Trigonometrie

I. část

In: Alois Urban (author): Trigonometrie. (Czech). Praha: Přírodovědecké nakladatelství, 1952. pp. 5–89.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/404206`

I. část.

1. ÚVOD

Slovo *trigonometrie* je odvozeno z řeckého *trigón* (trojúhelník) a *metrein* (měřiti); jeho český význam tedy je nauka o měření trojúhelníků.

Co se tím „měřením trojúhelníků" rozumí? Nejlépe to objasníme, jestliže stručně uvedeme úkoly, kterými se trigonometrie zabývá. Jak název naznačuje, jsou to úlohy o trojúhelnících. S úlohami o trojúhelnících se setkáváme již v elementární geometrii, jež je probírána na střední škole, a to v planimetrii (rovinné geometrii), kde se dokazují o nich různé věty a odvozují konstrukce z daných prvků, t. j. ukazuje se, jak se *sestrojují* další potřebné prvky.

Poznámka. Prvkem trojúhelníka je na př. jeho strana, úhel, výška, plošný obsah atd.; stranám a úhlům říkáme *základní prvky.*

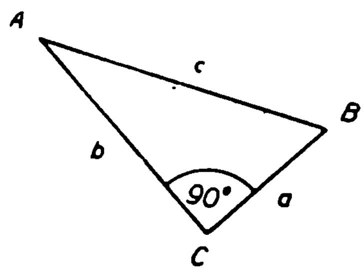
Mezi všemi větami, které se v planimetrii odvozují pro trojúhelníky, činí jakousi výjimku dvě věty týkající se základních prvků trojúhelníka; vyjadřují totiž *číselné* vztahy mezi těmito základními prvky. První z nich mluví o úhlech *libovolného* trojúhelníka; označíme-li, jak je zvykem, úhly trojúhelníka α, β, γ, pak zmíněnou větu můžeme vyslovit v tomto tvaru:

VĚTA 1.1. Součet úhlů v trojúhelníku je rovný 180°, t. j.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \tag{1.1}$$

Druhá věta se již netýká všech trojúhelníků, nýbrž jen *pravoúhlých* trojúhelníků. Je to známá *Pythagorova věta.*

Poznámka. Pravoúhlým trojúhelníkem (obr. 1) rozumíme trojúhelník, jehož jeden úhel je pravý, t. j. rovný 90°. Někdy místo 90° píšeme R. Strany, které leží na ramenech pravého úhlu, nazývají se odvěsny (značí se obvykle a, b), zbývající strana ležící proti pravému úhlu se nazývá přepona (značívá se c).



Obr. 1.

Pythagorova věta vyjadřuje číselný vztah mezi stranami pravoúhlého trojúhelníka a zní takto:

VĚTA 1.2. Součet čtverců nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníka je rovný čtverci nad jeho přeponou, t. j.

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1.2}$$

Důkaz obou vět se provádí v planimetrii a nebudeme jej proto uvádět; hned však poznamenejme, že s oběma větami se v dalším často setkáme