedena také pravidla pro počítání s mnohočleny. Mnohočleny se vyjadřovaly tak, že nejvyšší mocnina byla zapsána vlevo, mocniny klesaly směrem doprava a koeficient byl uveden až za příslušnou mocninou, přičemž se vždy zapisovaly i nulové koeficienty:

$$\textit{yā va } 3 \;\; \textit{yā } \dot{5} \;\; \textit{rū } 0 \quad \text{označovalo} \quad 3x^2 - 5x\,.$$

Při sčítání a odčítání se mnohočleny zapisovaly pod sebe a sčítaly, resp. odčítaly se jen členy stejného typu, například výpočet

$$\begin{array}{lll} \textit{yā } 1 \;\; \textit{rū } 1 & & \\ \textit{yā } \dot{2} \;\; \textit{rū } 8 & \qquad \text{součet je:} & \textit{yā } \dot{1} \;\; \textit{rū } 9 \end{array}$$

znamenal

$$(x+1) + (-2x+8) = -x+9\,.$$

---

[49] Viz sloky BiGa/i.48, BiGa/i.49, BiGa/i.50, podle [Col], str. 153–154.

Součet a rozdíl mnohočlenů s více proměnnými[50]

$$
\begin{array}{lll}
y\bar{a}\,3\;\,k\bar{a}\,5\;\,n\bar{\imath}\,7 & \text{Odpověď: součet} & y\bar{a}\,1\;\,k\bar{a}\,2\;\,n\bar{\imath}\,6 \\
y\bar{a}\,\dot{2}\;\,k\bar{a}\,\dot{3}\;\,n\bar{\imath}\,\dot{1} & \text{rozdíl} & y\bar{a}\,5\;\,k\bar{a}\,8\;\,n\bar{\imath}\,8
\end{array}
$$

vyjádříme dnes

$$
\begin{aligned}
(3x+5y+7z)+(-2x-3y-z) &= x+2y+6z\,,\\
(3x+5y+7z)-(-2x-3y-z) &= 5x+8y+8z\,.
\end{aligned}
$$

Násobení mnohočlenů se provádělo stejným způsobem jako dnes, jen zápis se lišil; například součin

$$(5x-1)(3x+2)=15x^2+7x-2$$

byl počítán tak, že se druhý činitel rozdělil na jednotlivé členy, každým z nich se vynásobil první činitel a nakonec se dílčí součiny sečetly:[51]

$$
\begin{array}{lll}
y\bar{a}\;5\;\;r\bar{u}\;\dot{1} & y\bar{a}\;3 & y\bar{a}\;va\;15\;\;y\bar{a}\;\;\dot{3} \\
y\bar{a}\;5\;\;r\bar{u}\;\dot{1} & r\bar{u}\;2 & \underline{\qquad\qquad y\bar{a}\;10\;\;r\bar{u}\;\dot{2}} \\
 & & y\bar{a}\;va\;15\;\;y\bar{a}\;\;7\;\;r\bar{u}\;\dot{2}
\end{array}
$$

Při násobení mnohočlenů s více proměnnými se u smíšených součinů uváděla ještě slabika *bhā*, zkratka slova *bhávita*, tedy výsledek násobení

$$(-3x-2y+z+1)(-6x-4y+2z+2)=18x^2+8y^2+2z^2+24xy-12xz-8yz+2$$

byl zapsán[52]

$$y\bar{a}\;va\;18\quad k\bar{a}\;va\;8\quad n\bar{\imath}\;va\;2\quad y\bar{a}\;k\bar{a}\;bh\bar{a}\;24\quad y\bar{a}\;n\bar{\imath}\;bh\bar{a}\;\dot{12}\quad k\bar{a}\;n\bar{\imath}\;bh\bar{a}\;\dot{8}\quad r\bar{u}\;2\,.$$

Bháskara II. předložil i příklady na dělení mnohočlenů, po zadání však uvedl hned výsledek, takže postup výpočtu není jasný. V pravidle zmínil, že dělení mnohočlenů se provádí stejně jako dělení čísel.

Při výpočtu druhé mocniny mnohočlenů se postupovalo podle dnešních vzorců

$$(a\pm b)^2=a^2+b^2\pm 2ab\,,$$

resp.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n} a_i^2+\sum_{i\neq j} 2a_ia_j\,.$$

[50] Viz sloka BiGa/i.27, podle [Col], str. 144.
[51] Podle Kršnova komentáře, viz [Col], str. 142.
[52] Podle [Col], str. 144.

Druhá mocnina výrazu

$$y\bar{a}\ 4\ \ r\bar{u}\ \dot{6} \qquad \text{byla} \qquad y\bar{a}\ va\ 16\ \ y\bar{a}\ \dot{48}\ \ r\bar{u}\ 36\,.$$

V současné symbolice

$$(4x-6)^2 = 16x^2 - 48x + 36\,.$$

8.5 Rovnice

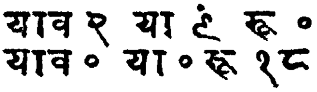
Hlavním tématem středověké algebry bylo řešení rovnic. Řešení nějakého konkrétního problému probíhalo ve třech krocích. Nejprve bylo třeba sestavit rovnici nazývanou *samíkarana* (*samī-karaṇa*)[53] nebo jen *sama*. Někdy se rovnici říkalo také *samíkára* (*samī-kāra*) nebo *samíkrijá* (*samī-kriyā*). Rovnice měla dvě strany, kterým se říkalo *pakša* (*pakṣa*). Rovnost byla někdy vyjádřena zkratkou *pha* (*phala*, tj. výsledek), většinou však nebyl uveden žádný symbol. K vytvoření rovnice Bháskara II. napsal:[54]

BiGa/iv.100
Nechť jávat-távat označuje neznámou. Pak přesným provedením operací předložených v úloze sčítání, odčítání, násobení nebo dělení nechť jsou pečlivě sestaveny dvě stejné strany.

K tomu byly ještě uvedeny metody, které bylo možno při vytváření rovnice použít, například pravidlo tří, součet členů posloupnosti, vlastnosti obrazců.

Poté, co byla rovnice zformulována, následovalo její zapsání neboli *njása* (*nyāsa*). Strany rovnice se zapisovaly pod sebe; v prvním řádku byla levá strana, ve druhém pravá, v každém řádku mocniny neznámých klesaly zleva doprava, odpovídající členy byly pod sebou, chybějící členy označeny nulovým koeficientem.

Zápis[55]



v přepisu

$$\begin{array}{ll} y\bar{a}\ va\ \ 2\ y\bar{a}\ \ \dot{9}\ r\bar{u}\ \ \ 0 & \\ y\bar{a}\ va\ \ 0\ y\bar{a}\ \ 0\ r\bar{u}\ 18 \qquad \text{znamenal} \qquad 2x^2 - 9x = 18\,. \end{array}$$

Nebo v případě více neznámých

$$\begin{array}{l} y\bar{a}\ 197\ \ k\bar{a}\ \dot{1644}\ \ n\bar{\imath}\ \dot{1}\ \ r\bar{u}\ \ 0 \\ y\bar{a}\ \ 0\ \ k\bar{a}\ \ 0\ \ \ n\bar{\imath}\ 0\ \ r\bar{u}\ 6302 \qquad \text{znamenalo} \qquad 197x - 1644y - z = 6302\,. \end{array}$$

---

[53] Název je složen ze slov *sama* (rovnost) a *kṛ* (dělat).
[54] Podle [Col], str. 185.
[55] Z prvního tištěného vydání Bháskarovy *Bídžaganity*, převzato z [Sm2].

Posledním krokem pak byla příprava rovnice k řešení, tzv. *samašódhana* (*sama-śodhana*),[56] či jen *šódhana*, což představovalo převedení neznámých na jednu stranu a absolutních členů na druhou.

Rozdělení rovnic

Staří Indové rozlišovali několik typů rovnic. Tato klasifikace se u jednotlivých autorů mírně lišila, uvedeme rozdělení podle Bháskary II.:[57]

1. rovnice s jednou neznámou,
   a) lineární,
   b) kvadratické a vyšších stupňů,
2. rovnice s více neznámými,
   a) lineární,
   b) kvadratické a vyšších stupňů,
   c) rovnice obsahující smíšený součin neznámých, tzv *bhāvita*.

Někteří učenci nazývali rovnice kvadratické a vyšších stupňů *madhjamáharana* (*madhyamāharaṇa*, tj. eliminace středního členu)[58] a už je dál nerozdělovali do skupin podle počtu neznámých.

8.6 Rovnice s jednou neznámou

8.6.1 Lineární rovnice s jednou neznámou

Při řešení lineárních rovnic se někdy užívala metoda chybného předpokladu.[59] Tento postup se objevuje už v rukopisu *Bakhšálí*, například na folio 23 recto nalezneme tuto úlohu (viz obr. 8.3).[60]

BMs/23r

Množství dané prvnímu je neznámé. Druhý dostal dvakrát tolik co první, třetí třikrát tolik co druhý a čtvrtý čtyřikrát víc než třetí. Celkové rozdělené množství je 132*. Jaké je množství prvního?*

Zadání odpovídá výpočet vyjádřený současnou symbolikou

$$x + 2x + 3 \cdot 2x + 4 \cdot 3 \cdot 2x = 132 \quad \Rightarrow \quad 33x = 132 \quad \Rightarrow \quad x = 4\,.$$

Řešení je popsáno takto:[61]

Polož libovolnou hodnotu na prázdné místo, libovolná hodnota je 1, *pak vytvoř řadu* $1,\ 2,\ 2\cdot 3,\ 6\cdot 4$, *vynásobené* $1,\ 2,\ 6,\ 24$, *sečtené* 33, [tím] *vyděl množství, co vidíš* [absolutní člen] $\frac{132}{33}$, *po zkrácení* 4. [To je] *Množství dané* [prvnímu].

---

[56] Odvozeno ze slov *sama* (rovnost) a *šódhana* (čištění).

[57] Podle [Col], str. 186.

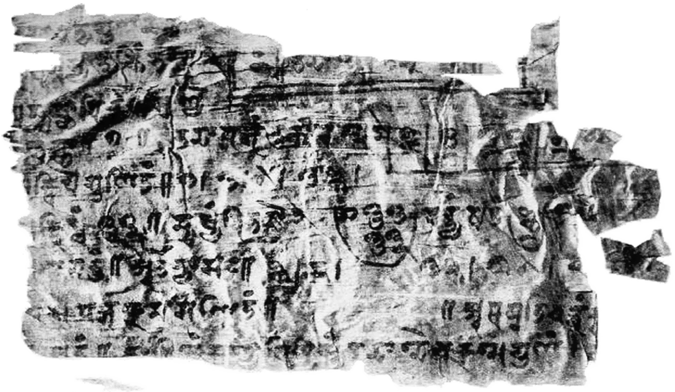
[58] Složeno z *madhjáma* (*madhyama*, tj. prostřední) a *áharana* (*āharaṇa*, tj. odstranění).

[59] Metoda chybného předpokladu je podrobněji vysvětlena v 7. kapitole, odstavci 7.16.1.

[60] Podle [Kay2], str. 193, a [DS2], str. 36.

[61] Podle [DS2], str. 37. V řešení se uvádí „prázdné místo“. To je proto, že neznámá byla označena malým kroužkem, stejný symbol se používal i pro nulu. Význam tohoto symbolu můžeme vysvětlit jako neznámé, tj. nepřítomné množství.

Na závěr byla ještě připojena zkouška $4 + 8 + 24 + 96 = 132$.



. dāchatṛiguṇa*ṁ*d . . . .

*pratha*masyatukiṁbha*vet* | 0 / 1 | tadā 2 / 1 | *tadā* . . | . | .

yadṛi*ch*chhāvinyaseśūṇye

. . chchhā || 1 || tadāvargaṁtukārayet | . / 1 | 2 / 1 | 2 / 1 | 3 / 1 | 6 / 1 | . .

. kshipeguṇitaṁ || 1 | 2 | 6 | 24 |

*pra*kshiptaṁ 33 || dṛishyaṁvibhajet | 132 / 33 | *v*artyaṁjātaṁ | 4 / 1 | . . . . .

. ṇadattaṁ || atonyāsaḥ || 4 | 8 | 24 | 96 | . . . .

eshavargakramagaṇitaṁ || || athayutivargaṁ*kṛi* . .

s . taṁ || . ā . i . aṁś*ūṇ*yevinyastaṁtadāchaivakrameguṇaṁ

Obr. 8.3: Rukopis *Bakhšálí*, folio 23 recto a jeho přepis[62]

Metoda chybného předpokladu původně pomáhala překonat nedostatek vhodné symboliky, kdy ještě neexistoval symbol pro neznámou. V pozdějších indických algebraických dílech se už tato metoda nevyskytuje, nalezneme ji však v aritmetice.

Ve všech pracích o algebře byly úlohy vedoucí na rovnici ($a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$)

$$a_1 x + b_1 = a_2 x + b_2$$

a pravidlo na její řešení, které můžeme vyjádřit vzorcem

$$x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}.$$

Bháskara II. uvedl tento příklad:[63]

BiGa/iv.103–104
Jeden člověk má tři sta mincí a šest koní. Druhý má deset koní stejné hodnoty, ale má dluh sto mincí. Jejich majetky jsou stejné. Jaká je cena koně?

[62] Převzato z [Kay1].
[63] Podle [Col], str. 188.

Problém bychom dnes vyřešili pomocí jednoduché rovnice

$$6x + 300 = 10x - 100\,, \qquad \text{odkud} \qquad x = 100\,.$$

Bháskara označil jako neznámou *jávat-távat* cenu koně. Pomocí pravidla tří[64] pak řešil problém: jestliže cena jednoho koně je *yā* 1 (*jávat-távat*), jaká je cena šesti koní? Vyjádření: 1 | *yā* 1 | 6. Cenu šesti koní stanovil *yā* 6. K tomu přičetl mince a tím získal majetek první osoby: *yā* 6 *rū* 300. Podobným způsobem určil cenu 10 koní *yā* 10, k tomu přičetl záporných 100 mincí (dluh), majetek druhé osoby byl: *yā* 10 *rū* $\dot{1}00$. Protože majetky obou osob byly stejné, byly to dvě strany rovnice. Vyjádření rovnice tedy bylo

$$\begin{array}{ll} y\bar{a}\ \ 6 & r\bar{u}\ 300 \\ y\bar{a}\ 10 & r\bar{u}\ \dot{1}00 \end{array}$$

Bháskara převedl absolutní členy na jednu stranu a odečtením neznámých na druhé straně dostal *yā* 4, odečtením absolutních členů získal 400. Po vydělení tohoto čísla koeficientem u neznámé dostal hodnotu neznámé $400 : 4 = 100$. Nakonec ještě provedl zkoušku dosazením, první člověk měl $600 + 300 = 900$, druhý $1000 - 100 = 900$.

Úlohy vedoucí na lineární rovnice byly řešeny už ve starém Egyptě, k výpočtu se používala metoda chybného předpokladu i přímé dělení. Zachované mezopotámské texty obsahují také několik příkladů, které bychom dnes vyjádřili lineární rovnicí. Chyběla však symbolika, neznámé se většinou označovaly geometrickými termíny *délka*, *šířka*, *výška*. Je pravděpodobné, že úlohy byly řešeny pomocí substituce nebo metody chybného předpokladu.

8.6.2 Kvadratické rovnice s jednou neznámou

Už v džinistických dílech nalezneme úlohy, z nichž je zřejmé, že staří indičtí učenci uměli řešit kvadratické rovnice, například Umásváti v práci *Tattvárthasútra* vyjádřil výšku kruhové úseče h ze vztahu[65]

$$4h^2 - 4dh = -c^2 \qquad \text{jako} \qquad h = \frac{1}{2}(d - \sqrt{d^2 - c^2})\,.$$

Na kvadratickou rovnici vedly i některé příklady týkající se úroků[66] nebo poslů,[67] znalost řešení kvadratických rovnic byla potřebná i pro určení počtu n členů aritmetické posloupnosti, ve které byl dán první člen a, diference d a součet s_n prvních n členů.[68] Takové úlohy však patřily do aritmetiky, protože řešení kvadratické rovnice zde nebývalo popsáno obecně. Pravidlo se vždy

[64] Pravidlo tří je podrobněji vysvětleno v 7. kapitole, odstavci 7.11.

[65] Viz 4. kapitola, odstavec 4.1.

[66] Viz 7. kapitola, odstavec 7.16.4.

[67] Viz 7. kapitola, odstavec 7.16.8.

[68] Viz 7. kapitola, odstavec 7.17.1.

týkalo pouze konkrétního problému a popisovalo, jak nalézt hledanou veličinu pomocí určitých zadaných hodnot. Z dnešního pohledu postup odpovídá řešení kvadratické rovnice, rovnice se však nesestavovala.

V osmnácté kapitole knihy *Bráhmasphutasiddhánta*, která je věnována algebře, Brahmagupta uvedl dvě pravidla pro řešení obecné kvadratické rovnice s kladným koeficientem u kvadratického členu ($a \in \mathbb{Q}^+$, b, $c \in \mathbb{Q}$)

$$ax^2 + bx = c\,.$$

Tím se lišil od dřívějších matematiků, kteří neznali záporná čísla, a proto kvadratické rovnice rozdělovali do tří typů (a, b, $c \in \mathbb{Q}^+$):

$$ax^2 + bx = c\,, \qquad ax^2 + c = bx\,, \qquad ax^2 = bx + c\,.$$

Brahmagupta postup řešení kvadratické rovnice nazýval *madhyamáharana* (eliminace středního členu), patrně proto, že neznámá v první mocnině byla zapsána uprostřed každé strany rovnice

$$ax^2 + bx + 0 = 0x^2 + 0x + c\,.$$

První pravidlo zformuloval takto:[69]

> **BrSpSi/xviii.48**
> *K absolutnímu členu [c] vynásobenému čtyřnásobkem čtverce [a] přičti čtverec středního členu [b], z toho odmocnina zmenšená o střední člen, dělená dvojnásobkem čtverce, je střední člen.*

V dnešní symbolice můžeme pravidlo vyjádřit vzorcem

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}\,.$$

K tomuto vyjádření mohl Brahmagupta dospět tak, že nejprve rovnici vynásobil $4a$, pak k oběma stranám přičetl b^2, aby levou stranu doplnil na čtverec, a pak odmocnil:

$$ax^2 + bx = c \;\Rightarrow\; 4a^2x^2 + 4abx = 4ac \;\Rightarrow\; 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (2ax + b)^2 = 4ac + b^2 \;\Rightarrow\; 2ax + b = \sqrt{4ac + b^2} \;\Rightarrow\; x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}\,.$$

Druhé Brahmaguptovo pravidlo je podobné,[70] neznámou x lze vypočítat postupem odpovídajícím vzorci

$$x = \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a}\,,$$

[69] Podle [Col], str. 346. Stejné pravidlo popsal Šrídhara v nějakém nedochovaném algebraickém pojednání. Šrídharovo pravidlo později citoval Bháskara II., viz [Col], str. 209–210.

[70] Viz sloka BrSpSi/xviii.50, podle [Col], str. 347. Obě pravidla uvedl také Šrípati.

což odpovídalo násobení rovnice koeficientem a a přičtení $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Bháskara II. popsal způsob řešení kvadratické rovnice takto:[71]

BiGa/v.128–130
Když čtverec a další [člen] *s neznámou je spojen se zbytkem, pak po vynásobení obou stran rovnice vhodnou veličinou se k nim něco přidá tak, že strana* [obsahující neznámou] *se dá odmocnit. Odmocnina absolutního členu se pak rovná odmocnině* [strany] *s neznámou. Hodnota neznámé je nalezena z této rovnice.*

Tímto svým tvrzením, i když velmi obecným, popsal odvození postupu výpočtu neznámé z kvadratické rovnice.

Počet kořenů kvadratické rovnice

Brahmagupta ve své práci existenci dvou (kladných) kořenů nezmiňoval, ale komentátor Prthúdakasvámin upozornil na to, že dvě různé Brahmaguptovy úlohy se dají vyjádřit stejnou kvadratickou rovnicí

$$x^2 - 10x = -9\,,$$

která má kořeny $x = 9$ a $x = 1$. Jako řešení prvního příkladu Brahmagupta uvažoval hodnotu $x = 9$, ve druhém bylo řešením $x = 1$. Autor nejspíš vždy vybral ten kořen, který lépe odpovídal zadání problému.[72]

Existenci dvou kořenů si zcela jasně uvědomoval Mahávíra, který to uvedl přímo v pravidle pro řešení kvadratické rovnice ve tvaru (a, b, $c \in \mathbb{N}$)

$$\frac{a}{b}x^2 + c = x\,, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{a}{b}x^2 - x + c = 0\,.$$

Řešení takové rovnice se počítalo ze vztahu[73]

$$x = \frac{\frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a} - 4c\right)\frac{b}{a}}}{2}$$

a Mahávíra v pravidle výslovně uvedl, že *odmocnina se může přičíst stejně tak jako odečíst.* V následujícím příkladu[74] se měla vypočítat velikost (objem) hromady rýže. Problém vedl na rovnici

$$\frac{x}{8}\cdot\frac{x}{16} + 24 = x\,, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{x^2}{128} - x + 24 = 0\,,$$

71 Podle [Col], str. 207–208.
72 Obě úlohy se týkaly astronomie, jejich formulace však není příliš srozumitelná.
73 Viz sloka GaSaSa/iv.57, podle [Ran], str. 81 a [DS2], str. 73.
74 Viz sloka GaSaSa/iv.58, podle [Ran], str. 81–82.

kde Mahávíra uvedl už jen výsledek 96 nebo 32.

Bháskara II. zformuloval podmínku existence dvou kladných kořenů kvadratické rovnice ($p,\ q \in \mathbb{Q}$)

$$x^2 + px = q \qquad \text{upravené do tvaru} \qquad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

takto:[75]

BiGa/v.130
Jestliže druhá odmocnina absolutní strany rovnice $[\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}]$ *je menší než číslo mající záporné znaménko obsažené v odmocnině strany obsahující neznámou* $[\frac{p}{2}]$*, pak vezme-li se kladná nebo záporná, dvě hodnoty neznámé budou nalezeny. To se v některých případech stává.*

Bháskara věděl, že má-li rovnice

$$x^2 + px = q \qquad \text{pro} \qquad p, q < 0$$

řešení, pak jsou oba kořeny kladné. Ostatní typy kvadratických rovnic, pokud jsou řešitelné, mají aspoň jeden kořen záporný a záporná čísla se jako řešení neuvažovala. Podrobnou klasifikací a řešením kvadratických rovnic se zabýval už al-Chwárizmí asi tři sta let před Bháskarou.[76]

V připojených příkladech Bháskara vysvětloval, že je potřeba ještě zkusit, zda oba kořeny vyhovují zadání.[77]

BiGa/v.139
Příklad: Druhá mocnina osminy stáda opic nadšeně skákala v lesíku. Dvanáct zbývajících bylo vidět na kopci rozveselených společným pokřikováním. Kolik jich bylo dohromady?

Problém lze vyjádřit rovnicí

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x \qquad \text{neboli} \qquad x^2 - 64x = -64 \cdot 12\,,$$

po úpravě:

$$(x - 32)^2 = 256\,, \qquad \text{tedy} \qquad x - 32 = \pm 16\,.$$

Úloha má dvě řešení, opic ve stádě bylo $x = 48$ nebo $x = 16$.

[75] Podle [Col], str. 208.
[76] Podle [Ju], str. 203.
[77] Podle [Col], str. 215–216.

Další podobná úloha je tato:[78]

BiGa/v.140
Příklad: Druhá mocnina pětiny stáda opic zmenšené o tři byla schovaná v jeskyni. A jedna [zbývající] *opice byla viděna, jak šplhá na větvi. Řekni, kolik jich bylo?*

Rovnice odpovídající zadání

$$\left(\frac{x}{5}-3\right)^2+1=x \qquad \text{neboli} \qquad x^2-55x=-250\,,$$

po úpravě:

$$\left(x-\frac{55}{2}\right)^2=\frac{2025}{4}\,, \qquad \text{tedy} \qquad x-\frac{55}{2}=\pm\frac{45}{2}\,.$$

Tato rovnice má dvě řešení $x = 50$, $x = 5$. Bháskara však upozornil na to, že druhé řešení je nevhodné, protože počet opic v jeskyni by pak byl záporný $\frac{5}{5}-3=-2$. Později komentátor Kršna vysvětlil, že pokud by v zadání úlohy bylo „pětina stáda odečtená od tří“, hodnota $x = 5$ by vyhovovala. V tomto případě by se však muselo odmítnout řešení $x = 50$, neboť tomu odpovídá záporný počet opic v jeskyni $3-\frac{50}{5}=-7$.

Kvadratické rovnice byly známé už v mezopotámské matematice, i když tehdejší učenci ještě nedokázali zformulovat postup pro řešení obecné kvadratické rovnice. Zabývali se pouze některými speciálními typy kvadratických rovnic s přirozenými koeficienty, a podobně jako staří Indové uznávali pouze kladná řešení. Ve starém Řecku se pomocí geometrické algebry hledala kladná řešení rovnic s kladnými koeficienty $x^2 = ab$, $ax \pm x^2 = b^2$, $x^2 - ax = b^2$.

Al-Chwárizmí i arabský matematik žijící v Egyptě Abú Kámil (asi 850 až 930)[79] uvažovali pouze kladné koeficienty, proto kvadratické (a lineární) rovnice rozdělovali do šesti typů. Na rozdíl od Indů, kteří pravidla nijak nezdůvodňovali, se pokoušeli o geometrické důkazy, pravděpodobně pod vlivem řecké matematiky. Al-Chwárizmí při úpravě rovnic používal, kromě jiných, operaci *al-džabr* (přičtení stejného členu k oběma stranám rovnice). Název této operace se brzy rozšířil a sloužil k označení celé nauky o rovnicích, tj. algebry (viz [Sis]).

8.6.3 Rovnice vyšších stupňů

Řešením rovnic vyšších stupňů se indičtí učenci příliš nezabývali. Bháskara II. se pokusil aplikovat pravidlo pro eliminaci středního členu i na kubické

[78] Podle [Col], str. 216–217.

[79] Vlastním jménem Abū Kāmil Schujā' ibn Aslam ibn Muḥammad ibn Schujā, zvaný též al-Hāsib al-Miṣrī.

a bikvadratické rovnice. Postup řešení je uveden v následujícím příkladu.[80]

BiGa/v.137
Příklad: Jaké je to číslo, vzdělaný muži, které vynásobené dvanácti a zvětšené o svou třetí mocninu je rovno šestinásobku svého čtverce přičteného k třiceti pěti.

Autor popsal řešení tak, že hledané číslo označil jako neznámou a sestavil kubickou rovnici, kterou bychom dnes zapsali ve tvaru

$$x^3 + 12x = 6x^2 + 35\,.$$

Nejprve členy obsahující neznámou převedl na jednu stranu: $x^3 - 6x^2 + 12x = 35$, dále k oběma stranám rovnice přičetl číslo -8

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 35 - 8\,,$$
$$(x-2)^3 = 27\,,$$

vypočítal třetí odmocninu $x - 2 = 3$ a odtud nalezl neznámé číslo $x = 5$. Bháskara II. dobře věděl, jak volit zadání, aby rovnice byla snadno řešitelná s využitím vzorce $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Podobným způsobem Bháskara II. řešil i úlohu vedoucí na bikvadratickou rovnici[81]

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9\,999\,.$$

Nejprve k oběma stranám rovnice přičetl $400x + 1$, tím rovnici upravil do tvaru

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 400x + 10\,000\,.$$

Tento tvar označil za nevhodný, protože levá strana byla druhou mocninou $(x^2 - 1)^2$, pravá však nikoli, a proto se takto nedalo nalézt řešení. Podle autora bylo nutné použít „chytrost a důvtip“ a původní rovnici upravit jinak, přičtením $4x^2 + 400x + 1$ k oběma stranám rovnice. Pak byla rovnice ve tvaru

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10\,000\,,$$
$$(x^2 + 1)^2 = (2x + 100)^2\,.$$

Odmocněním získal kvadratickou rovnici, jejíž řešení už bylo popsáno dříve:

$$x^2 + 1 = 2x + 100\,,$$
$$x^2 - 2x = 99\,,$$
$$x^2 - 2x + 1 = 100\,,$$
$$(x-1)^2 = 10^2\,,$$
$$x - 1 = 10\,,$$
$$x = 11\,.$$

Nakonec zopakoval, že v takových příkladech se k řešení musí použít bystrost.

[80] Podle [Col], str. 214.
[81] Viz sloka BiGa/v.138, podle [Col], str. 215.

8.7 Soustavy rovnic

8.7.1 Soustavy lineárních rovnic se dvěma neznámými

Pro řešení jednoduchých soustav lineárních rovnic o dvou neznámých se používala operace *samkramana* známá už z aritmetiky.[82] Řešení soustavy (a, b $\in$ $\mathbb{Q}^+$)

$$\begin{aligned} x + y &= a\,, \\ x - y &= b \end{aligned} \qquad \text{bylo ve tvaru} \qquad x = \frac{1}{2}(a+b)\,, \quad y = \frac{1}{2}(a-b)\,.$$

Obecnější soustavou se zabýval Mahávíra. Řešení soustavy (a, b, p_1, $p_2 \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} ax + by &= p_1\,, \\ bx + ay &= p_2 \end{aligned}$$

vyjádřil jako[83]

$$x = \frac{ap_1 - bp_2}{a^2 - b^2}\,, \qquad y = \frac{ap_2 - bp_1}{a^2 - b^2}\,.$$

Uvedeme ještě jeden příklad a dva různé způsoby řešení, které předložil Bháskara II.[84]

BiGa/iv.106
Jeden říká: dej mi sto a budu mít dvakrát tolik, co ty. Druhý odpoví: když mi dáš deset, budu mít šestkrát víc než ty. Řekni, kolik má každý?

Zadání odpovídá soustava, kde x představuje majetek prvního, y majetek druhého:

$$\begin{aligned} x + 100 &= 2\,(y - 100)\,, \\ y + \ 10 &= 6\,(x - 10)\,. \end{aligned}$$

V prvním způsobu řešení autor vyjádřil x z první i ze druhé rovnice:

$$x = 2y - 300\,, \qquad x = \frac{1}{6}(y + 70)\,,$$

porovnáním pravých stran vypočítal y:

$$2y - 300 = \frac{1}{6}(y+70) \quad \Rightarrow \quad 12y - 1800 = y + 70 \quad \Rightarrow \quad y = 170$$

[82] Viz 7. kapitola, odstavec 7.16.3.
[83] Viz sloka GaSaSa/vi.139$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 130.
[84] Podle [Col], str. 191, 231.

a dosazením této hodnoty do jednoho z výrazů pro x dopočítal

$$x = 2 \cdot 170 - 300 \qquad \text{nebo} \qquad x = \frac{1}{6}(170 + 70) \quad \Rightarrow \quad x = 40\,.$$

Ve druhém způsobu řešení použil Bháskara substituci. Majetek prvního označil $2z - 100\,(= x)$, pak podle první podmínky vyjádřil majetek druhého $z + 100\,(= y)$ a podle druhé podmínky vytvořil rovnici

$$z + 110 = 6(2z - 110)\,,$$

odkud snadno dopočítal nejprve $z = 70$, pak $x = 40$ a $y = 170$. Vhodnou substitucí $z = \frac{1}{2}(x+100)$ tak řešil úlohu pouze jednou rovnicí o jedné neznámé. Tento postup řešení uvedl v kapitole o rovnicích s jednou neznámou, zatímco první způsob zařadil do kapitoly o rovnicích s více neznámými.

Úlohy „o předávání“ byly ve středověku poměrně oblíbené, řešili je například al-Káší nebo Leonardo Pisánský.

8.7.2 Soustavy lineárních rovnic s více neznámými

Indičtí matematikové neznali obecnou metodu řešení soustav lineárních rovnic, postup řešení vždy závisel na typu soustavy.

Rukopis *Bakhšálí* obsahuje řešení soustav n lineárních rovnic o n neznámých, kde číslo n bylo vždy liché a koeficienty přirozená čísla. Dnes bychom takovou soustavu zapsali ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= p_1\,, \\ x_2 + x_3 &= p_2\,, \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= p_{n-1}\,, \\ x_n + x_1 &= p_n\,. \end{aligned}$$

Tato soustava se řešila postupným odčítáním prvních $(n-1)$ rovnic od sebe, tím se získalo

$$x_n - x_1 = p_{n-1} - p_{n-2} + \cdots + p_2 - p_1\,.$$

Odtud se vyjádřilo x_n a dosadilo do poslední rovnice, která pak byla ve tvaru

$$2x_1 + (p_{n-1} - p_{n-2} + \cdots + p_2 - p_1) = p_n\,, \qquad \text{resp.} \qquad 2x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i p_i = p_n\,.$$

Označíme-li $b = \sum\limits_{i=1}^{n-1} (-1)^i p_i$, poslední rovnice je ve tvaru

$$2x_1 + b = p_n\,.$$

Tato rovnice se řešila pomocí metody chybného předpokladu.[85]

Árjabhata I. uvedl pravidlo,[86] podle něhož bylo možné řešit soustavu line-

[85] Viz 7. kapitola, odstavec 7.16.1.

[86] Viz sloka Ar/ii.29, podle [Cla], str. 40.

árních rovnic ($p_i \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i - x_1 &= p_1\,,\\ \sum_{i=1}^{n} x_i - x_2 &= p_2\,,\\ &\vdots\\ \sum_{i=1}^{n} x_i - x_n &= p_n\,.\end{aligned}$$

Nejprve se vyjádřil součet $\sum_{i=1}^{n} x_i$. Sečtením všech rovnic a jednoduchou úpravou se získalo

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{n-1}$$

a dosazením do původních rovnic se nakonec vypočítaly hodnoty neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve tvaru

$$x_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{n-1} - p_i\,.$$

Podobné pravidlo zformuloval i Mahávíra.[87] K procvičení uvedl příklad:[88]

GaSaSa/vi.160–162

Celník se ptal postupně čtyř kupců, kteří nakupovali společně, jaká je celková cena jejich zboží. První kupec, když vynechal svůj vklad, tvrdil, že 22. Druhý tvrdil, že 23, třetí řekl 24 a čtvrtý řekl, že 27. Každý z nich vždy odečetl svůj vklad. Ó příteli, řekni mi samostatnou cenu zboží každého z nich.

Problém se vyjádřil pomocí soustavy lineárních rovnic. Označíme-li x_1, x_2, x_3 a x_4 postupně cenu zboží jednotlivých kupců, můžeme soustavu současnou symbolikou zapsat takto:

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 22\,, \\ x_1 + \phantom{x_2 +{}} x_3 + x_4 &= 23\,, \\ x_1 + x_2 + \phantom{x_3 +{}} x_4 &= 24\,, \\ x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+ x_4} &= 27\,, \end{aligned} \qquad \text{neboli} \qquad \begin{aligned} (x_1+x_2+x_3+x_4) - x_1 &= 22\,,\\ (x_1+x_2+x_3+x_4) - x_2 &= 23\,,\\ (x_1+x_2+x_3+x_4) - x_3 &= 24\,,\\ (x_1+x_2+x_3+x_4) - x_4 &= 27\,.\end{aligned}$$

Sečtením všech rovnic se dostalo $3(x_1+x_2+x_3+x_4) = 22+23+24+27 = 96$, odtud $(x_1+x_2+x_3+x_4) = \frac{96}{3} = 32$, a dosazením do jednotlivých rovnic se dopočítaly hodnoty $x_1 = 10$, $x_2 = 9$, $x_3 = 8$ a $x_4 = 5$.

---

[87] Viz sloka GaSaSa/vi.159, podle [Ran], str. 136.

[88] Viz sloka [Ran], str. 136–137.

Obecnější byl další typ soustavy lineárních rovnic ($a_i,\ p_i \in \mathbb{N}$);

$$\begin{aligned} b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i - a_1 x_1 &= p_1\,, \\ b_2 \sum_{i=1}^{n} x_i - a_2 x_2 &= p_2\,, \\ &\vdots \\ b_n \sum_{i=1}^{n} x_i - a_n x_n &= p_n\,. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Podobně jako u předchozího typu soustavy se nejprve vyjádřil součet neznámých

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{a_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i} - 1} \qquad \Rightarrow \qquad x_i = \frac{b_i}{a_i} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{a_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i} - 1} - \frac{p_i}{a_i}\,.$$

Následující příklad předložil Mahávíra:

GaSaSa/vi.253$\frac{1}{2}$–255$\frac{1}{2}$
Tři kupci si vzájemně předávali peníze. Kdyby první dostal 4 *od druhého a* 5 *od třetího, stal by se dvakrát bohatší než ostatní dohromady. Kdyby druhý vyprosil* 4 *od prvního a* 6 *od třetího, tak by měl třikrát víc peněz než ostatní dohromady. Kdyby třetí získal* 5 *od prvního a* 6 *od druhého, byl by pětkrát bohatší než ostatní dohromady. Ó, matematiku, znáš-li postup citra-kuṭṭīkāra-miśra, řekni mi rychle, kolik peněz měl každý.*

Problém můžeme vyjádřit soustavou lineárních rovnic typu (8.3):

$$\begin{aligned} x + 4 + 5 &= 2(y + z - 4 - 5)\,, & & & 2(x+y+z) - 3x &= 27\,, \\ y + 4 + 6 &= 3(x + z - 4 - 6)\,, & &\Rightarrow & 3(x+y+z) - 4y &= 40\,, \\ z + 5 + 6 &= 5(x + y - 5 - 6)\,, & & & 5(x+y+z) - 6z &= 66\,, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $x = 7$, $y = 8$, $z = 9$.

V indických textech byla i pravidla na řešení soustavy ($a_i,\ b_i,\ p \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} a_1 x_1 = a_2 x_2 = \cdots &= a_n x_n\ , \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n &= p\,, \end{aligned}$$

kterou lze zapsat ve tvaru (s neznámými $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$)

$$\begin{aligned} a_1 x_1 &= y\,, \\ a_2 x_2 &= y\,, \\ &\vdots \\ a_n x_n &= y\,, \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n &= p\,. \end{aligned}$$

Podle indických matematiků se taková soustava nejlépe řešila tak, že se nejprve za jedinou neznámou považovalo y, a to se vypočítalo dosazením z prvních n rovnic do poslední, která už pak obsahovala jen jednu neznámou:

$$x_1 = \frac{y}{a_1}, \quad x_2 = \frac{y}{a_2}, \ \ldots, \quad x_n = \frac{y}{a_n},$$
$$\frac{b_1}{a_1}y + \frac{b_2}{a_2}y + \cdots + \frac{b_n}{a_n}y = p\,.$$

Odtud se vypočítalo y:

$$y = \frac{p}{\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i}}$$

a zpětným dosazením i ostatní neznámé $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Postup ukážeme na příkladu, který zformuloval Bháskara II.[89]

BiGa/iv.107
Osm rubínů, deset smaragdů a sto perel, které jsou na tvé náušnici, jsem pro tebe nakoupil za stejnou cenu. Součet cen těchto tří druhů drahokamů je o tři menší než polovina ze sta. Řekni mi cenu každého, znáš-li tento výpočet, nadějná dámo.

Označíme-li ceny rubínů, smaragdů a perel postupně x, y, z, můžeme úlohu vyjádřit rovnicemi

$$8x = 10y = 100z\,,$$
$$x + y + z = 47\,.$$

Bháskara za neznámou *jávat-távat* volil stejnou cenu drahokamů, v současném značení $t = 8x = 10y = 100z$. Odtud pomocí pravidla tří vyjádřil ceny drahokamů $\frac{t}{8}\,(= x)$, $\frac{t}{10}\,(= y)$, $\frac{t}{100}\,(= z)$, sečetl je a sestavil jednoduchou rovnici, ze které snadno vypočítal t:

$$\frac{t}{8} + \frac{t}{10} + \frac{t}{100} = \frac{47}{200}t = 47\,, \qquad \text{odtud} \qquad t = 200\,.$$

Pak vypočítal hledanou cenu rubínu $25\,(= \frac{200}{8})$, smaragdu $20\,(= \frac{200}{10})$ a perly $2\,(= \frac{200}{100})$. K tomu ještě navíc určil, že celková cena drahokamů na náušnici je $600\,(= 3 \cdot 200)$. Vhodnou volbou neznámé tak Bháskara řešil jen jednu rovnici s jednou neznámou.

[89] Podle [Col], str. 191.

8.7.3 Soustavy nelineárních rovnic

Středověcí indičtí matematikové se věnovali studiu následujících soustav rovnic ($a,\ b \in \mathbb{Q}^+$):

$$\begin{aligned} x - y &= a\,, \qquad \text{(i)} \\ xy &= b\,, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x + y &= a\,, \qquad \text{(ii)} \\ xy &= b\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a\,, \qquad \text{(iii)} \\ xy &= b\,, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= a\,, \qquad \text{(iv)} \\ x + y &= b\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a\,, \qquad \text{(v)} \\ x - y &= b\,, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x^2 - y^2 &= a\,, \qquad \text{(vi)} \\ xy &= b\,. \end{aligned}$$

Podle pravidel, která popsal například Árjabhata I.[90] či Brahmagupta,[91] byla řešením rovnice (i) čísla

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 4b} + a\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 4b} - a\right).$$

Řešení vychází z identity

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy \qquad \text{neboli} \qquad (x + y)^2 = a^2 + 4b\,.$$

Odtud $x + y = \sqrt{a^2 + 4b}$ a bylo možné provést operaci *samkramana* s čísly $\sqrt{a^2 + 4b}$ ve spojení s a, tj. vyřešit soustavu $x + y = \sqrt{a^2 + 4b}\ \wedge\ x - y = a$.[92]

Podobným způsobem se řešila soustava (ii), pravidlo uvedl například Mahávíra.[93] Podle něho se z předchozí identity nejprve vyjádřil rozdíl neznámých $x - y = \sqrt{(x + y)^2 - 4xy}$, tj. $x - y = \sqrt{a^2 - 4b}$, pak se opět provedla operace *samkramana*, tentokrát s čísly a ve spojení s $\sqrt{a^2 - 4b}$, tedy

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 - 4b}\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - 4b}\right).$$

Pravidlo pro řešení soustavy (iii) popsal například Mahávíra,[94] přitom vycházel ze vztahů

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= (x^2 + y^2) + 2xy \qquad \text{neboli} \qquad x + y = \sqrt{a + 2b}\,, \\ (x - y)^2 &= (x^2 + y^2) - 2xy \qquad \text{neboli} \qquad x - y = \sqrt{a - 2b}\,. \end{aligned}$$

[90] Viz sloka Ar/ii.24, podle [Cla], str. 38.

[91] Viz sloka BrSpSi/xviii.100, podle [Col], str. 377.

[92] Operace *samkramana* je popsána v 7. kapitole, odstavci 7.16.3.

[93] Viz sloka GaSaSa/vii.129$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 224.

[94] Viz sloka GaSaSa/vii.127$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 224.

Nakonec podle operace *samkramana* s čísly $\sqrt{a+2b}$ ve spojení s $\sqrt{a-2b}$ dostal řešení

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}\right).$$

Soustava (iv) se řešila podle pravidel uvedených například v díle Árjabhaty I.[95] nebo Brahmagupty.[96] Postup řešení se opíral o vztah

$$(x-y)^2 = 2(x^2+y^2) - (x+y)^2 \qquad \text{neboli} \qquad x - y = \sqrt{2a-b^2}$$

a podle operace *samkramana* s čísly b ve spojení s $\sqrt{2a-b^2}$ se získalo řešení

$$x = \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{2a-b^2}\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(b - \sqrt{2a-b^2}\right).$$

Pravidla, podle nichž se řešily soustavy (v) a (vi), uvedl například Nárájana.[97] Pro řešení soustavy (v) vyjádřil

$$(x+y)^2 = 2(x^2+y^2) - (x-y)^2 \qquad \text{neboli} \qquad x + y = \sqrt{2a-b^2}\,,$$

pak užitím operace *samkramana* s čísly $\sqrt{2a-b^2}$ ve spojení s b získal řešení

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2a-b^2} + b\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2a-b^2} - b\right).$$

Soustavu (vi) převedl na soustavu (i) tím, že umocnil druhou rovnici. Pak

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+4b^2} + a\right), \qquad y^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+4b^2} - a\right)$$

a odmocněním získal (kladné) hodnoty x a y.

Podobné soustavy byly řešeny ve staré Mezopotámii, většinou se dosazením získala kvadratická rovnice vhodného tvaru, pro jejíž řešení mezopotámští matematikové znali algoritmus. Někdy pro zjednodušení výpočtu šikovně použili substituci. Studiem soustav se zabýval rovněž Diofantos (3. stol.) v knize I *Aritmetiky*.

[95] Viz sloka Ar/ii.23, podle [Cla], str. 38.
[96] Viz sloka BrSpSi/xviii.99, podle [Col], str. 377.
[97] Podle [DS2], str. 84.

Pravidlo odlišných operací

Pro další dva typy soustav rovnic ($a,\ b \in \mathbb{Q}^+$) se používal název *višamakarman* (odlišná operace):[98]

$$x^2 - y^2 = a\,, \qquad x - y = b\,, \qquad \text{(vii)} \qquad\qquad x^2 - y^2 = a\,, \qquad x + y = b\,. \qquad \text{(viii)}$$

Obě soustavy se řešily podobným způsobem. Nejprve se vyjádřil součet, resp. rozdíl neznámých, pak se výsledek dopočítal pomocí operace *samkramana*:

$$\begin{aligned} x + y &= \frac{x^2 - y^2}{x - y} \qquad \text{neboli} \qquad x + y = \frac{a}{b}\,,\\ x - y &= \frac{x^2 - y^2}{x + y} \qquad \text{neboli} \qquad x - y = \frac{a}{b}\,. \end{aligned}$$

Podle pravidel, která popsal např. Brahmagupta[99] nebo Mahávíra,[100] je řešením soustav (vii), resp. (viii)

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + b\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - b\right),$$

resp.

$$x = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(b - \frac{a}{b}\right).$$

8.8 Neurčité lineární rovnice

Prvním indickým matematikem, který se zabýval řešením neurčitých rovnic, byl Árjabhata I. Popsal metodu řešení rovnice ($a,\ b,\ c \in \mathbb{N}$)

$$ax + c = by\,, \tag{8.4}$$

kde řešení hledal v oboru přirozených čísel.[101] Jeho následovník Bháskara I. ukázal, že stejná metoda může být použita i pro řešení rovnice[102]

$$ax - c = by$$

a navíc, že řešení této rovnice vyplývá z řešení rovnice $ax - 1 = by$.

[98] Název vznikl zřejmě k rozlišení od termínu *samkramana*, protože bylo potřeba provést ještě „odlišnou operaci“, totiž dělení. Mahávíra dokonce uváděl termín *višamasamkramana* (odlišná *samkramana*).

[99] Viz sloka BrSpSi/xviii.98, podle [Col], str. 376.

[100] Viz sloka GaSaSa/vi.2, podle [Ran], str. 93.

[101] Árjabhatově metodě jsou věnovány publikace [Bag2], [Kak1], [BaSh], [Beh].

[102] Metodou Bháskary I. se zabývá [Maj1].

Jejich metody přejali a rozvinuli i další autoři, v polovině 10. století Árjabhata II. ukázal, že v některých případech lze řešení zjednodušit, a upozornil na případy, kdy metody selhávají.[103]

Většina autorů při popisu rovnice ještě zdůraznila, že koeficienty a, b, c musí být nesoudělné, jinak by je bylo možné zkrátit.[104] Proto se v indických pravidlech často předpokládalo, že a, b a c jsou nesoudělná nebo dokonce navzájem různá prvočísla.[105]

Jedním typem úloh, které vedly na neurčitou rovnici prvního stupně, bylo nalezení přirozeného čísla n, které po vydělení danými celými čísly a_1, a_2 dává zbytky r_1, r_2. Tedy

$$n = a_1 x + r_1 = a_2 y + r_2$$

neboli

$$a_2 y - a_1 x = r_1 - r_2 \,, \qquad \text{tj.} \quad a_2 y - a_1 x = \pm c \,.$$

Jiným úkolem, kde se řešila neurčitá rovnice prvního stupně, byl problém nalezení takového celého čísla x, které vynásobené daným celým číslem a a zvětšené či zmenšené o jiné dané celé číslo c je dělitelné třetím daným celým číslem b beze zbytku, tedy hledala se přirozená řešení rovnice (a, b, $c \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{ax \pm c}{b} = y \,.$$

Terminologie

Analýza neurčitých rovnic prvního stupně se nazývala *kuttaka*, *kuttákára* nebo krátce *kutta*.[106] O tom, jak významné místo v indické algebře tato rovnice měla, svědčí i skutečnost, že termínem *kuttaka* či *kuttakaganita* byla někdy označována celá algebra, například v Brahmaguptově práci *Bráhmasphutasiddhánta* se 18. kapitola věnovaná algebře jmenuje *Kuṭṭaka*.

V úloze prvního typu se koeficientům a_1, a_2 říkalo *bhádžaka* či *chéda* (dělitelé), čísla r_1, r_2 se nazývala *agra* nebo *šéša* (zbytky).

V úlohách druhého typu se konstantě b říkalo *bhádžaka* (dělitel), konstanta c byla označena jako *kšépa* či *kšépaka* (*kṣepa*, *kṣepaka*, tj. přidané číslo) a konstanta a byla pojmenována *bhádžja* (dělenec). Neznámá x se nazývala *gunaka* nebo *gunakára* (násobitel) a neznámá y byla *phala* (podíl). Mahávíra někdy označoval neznámou x jako *ráši* (číslo), ve smyslu neznámé číslo (viz [DS2]).

---

[103] Metody Árjabhaty II. jsou podrobně popsány v [Jha].

[104] Rovnice $ax+c = by$ má celočíselné řešení právě tehdy, když číslo c je dělitelné největším společným dělitelem čísel a, b.

[105] Ve starých textech jsou uvedeny termíny *drdha* (*dṛḍha*, tj. pevná), *niščhéda* (*niś-cheda*, tj. nemající dělitele), *nirapavarta* (*nir-apavarta*, tj. nerozložitelná), podle [DS1].

[106] *Kuṭṭaka*, *kuṭṭākāra*, *kuṭṭa*. Kořen těchto slov *kuṭṭ* znamená rozdrtit, rozmělnit či rozdrobit.

Indický způsob řešení odpovídá metodě využívající řetězové zlomky, protože platí ($q_0 \in \mathbb{Z}$, $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1} \in \mathbb{N}$)

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots\, q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]\,.$$

Čísla q_k lze získat pomocí Eukleidova algoritmu pro hledání největšího společného dělitele čísel a a b.

Zlomek $\frac{a_k}{b_k} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_k]$ se nazývá k-tý konvergent nebo k-tý sblížený zlomek a přitom platí $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$. Libovolné řešení rovnice (8.4) s kladnými nesoudělnými koeficienty může být vyjádřeno ve tvaru[107]

$$\begin{aligned} x &= (-1)^n b_{n-1} c + bt\,, \\ y &= (-1)^n a_{n-1} c + at\,, \qquad t \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Je vidět, že obecné řešení rovnice (8.4) je vyjádřeno pomocí čitatele a jmenovatele $(n-1)$-ního sblíženého zlomku $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$.[108]

Rovnice s kladnými koeficienty

Árjabhata I. řešil úlohu prvního typu: nalézt číslo n, které po vydělení danými celými čísly a_1, a_2 dává zbytky r_1, r_2. Hledal řešení rovnice (8.4), kde $c > 0$, jeho formulace však není příliš srozumitelná.[109] Později se řešením úlohy $ax + c = by$ zabývali i další indičtí matematikové, například Bháskara I. (7. stol.), Brahmagupta (7. stol.), Mahávíra (9. stol.), Góvindasvámin (9. stol.), Šrípati (11. stol.), Bháskara II. (12. stol.), Nárájana (14. stol.),[110] kteří se věnovali i některým speciálním případům, zejména rovnicím $ax - c = by$ a $ax \pm 1 = by$.[111]

Staří Indové při řešení rovnice (8.4) využívali postup odpovídající Eukleidovu algoritmu pro hledání největšího společného dělitele čísel a a b. Jejich metoda počítala s celými čísly q_k, která byla vypočítána postupným dělením pro $a > b$:

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1\,, \\ b &= r_1 q_1 + r_2\,, \\ &\;\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n\,, \\ r_{n-1} &= r_n q_n\,. \end{aligned}$$

[107] Důkaz je možné nalézt například v [Chi].

[108] Řešení rovnice $ax + c = by$ je popsáno rovněž v článku [Sy6].

[109] Viz sloky Ar/ii.32–33, podle [Cla], str. 43.

[110] Podle [Maj2], [Bag2], [MS2].

[111] Například sloky BrSpSi/xviii.3–6, podle [Col], str. 325–326, GaSaSa/vi.115$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 117–121, MaSi/xviii.1–20, podle [DvS], str. 21.

Jestliže $b > a$, pak $q_0 = 0$ a $r_1 = a$. Podíly, kterých je $n+1$, můžeme zapsat ve tvaru $[q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$ a platí $\frac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$. Ve staré Indii pro další výpočet uvažovali jen prvních n podílů, tj.

$$\frac{a}{b} \approx \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}]\,. \tag{8.6}$$

Uvedeme středověké pravidlo pro nalezení nejmenšího přirozeného řešení rovnice $ax + c = by$ s kladnými koeficienty a, b, c, které popsal Bháskara II.:[112]

BiGa/ii.55–57
Děl vzájemně dělence [a] *a dělitele* [b], *které jsou již nesoudělné, dokud není zbytek dělení jednička. Zapiš postupně pod sebou podíly, pod nimi přidané číslo* [c] *a dolů nulu. Vynásob předposlední* [číslo] *číslem přímo nad ním a přičti poslední. Pak vynech poslední a opakuj tento postup, dokud nezůstane pouze dvojice čísel. Jestliže horní z nich vydělíme dělencem, zbytek je podíl. Jestliže dolní vydělíme dělitelem, zbytek je násobitel. Tento postup platí, jestliže počet podílů je sudý. Když je lichý, pak se nalezená čísla* [podíl a násobitel] *musí odečíst od dělence nebo dělitele. Tyto rozdíly budou skutečným podílem* [y] *a násobitelem* [x].

Další Bháskarovo pravidlo ukazuje, jak je možné z jednoho řešení rovnice $ax + c = by$ nalézt další řešení této rovnice:[113]

BiGa/ii.64
Násobitel [x] *a podíl* [y], *když se přičtou ke svým dělitelům vynásobeným libovolnými čísly, stanou se jinými* [řešeními].

Je-li (x_1, y_1) řešením rovnice $ax + c = by$, pak další řešení této rovnice se nalezne podle vzorců

$$x = x_1 + bt\,, \qquad y = y_1 + at\,, \qquad \text{kde} \quad t \in \mathbb{Z}\,. \tag{8.7}$$

Podle uvedené metody pak Bháskara řešil několik úloh, například:[114]

BiGa/ii.66
Jsi-li znalý zkoumání takových otázek, řekni mi přesně násobitele, kterým je sto vynásobeno, k součinu přičteno devadesát a ten součet bude dělitelný šedesáti třemi beze zbytku.

Bháskara požadoval řešení rovnice

$$\frac{100x + 90}{63} = y\,, \qquad \text{resp.} \qquad 100x + 90 = 63y\,.$$

---

[112] Podle [Col], str. 156–159, [Ju], str. 145–146.
[113] Podle [Col], str. 161–162.
[114] Podle [Col], str. 162–163, [Ju], str. 146–147.

Podle zadání byl dělenec $a = 100$, dělitel $b = 63$ a přidané číslo $c = 90$. Postupným dělením, tj. Eukleidovým algoritmem, vypočítal Bháskara sedm čísel, z nichž podle (8.6) pro další kroky použil jen prvních šest ($n = 6$ je sudé):

$$\frac{a}{b} = \frac{100}{63} = [1; 1, 1, 2, 2, 1, 3]\,, \qquad \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{a_5}{b_5} = [1; 1, 1, 2, 2, 1]\,.$$

Získaná čísla Bháskara II. zapsal pod sebe, pod ně připojil ještě přidané číslo ($c = 90 = z_{-1}$) a nulu ($0 = z_{-2}$), pak je postupně zdola nahrazoval čísly vypočítanými podle vztahu uvedeného v pravidle

$$z_j = q_{n-1-j} z_{j-1} + z_{j-2} \qquad \text{pro} \quad j = 0, 1, \ldots, n-1\,. \tag{8.8}$$

Jednotlivé kroky jsou uvedeny ve sloupcích následující tabulky. Ve staré Indii bylo zvykem čísla nepotřebná k dalšímu výpočtu mazat, proto na konci výpočtu zbyla pouze dvě.

z_5	$q_0 = 1$	1	1	1	1	1	2 430
z_4	$q_1 = 1$	1	1	1	1	1 530	1 530
z_3	$q_2 = 1$	1	1	1	900	900	
z_2	$q_3 = 2$	2	2	630	630		
z_1	$q_4 = 2$	2	270	270			
z_0	$q_5 = 1$	90	90				
z_{-1}	$c = 90$	90					
z_{-2}	0						

Nejmenší kladné řešení nalezl jako zbytky dělení – *horní* číslo 2 430 vydělil dělencem 100 a *dolní* číslo 1 530 vydělil dělitelem 63:

$$\begin{aligned} 2\,430 : 100 &= 24\,(\text{zbytek } 30) \qquad \Rightarrow \qquad y = 30\,, \\ 1\,530 : 63 &= 24\,(\text{zbytek } 18) \qquad \Rightarrow \qquad x = 18\,. \end{aligned}$$

Tím stanovil nejmenší přirozené řešení $(18, 30)$. K tomu poznamenal, že další řešení vypočítaná podle vztahu (8.7), tj.

$$x = 18 + 63t\,, \qquad y = 30 + 100t\,, \qquad t \in \mathbb{Z}\,, \tag{8.9}$$

jsou například $(81, 130)$ nebo $(14, 230)$.

Bháskara navíc ukázal, že je možné postup zjednodušit, pokud čísla a a c nebo b a c mají společného dělitele, protože po zkrácení se dostane rovnice s menšími koeficienty:

(i) původní rovnici

$$\frac{100x + 90}{63} = y\,, \qquad \text{resp.} \qquad 100x + 90 = 63y$$

bylo možné zkrácením společným dělitelem koeficientů a a c převést na rovnici

$$\frac{10x+9}{63} = u\,, \qquad \text{resp.} \qquad 10x + 9 = 63u\,;$$

to byla úprava odpovídající substituci $y = 10u$.

Nyní podle postupu uvedeného v pravidle vydělil a získal pouze čtyři čísla ($n = 3$ je liché),

$$\frac{10}{63} = [0; 6, 3, 3]\,, \qquad \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{a_2}{b_2} = [0; 6, 3]\,,$$

a odpovídající výpočet byl rychlejší:

$$\begin{array}{c|rrrr}
z_2 & q_0 = 0 & 0 & 0 & 27 \\
z_1 & q_1 = 6 & 6 & 171 & 171 \\
z_0 & q_2 = 3 & 27 & 27 & \\
z_{-1} & c = 9 & 9 & & \\
z_{-2} & 0 & & &
\end{array}$$

Po vydělení 27 : 10 a 171 : 63 dostal zbytky 7 a 45. Protože n bylo liché, bylo nutné ještě tyto zbytky odečíst od odpovídajících dělenců, tj. $10 - 7 = 3$ a $63 - 45 = 18$. V tomto případě je $u = \frac{y}{10} = 3$, tedy $y = 30$ a $x = 18$.

(ii) Jinou možnou úpravou rovnice bylo zkrácení společným dělitelem koeficientů b a c. Původní rovnice

$$\frac{100x+90}{63} = y\,, \qquad \text{resp.} \qquad 100x + 90 = 63y$$

se tak převedla na rovnici

$$\frac{100v+10}{7} = y\,, \qquad \text{resp.} \qquad 100v + 10 = 7y$$

užitím substituce $x = 9v$. Pak vydělením vznikla jen tři čísla ($n = 2$),

$$\frac{100}{7} = [14; 3, 2]\,, \qquad \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{a_1}{b_1} = [14; 3]\,,$$

a další výpočet byl snadný:

$$\begin{array}{c|rrr}
z_1 & q_0 = 14 & 14 & 430 \\
z_0 & q_1 = \ \ 3 & 30 & 30 \\
z_{-1} & c = 10 & 10 & \\
z_{-2} & 0 & &
\end{array}$$

Po dělení 430 : 100 a 30 : 7 byly zbytky 30 a 2, tedy $y = 30$ a $v = \frac{x}{9} = 2$, proto $x = 18$.

(iii) Další způsob byl kombinací předchozích dvou. Nejprve se původní rovnice

$$\frac{100x+90}{63} = y\,, \qquad \text{resp.} \qquad 100x + 90 = 63y$$

upravila zkrácením společným dělitelem koeficientů a a c

$$\frac{10x+9}{63} = u\,, \qquad \text{resp.} \qquad 10x + 9 = 63u$$

a pak se ještě zkrátilo společným dělitelem koeficientů b a c, tj. uvažovala se rovnice

$$\frac{10v+1}{7} = u\,, \qquad \text{resp.} \qquad 10v + 1 = 7u\,,$$

kde $x = 9v$ a $y = 10u$. Dělením se získala tři čísla ($n = 2$)

$$\frac{10}{7} = [1; 2, 3]\,, \qquad \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{a_1}{b_1} = [1; 2]$$

a pokračovalo se jako v předchozích případech:

$$\begin{array}{c|ccc} z_1 & q_0 = 1 & 1 & 3 \\ z_0 & q_1 = 2 & 2 & 2 \\ z_{-1} & c = 1 & 1 & \\ z_{-2} & 0 & & \end{array}$$

Vypočítané hodnoty 3, resp. 2 jsou rovnou zbytky po dělení 10, resp. 7, tedy $u = 3$ a $v = 2$, a proto $y = 10u = 30$ a $x = 9v = 18$.

Pomocí tohoto nejmenšího řešení bylo možné nalézt obecné řešení původní rovnice $100x + 90 = 63y$ ve tvaru (8.9).

Obecné odvození těchto metod podal až v 16. století komentátor Kršna (viz [DS2]):

(i) Mají-li koeficienty a a c společného dělitele k, platí $a = ka_1$, $c = kc_1$ a rovnici

$$ax + c = by \qquad \text{můžeme zapsat ve tvaru} \qquad ka_1x + kc_1 = by\,,$$

užitím substituce $y = ku$ dostaneme

$$ka_1x + kc_1 = bku\,, \qquad \text{po zkrácení} \qquad a_1x + c_1 = bu\,.$$

(ii) Analogicky se postupuje, pokud společného dělitele k mají koeficienty b a c. Pak platí $b = kb_1$, $c = kc_1$ a rovnici

$$ax + c = by \qquad \text{můžeme zapsat ve tvaru} \qquad ax + kc_1 = kb_1y\,,$$

pomocí substituce $x = kv$ dostaneme

$$akv + kc_1 = kb_1y\,, \qquad \text{po zkrácení} \qquad av + c_1 = b_1y\,.$$

(iii) Ve třetím případě mají koeficienty a a c společného dělitele k_1, tedy $a = k_1a_1$, $c = k_1c_1$, a navíc ještě koeficienty b a c_1 mají společného dělitele k_2, tedy $b = k_2b_1$, $c_2 = k_2c_1$. Použijeme-li ještě substituci $y = k_1u$, upravíme nejprve původní rovnici

$$ax + c = by \qquad \text{do tvaru} \qquad a_1x + c_1 = bu\,,$$

potom zvolíme $x = k_2v$, tím dostaneme tvar

$$a_1v + c_2 = b_1u\,.$$

Rovnice s některými zápornými koeficienty

Bháskara II. také studoval rovnici (8.4) s některými zápornými koeficienty a uvedl pravidlo, podle něhož řešení rovnic (a, b, $c \in \mathbb{N}$)

$$ax - c = by\,, \qquad \text{resp.} \qquad -ax + c = by$$

určil pomocí řešení rovnice $ax + c = by$:[115]

> **BiGa/ii.59**
> *Násobitel* [x] *a podíl* [y], *nalezené pro kladné přidané číslo* [c], *když se odečtou od příslušných veličin, odpovídají stejné* [rovnici] *se záporným přidaným číslem. Když se s těmi odvozenými pro kladného dělence zachází stejným způsobem, dostanou se výsledky pro záporného dělence.*

Jinými slovy, je-li (x_1, y_1) nejmenší přirozené řešení rovnice $ax + c = by$, pak

$$(b - x_1, a - y_1) \tag{8.10}$$

je řešením rovnice $ax - c = by$. To se snadno ověří dosazením

$$a(b - x_1) - c = b(a - y_1) \quad \Leftrightarrow \quad ax_1 + c = by_1\,.$$

Takto vypočítaná čísla $x_2 = b - x_1$, $y_2 = a - y_1$ však obecně nemusí být kladná, nejmenší přirozené řešení lze získat podle pravidla uvedeného ve sloce 64, tj. podle vzorců (8.7) vhodnou volbou parametru.

---

[115] Podle [Col], str. 160.

Druhá část pravidla tvrdí, že dvojice

$$(b - x_1, y_1 - a) \tag{8.11}$$

je řešením rovnice $-ax + c = by$. To je evidentní, neboť

$$-a(b - x_1) + c = b(y_1 - a) \;\Leftrightarrow\; ax_1 + c = by_1 \,.$$

Tento typ rovnice však nemusel mít kladná řešení, v tom případě indičtí matematikové připouštěli i řešení záporná; Bháskara II. například řešil úlohy vedoucí na rovnice[116]

$$-60x + 3 = 13y \qquad \text{a} \qquad -60x - 3 = 13y.$$

Nejprve nalezl řešení $(x_1, y_1) = (11, 51)$ rovnice $60x + 3 = 13y$ se všemi koeficienty kladnými, pak určil řešení rovnice $-60x + 3 = 13y$ podle vztahu (8.11), tj. $(x_3, y_3) = (b - x_1, y_1 - a) = (13 - 11, 51 - 60) = (2, -9)$. Nakonec podle (8.10) vyjádřil řešení $(x_2, y_2) = (b - x_3, a - y_3) = (13 - 2, -60 + 9) = (11, -51)$ poslední rovnice $-60x - 3 = 13y$.

To, že přirozené řešení rovnice se záporným koeficientem a nebo b nemusí existovat, autor patrně věděl, protože připojil poznámku, že pro záporné hodnoty koeficientů a nebo b není možné najít řešení podle pravidla ze sloky 64.[117]

> *Když dělitel [b] nebo dělenec [a] je záporný, podíl [y] musí vždy být záporný, což je samozřejmě problém. Kdyby to tak bylo, jeden (buď dělenec nebo dělitel) by byl záporný, nastala by chyba v podílu a násobiteli podle posledního pravidla.* [tj. BiGa/ii.64]

Bháskarův způsob řešení rovnice (8.4) připomíná metodu využívající řetězové zlomky. Máme-li řetězový zlomek $\frac{a}{b} = [q_0; q_1, \ldots, q_n]$, pak čitatele a jmenovatele k-tého sblíženého zlomku $\frac{a_k}{b_k}$ můžeme vypočítat rekurentně:[118]

$$\begin{aligned} a_0 &= q_0,\ a_1 = q_0 q_1 + 1, & a_j &= q_j a_{j-1} + a_{j-2} \quad \text{pro } j = 2, \ldots, k\,, \\ b_0 &= 1,\ b_1 = q_1, & b_j &= q_j b_{j-1} + b_{j-2} \quad \text{pro } j = 2, \ldots, k\,. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Bháskara podle svého postupu vyjádřeného rekurentním vzorcem (8.8), tj.

$$z_{-2} = 0,\ z_{-1} = c, \quad z_j = q_{n-1-j} z_{j-1} + z_{j-2}, \quad \text{pro } j = 0, 1, \ldots, n-1$$

vypočítal *dolní* číslo $z_{n-2} = b_{n-1}c$ a *horní* číslo $z_{n-1} = a_{n-1}c$, to jsou hodnoty ze vztahů (8.5) pro sudé n:

$$\begin{aligned} x &= b_{n-1}c + bt\,, \\ y &= a_{n-1}c + at\,, \qquad t \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

[116] Viz příklad sloka BiGa/ii.67, podle [Col], str. 164.
[117] Podle [Col], str. 164–165.
[118] Odvození je možné nalézt např. v [Chi] nebo [BhMu].

Protože však hledal nejmenší přirozené řešení dané rovnice, musel ještě stanovit zbytky po dělení $a_{n-1}c : a = s\,(\text{zb. } y_1)$ a $b_{n-1}c : b = s\,(\text{zb. } x_1)$, pak obecné řešení mohlo být vyjádřeno jako

$$\begin{aligned} x &= x_1 + bs + bt = x_1 + b(t+s)\,, \\ y &= y_1 + as + at = y_1 + a(t+s)\,, \qquad t \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

Pokud je lichý počet podílů n v řetězovém zlomku $\frac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$, je řešení podle (8.5):

$$\begin{aligned} x &= -b_{n-1}c + bt\,, \\ y &= -a_{n-1}c + at\,, \qquad t \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

Protože v takovém případě byl zbytek po dělení rovněž záporný, bylo třeba ještě tyto hodnoty *odečíst od dělence nebo dělitele*, a tím Bháskara II. získal nejmenší kladné hodnoty x_2, y_2:

$$\begin{aligned} x &= -x_1 - bs + bt = -x_1 + b + b(s-1) + bt = x_2 + b(t-s-1)\,, \\ y &= -y_1 - as + at = -y_1 + a + a(s-1) + at = y_2 + a(t-s-1)\,, \quad t \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

Výhoda indické metody je v tom, že stačilo užít pouze jeden rekurentní vzorec (8.8), zatímco výpočet hodnot a_{n-1} a b_{n-1} podle vztahů (8.12) vyžaduje rekurence dvě.

Je pravděpodobné, že uvedený postup výpočtu byl založen na následující úvaze. Máme-li rovnici (8.4), pak platí

$$y = \frac{ax+c}{b} = \left(q_0 + \frac{r_1}{b}\right)x + \frac{c}{b} = q_0 x + \frac{r_1 x + c}{b}\,.$$

Protože se hledalo celočíselné řešení, muselo být také $u_1 = \frac{r_1 x + c}{b}$ celé číslo. Uvažovalo se podobným způsobem, tedy

$$x = \frac{bu_1 - c}{r_1} = q_1 u_1 + \frac{r_2 u_1 - c}{r_1}\,,$$

kde $u_2 = \frac{r_2 u_1 - c}{r_1}$ bylo celé, a takto se pokračovalo dál, až se dospělo ke jmenovateli $r_n = 1$, tj. získal se výraz

$$u_{n-1} = q_n u_n + (-1)^n c\,,$$

kde se zvolilo nějaké celé číslo u_n (Bháskara II. volil $u_n = 0$), a zpětným dosazováním se pak vypočítaly neznámé x, y. Možná, že i původní název metody *kuttaka* (rozdrobení) souvisí s tímto postupným dělením, zmenšováním koeficientů.

Bháskara II. studoval i některé speciální případy, kde postup podle pravidla uvedeného ve slokách 55–57 mohl vést k potížím. Při řešení rovnice, kde platilo $c > b$, upozornil:[119]

BiGa/ii.61
Násobitel [x] a podíl [y] mohou být nalezené jako dříve po vydělení přidaného čísla [c] dělitelem [b], podíl však musí být zvětšen o příslušný podíl $[\frac{c}{b}]$ *v případě, že přidané číslo je kladné, nebo když je záporné, příslušný podíl musí být odečten.*

Postup předvedl na řešení rovnic[120]

$$5x + 23 = 3y\,, \qquad 5x - 23 = 3y\,.$$

První rovnici nejprve řešil „klasicky“:

$$\frac{5}{3} = [1; 1, 2]\,, \qquad \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{a_1}{b_1} = [1; 1]\,,$$

pak

$$\begin{array}{c|ccc} z_1 & q_0 = 1 & 1 & 46 \\ z_0 & q_1 = 1 & 23 & 23 \\ z_{-1} & c = 23 & 23 & \\ z_{-2} & 0 & & \end{array}$$

a vypočítal zbytky po dělení 23 : 3 = 7 (zb. 2), 46 : 5 = 9 (zb. 1). Poté hned upozornil, že toto není přípustné, protože podíly musí být stejné, tedy musí se uvažovat 46 : 5 = 7 (zb. 11), tak vypočítal řešení $(x_1, y_1) = (2, 11)$. Pro srovnání uvedl další způsob řešení podle předchozího pravidla neboli nejprve uvažoval rovnici se zkráceným absolutním členem

$$5x + 2 = 3y\,, \qquad \text{protože} \qquad 23 : 3 = 7 \text{ (zb. 2)}\,,$$

a nalezl její řešení $(x_0, y_0) = (2, 4)$. Nakonec stanovil řešení původní rovnice $(x_1, y_1) = (x_0, y_0 + 7) = (2, 11)$.

Pak řešil rovnici se záporným zkráceným absolutním členem

$$5x - 2 = 3y$$

podle vzorců (8.10), tedy $(x_2, y_2) = (b - x_0, a - y_0) = (3 - 2, 5 - 4) = (1, 1)$, a konečně podle pravidla ze sloky 61 nalezl řešení rovnice $5x - 23 = 3y$ ve tvaru $(x_3, y_3) = (x_2, y_2 - 7) = (1, -6)$. Kladné řešení bylo možné získat ze vztahů (8.7)

$$x = 1 + 3t\,, \qquad y = -6 + 5t$$

[119] Podle [Col], str. 161.
[120] Viz příklad 1 ve sloce BiGa/ii.69, podle [Col], str. 165–166.

volbou $t = 2$, tedy jako nejmenší řešení určil dvojici $(7, 4)$.

Zdůvodnění uvedeného postupu je snadné, pro $c > b$, je možné dělit $c : b$, pak $c = bp + r$, po dosazení do rovnice $ax + c = by$ a po jednoduché úpravě se dostane

$$ax + r = b(y - p)\,.$$

Bháskarova metoda tak odpovídá substituci $y = z + p$, kde p je podíl a r zbytek při dělení $c : b$.

Rovnice s absolutním členem rovným jedné

Indičtí učenci věnovali speciální pozornost rovnici

$$ax \pm 1 = by\,, \tag{8.13}$$

která se často používala v astronomických výpočtech. Rovnici (8.13) nazývali *sthirakuttaka* (*sthira-kuṭṭaka*).[121] Ganéša (16. stol.) vysvětlil, že v astronomických úlohách vedoucích na rovnici (8.4) jsou fyzikální podmínky často takové, že koeficienty a a b jsou neměnné a rovnice se liší pouze absolutním členem c. Pomocí řešení rovnice (8.13) bylo možné snadno získat řešení několika rovnic s různými absolutními členy a nebylo nutné každou z nich řešit zvlášť.

Je-li (x_1, y_1) řešení rovnice $ax \pm 1 = by$, pak $(x_2, y_2) = (cx_1, cy_1)$ je řešením rovnice $ax \pm c = by$. Nejmenší celočíselné řešení se pak získalo jako zbytek dělení $x_2 : b$ a $y_2 : a$, tj.[122]

$$\begin{aligned} x &= x_2 + bt = bp + x_0 + bt = x_0 + b(p + t)\,, \\ u &= y_2 + at = ap + y_0 + at = y_0 + a(p + t)\,. \end{aligned}$$

Lineární rovnice s více neznámými

Staří Indové řešili i úlohy vedoucí na lineární rovnici s více neznámými. V tom případě postupovali tak, že si zvolili vhodné hodnoty za všechny neznámé kromě dvou a rovnici se dvěma zbývajícími neznámými řešili metodou *kuttaka*.

Brahmagupta předložil jeden astronomický problém, který vedl na rovnici[123]

$$197x - 1\,644y - z = 6\,302\,.$$

Odtud nejprve vyjádřil

$$x = \frac{1\,644y + z + 6\,302}{197}\,,$$

[121] *Sthira* znamená pevný, konstantní.

[122] Pravidla na řešení rovnice s absolutním členem rovným jedné jsou popsána například ve slokách BrSpSi/xviii.11–13, podle [Col], str. 330–331, BiGa/ii.71, podle [Col], str. 166–167.

[123] Viz sloka BrSpSi/xviii. 55, podle [Col], str. 352–353.

pak zvolil $z = 131$ s komentářem, že *z může být zvoleno libovolně tak, aby nezpůsobilo chybu.* Tím získal rovnici jen se dvěma neznámými

$$x = \frac{1644y + 6433}{197}\,,$$

jejíž řešení $x = 41$, $y = 1$ už snadno získal metodou *kuttaka*.

Soustavy neurčitých lineárních rovnic

Mnoho úloh vedlo na soustavu lineárních rovnic, která obsahovala více neznámých než rovnic. Postupným sčítáním či odčítáním rovnic se eliminovaly neznámé, až se dospělo k jediné rovnici se dvěma nebo více neznámými. Pokud zbyly jen dvě neznámé, bylo možné užít metodu *kuttaka*; v případě, že rovnice obsahovala více neznámých, nejprve se zvolila libovolná vhodná čísla za všechny z nich kromě dvou.

Bháskara II. řešil například následující úlohu:[124]

BiGa/vi.157
Čtyři osoby postupně vlastní pět, tři, šest a osm koní, dva, sedm, čtyři a jednoho velblouda, jejich mul je osm, dvě, jedna a tři, a volů sedm, jeden, dva a jeden. Všichni jsou stejně bohatí. Řekni mi okamžitě, příteli, cenu koně a ostatního dobytka.

Označíme-li postupně ceny koně, velblouda, muly a vola x, y, z, w a celkový majetek každé osoby p, dostaneme soustavu:

$$5x + 2y + 8z + 7w = p\,, \tag{A}$$
$$3x + 7y + 2z + w = p\,, \tag{B}$$
$$6x + 4y + z + 2w = p\,, \tag{C}$$
$$8x + y + 3z + w = p\,. \tag{D}$$

Bháskara II. rovnice po dvou odečetl, (A) – (B), (C) – (B), (D) – (C), a vyjádřil x:

$$x = \frac{1}{2}(5y - 6z - 6w)\,, \tag{E}$$
$$x = \frac{1}{3}(3y + z - w)\,, \tag{F}$$
$$x = \frac{1}{2}(3y - 2z + w)\,. \tag{G}$$

Stejným způsobem pokračoval dál, odečetl (E) – (F), (G) – (F) a vyjádřil y:

$$y = \frac{1}{9}(20z + 16w)\,,$$
$$y = \frac{1}{3}(8z - 5w)\,.$$

[124] Podle [Col], str. 232–233.

Z rovnosti pravých stran vyjádřil z:

$$z = \frac{31w}{4}\,.$$

Rovnice nemá absolutní člen, stačilo proto zvolit $w = 4t$ a potom dopočítat $z = 31t$, $y = 76t$, $x = 85t$. Autor upozornil, že různou volbou t je možné nalézt nekonečně mnoho řešení, sám uvedl $(85, 76, 31, 4)$ pro $t = 1$, $(170, 152, 62, 8)$ pro $t = 2$, $(255, 228, 93, 12)$ pro $t = 3$.

Na podobné typy soustav vedly ve středověku oblíbené úlohy o ptácích či domácích zvířatech, například Bháskara II. předložil následující s odvoláním, že se jedná o příklad starých autorů:[125]

> **BiGa/vi.158–159**
> *Holubů se prodá pět za tři* [dramma], *jeřábů sedm za pět, labutí devět za sedm a tři pávi jsou za devět. Přines* 100 *těchto ptáků za* 100 *dramma pro potěšení prince.*

Autor jako neznámé označil počet holubů *yā*, jeřábů *kā*, labutí *nī* a pávů *pī*. Pro větší přehlednost vyjádříme řešení současnou symbolikou, tj. počet holubů x, jeřábů y, labutí z a pávů w, pak porovnáním jejich počtu a cen dostaneme dvě rovnice o čtyřech neznámých:

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 100\,,\\ \frac{3}{5}x + \frac{5}{7}y + \frac{7}{9}z + 3w &= 100\,. \end{aligned}$$

Protože se hledalo celočíselné řešení, musí platit $x = 5a$, $y = 7b$, $z = 9c$, a navíc podle ceny pávů se předpokládalo, že jejich počet je násobkem tří, tj. $w = 3d$, pak mohla být soustava zapsána ve tvaru

$$\begin{aligned} 5a + 7b + 9c + 3d &= 100\,,\\ 3a + 5b + 7c + 9d &= 100\,. \end{aligned}$$

Bháskara II. z každé rovnice osamostatnil první neznámou a

$$a = \frac{100 - 7b - 9c - 3d}{5}\,, \qquad a = \frac{100 - 5b - 7c - 9d}{3}\,,$$

z rovnosti pravých stran pak vyjádřil druhou neznámou b

$$b = 50 - 2c - 9d\,.$$

[125] Podle [Col], str. 233–235. Úplně stejný příklad uvedl i Šrídhara s označením PaGa/Ex.78–79, podle [Shu1], str. 50–51, a rovněž Mahávíra ve slokách GaSaSa/vi.152–153, podle [Ran], str. 134–135. Postup řešení komentátorů se však mírně liší.

Dále prohlásil, že d může být libovolné číslo, a zvolil $d = 4$, tím rovnici upravil do tvaru $b = -2c + 14$. Za c zvolil novou neznámou – parametr $t \in \mathbb{N}$ a pomocí tohoto parametru vyjádřil ostatní neznámé

$$(a, b, c, d) = (t - 2, -2t + 14, t, 4)\,.$$

Aby řešení bylo kladné, postupně volil $t = 3$, $t = 4$, $t = 5$, odkud dopočítal tři řešení dané úlohy.

(a, b, c, d)	$(1, 8, 3, 4)$	$(2, 6, 4, 4)$	$(3, 4, 5, 4)$
počty (x, y, z, w)	$(5, 56, 27, 12)$	$(10, 42, 36, 12)$	$(15, 28, 45, 12)$
ceny	$(3, 40, 21, 36)$	$(6, 30, 28, 36)$	$(9, 20, 35, 36)$

Úlohy tohoto typu byly populární i v Číně, v arabských zemích, později též v Evropě; anglický filozof Alkuin (asi 735 až 804) je zařadil do sbírky *Úlohy na bystření rozumu mladíků*, Abú Kámil do *Knihy aritmetických kuriozit*, řešil je Leonardo Pisánský.

Velmi rozšířené byly obecné úlohy o zbytcích, kde úkolem bylo nalézt přirozené číslo n, které postupně dělené celými čísly a_1, a_2, ..., a_m dává zbytky r_1, r_2, ..., r_m, tj. hledalo se řešení soustavy s neznámými x_1, x_2, ..., x_m, n (a_i, $r_i \in \mathbb{Q}^+$, $n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} a_1x_1 + r_1 &= n\,, \\ a_2x_2 + r_2 &= n\,, \\ &\vdots \\ a_mx_m + r_m &= n\,. \end{aligned}$$

Podobnými úlohami se zabývali i staří Číňané. Jsou-li čísla a_1, a_2, ..., a_m po dvou nesoudělná, lze pomocí čínské věty o zbytcích vyjádřit řešení explicitně vzorečkem (viz [KSS]). Staří Indové úlohu řešili postupně metodou *kuttaka*; nejprve se uvažovaly pouze první dvě rovnice

$$n = a_1x_1 + r_1 = a_2x_2 + r_2\,,$$

odkud se vypočítala nejmenší hodnota $x_1 = X_1$, obecně $x_1 = X_1 + a_2t_1$, tedy

$$n = a_1(X_1 + a_2t_1) + r_1 = (a_1X_1 + r_1) + a_1a_2t_1\,.$$

K tomu se připojila třetí rovnice

$$n = a_1a_2t_1 + (a_1X_1 + r_1) = a_3x_3 + r_3\,,$$

ze které se opět metodou *kuttaka* určila hodnota $t_1 = X_2 + a_3t_2$ a jednoduchou úpravou se dostalo vyjádření

$$n = a_1a_2a_3t_2 + (a_1a_2X_2 + a_1X_1 + r_1)\,.$$

Pak se přidala další rovnice a celý postup se opakoval do té doby, než byly všechny rovnice vyčerpány.

Bháskara I. takto hledal číslo, které po vydělení čísly 2, 3, 4, 5, 6 vždy dá zbytek 1 a navíc je ještě dělitelné 7.[126] Bháskarovo řešení 721 však není nejmenším číslem vyhovujícím podmínkám, protože autor nevzal v úvahu, že mezi děliteli jsou dvojice soudělných čísel. Problému se soudělnými děliteli se věnoval Prthúdakasvámin v komentáři Brahmaguptova díla. Jestliže například d je společným dělitelem čísel a_1, a_2 a rozdíl $r_2 - r_1$ je také dělitelný číslem d, pak se musí vzít[127]

$$n = a_1 X_1 + r_1 = (a_1 X_1 + r_1) + \frac{a_1 a_2}{d} t_1 \,.$$

Nejmenším číslem vyhovujícím Bháskarově úloze je tak 301. Arabský vědec ibn al-Hajtham (asi 965 až 1039)[128] a Leonardo Pisánský se později zabývali podobným problémem (viz [Di]).

Další typ soustavy s neznámými x, y_1, y_2, ... , y_m a racionálními koeficienty se vyskytoval v astronomii (a_i, $b \in \mathbb{Q}^+$, $c_i \in \mathbb{Q}$):

$$\begin{aligned} by_1 &= a_1 x + c_1 \,, \\ by_2 &= a_2 x + c_2 \,, \\ &\vdots \\ by_m &= a_m x + c_m \,. \end{aligned} \tag{8.14}$$

Soustava (8.14) se nazývala *samšlišta-kuṭṭaka* (*saṃśliṣṭa-kuṭṭaka*, tj. spojené rozdrobení). Řešila se tak, že se všechny rovnice sečetly, čímž se dostala rovnice[129]

$$b\,(y_1 + y_2 + \cdots + y_m) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)\,x + (c_1 + c_2 + \cdots + c_m)$$

s neznámými x a $z = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$, odkud se metodou *kuttaka* vypočítala neznámá x. Dosazením do původních rovnic se určily hodnoty zbývajících neznámých.

Takovou soustavu řešil například Bháskara II.:[130]

BiGa/vi.74

Jaké je to číslo, které násobené pěti a vydělené šedesáti třemi dá zbytek sedm a násobené deseti a vydělené šedesáti třemi dá zbytek čtrnáct?

Zadání bylo možno vyjádřit soustavou

$$\begin{aligned} 5x &= 63y_1 + 7 \,, & \qquad & & 63y_1 &= 5x - 7 \,, \\ 10x &= 63y_2 + 14 & \qquad & \text{neboli} & 63y_2 &= 10x - 14 \,. \end{aligned}$$

Autor nejprve rovnice sečetl a tím získal rovnici $63z = 15x - 21$, kde $z = y_1 + y_2$, podle pravidel ještě zkrátil třemi $21z = 5x - 7$ a pomocí metody *kuttaka* nalezl nejmenší číslo x vyhovující podmínkám, totiž $x = 14$.

126 Podle [DS2], str. 133.
127 Podle [Col], str. 327.
128 Vlastním jménem Abū Alī al-Ḥasan ibn al-Haytham, zvaný též Alhazen.
129 Viz sloka BiGa/vi.73, podle [Col], str. 168–169.
130 Podle [Col], str. 169.

8.9 Pellova rovnice

Pellova rovnice je neurčitá rovnice

$$ax^2 + 1 = y^2, \tag{8.15}$$

kde a je přirozené číslo, které není druhou mocninou. Řešení $(x,\, y)$ hledáme v oboru celých čísel. Tato rovnice má nekonečně mnoho řešení, zřejmá jsou tzv. triviální řešení $(0, 1)$ a $(0, -1)$. Zobecněnou Pellovou rovnicí rozumíme rovnici

$$ax^2 + b = y^2, \tag{8.16}$$

kde $a \in \mathbb{N}$, $\sqrt{a} \notin \mathbb{N}$ a $b \in \mathbb{Z}$.

Pellova rovnice ve tvaru

$$2x^2 + 1 = y^2 \tag{8.17}$$

se používala v řecké matematice, kde se pomocí zlomku $\frac{y}{x}$ hledala racionální aproximace $\sqrt{2}$. Dokonce už v 8. stol. př. n. l. indický učenec Baudhájana vyjádřil $\sqrt{2} \approx \frac{577}{408}$, kde je správných pět desetinných míst 1,41421.[131] I když Baudhájana pravděpodobně k výsledku dospěl jinou cestou, je zajímavé, že čísla $x = 408$ a $y = 577$ jsou řešením rovnice (8.17).

Také Archimédova úloha o dobytku vede na rovnici $y^2 = 4\,729\,494\, x^2 + 1$, což je Pellova rovnice. Nejmenším celočíselným řešením tohoto problému jsou čísla mající více než 200 000 cifer.[132] Pellově rovnici a její historii bylo věnováno mnoho publikací, například [Whi], [Len], indické metody jsou popsány mimo jiné v [SiP1], [Wa2].

V Indii se řešením Pellovy rovnice zabývali zejména v 7. století Brahmagupta a ve 12. století Bháskara II. Přestože indičtí matematikové počítali i se zápornými čísly, řešení rovnice (8.15), resp. (8.16) hledali v oboru přirozených čísel.[133]

Indové nazývali rovnici (8.16) *varga-prakrti* (*varga-prakṛti*) nebo *krti-prakrti* (*kṛti-prakṛti*).[134] Většina indických matematiků užívala termín *prakrti* k označení přirozeného koeficientu a, proto se také rovnice někdy nazývala „čtverce ovlivněné koeficientem“. Na koeficient a se občas odkazovalo pouze pomocí slova *gunaka* (násobitel) či zkráceně *guna*, pro absolutní člen b byly vyhrazeny názvy *kšépa* či *prakšépa* (přidaný prvek); pokud byl absolutní člen záporný, říkalo se mu *šódhaka* (odčítací prvek). Neznámou x nazývali *ádjamúla* (*ādya-mūla*, tj. první kořen) a neznámé y říkali *antjamúla* (*antya-mūla*, tj. druhý kořen). Někdy se objevily také výrazy *kaništhapada* nebo *hrasvamúla* (*kaniṣṭha-pada*, *hrasva-mūla*, tj. menší kořen) pro číslo x a *džješthapada* nebo *džješthamúla* (*jyeṣṭha-pada*, *jyeṣṭha-mūla*, tj. větší kořen) pro y, i když ne vždy muselo platit $x < y$. Při popisu rovnice označovali postupně koeficienty a, b a neznámé x, y zkratkami *pra*, *kṣe*, *ka*, *jye*.

---

[131] Viz 3. kapitola, odstavec 3.9.

[132] Více o řešení Archimédovy úlohy lze nalézt např. v [BS], [BaT], [Sti], [WGZ].

[133] Staré indické metody řešení Pellovy rovnice jsou shrnuty v článku [Sy4].

[134] *Varga* je výraz pro druhou mocninu, *prakrti* znamená podstata či základ.

Brahmaguptovo řešení

První významné výsledky ve studiu rovnice (8.16) získal indický matematik Brahmagupta téměř o tisíc let dříve, než se jí věnovali matematikové v Evropě. Brahmagupta ve své knize *Bráhmasphutasiddhánta* uvedl některá pravidla, která pak využil při řešení. Pravidlo pro řešení rovnice formuloval takto:[135]

> **BrSpSi/xviii.65–66**
> *Kořen* [urči] *dvakrát a* [další] *z vhodného čtverce násobeného násobitelem* [koeficientem a] *zvětšeným nebo zmenšeným o vhodnou konstantu. Součin prvních násobený násobitelem s přičteným součinem druhých je druhý kořen. Součet součinů křížem je první kořen. Součin přičtených nebo odečtených veličin je přičtený. Kořeny* [takto nalezené] *vydělené* [původní] *přičtenou nebo odečtenou veličinou jsou* [kořeny] *pro přičtenou jedničku.*

Původní formulace nejsou příliš srozumitelné, vyjádříme je současnou řečí a symbolikou. První část pravidla je obsažena v následujícím lemmatu.

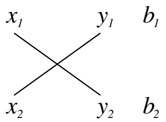
Lemma 1: *Nechť* (x_1, y_1) *je řešením rovnice* $ax^2 + b_1 = y^2$ *a* (x_2, y_2) *je řešením rovnice* $ax^2 + b_2 = y^2$*. Pak* (x, y)*, kde*

$$x = x_1y_2 + x_2y_1 \qquad \text{a} \qquad y = ax_1x_2 + y_1y_2\,, \tag{8.18}$$

je řešením rovnice

$$ax^2 + b_1b_2 = y^2.$$

Při popisu řešení indičtí autoři zapisovali kořeny a absolutní člen první rovnice, kořeny a absolutní člen druhé rovnice do řádků po sebou. Pak je i názornější „součin křížem“ uvedený v Brahmguptově pravidle.[136]



Brahmagupta tvrzení nedokazoval, jen je doplnil několika příklady. Důkaz provedl až v 16. století komentátor Brahmaguptova díla Kršna:[137]

Důkaz: Označíme-li jako (x_1, y_1) a (x_2, y_2) postupně řešení rovnic $ax^2+b_1 = y^2$, $ax^2 + b_2 = y^2$, pak platí

$$ax_1^2 + b_1 = y_1^2 \qquad \text{a} \qquad ax_2^2 + b_2 = y_2^2\,.$$

[135] Podle [Col], str. 363.
[136] Podle [Sr], str. 110.
[137] Podle [DS2], str. 148–149. V Evropě dokázal tzv. Brahmaguptovo lemma anglický matematik John Wallis (1616 – 1703).

Jestliže se první rovnice vynásobí y_2^2, dostaneme

$$ax_1^2y_2^2 + b_1y_2^2 = y_1^2y_2^2\,,$$

kde se za y_2^2 ve druhém členu dosadí z druhé rovnice

$$ax_1^2y_2^2 + b_1(ax_2^2 + b_2) = y_1^2y_2^2\,,$$

po roznásobení

$$ax_1^2y_2^2 + ab_1x_2^2 + b_1b_2 = y_1^2y_2^2\,.$$

Nyní se b_1 ve druhém členu nahradí rozdílem $y_1^2 - ax_1^2$, tedy

$$ax_1^2y_2^2 + a(y_1^2 - ax_1^2)x_2^2 + b_1b_2 = y_1^2y_2^2\,,$$

po úpravě

$$a(x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2) + b_1b_2 = y_1^2y_2^2 + a^2x_1^2x_2^2\,.$$

Když se k oběma stranám rovnice přičte $2ax_1x_2y_1y_2$, lze rovnici vyjádřit ve tvaru

$$a(x_1y_2 + x_2y_1)^2 + b_1b_2 = (y_1y_2 + ax_1x_2)^2\,,$$

tedy $(x_1y_2 + x_2y_1, ax_1x_2 + y_1y_2)$ je řešením rovnice $ax^2 + b_1b_2 = y^2$. $\square$

Indičtí matematikové nazývali tuto metodu *bhávaná* (*bhāvanā*, tj. princip skládání).[138] Jestliže takto „složili“ dvě stejné rovnice se stejnými kořeny, užili termín *tuljabhávaná* (*tulya-bhāvanā*, tj. skládání stejných) na rozdíl od *atuljabhávaná* (*atulya-bhāvanā*, tj. skládání nestejných).

Důsledek 1: Je-li (x_1, y_1) řešením rovnice $ax^2 + b = y^2$, pak (x, y), kde

$$x = 2x_1y_1 \qquad \text{a} \qquad y = ax_1^2 + y_1^2\,, \tag{8.19}$$

je řešením rovnice $ax^2 + b^2 = y^2$.

V případě, že $b = 1$, jde o Pellovu rovnici (8.15). Pokud známe jedno její celočíselné řešení (x_1, y_1), můžeme pomocí důsledku 1 nalézt další celočíselné řešení. I když tímto postupem lze nalézt nekonečně mnoho řešení, Brahmagupta sám uvedl vždy jen jedno. Poznámka o nekonečném počtu řešení se objevuje až později u Šrípatiho, Bháskary, Nárájany.

Druhá část Brahmaguptova pravidla popisuje postup, podle nějž se řešení Pellovy rovnice $ax^2 + 1 = y^2$ získá pomocí řešení zobecněné Pellovy rovnice $ax^2 + b = y^2$; zformulujeme ji jako lemma 2.

Lemma 2: *Nechť (x_1, y_1) je řešením rovnice $ax^2 + b = y^2$. Pak (x, y), kde*

$$x = \frac{2x_1y_1}{b} \qquad \text{a} \qquad y = \frac{ax_1^2 + y_1^2}{b}\,, \tag{8.20}$$

je řešením rovnice $ax^2 + 1 = y^2$.

---

[138] Někdy se užívala jména *samásabhávaná* (*samāsa-bhāvanā*, tj. sčítací skládání), resp. *antarabhávaná* (*antara-bhāvanā*, tj. odčítací skládání).

Důkaz: Tvrzení plyne z lemmatu 1 a jeho důsledku. Dvojice čísel $x = 2x_1y_1$ a $y = ax_1^2 + y_1^2$ je řešením rovnice $ax^2 + b^2 = y^2$. Pak jen stačí vydělit tuto rovnici b^2 a $(\frac{x}{b}, \frac{y}{b})$ je řešením rovnice $ax^2 + 1 = y^2$. $\square$

Brahmagupta předvedl popsaný postup na řešení úloh, které byly vyjádřeny rovnicemi $92x^2 + 1 = y^2$ a $83x^2 + 1 = y^2$.[139]

V prvním příkladě místo rovnice

$$92x^2 + 1 = y^2$$

uvažoval pomocnou rovnici

$$92x^2 + 8 = y^2,$$

kde změnil pouze absolutní člen b tak, aby snadno našel celočíselné řešení $(x_1, y_1) = (1, 10)$. Užitím důsledku 1 nejprve získal

$$(x_2, y_2) = (2x_1y_1, 92x_1^2 + y_1^2) = (20, 192) \quad \text{jako řešení rovnice} \quad 92x^2 + 64 = y^2.$$

Pak podle lemmatu 2 dopočítal

$$(x_3, y_3) = \left(\frac{2x_1y_1}{8}, \frac{92x_1^2 + y_1^2}{8}\right) = \left(\frac{5}{2}, 24\right) \text{ jako řešení rovnice } 92x^2 + 1 = y^2.$$

Protože však toto řešení nebylo celočíselné, použil ještě jednou důsledek 1 a tím dostal celočíselné řešení původní rovnice

$$(x, y) = (2x_3y_3, 92x_3^2 + y_3^2) = (120, 1\,151)\,.$$

Při řešení druhé rovnice

$$83x^2 + 1 = y^2$$

nejdřív uvažoval $(x_1, y_1) = (1, 9)$ jako řešení pomocné rovnice $83x^2 - 2 = y^2$. Podle důsledku 1 platí, že dvojice čísel

$$(x_2, y_2) = (2x_1y_1, 83x_1^2 + y_1^2) = (18, 164) \quad \text{je řešením rovnice} \quad 83x^2 + 4 = y^2.$$

Pak užitím lemmatu 2 nalezl řešení původní rovnice

$$(x, y) = \left(\frac{2x_1y_1}{2}, \frac{83x_1^2 + y_1^2}{2}\right) = \left(\frac{18}{2}, \frac{164}{2}\right) = (9, 82)\,.$$

Při řešení Brahmaguptovy rovnice nebylo nutné využívat lemma 1, resp. důsledek 1, mohlo se přímo aplikovat lemma 2 na pomocnou rovnici, jejíž řešení bylo známé. Brahmagupta však neodděloval jednotlivé části pravidla, procházel vždy všemi kroky.

[139] Podle [Col], str. 364.

Rovnice $ax^2 + b = y^2$ je zajímavá zejména pro $b \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. V tomto případě lze totiž pomocí lemmatu 2 nalézt celočíselné řešení Pellovy rovnice $ax^2 + 1 = y^2$, jak je ukázáno dále.

Pro $b = 1$ jde přímo o Pellovu rovnici (8.15). Je-li $b = -1$ a dvojice přirozených čísel (x_1, y_1) je řešením rovnice $ax^2 - 1 = y^2$, pak podle (8.20) získáme řešení Pellovy rovnice ve tvaru (8.19). Znaménko se zanedbávalo, staří indičtí matematikové uvažovali jen kladná řešení.

Je-li $b = 2$ a dvojice přirozených čísel (x_1, y_1) je řešením rovnice $ax^2+2 = y^2$, pak podle (8.20) a s využitím vztahu $ax_1^2 = y_1^2 - 2$ platí

$$x = \frac{2x_1y_1}{2} = x_1y_1 \qquad \text{a} \qquad y = \frac{ax_1^2 + y_1^2}{2} = \frac{2y_1^2 - 2}{2} = y_1^2 - 1\,,$$

tedy dvojice přirozených čísel $(x_1y_1, y_1^2 - 1)$ je řešením Pellovy rovnice (8.15).

Podobná úvaha pro $b = -2$ vede k přirozenému řešení ve tvaru (x_1y_1, y_1^2+1).

Trochu složitější je případ $b = \pm 4$. Je-li $b = 4$ a dvojice přirozených čísel (x_1, y_1) je řešením rovnice $ax^2 + 4 = y^2$, tj. $ax_1^2 = y_1^2 - 4$, pak čísla

$$x = \frac{2x_1y_1}{4} = \frac{x_1y_1}{2} \qquad \text{a} \qquad y = \frac{ax_1^2 + y_1^2}{4} = \frac{y_1^2 - 4 + y_1^2}{4} = \frac{y_1^2 - 2}{2}$$

jsou řešením Pellovy rovnice (8.15). Čísla x a y jsou obě přirozená právě tehdy, když y_1 je sudé. Když y_1 je liché, x_1 musí být také liché, jinak by nemohlo platit $y_1 = ax_1^2 + 4$. Pro obě čísla x_1 a y_1 lichá se aplikuje lemma 1 na dvě řešení $(\frac{x_1y_1}{2}, \frac{y_1^2-2}{2})$ a $(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2})$ rovnice (8.15). Pak podle (8.18) získáme řešení (x, y), kde

$$\begin{aligned} x =& \frac{x_1y_1}{2} \cdot \frac{y_1}{2} + \frac{x_1}{2} \cdot \frac{y_1^2 - 2}{2} = \frac{x_1y_1^2 + x_1y_1^2 - 2x_1}{4} = \frac{x_1(y_1^2 - 1)}{2}\,, \\ y =& a\,\frac{x_1y_1}{2} \cdot \frac{x_1}{2} + \frac{y_1^2 - 2}{2} \cdot \frac{y_1}{2} = \frac{(y_1^2 - 4)y_1}{4} + \frac{(y_1^2 - 2)y_1}{4} = \frac{y_1(y_1^2 - 3)}{2}\,, \end{aligned} \tag{8.21}$$

což jsou obě přirozená čísla, protože y_1 je liché.

Pro $b = -4$ a (x_1, y_1) jako celočíselné řešení rovnice $ax^2 - 4 = y^2$ je řešením Pellovy rovnice (8.15) dvojice (x, y), kde

$$x = \frac{2x_1y_1}{4} = \frac{x_1y_1}{2} \qquad \text{a} \qquad y = \frac{ax_1^2 + y_1^2}{4} = \frac{y_1^2 + 4 + y_1^2}{4} = \frac{y_1^2 + 2}{2}\,.$$

Opět platí, podobně jako v předchozím případě, že čísla x a y jsou obě přirozená právě tehdy, když y_1 je sudé. Když y_1 a x_1 jsou obě lichá, aplikuje se důsledek 1 na $(\frac{x_1y_1}{2}, \frac{y_1^2+2}{2})$ a podle (8.19) dostaneme

$$x = 2\frac{x_1y_1}{2} \cdot \frac{y_1^2 + 2}{2} = \frac{x_1y_1(y_1^2 + 2)}{2}\,,$$

$$y = a\cdot\left(\frac{x_1y_1}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1^2+2}{2}\right)^2 = \left(\frac{y_1^2+2}{2}\right)^2-1+\frac{y_1^4+4y_1^2+4}{4} = \frac{y_1^4+4y_1^2+2}{2}.$$

Pak podle lemmatu 1 s hodnotami $\left(\frac{x_1y_1}{2}, \frac{y_1^2+2}{2}\right)$ a $\left(\frac{x_1y_1(y_1^2+2)}{2}, \frac{y_1^4+4y_1^2+2}{2}\right)$ dostaneme řešení (x, y), kde

$$x = \frac{x_1y_1(y_1^2+1)(y_1^2+3)}{2}, \qquad y = (y_1^2+2)\frac{(y_1^2+1)(y_1^2+3)-2}{2}, \tag{8.22}$$

a to jsou přirozená čísla pro y_1 liché i sudé.

Výše uvedené vztahy Brahmagupta znal, například vzorce (8.21) a (8.22) jsou popsány slovy ve slokách BrSpSi/xviii.69 a BrSpSi/xviii.71.[140] Nepodal však žádné odvození ani jakékoli zdůvodnění svých návodů.

Brahmagupta tedy řešil Pellovu rovnici $ax^2+1=y^2$ tak, že nejprve nalezl přirozená řešení pomocné rovnice

$$ax^2+b=y^2, \qquad \text{kde} \quad b\in\{\pm1,\pm2,\pm4\}, \tag{8.23}$$

pak podle lemmatu 2 mohl nalézt nejen jedno, ale nekonečně mnoho řešení. Brahmagupta však nedokázal vysvětlit obecně, jak zvolit pomocnou rovnici (8.23).

Šrípatiho řešení

Dalším indickým matematikem, který se zabýval řešením Pellovy rovnice, byl Šrípati, který ve své práci *Siddhántašekhara* uvedl jednoduché pravidlo, podle nějž nalezl racionální řešení Pellovy rovnice. Přitom využíval identity

$$a\cdot1^2+(m^2-a)=m^2 \qquad \text{nebo} \quad a\cdot1^2-(a-m^2)=m^2,$$

kde m je libovolné číslo. Pak rovnice

$$ax^2+(m^2-a)=y^2$$

má řešení $(1, m)$. Podle Brahmaguptova lemmatu 2 pak nalezl řešení Pellovy rovnice ve tvaru

$$\left(\frac{2m}{m^2-a}, \frac{m^2+a}{m^2-a}\right).$$

V některých případech lze tímto způsobem získat i řešení z oboru přirozených čísel.

[140] Podle [Col], str. 365–366.

Bháskarovo řešení

Na Brahmaguptovu práci navázal Bháskara II., který popsal cyklickou metodu *čakravála* (*cakravāla*);[141] to je algoritmus, podle nějž se postupně hledala celočíselná řešení rovnic $ax^2 + b_1 = y^2$, $ax^2 + b_2 = y^2$ atd., až se získala rovnice, v níž byl absolutní člen b_k roven ± 1, ± 2 nebo ± 4. Pomocí celočíselného řešení rovnice (8.23) se potom užitím Brahmaguptova principu skládání získalo celočíselné řešení Pellovy rovnice $ax^2 + 1 = y^2$.

Pravidlo můžeme dnes vyjádřit takto:[142]

Lemma 3: *Nechť (x_1, y_1) je celočíselné řešení rovnice $ax^2 + b_1 = y^2$, kde b_1 je celé číslo. Pak dvojice (x, y), kde*

$$x = \frac{x_1 m + y_1}{b_1}, \qquad y = \frac{a x_1 + y_1 m}{b_1}, \tag{8.24}$$

je celočíselným řešením rovnice

$$ax^2 + b_2 = y^2, \qquad \textit{kde} \quad b_2 = \frac{m^2 - a}{b_1}$$

pro vhodné celé číslo m.

Bháskara II. uvedl pravidlo bez důkazu. Je však vidět, že výrazy (8.24) získáme podle Brahmaguptových lemmat. Použijeme-li lemma 1 na řešení (x_1, y_1) rovnice $ax^2 + b_1 = y^2$ a řešení $(1, m)$ rovnice $ax^2 + (m^2 - a) = y^2$, snadno ověříme, že

$$(x_1 m + y_1, a x_1 + y_1 m) \qquad \text{řeší rovnici} \quad ax^2 + (m^2 - a)\, b_1 = y^2 .$$

Pak podle lemmatu 2 plyne, že dvojice (x_2, y_2), kde

$$x_2 = \frac{x_1 m + y_1}{b_1}, \qquad y_2 = \frac{a x_1 + y_1 m}{b_1}, \tag{8.25}$$

je řešením rovnice $ax^2 + \frac{m^2 - a}{b_1} = y^2$.

Bháskara ještě poznamenal, že číslo m je třeba volit tak, aby $x_2 = \frac{x_1 m + y_1}{b_1}$ bylo celé číslo[143] a rozdíl $|m^2 - a|$ byl co nejmenší. Můžeme ještě předpokládat, že čísla x_1, y_1 a b_1 jsou nesoudělná, protože po zkrácení bychom dostali rovnici s menší hodnotou b_1. Pak čísla

$$y_2 = \frac{a x_1 + y_1 m}{b_1}, \qquad b_2 = \frac{m^2 - a}{b_1}$$

jsou také celá.

---

[141] Slovo *čakravála* znamená kruh.

[142] Viz sloky BiGa/iii.83–86, podle [Col], str. 175–176.

[143] Při řešení použil metodu *kuttaka*, viz odstavec 8.8.

Vyjádříme-li y_1 ze vztahu pro x_2 ve vzorci (8.25) a dosadíme do vztahu pro y_2, dostaneme

$$y_2 = \frac{ax_1 + y_1 m}{b_1} = \frac{ax_1 + (x_2 b_1 - x_1 m)\, m}{b_1} = m x_2 - \left(\frac{m^2 - a}{b_1}\right) x_1 = \\ = m\, x_2 - b_2\, x_1\,.$$

Nyní stačí ukázat, že b_2 je celé. Pak musí i y_2 být celé číslo. Vyjádříme y_1 ze vzorců (8.25) a porovnáme

$$y_1 = b_1\, x_2 - x_1 m\,, \qquad\qquad y_1 = \frac{b_1\, y_2 - a\, x_1}{m}\,,$$

tedy

$$\begin{aligned} m\, b_1\, x_2 - x_1 m^2 &= b_1\, y_2 - a\, x_1\,, \\ b_1 (m\, x_2 - y_2) &= x_1 (m^2 - a)\,, \\ \frac{b_1}{x_1} (m\, x_2 - y_2) &= m^2 - a\,. \end{aligned}$$

Číslo na pravé straně je celé, tedy i výraz na levé straně musí byt celočíselný. Protože čísla b_1 a x_1 jsou nesoudělná, musí být celé $\frac{m\, x_2 - y_2}{x_1}$, tedy i $\frac{m^2 - a}{b_1} = b_2$. Toto Bháskara II. věděl, ale v jeho práci žádný důkaz není.

Bháskarova cyklická metoda spočívala v tom, že se nejprve místo dané rovnice $ax^2 + 1 = y^2$ hledalo celočíselné řešení (x_1, y_1) rovnice $ax^2 + b_1 = y^2$, kde b_1 bylo co nejmenší. Možná volba je taková, že $\frac{y_1}{x_1} \approx \sqrt{a}$. Pokud $b_1 \notin \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$, nalezlo se podle lemmatu 3 celočíselné řešení (x_2, y_2) rovnice $ax^2 + b_2 = y^2$. Tento proces se opakoval tak dlouho, dokud se nedospělo k takové rovnici, kde $b_k \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Dál se pokračovalo podle Brahmaguptova principu skládání. Bháskara II. věděl, i když asi jen na základě zkušeností, že postup popsaný jeho metodou jednou skončí. Po konečném počtu kroků se tedy získá taková rovnice $ax^2 + b_k = y^2$, kde $b_k \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Ve své práci popsal řešení několika takových příkladů.

Ve sloce BiGa/iii.87[144] je uvedena úloha, která vede na problém nalézt celočíselné řešení rovnice

$$67x^2 + 1 = y^2.$$

Bháskara nejprve uvažoval čísla

$$(x_1, y_1) = (1, 8) \qquad \text{jako řešení rovnice} \qquad 67x^2 - 3 = y^2 \quad (b_1 = -3)\,.$$

Podle lemmatu 3 pak hledal takové číslo m_1, pro které je řešení rovnice

$$67x^2 + \frac{m_1^2 - 67}{-3} = y^2$$

[144] Podle [Col], str. 176–178.

celočíselné. Řešení je ve tvaru

$$(x_2, y_2) = \left(\frac{1 \cdot m_1 + 8}{-3}, \frac{8m_1 + 67 \cdot 1}{-3} \right). \tag{8.26}$$

Aby číslo x_2 bylo celé, hledal m_1 ve tvaru $m_1 = -3t + 1$. Zároveň se požadovalo, aby rozdíl $|m_1^2 - 67|$ byl minimální, proto volil $m_1 = 7$ $(t = -2)$. Dosazením do (8.26) dostal

$$(x_2, y_2) = (5, 41) \qquad \text{jako řešení rovnice} \qquad 67x^2 + 6 = y^2 \quad (b_2 = 6)\,.$$

Opět podle lemmatu 3 hledal číslo m_2 tak, aby rovnice

$$67x^2 + \frac{m_2^2 - 67}{6} = y^2$$

měla celočíselné řešení. Protože řešení je ve tvaru

$$(x_3, y_3) = \left(\frac{5m_2 + 41}{6}, \frac{41m_2 + 67 \cdot 5}{6} \right), \tag{8.27}$$

číslo m_2 muselo vyhovovat podmínce $m_2 = 6t + 5$ s minimálním rozdílem $|m_2^2 - 67|$, a tedy $m_2 = 5$ $(t = 0)$. Podle vztahů (8.27) získal hodnoty

$$(x_3, y_3) = (11, 90) \qquad \text{jako řešení rovnice} \qquad 67x^2 - 7 = y^2 \quad (b_3 = -7)\,.$$

Nyní znovu podle lemmatu 3 hledal číslo m_3 tak, aby rovnice

$$67x^2 + \frac{m_3^2 - 67}{-7} = y^2$$

měla celočíselné řešení. Řešení je ve tvaru

$$(x_4, y_4) = \left(\frac{11m_3 + 90}{-7}, \frac{90m_3 + 67 \cdot 11}{-7} \right). \tag{8.28}$$

Pro číslo m_3 platilo, že $m_3 = -7t + 2$ a rozdíl $|m_3^2 - 67|$ je minimální, a tedy $m_3 = 9$ $(t = -1)$. Z vyjádření (8.28) pak plyne, že

$$(x_4, y_4) = (27, 221) \qquad \text{je řešením rovnice} \qquad 67x^2 - 2 = y^2 \quad (b_4 = -2)\,.$$

V dalším kroku hledal celočíselné řešení rovnice

$$67x^2 - 2 = y^2,$$

a to je rovnice s absolutním členem $b_4 = -2$, proto dál postupoval podle Brahmaguptova principu skládání. Řešením původní rovnice $67x^2 + 1 = y^2$ byla tedy čísla (x, y), kde

$$x = \frac{2 \cdot 27 \cdot 221}{2} = 5\,967 \qquad \text{a} \qquad y = \frac{67 \cdot 27^2 + 221^2}{2} = 48\,842\,.$$

V jiném příkladu Bháskara II. popsal postup řešení rovnice[145]

$$61x^2 + 1 = y^2 .$$

Nejprve uvažoval rovnici

$$61x^2 + 3 = y^2 \qquad \text{s řešením} \quad x_1 = 1\,,\, y_1 = 8 \quad (b_1 = 3)\,.$$

Užitím lemmatu 3 hledal takové číslo m_1, pro které má rovnice

$$61x^2 + \frac{m_1^2 - 61}{3} = y^2$$

celočíselné řešení. Toto řešení je ve tvaru

$$x_2 = \frac{1 \cdot m_1 + 8}{3}\,, \qquad y_2 = \frac{8m_1 + 61 \cdot 1}{3}\,. \tag{8.29}$$

Pak hledal m_1 tak, aby x_2 bylo celočíselné a rozdíl $|m_1^2 - 61|$ byl minimální. To nastane pro $m_1 = 7$. Dosazením do (8.29) dostal

$$x_2 = 5\,,\, y_2 = 39 \qquad \text{jako řešení rovnice} \quad 61x^2 - 4 = y^2 \quad (b_2 = -4)\,.$$

Pak podle Brahmaguptova principu skládání nalezl nejmenší celočíselné řešení rovnice $61x^2 + 1 = y^2$, tedy $x = 226\,153\,980$ a $y = 1\,766\,319\,049$.

Uvedené příklady ukazují i značnou početní zručnost indických matematiků a jejich jistotu při počítání s velkými čísly.

Na Bháskarovu práci navázal další indický matematik Nárájana, který předložil další příklady. Ve své knize *Bídžaganita* pomocí Bháskarovy cyklické metody nalezl například řešení $x = 22\,419$, $y = 227\,528$ rovnice $103\,x^2 + 1 = y^2$ (viz [Du]).

Speciální tvary Pellovy rovnice

Indičtí učenci věnovali pozornost i některým speciálním tvarům Pellovy rovnice, pro něž zformulovali samostatná pravidla. Brahmagupta i Bháskara II. studovali rovnici, kde koeficient a byl čtvercem, tedy rovnici ($n \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{Z}$)

$$n^2x^2 + b = y^2 . \tag{8.30}$$

Řešením takové rovnice bylo (x, y), kde

$$x = \frac{1}{2n}\left(\frac{b}{m} - m\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{m} + m\right),$$

[145] Viz sloka BiGa/iii.87, podle [Col], str. 178.

a m bylo libovolné číslo.[146] Rovnici (8.30) je možné upravit

$$b = y^2 - n^2x^2 \qquad \text{neboli} \qquad b = (y - nx)(y + nx)$$

a substitucí $m = y - nx$ převést na soustavu

$$\begin{aligned} y - nx &= m\,, \\ y + nx &= \frac{b}{m}\,, \end{aligned}$$

odkud se řešení snadno vypočítá pomocí operace *samkramana*.

Řešení rovnice, kde koeficient a byl násobkem čtverce, tj. $a = cn^2$, popsal Brahmagupta. Místo rovnice ($c,\ n \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{Z}$)

$$cn^2x^2 + b = y^2 \tag{8.31}$$

uvažoval nejprve rovnici s menším koeficientem, a to rovnici $cx^2 + b = y^2$ a její řešení (x_1, y_1). Rovnice (8.31) pak měla řešení $(\frac{x_1}{n}, y_1)$.[147]

Podobným způsobem řešil Brahmagupta rovnici, v níž byl absolutní člen násobkem čtverce ($a,\ n \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{Z}$):

$$ax^2 + cn^2 = y^2. \tag{8.32}$$

Nejprve nalezl řešení (x_1, y_1) rovnice $ax^2 + c = y^2$; rovnice (8.32) pak měla řešení (nx_1, ny_1).[148]

Bháskara II. věnoval rovněž pozornost rovnici ($m,\ n,\ k \in \mathbb{N}$)

$$(m^2 + n^2)x^2 - k^2 = y^2,$$

jejíž racionální řešení hledal ve tvaru $\left(\frac{k}{m},\ \frac{kn}{m}\right)$ nebo $\left(\frac{k}{n},\ \frac{km}{n}\right)$.[149]

Pellova rovnice byla pro indické matematiky velmi důležitá, její znalost považovali za základ. Různé mnohem složitější úlohy často vhodnou substituci převedli na tvar Pellovy rovnice.

V Evropě vzbudil zájem o Pellovu rovnici francouzský matematik Pierre de Fermat (1601 – 1665), jenž v roce 1657 zveřejnil výzvu na nalezení nejmenšího celočíselného řešení rovnice $61x^2 + 1 = y^2$, stejné rovnice, jejíž řešení popsal Bháskara (viz např. [CR]). Na tuto výzvu reagovali mimo jiné francouzský matematik Bernard Frénicle de Bessy (1605 – 1675), anglický matematik John Wallis (1616 – 1703) a irský matematik William Brouncker (1620 – 1684), jehož metoda řešení je v podstatě stejná jako ta, kterou později přesně popsal Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) a která využívala řetězové zlomky.

---

[146] Viz sloky BrSpSi/xviii.73, podle [Col], str. 366 a BiGa/iii.95, podle [Col], str. 182.
[147] Viz sloka BrSpSi/xviii.75, podle [Col], str. 367.
[148] Viz sloka BrSpSi/xviii.76, podle [Col], str. 368.
[149] Viz sloka BiGa/iii.88–89, podle [Col], str. 179–180.

Leonhard Euler dokázal Brahmaguptovo lemma a položil základ řešení Pellovy rovnice pomocí řetězových zlomků. Kompletní teorii řešení vypracoval a publikoval v roce 1771 J. L. Lagrange. Dokázal, že Pellova rovnice má nekonečně mnoho řešení pro každé a ($a \in \mathbb{N}$, $\sqrt{a} \notin \mathbb{N}$), rovnici řešil pomocí vyjádření čísla $\sqrt{a}$ řetězovými zlomky. Více o historii Pellovy rovnice v Evropě lze nalézt například v [BuDM].

Pellova rovnice dostala své jméno omylem. Zasloužil se o to L. Euler, který ji chybně přisoudil anglickému matematikovi Johnu Pellovi (1611 – 1685), přestože není prokázáno, že by se J. Pell řešením této rovnice podrobněji zabýval (viz [Di] a [Bar]).

8.10 Neurčité rovnice vyšších stupňů

Neurčité rovnice vyšších stupňů staří Indové příliš nestudovali, některé zajímavé příklady však najdeme v díle Mahávíry, Bháskary II., Nárájany. Mnohé z nich po úpravě vedly na Pellovu rovnici. Například Bháskara II. řešil problém:[150]

BiGa/vii.178
Příklad od starých autorů. Čtverec součtu dvou čísel přidaný ke třetí mocnině jejich součtu je roven dvojnásobku součtu jejich třetích mocnin. Řekni čísla, matematiku!

V dnešní symbolice úlohu zapíšeme rovnicí

$$(x+y)^2 + (x+y)^3 = 2(x^3+y^3).$$

Pro zajímavost uvedeme také autorovo značení. Aby výpočet nebyl příliš zdlouhavý, doporučoval Bháskara vyjádřit neznámé pomocí substituce $x = u + v$, $y = u - v$. Pak si postupně vyjádřil čtverec součtu neznámých, třetí mocninu jejich součtu a dvojnásobek součtu třetích mocnin.

Současná symbolika	**Bháskarovo značení**
u, v	*yā*, *kā*
$(x+y)^2 = 4u^2$	*yā va* 4
$(x+y)^3 = 8u^3$	*yā gha* 8
$2(x^3+y^3) = 4u^3 + 12uv^2$	*yā gha* 4 *kā va yā bhā* 12

Takto připravené výrazy dosadil do rovnice

$8u^3 + 4u^2 = 4u^3 + 12uv^2$, *yā gha* 8 *yā va* 4 *kā va yā bhā* 0
yā gha 4 *yā va* 0 *kā va yā bhā* 12 .

Odečtením $4u^3$ rovnici zjednodušil, pak vydělil u,

$$4u^2 + 4u = 12v^2,$$

[150] Podle [Col], str. 248.

nakonec k oběma stranám přičetl 1, aby levou stranu doplnil na čtverec

$$(2u + 1)^2 = 12v^2 + 1\,.$$

To už je Pellova rovnice, pro kterou stanovil dvě řešení, $(v, 2u + 1) = (2, 7)$, resp. $(v, 2u+1) = (28, 97)$, odkud dopočítal $u = 3$, resp. $u = 48$ a nakonec určil hledaná čísla $(x, y) = (5, 1)$, resp. $(x, y) = (76, 20)$.

Bháskara navíc zformuloval pravidlo,[151] podle nějž rovnici ($n \in \mathbb{N}$, a, $b \in \mathbb{Z}$)

$$ax^{2n+2} + bx^{2n} = y^2$$

zkrácením bikvadratickým členem x^{2n} převedl na Pellovu rovnici $ax^2 + b = z^2$. V následujícím příkladu[152] takto nalezl dvě řešení $(10, 200)$, $(170, 64\,600)$ rovnice $5x^4 - 100x^2 = y^2$.

Několik typů neurčitých rovnic i s návodem k nalezení neznámých uvedl Nárájana. Rovnice a jejich řešení můžeme dnes zapsat takto (m, $n \in \mathbb{Q}^+$):[153]

$$\begin{aligned}
x^3 + y^3 &= x^2 + y^2, & x &= \frac{(m^2 + n^2)m}{m^3 + n^3}, & y &= \frac{(m^2 + n^2)n}{m^3 + n^3},\\
x^3 + y^3 &= (x + y)^2, & x &= \frac{(m + n)^2 m}{m^3 + n^3}, & y &= \frac{(m + n)^2 n}{m^3 + n^3},\\
x^3 + y^3 &= xy\,, & x &= \frac{m^2 n}{m^3 + n^3}, & y &= \frac{mn^2}{m^3 + n^3},\\
(x + y)^3 &= x^2 + y^2, & x &= \frac{(m^2 + n^2)m}{(m + n)^3}, & y &= \frac{(m^2 + n^2)n}{(m + n)^3},\\
(x + y)^3 &= (x + y)^2, & x &= \frac{(m + n)^2 m}{(m + n)^3}, & y &= \frac{(m + n)^2 n}{(m + n)^3},\\
(x + y)^3 &= xy\,, & x &= \frac{m^2 n}{(m + n)^3}, & y &= \frac{mn^2}{(m + n)^3}\,.
\end{aligned}$$

8.11 Rovnice se součinem neznámých

V indických matematických textech byla rovněž řešena neurčitá rovnice se dvěma neznámými obsahující součin neznámých. Takovou rovnici můžeme obecně zapsat ($a, b, c, d \in \mathbb{Q}$) ve tvaru

$$ax + by + c = dxy\,. \tag{8.33}$$

Na značně poškozeném lístku folio 27 recto (viz obr. 8.4), se zachovala část úlohy s rovnicí bez absolutního členu[154]

$$3x + 4y = xy\,.$$

[151] Viz sloky BiGa/vii.179–180, podle [Col], str. 248.

[152] Viz sloka BiGa/vii.181, podle [Col], str. 249.

[153] Podle [DS2], str. 248.

[154] Tento postup odpovídá překladu T. Hayashiho, viz [Ha1], str. 406. V monografii [DS2] je uvedena trochu jiná interpretace.

Při jejím řešení se odkazovalo na pravidlo, podle něhož bylo možné určit dvě řešení rovnice

$$ax + by = xy$$

ve tvaru

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) &= \bigl(b+1, (ab-1)+(a+1)\bigr) = \bigl(b+1, ab+a\bigr)\,,\\ (x_2, y_2) &= \bigl((ab-1)+(b+1), a+1\bigr) = \bigl(ab+b, a+1\bigr)\,.\end{aligned}$$

Zadaná rovnice $3x+4y = xy$ se tedy řešila tak, že se nejprve každý koeficient na levé straně zvětšil o jedničku: $a+1 = 4$, $b+1 = 5$; to byly hodnoty neznámých $x_1 = b+1 = 5$, $y_2 = a+1 = 4$. Pak se vypočítal součin koeficientů, od nějž se odečetla jednička, tedy $ab-1 = 3\cdot 4 - 1 = 11$. K této hodnotě se postupně přičetla dříve vypočítaná čísla x_1, y_2, a tím se určily hodnoty dalších neznámých $y_1 = (ab-1)+y_2 = 11+4 = 15$ a $x_2 = (ab-1)+x_1 = 11+5 = 16$. Tak byla stanovena dvě řešení $(x_1, y_1) = (5, 15)$ a $(x_2, y_2) = (16, 4)$.

. . . . chh . y . *tas*mātki . .

. . . || karaṇaṁ | pṛithakrūpaṁvinikshipya | pṛithak rūpaṁ kshiptaṁjātaṁ .

. || 63 || bhyāso | tatraguṇa | 3 | 4 | abhyāsaṁ | 12 | rūpahīnaṁ | 1 . .

*abhāgā*chatuϕpaṁcha *45* | atrakshiptaṁjātaṁ | 15 | 16 | eśatṛiguṇ

. . . tāmūla . . nichatuϕpaṁcha || 5 | 4 | esha

Obr. 8.4: Rukopis *Bakhšálí*, folio 27 recto a jeho přepis[155]

Dva návody, podle nichž bylo možné rovnici se smíšeným součinem vyřešit, uvedl Brahmagupta. První z nich přisoudil neznámému autorovi.[156]

BrSpSi/xviii.61
Pravidlo. Součin koeficientů smíšeného součinu a absolutního čísla přičtený k součinu [koeficientů] *neznámých je vydělen libovolně zvoleným množstvím. To, co je větší z toho libovolného dělitele a podílu, je přičteno k menšímu* [koeficientu] *a menší k většímu a tyto dva vydělené smíšeným součinem* [koeficientem] *jsou zaměnitelné.*

[155] Převzato z [Kay1].
[156] Podle [Col], str. 361. Prakticky stejné pravidlo uvedl i Šrípati, viz [DS2].

V komentáři je uvedeno, že takto může být rovnice řešena až poté, co byla upravena tak, že se smíšený součin osamostatnil na jedné straně. Potom pro $p \in \mathbb{Q}$ za předpokladu $a > b$ a $p > \frac{dc+ab}{p}$ je řešením rovnice (8.33) dvojice čísel

$$x = \frac{1}{d}(b+p)\,, \qquad y = \frac{1}{d}\left(a + \frac{dc+ab}{p}\right). \tag{8.34}$$

Toto vyjádření mohlo být výsledkem následujících úvah. Rovnice se vynásobila koeficientem d a převedla do tvaru

$$d^2xy - dax - dby = dc\,,$$

kde se po přičtení ab vyjádřila levá strana jako součin

$$(dx-b)(dy-a) = dc + ab\,.$$

Následná substituce $p = dx - b$ vedla k uvedenému tvaru řešení. Substituce $p = dy - a$ by pak směřovala ke druhému vyjádření naznačenému v závěru pravidla

$$x = \frac{1}{d}\left(b + \frac{dc+ab}{p}\right), \qquad y = \frac{1}{d}(a+p)\,. \tag{8.35}$$

Tímto postupem Brahmagupta řešil úlohu,[157] kterou v současné symbolice můžeme zapsat rovnicí

$$xy - 3x - 4y = 90\,.$$

Po osamostatnění součinu neznámých dostal tvar (8.33), kde $a = 3$, $b = 4$, $c = 90$, $d = 1$, tedy

$$3x + 4y + 90 = xy\,.$$

Je vidět, že $a < b$. Pak vypočítal $dc+ab = 102$ a volil *libovolně zvolené množství* $p = 17$. Podíl $\frac{dc+ab}{p} = \frac{102}{17} = 6$ je menší než p, proto podle druhé části pravidla, tj. vzorců (8.35) určil neznámé $x = 4 + 6 = 10$, $y = 3 + 17 = 20$.

Jako další možnost uvedl Brahmagupta postup, kdy si zvolil jednu neznámou libovolně a druhou dopočítal.[158]

Dva způsoby řešení rovnice se smíšeným součinem (8.33) uvedl Bháskara II. v práci *Bídžaganita*. V prvním,[159] stejně jako jeho předchůdce Brahmagupta, navrhoval zvolit jednu z neznámých a druhou dopočítat podle pravidla pro řešení rovnice s jednou neznámou, přičemž *prostřednictvím různých předpokladů může být získáno nekonečně mnoho odpovědí.*

Výpočet podle druhého pravidla,[160] které je zobecněním postupu Brahmagupty, můžeme vyjádřit vzorci, kde p je libovolné číslo a $q = \frac{1}{p}\left(\frac{ab}{d^2} + \frac{c}{d}\right)$:

$$x = \frac{b}{d} \pm p\,, \quad y = \frac{a}{d} \pm q\,, \qquad \text{resp.} \qquad x = \frac{b}{d} \pm q\,, \quad y = \frac{a}{d} \pm p\,. \tag{8.36}$$

[157] Viz sloka BrSpSi/xviii.62, podle [Col], str. 361.
[158] Viz sloky BrSpSi/xviii.63–64, podle [Col], str. 362.
[159] Viz sloka BiGa/viii.208, podle [Col], str. 268.
[160] Viz sloky BiGa/viii.212–214, podle [Col], str. 270–272.

Své pravidlo Bháskara II. ilustroval na příkladu, kde se pokusil podat dva důkazy – *kšétragata* (*kṣetra-gata*, tj. geometrický) a *rášigata* (*rāśi-gata*, tj. algebraický).[161]

BiGa/viii.212–214 (část)
Příklad. Řekni dvě čísla taková, že součet čtyřnásobku a trojnásobku přičtený ke dvěma je roven součinu čísel.

Úkolem bylo nalézt řešení rovnice

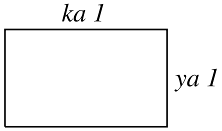
$$4x + 3y + 2 = xy\,,$$

v níž první neznámou x autor nazýval *jávat-távat* a značil *yā*, druhá neznámá y se jmenovala *kálaka* s označením *kā*, absolutnímu členu se říkalo *rúpa*, ve zkratce *rū*, smíšený součin neznámých byl *bhávita*, zkráceně *bhā*. Uvedeme celé Bháskarovo řešení.

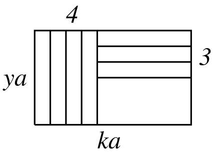
Zde to, co je přímo dáno, dvě strany rovnice jsou
yā 4 *kā* 3 *rū* 2
yā kā bhā 1.

Součet součinu koeficientů s absolutním číslem je 14. *Toto, dělené jedničkou zvolenou jako předpokládané číslo, dává* 1 *a* 14 *jako předpokládané číslo a podíl. Tyto, se dvěma koeficienty postupně přidanými podle volby, zařídí hodnoty yā a kā, buď* 4 *a* 18 *nebo* 17 *a* 5. *S předpokladem dva vyjdou* 5 *a* 11 *nebo* 10 *a* 6.

Předvedení následuje. Je v každém případě dvojnásobné; jedno geometrické, druhé algebraické. Geometrické odvození je předáno zde. Druhá strana rovnice je rovna smíšenému součinu veličin. Ale ten součin je plocha obdélníkového útvaru. Dvě barvy [neznámé] *jsou strana* [*yā*] *a kolmice* [*kā*] .



Uvnitř rovinného obrazce je obsaženo čtyřikrát yā, třikrát kā a dvakrát jednotka. Z obrazce pak se odebere čtyřikrát yā, stejně jako kā minus čtyři vynásobené svým koeficientem [3], *stane se*



. *A druhá strana rovnice, s níž se takto zachází, má výsledek* 14. *To je plocha zbylého obdélníku, který leží v rohu uvnitř obdélníku představujícího smíšený součin. A to je součin strany a kolmice, ale ty jsou neznámé. Proto se za stranu vezme zvolené číslo* [p], *a když jím je plocha vydělena, podíl dá kolmici. Jedna z těch dvou* [strana nebo kolmice] *s přidaným číslem rovným koeficientu u yā je kolmicí obdélníku představujícího smíšený součin, protože ta kolmice byla právě o tolik zmenšená, když čtyřikrát yā bylo z obdélníku odebráno.*

[161] Podle [Col], str. 271–272.

Stejným způsobem ta druhá, přičtením čísla rovného koeficientu u kā, dává stranu. To jsou přesně hodnoty yā a kā. Nyní bude vysvětlen algebraický důkaz. Ten je také založen na obrázku. Nechť jsou položeny další barvy nī 1, *pī* 1 [p, q] *za délku strany a kolmice malého obdélníku uvnitř velkého, který odpovídá straně a kolmici představované yā a kā. Přičtení jedné z nich* [p] *k číslu rovnému koeficientu u yā dává hodnotou jedné strany obdélníku* [druhá zvětšená o koeficient u *kā* je druhou stranou]*: viz nī* 1 *rū* 4 *a pī* 1 *rū* 3*. Nahrazením kā, yā těmito* [$y = p+4$, $x = q+3$] *v obou stranách rovnice se horní strana stane pī* 4 *nī* 3 *rū* 26*; a ta, která obsahuje součin, se přemění na nī pī bhā* 1 *nī* 3 *pī* 4 *rū* 12 [$4q+3p+26 = pq+3p+4q+12$].

Po odečtení je dolní strana rovnice nī pī bhā 1*, a ta horní je rū* 14 [$14 = pq$]*. To je plocha vnitřního obdélníku a ta je rovna součinu koeficientů přidanému k absolutnímu číslu. Jak hodnoty barev odtud vyvodit, už bylo ukázáno.*

Právě tato operace byla předána ve stručném tvaru starověkými učiteli. Algebraické předvedení musí být vystaveno těm, kdo nepochopili geometrické. Matematikové prohlásili, že algebra je počítání spojené s předvedením: jinak by nebylo rozdílu mezi aritmetikou a algebrou. Proto bylo vysvětlení podstaty řešení ukázáno dvěma různými způsoby.

Bháskarův důkaz předpokládá rovnici upravenou tak, že koeficient u součinu neznámých je roven jedné, tj.

$$xy = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}\,.$$

Převedením členů s neznámými na levou stranu a jejích upravením na součin se dostane

$$\left(x - \frac{b}{d}\right)\left(y - \frac{a}{d}\right) = \frac{c}{d} + \frac{ab}{d^2}\,,$$

kde se i pravá strana hledá ve tvaru součinu: $\frac{c}{d} + \frac{ab}{d^2} = pq$. Když se zvolí

$$x - \frac{b}{d} = p\,, \qquad \text{pak je} \qquad y - \frac{a}{d} = \frac{1}{p}\left(\frac{c}{d} + \frac{ab}{d^2}\right),$$

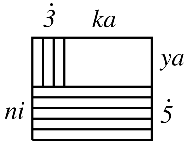
nebo je možná druhá volba

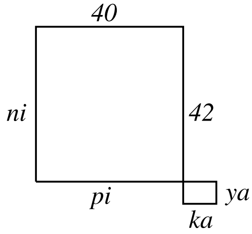
$$y - \frac{a}{d} = p\,, \qquad \text{pak je} \qquad x - \frac{b}{d} = \frac{1}{p}\left(\frac{c}{d} + \frac{ab}{d^2}\right),$$

což odpovídá vzorcům (8.36) popsaným v Bháskarově pravidle.

Autor však ve výkladu pokračoval a vysvětloval, jak je možné si úlohu představit, pokud jsou koeficienty $\frac{a}{d}$, resp. $\frac{b}{d}$ záporné, nebo když koeficienty u neznámých jsou kladné, ale větší než strany obdélníku.

Jak bylo výše řečeno, součin koeficientů přičtený k absolutnímu číslu je plocha jiného malého obdélníku ležícího v rohu uvnitř toho, který představuje součin neznámých. Někdy je to však jinak. Když jsou koeficienty záporné, obdélník představující součin bude uvnitř v rohu toho druhého. Když jsou koeficienty větší než strana a kolmice obdélníku představujícího součin a jsou kladné, nový obdélník bude stát vně v rohu toho představujícího součin, viz.





Když je to tak, koeficienty zmenšené odečtením zvoleného čísla a podílu jsou hodnoty yā a kā.

8.12 Dvojité rovnice

Dvojité rovnice prvního stupně

Dvojitými rovnicemi prvního stupně rozumíme soustavu (a, b, c, $d \in \mathbb{Q}$)

$$\begin{aligned} ax + b &= u^2, \\ cx + d &= v^2, \end{aligned} \tag{8.37}$$

která se v indické matematice vyskytuje poměrně často.

Jedna z prvních úloh vyžadujících řešení soustavy (8.37) se dochovala na dobře čitelném lístku 59 recto rukopisu *Bakhšálí* (viz obr. 8.5).[162]

BMs/59R
Nějaké číslo zvětšené o 5 se dá odmocnit, stejné číslo zmenšené o 7 se také dá odmocnit. Jaké je to číslo, to je otázka.

Problém můžeme vyjádřit rovnicemi typu (8.37) s koeficienty $a = c = 1$,

$$\begin{aligned} x + 5 &= u^2, \\ x - 7 &= v^2. \end{aligned}$$

V rukopisu byl popsán postup výpočtu:[163]

Součet přičteného a odečteného je 12, *z toho polovina* [je] 6, *mínus dva* [jsou] 4, *z toho polovina je* 2, *umocněno* 4. *Mělo by být zvětšeno odečítaným.* [Odečítané je] 7, *přičtením toho dostaneme* 11. *To je* [požadované] *číslo.*

[162] Podle [Kay2], str. 215.
[163] Podle [DS2], str. 258 a [Er].

Tomu odpovídá vyjádření neznámé x v současné symbolice

$$x = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{5+7}{2} - 2\right)\right]^2 + 7 = 11\,.$$

Postup byl pravděpodobně odvozen tak, že se v soustavě (8.37), kde $a = c = 1$,

$$\begin{aligned} x + b &= u^2, \\ x + d &= v^2, \end{aligned} \tag{8.38}$$

odečetla druhá rovnice od první, $b - d = u^2 - v^2$, a pak se obě strany vyjádřily ve tvaru součinu

$$\frac{b-d}{p}p = (u+v)(u-v)\,,$$

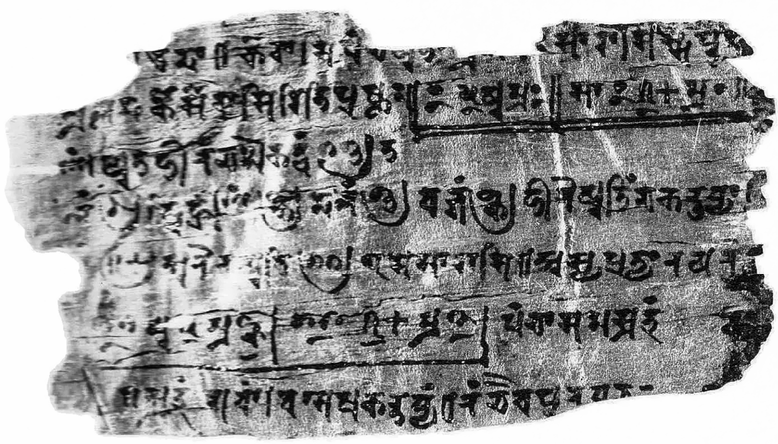
kde p byla nějaká vhodně zvolená konstanta. Porovnáním činitelů

$$u + v = \frac{b-d}{p}\,, \qquad u - v = p$$

a pomocí operace *samkramana* se nejprve určilo $v = \frac{1}{2}\left(\frac{b-d}{p} - p\right)$, pak se vypočítalo x dosazením do druhé rovnice soustavy (8.38):[164]

$$x = v^2 - d = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{b-d}{p} - p\right)\right]^2 - d\,.$$

Metoda popsaná v rukopisu počítala s hodnotou parametru $p = 2$. V rukopisu ještě následovala zkouška, tedy $\sqrt{11+5} = 4$ a $\sqrt{11-7} = 2$.



[164] Podobné pravidlo uvedl i Brahmagupta, viz BrSpSi/xviii.82, podle [Col], str. 370.

. . . || udā || korāsipaṁchayutā . ū . . sā rāśissapta .

*m*ūladakosorāśiritiprashṇaḥ | 0 5 yumū 0 / 1 1 1 | sā 0 7+ mū 0 / 1 1 |

ṇaṁ | yutahīnaṁchamekatvaṁ | 12 | ta

laṁ | 6 | dvihrīṇaṁ | 4 | dalaṁ | 2 | vargaṁ | 4 | hīneyutiṁchakartavyā

. . | 7+ | anenayuti | 11 | eśasārāsi || asyapratyānayane .

. 11 yu 5 mū 4 / 1 1 1 | 11 7+ mū 2 / 1 1 1 | paṁchāśamasūtraṁ 50

. || sūtraṁ gavāṁviśesha kartavyaṁ dhanaṁchaivapuna . .

Obr. 8.5: Rukopis *Bakhšálí*, folio 59 recto a jeho přepis[165]

Soustavu (8.37) řešil i Brahmagupta, a to pro $b = d = 1$. Při výpočtu využil Pellovu rovnici. K tomu uvedl jednoduché pravidlo:[166]

BrSpSi/xviii.78
Pravidlo. Nalézt veličinu takovou, která je postupně vynásobená dvěma násobiteli, k tomu má pokaždé přičtenou jedničku a oba tyto součty dovolují odmocnění.
Součet násobitelů vynásobený osmi a vydělený čtvercem jejich rozdílu je veličina [hledaná]. *Trojnásobek každého násobitele přičtený k tomu druhému a vydělený jejich rozdílem jsou kořeny.*

Uvedené pravidlo sloužilo k řešení soustavy

$$\begin{aligned} ax + 1 &= u^2, \\ cx + 1 &= v^2. \end{aligned} \tag{8.39}$$

Brahmagupta eliminoval x, čímž dostal rovnici $cu^2 + a - c = av^2$. Po vynásobení koeficientem a získal zobecněnou Pellovu rovnici s neznámými (u, av)

$$acu^2 + a(a - c) = (av)^2.$$

Šikovným užitím lemmat, viz odstavec 8.9, vyjádřil u, v (*kořeny*) ve tvaru[167]

$$u = \frac{3a + c}{a - c}, \qquad v = \frac{a + 3c}{a - c},$$

odtud pak dosazením do jedné z rovnic soustavy (8.39) vypočítal neznámou veličinu x

$$x = \frac{8(a + c)}{(a - c)^2}.$$

[165] Převzato z [Kay1].
[166] Podle [Col], str. 368–369.
[167] Odvození je například v [Er], str. 103.

Stejným způsobem se mohla řešit i soustava (8.37), kde bylo $b = r^2$, $d = s^2$, protože vydělením první rovnice r^2 a druhé s^2 se získala soustava (8.39).

Obecným případem soustavy (8.37) se zabýval Bháskara II. Uvedl dosti složité pravidlo,[168] jak vhodnou lineární substitucí soustavu převést na Pellovu rovnici. Předpokládal, že $u = my + 1$ pro libovolné $m \in \mathbb{N}$, pak z první rovnice soustavy vyjádřil x

$$ax + b = (my+1)^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{a}[(my+1)^2 - b].$$

Dosazením do druhé rovnice a doplněním levé strany na čtverec dostal Pellovu rovnici s neznámými $(v, cmy + c)$

$$(cm\,y + c)^2 = ac\,v^2 + (bc^2 - acd)$$

K objasnění pravidla přispěla tato úloha, i když zde je opět $b = d = 1$:[169]

BiGa/vii.197
Příklad. Jsi-li odborník na metodu vyloučení středního členu, řekni mi číslo, které když se zvlášť vynásobí třemi a pěti a pak přidá jednička, se stane čtvercem.

Jinými slovy, hledalo se číslo x vyhovující soustavě

$$3x + 1 = u^2,$$
$$5x + 1 = v^2.$$

Bháskara podle předchozího pravidla zvolil $m = 3$, tedy $u = 3y + 1$, pak měla první rovnice tvar

$$3x + 1 = (3y + 1)^2.$$

Odtud vyjádřil x

$$x = 3y^2 + 2y$$

a dosadil do druhé rovnice

$$15y^2 + 10y + 1 = v^2,$$

kterou následně vynásobil patnácti a přičetl deset, čímž doplnil levou stranu na čtverec

$$(15y + 5)^2 = 15v^2 + 10\,.$$

Tak vyjádřil úlohu Pellovou rovnicí s neznámými $(v, 15y + 5)$. Postupem uvedeným dříve[170] vypočítal dvě řešení

$$v = 9\,, \quad 15y + 5 = 35\,, \qquad \text{odtud} \qquad y = 2\,, \quad x = 16\,,$$
$$v = 71\,, \quad 15y + 5 = 275\,, \qquad \text{odtud} \qquad y = 18\,, \quad x = 1\,008\,.$$

[168] Viz sloky BiGa/vii.195–196, podle [Col], str. 259.

[169] Podle [Col], str. 259–260, [DS2], str. 265. Stejným typem soustav se zabýval Nárájana v první kapitole práce *Ganitakaumudí*.

[170] Viz odstavec 8.9.

Bháskara ukázal ještě další způsob, jak soustavu upravit. Vyjádřil x z první rovnice, $x = \frac{1}{3}(u^2 - 1)$, a dosadil do druhé $\frac{5}{3}u^2 - \frac{2}{3} = v^2$. To už byl tvar, v němž „viděl“ Pellovu rovnici, pro niž našel řešení $u = 7$, $v = 9$, a tedy $x = 16$.

Dvojité rovnice druhého stupně

V indické algebře se vyskytovaly dvojité rovnice druhého stupně dvou typů, které se lišily tím, že jeden obsahoval smíšený součin neznámých. Obecně tak můžeme tyto soustavy vyjádřit $(a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{Q})$ ve tvaru

$$\begin{aligned} a_1x^2 + b_1y^2 + c_1 &= u^2, \\ a_2x^2 + b_2y^2 + c_2 &= v^2, \end{aligned} \qquad \text{(i)} \qquad \begin{aligned} a_1x^2 + d_1xy + b_1y^2 + c_1 &= u^2, \\ a_2x^2 + d_2xy + b_2y^2 + c_2 &= v^2. \end{aligned} \qquad \text{(ii)}$$

Studiem takových rovnic se zabýval především Bháskara II., vyšetřoval však jen určité speciální kombinace koeficientů. Nejpodrobněji rozebíral typ (i) s koeficienty $b_1 = 1$, $b_2 = -1$, $c_1 = c_2 = \pm 1$.[171]

BiGa/vii.194
Příklad od prastarého autora. Vypočítej a řekni, jestli víš, dvě čísla taková, že součet a rozdíl jejich čtverců s jedničkou přičtenou ke každému jsou čtverce, nebo která jsou taková s tímtéž odečteným.

V příkladu autor řešil dvě soustavy, z nichž první byla

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 1 &= u^2, \\ x^2 - y^2 + 1 &= v^2. \end{aligned} \tag{8.40}$$

Cílem bylo, jako v mnoha jiných úlohách, uplatnit při řešení znalost Pellovy rovnice. Bháskara II. volil $x^2 = 5z^2 - 1$, $y^2 = 4z^2$, protože *součet a rozdíl těchto s přidanou jedničkou dovolují odmocnění*

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 1 &= (3z)^2, \\ x^2 - y^2 + 1 &= z^2, \end{aligned}$$

problém tak vyjádřil pomocí jedné neznámé z. Tu vypočítal z Pellovy rovnice $5z^2 - 1 = x^2$, pro niž nalezl dvě řešení $(z, x) = (1, 2)$, $(z, x) = (17, 38)$. Nakonec ze druhé substituční rovnice dopočítal y. Podmínkám zadání vyhovovala čísla $x = 2$, $y = 2$, resp. $x = 38$, $y = 34$.

Druhou část příkladu můžeme vyjádřit soustavou[172]

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= u^2, \\ x^2 - y^2 - 1 &= v^2. \end{aligned} \tag{8.41}$$

[171] Podle [Col], str. 257–258, [DS2], str. 267.

[172] Stejný typ soustavy byl řešen i v *Lílávatí* ve slokách Lila/iii.59–60, Lila/iii.61, viz [Col], str. 27–28. Tam se však nemluvilo o řešení Pellovy rovnice.

Řešení autor hledal stejným způsobem jako u předchozí soustavy, zde volil $x^2 = 5z^2 + 1$, $y^2 = 4z^2$. Pro Pellovu rovnici $5z^2 + 1 = x^2$ stanovil dvě řešení $(z, x) = (4, 9)$, $(z, x) = (72, 161)$ a odtud určil, že zadání vyhovují čísla $x = 9$, $y = 8$, resp. $x = 161$, $y = 144$.

V závěru ještě naznačil další možnosti, jak takové úlohy řešit. V první z nich uvažoval soustavu (8.40) a předpokládal, že menší čtverec je čtyři, tj. $y^2 = 4$, pak odečtením druhé rovnice od první a rozložením na součin dostal

$$2y^2 = (u - v)(u + v)\,,$$

kde položil $u - v = 2$, pak $u + v = y^2 = 4$ a podle metody *samkramana* snadno dopočítal $u = 3$, $v = 1$. Dosazením do první rovnice stanovil $x = 2$. Přitom upozornil, že *hodnota menšího čtverce musí být navržena tak, aby druhý byl celočíselný*, a připojil poznámku, že k cíli vede ještě volba $y^2 = 36$.

Druhý způsob je zobecněním metody, kterou použil při výpočtu. Bháskara vycházel z identit $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ a čísla x, y hledal ve tvaru

$$x^2 = (a^2 + b^2)z^2 - 1\,, \qquad y^2 = 2abz^2, \tag{8.42}$$

protože

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 1 &= (a^2 + b^2)z^2 - 1 + 2abz^2 + 1 = z^2(a + b)^2 = u^2, \\ x^2 - y^2 + 1 &= (a^2 + b^2)z^2 - 1 - 2abz^2 + 1 = z^2(a - b)^2 = v^2. \end{aligned}$$

K tomu ovšem musel zajistit, aby součin $2ab$ byl čtvercem. To Bháskara zařídil tak, že za a zvolil nějaký čtverec $a = p^2$ a za b polovinu čtverce $b = \frac{q^2}{2}$, tím dostal $2ab = p^2q^2$. Vyjádření x^2 v (8.42) představuje zobecněnou Pellovu rovnici $(a^2 + b^2)z^2 - 1 = x^2$, resp. $(p^4 + \frac{q^4}{4})z^2 - 1 = x^2$, jejíž řešení (z, x) Bháskara uměl vypočítat. Pomocí z pak podle (8.42) dopočítal $y = \sqrt{2ab}z = pqz$. Na závěr navrhl hodnoty $a = 1$, $b = 2$, pak $2ab = 4$, $a^2 + b^2 = 5$, nebo $a = 9$, $b = 2$, pak $2ab = 36$, $a^2 + b^2 = 85$.

Pro srovnání uvedeme další předpisy pro řešení soustavy (8.41), jak byly uvedeny v aritmetické *Lílávatí*.[173] Pro libovolné nenulové číslo p může být řešením

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{8p^2 - 1}{2p}\right)^2 + 1\,, \quad y = \frac{8p^2 - 1}{2p}\,, \quad u = \frac{64p^4 - 1}{8p^2}\,, \quad v = \frac{1}{2}\left(\frac{8p^2 - 1}{2p}\right)^2$$

nebo

$$x = p + \frac{1}{2p}\,, \qquad y = 1\,, \qquad u = p + \frac{1}{2p}\,, \qquad v = p - \frac{1}{2p}\,,$$

případně

$$x = 8p^4 + 1\,, \qquad y = 8p^3, \qquad u = 4p^2(2p^2 + 1)\,, \qquad v = 4p^2(2p^2 - 1)\,.$$

[173] Podle [Col], str. 27–28, [Er], str. 132.

Poslední vztahy uvedl i Nárájana s tím rozdílem, že místo p uvažoval $\frac{q}{2}$ (viz [DS2], [DvP]).

Na jinou dvojitou rovnici druhého stupně, opět ve speciálním tvaru, vedl následující příklad:[174]

BiGa/vii.199
Příklad. Řekni rychle, jaká jsou dvě čísla, pro něž, stejně jako pro šest a pět, rozdíl jejich čtverců postupně vynásobený dvěma a třemi, s trojkou přidanou k těmto součinům, dává v obou případech čtverec.

Bháskara hledal řešení této slovně popsané soustavy

$$2\,(x^2 - y^2) + 3 = u^2,$$
$$3\,(x^2 - y^2) + 3 = v^2.$$

Substitucí $p = x^2 - y^2$ dvojitou rovnici druhého stupně převedl na dvojitou rovnici prvního stupně

$$2p + 3 = u^2,$$
$$3p + 3 = v^2,$$

kterou podle metod popsaných dříve řešil tak, že z první rovnice vyjádřil p a dosadil do druhé, čímž po úpravách vznikla Pellova rovnice $6v^2 + 9 = (3u)^2$. Jejím nejmenším řešením bylo $(v, 3u) = (6, 15)$, tedy $v = 6$, $u = 5$. Odtud vypočítal $p = 11$, tj. $x^2 - y^2 = 11$. Obě strany vyjádřil ve tvaru součinu $(x - y)(x + y) = 1 \cdot 11$ a nakonec metodou *samkramana* vypočítal hledaná čísla $x = 6$, $y = 5$. Jiné řešení Pellovy rovnice $(v, 3u) = (60, 147)$ pak vedlo k hodnotě $p = 1199$. Protože toto p není prvočíslo, bylo možné je vyjádřit ve tvaru součinu dvěma způsoby a nalézt další dvě řešení:

$$(x - y)(x + y) = 1 \cdot 1199, \qquad \text{odtud} \qquad x = 600,\ y = 599,$$
$$(x - y)(x + y) = 11 \cdot 109, \qquad \text{odtud} \qquad x = 60,\ y = 49.$$

Navíc ještě uvedeme jednu soustavu druhého typu se smíšeným součinem.[175]

BiGa/vii.189
Příklad. Řekni mi rovnou dvě čísla taková, že součet jejich čtverců přidaný k jejich součinu dovolí odmocnění a jejich součet vynásobený tou odmocninou a přidaný k jedničce může být také čtvercem.

Zadání vede na soustavu

$$x^2 + y^2 + xy = u^2,$$
$$(x + y)u + 1 = v^2.$$

---

[174] Podle [Col], str. 261.
[175] Podle [Col], str. 254–255, [DS2], str. 267.

Bháskara se nejprve zabýval první rovnicí; vynásobil ji číslem 36, levou stranu doplnil na čtverec, tím dostal

$$(6x+3y)^2+27y^2=(6u)^2.$$

Odtud vyjádřil výraz $27y^2$ jako rozdíl čtverců, který vyjádřil ve tvaru součinu:

$$27y^2=(6u)^2-(6x+3y)^2=\big[6u-(6x+3y)\big]\big[6u+(6x+3y)\big]\,.$$

Takto však mohl rovnici upravit pouze díky tomu, že $a=1$. Nyní označil $p=6u-(6x+3y)$, pak $6u+(6x+3y)=\frac{27y^2}{p}$, a tedy podle operace *samkramana* platí

$$\begin{aligned}6u&=\frac{1}{2}\left(\frac{27y^2}{p}+p\right),\\ 6x+3y&=\frac{1}{2}\left(\frac{27y^2}{p}-p\right).\end{aligned}$$

Bháskara zvolil $p=y$, pak z rovnic vyjádřil $u=\frac{7}{3}y$, $x=\frac{5}{3}y$. Dosazením do druhé rovnice dané soustavy dostal Pellovu rovnici

$$\left(\frac{5}{3}y+y\right)\frac{7}{3}y+1=v^2,\qquad \text{tj.}\qquad 56y^2+9=(3v)^2,$$

nalezl její řešení $y=6$, resp. $y=180$, pak dopočítal $x=10$, resp. $x=300$.

V obecnějším případě, kdy první rovnice má tvar

$$ax^2+bxy+cy^2=u^2,$$

kde a ani c není čtvercem, je možné doplnit levou stranu rovnice na čtverec

$$\left(ax+\frac{b}{2}y\right)^2+y^2\left(ac-\frac{b^2}{4}\right)=au^2. \tag{8.43}$$

Tuto rovnici můžeme vydělit y^2 a upravit do tvaru Pellovy rovnice

$$a\left(\frac{u}{y}\right)^2+\frac{b^2}{4}-ac=\left(a\frac{x}{y}+\frac{b}{2}\right)^2.$$

Pomocí jejího řešení $\left(\frac{u}{y},a\frac{x}{y}+\frac{b}{2}\right)$ se vyjádří x a u v závislosti na y. Tyto hodnoty se pak dosadí do druhé rovnice, která je opět Pellova.

Případně je možné rovnici (8.43) vydělit u^2, tím se dostane Pellova ve tvaru

$$\left(\frac{b^2}{4}-ac\right)\left(\frac{y}{u}\right)^2+a=\left(\frac{2ax+by}{2u}\right)^2.$$

Z jejího řešení se vyjádří x a y v závislosti na u. Dál se postupuje stejným způsobem, dosadí se do druhé rovnice, která má i v tomto případě tvar Pellovy rovnice.

Pro řešení obecné dvojité rovnice druhého stupně předložil Bháskara pouze velmi stručný návod, neuvedl však žádný příklad.

Dvojité rovnice vyšších stupňů

Bháskara II. řešil několik úloh, které vyžadovaly znalost řešení dvojité rovnice vyššího stupně. Zadání i postup řešení připomíná některé úlohy Diofantovy. Jedna z takových úloh je například tato:[176]

> **BiGa/iv.122**
> *Příklad. Jestli znáš dvě čísla, součet jejichž třetích mocnin je čtverec, a součet jejich čtverců je třetí mocnina, uznám tě za vynikajícího algebraika.*

Zadání odpovídá soustava

$$x^3 + y^3 = u^2\,,$$
$$x^2 + y^2 = v^3\,,$$

kterou Bháskara řešil substitucí $x = p^2$, $y = 2p^2$. Tak soustavu upravil do tvaru

$$9p^6 = u^2, \qquad\qquad 5p^4 = v^3.$$

První rovnice byla splněná, $9p^6 = (3p^3)^2$, zbývalo ještě zvolit p tak, aby $5p^4$ bylo třetí mocninou. Bháskara hledal v jako nějaký násobek $5p$. Po dosazení do druhé rovnice dostal $5p^4 = (q \cdot 5p)^3$, odtud $p = 25q^3$. Volba $q = 1$ pak vedla k řešení $x = 625$, $y = 1\,250$.

Stejnou soustavu řešil Nárájana. V první kapitole práce *Ganitakaumudí* uvedl obecný tvar neznámých ($q \in \mathbb{Q}^+$)

$$x = \frac{q^6}{25}\,, \qquad\qquad y = \frac{2q^6}{25}\,. \tag{8.44}$$

K tomuto vyjádření mohl dospět zobecněním Bháskarovy metody. Po substituci $x = mp^2$, $y = np^2$ byla první rovnice ve tvaru $(m^3+n^3)p^6 = u^2$. Aby levá strana byla čtvercem, volil čísla m, n tak, aby součet jejich třetích mocnin $m^3 + n^3$ byl čtvercem. Dosazením za x a y do druhé rovnice dostal $(m^2 + n^2)p^4 = v^3$, kde volil $v = qp$. Rovnici upravil a vyjádřil $p = \frac{q^3}{m^2+n^2}$, odtud $x = \frac{mq^6}{(m^2+n^2)^2}$, $y = \frac{nq^6}{(m^2+n^2)^2}$. Volbou $m = 1$, $n = 2$ dostal výše uvedená vyjádření (8.44).

[176] Podle [Col], str. 202.

Uvedeme ještě jednu úlohu, která je zajímavá tím, že ji Bháskara řešil dvěma způsoby.[177]

BiGa/vii.188
Příklad. Vypočti rychle dvě čísla taková, že součet třetí mocniny [jednoho] *a čtverce* [druhého] *je čtverec, a součet čísel samotných je rovněž čtverec.*

V současné symbolice bychom podmínky vyjádřili rovnicemi:

$$\begin{aligned} x^3 + y^2 &= u^2, \\ x + y &= v^2. \end{aligned}$$

První Bháskarova metoda spočívala v tom, že si x^3 z první rovnice vyjádřil jako rozdíl čtverců $u^2 - y^2$, a ten si ještě představil jako součin součtu a rozdílu

$$x^3 = (u - y)(u + y)\,.$$

Zvolil $u - y = p$, odtud $u + y = \frac{x^3}{p}$ a z těchto dvou vztahů dostal vyjádření $u = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{p} + p\right)$, $y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{p} - p\right)$. Nyní položil $p = x$ a dosadil y do druhé rovnice:

$$x + \frac{1}{2}\left(x^2 - x\right) = v^2, \qquad \text{tj.} \qquad x^2 + x = 2v^2.$$

Vynásobením čtyřmi a přičtením jedničky doplnil levou stranu na čtverec

$$(2x + 1)^2 = 8v^2 + 1\,,$$

a to už byl tvar Pellovy rovnice, pro niž určil dvě řešení $(v, 2x + 1) = (6, 17)$, resp. $(v, 2x+1) = (35, 99)$. Z nich nakonec určil neznámé $(x, y) = (8, 28)$, resp. $(x, y) = (49, 1\,176)$.

Při řešení úlohy druhým způsobem použil substituci $x = 2p^2$, $y = 7p^2$; tím byla splněna druhá rovnice soustavy, první přešla do tvaru

$$8p^6 + 49p^4 = u^2, \qquad \text{tj.} \qquad p^4(8p^2 + 49) = u^2.$$

Aby součin na levé straně byl čtvercem, musel být výraz v závorce také čtvercem. To platí pro $p = 2$, $p = 3$, $p = 7$ atd.; a pomocí těchto hodnot Bháskara dospěl k řešením $(x, y) = (8, 28)$, $(x, y) = (18, 63)$, $(x, y) = (98, 343)$ atd.

8.13 Vícenásobné rovnice

V Bháskarově *Bídžaganitě* nalezneme několik zajímavých příkladů, v nichž si autor musel poradit s řešením soustavy s více než dvěma rovnicemi. Byly to úlohy, kde se hledala většinou dvě přirozená čísla, jejichž součet, rozdíl, součin

[177] Podle [Col], str. 253–254.

apod. byl druhou nebo třetí mocninou nějakého přirozeného čísla. Při řešení se využívala šikovně zvolená substituce, v některých příkladech i znalost Pellovy rovnice.

Jedna z takových úloh je tato:[178]

BiGa/iv.121
Příklad. Jsi-li odborník na takové výpočty, řekni rychle dvě čísla, jejichž součet a rozdíl jsou oba čtverce, a výsledek jejich násobení je třetí mocnina.

Zadání vedlo na soustavu tří rovnic:

$$\begin{aligned} x + y &= u^2, \\ x - y &= v^2, \\ xy &= w^3. \end{aligned}$$

Bháskara vhodně zvolenou substitucí $x = 5p^2$, $y = 4p^2$ zajistil splnění prvních dvou rovnic a zbývalo mu vyřešit třetí, tj. $20p^4 = w^3$. Pomocí volby $w = 10p$ získal po zkrácení rovnici $20p = 1\,000$, odkud snadno vypočítal $p = 50$, potom dosazením do substitučních rovnic stanovil $x = 12\,500$, $y = 10\,000$.

Bháskarovu substituci můžeme vyjádřit obecně

$$x = (m^2 + n^2)p^2, \qquad y = 2mnp^2.$$

Čísla x, y jsou zapsána v takovém tvaru, aby $x + y$ i $x - y$ byly čtverce. Pak třetí rovnice má tvar $2mn(m^2 + n^2)p^4 = w^3$, kde se w hledá jako jako nějaký násobek p, například $w = qp$, neboli

$$2mn(m^2 + n^2)p^4 = q^3p^3.$$

Odtud se vyjádří (pro libovolná m, n, $q \in \mathbb{N}$) nejprve p, potom x a y:

$$p = \frac{q^3}{2mn(m^2 + n^2)},$$

$$x = (m^2 + n^2)\frac{(q^3)^2}{[2mn(m^2 + n^2)]^2}, \qquad y = 2mn\frac{(q^3)^2}{[2mn(m^2 + n^2)]^2}. \tag{8.45}$$

Tento tvar řešení popsal také Nárájana:[179]

GaKa/i.5 (část)
Jak bylo výše uvedeno, dvě čísla, když se vynásobí podílem čtverce třetí mocniny libovolného čísla a čtverce jejich součinu, jsou čísly požadovanými.

---

[178] Podle [Col], str. 201–202.
[179] Podle [DS2], str. 286, [DvP], str. x–xi.

Dvě čísla, o nichž Nárájana mluvil, byla $m^2 + n^2$ a $2mn$. Pro $m = 1$, $n = 2$, $q = 10$ dostal stejné vyjádření (8.45) jako Bháskara, navíc však ještě uvedl několik dalších racionálních řešení.

Při řešení následující úlohy využil Bháskara aritmetickou posloupnost.[180]

BiGa/v.143–144
Příklad. Jaká jsou čtyři množství, příteli, z nichž každé po přičtení dvojky umožňuje odmocnění, a jejichž součiny po dvou sousedících stanou se také čtvercovými čísly, když se k nim přidá osmnáct, a která jsou taková, že odmocnina ze součtu všech odmocnin přidaného k jedenácti je třináct? Řekni mi je, algebraiku.

Podmínky ze zadání můžeme vyjádřit rovnicemi

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 2 = u_1^2\,, && x_1x_2 + 18 = v_1^2\,,\\
&x_2 + 2 = u_2^2\,, && x_2x_3 + 18 = v_2^2\,,\\
&x_3 + 2 = u_3^2\,, && x_3x_4 + 18 = v_3^2\,,\\
&x_4 + 2 = u_4^2\,, && \sqrt{u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + v_1 + v_2 + v_3 + 11} = 13\,.
\end{aligned}
$$

Bháskara patrně z prvních dvou rovnic dosadil do páté

$$(u_1^2 - 2)(u_2^2 - 2) + 18 = v_1^2\,,$$

po úpravě

$$(u_1u_2 - 2)^2 - 2(u_2 - u_1)^2 + 18 = v_1^2\,.$$

Levá strana bude čtvercem, pokud $2(u_2 - u_1)^2 = 18$, neboli

$$u_2 - u_1 = \sqrt{\frac{18}{2}} = 3\,, \qquad \text{pak} \qquad v_1 = u_1u_2 - 2\,.$$

Stejně mohl Bháskara dosadit ze druhé a třetí rovnice do šesté, tím by obdržel

$$u_3 - u_2 = 3\,, \qquad v_2 = u_2u_3 - 2\,,$$

a také ze třetí a čtvrté rovnice do sedmé

$$u_4 - u_3 = 3\,, \qquad v_3 = u_3u_4 - 2\,.$$

Rozdíly mezi u_1, u_2, u_3, u_4 byly konstantní, proto je autor považoval za členy aritmetické posloupnosti s prvním členem u_1 a diferencí $d = \sqrt{\frac{18}{2}} = 3$ (v popisu řešení je označil $y\bar{a}$, $y\bar{a}$+3, $y\bar{a}$+6, $y\bar{a}$+9). Při této volbě u_i, v_i byla pátá,

[180] Podle [Col], str. 218–219.

šestá a sedmá rovnost splněná, hodnotu neznámé u_1 ($y\bar{a}$) vypočítal z poslední rovnice. Předtím si ještě vyjádřil

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1u_2 - 2 = u_1(u_1+3) - 2 = u_1^2 + 3u_1 - 2\,, \\ v_2 &= u_2u_3 - 2 = (u_1+3)(u_1+6) - 2 = u_1^2 + 9u_1 + 16\,, \\ v_3 &= u_3u_4 - 2 = (u_1+6)(u_1+9) - 2 = u_1^2 + 15u_1 + 52\,, \end{aligned}$$

a určil jejich součet, k němuž přidal součet čtyř členů posloupnosti

$$\begin{aligned} &u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + v_1 + v_2 + v_3 = \\ &\qquad = u_1 + (u_1+3) + (u_1+6) + (u_1+9) + \\ &\qquad + (u_1^2 + 3u_1 - 2) + (u_1^2 + 9u_1 + 16) + (u_1^2 + 15u_1 + 52) = \\ &\qquad = 3u_1^2 + 31u_1 + 84\,. \end{aligned}$$

Tento součet dosadil do poslední rovnice ze zadání a po umocnění dostal

$$3u_1^2 + 31u_1 + 84 + 11 = 13^2.$$

Rovnici vynásobil dvanácti, přičetl 31^2 a upravil tak, aby levá strana byla vyjádřena jako čtverec

$$(6u_1 + 31)^2 = 43^2,$$

odkud stanovil $u_1 = 2$, pak dopočítal $(u_1, u_2, u_3, u_4) = (2, 5, 8, 11)$ a nakonec neznámá množství $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 23, 62, 119)$.

Na podobné úvaze bylo založeno také řešení úlohy BiGa/v.193, substituce však vedla na Pellovu rovnici. Další příklad Bháskara převzal od „jistého starověkého autora“.[181]

BiGa/v.190
Řekni mi rychle, algebraiku, dvě čísla taková, že třetí odmocnina z poloviny jejich součinu a menšího čísla a druhá odmocnina ze součtu jejich čtverců a odmocnina z jejich součtu a rozdílu zvětšených o dva a odmocnina z rozdílu jejich čtverců přidaného k osmi a všech pět [výrazů] *sečtených dohromady může poskytnout odmocninu; kromě samozřejmě šesti a osmi.*

Dnes bychom podmínky vyjádřili iracionální rovnicí se třemi neznámými

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}(xy+y)} + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x+y+2} + \sqrt{x-y+2} + \sqrt{x^2-y^2+8} = u^2.$$

Bháskara však pracoval se soustavou šesti rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(xy+y) &= v^3, & x - y + 2 &= w_3^2\,, \\ x^2 + y^2 &= w_1^2\,, & x^2 - y^2 + 8 &= w_4^2\,, \\ x + y + 2 &= w_2^2\,, & v + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 &= u^2\,. \end{aligned}$$

[181] Podle [Col], str. 255–256.

Při řešení použil substituci $x = p^2 - 1$, $y = 2p$ tak, aby bylo prvních pět rovnic splněno

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(xy + y) = p^3 = v^3\,, &\qquad \text{odtud} \qquad v = p\,,\\
x^2 + y^2 = (p^2 + 1)^2 = w_1^2\,, &\qquad \text{odtud} \qquad w_1 = p^2 + 1\,,\\
x + y + 2 = (p + 1)^2 = w_2^2\,, &\qquad \text{odtud} \qquad w_2 = p + 1\,,\\
x - y + 2 = (p + 1)^2 = w_3^2\,, &\qquad \text{odtud} \qquad w_3 = p - 1\,,\\
x^2 - y^2 + 8 = (p^2 - 3)^2 = w_4^2\,, &\qquad \text{odtud} \qquad w_3 = p^2 - 3\,.
\end{aligned}$$

Dosazením těchto výrazů do poslední rovnice dostal rovnici $2p^2 + 3p - 2 = u^2$, odkud doplněním levé strany na čtverec získal tvar zobecněné Pellovy rovnice

$$(4p + 3)^2 = 8u^2 + 25\,.$$

Bháskara nalezl tři řešení této rovnice a z nich odvodil tři dvojice čísel, která vyhovala zadání:

$$(x, y) = (8, 6), \qquad (x, y) = \left(\frac{1\,677}{4}, 41\right), \qquad (x, y) = (15\,128, 264).$$

V závěru navrhl ještě další substituce vhodné k tomu, aby posloužily stejným způsobem: $x = p^2 + 2p$, $y = 2p - 2$; $x = p^2 - 2p$, $y = 2p - 2$; $x = p^2 + 4p + 3$, $y = 2p + 4$.

Popis výpočtu Bháskara zakončil poznámkou: *Protože předpoklad, který je takto tisícinásobný, je pro tupé těžko pochopitelný, ze soucitu k nim je proto odhalen způsob volení předpokladů.*

Shrnutí

Indové algebru stavěli vysoko, považovali ji za důležitější než aritmetiku, dokonce podle Bháskary II. byla algebra zdrojem pro aritmetiku. Indická algebra obsahovala dvě základní větve – algebraické výpočty a řešení rovnic, resp. jejich soustav.

Algebraické výpočty od aritmetických neodlišovalo jen dokazování, jak tvrdil Bháskara II., ale také symbolika. Indičtí učenci jako první začali systematicky označovat neznámé písmeny, zavedli zkratky k vyjádření mocniny neznámých a pro součiny těchto mocnin. K odlišení záporných čísel sloužila tečka umístěná nad číslem, proto bylo možno zapsat rovnici i se zápornými koeficienty, což výrazně zjednodušilo klasifikaci rovnic.

Indičtí matematikové dospěli k velmi zajímavým výsledkům při řešení neurčitých rovnic, zejména rovnice, které dnes říkáme Pellova. Některé úlohy a metody jejich řešení připomínají Diofantovu *Aritmetiku*, podstatným rozdílem je však obor neznámých. Indové až na výjimky hledali řešení pouze v oboru přirozených čísel.

Řada algebraických metod se z Indie šířila do arabského světa a zprostředkovaně tak ovlivnila i matematiku evropskou.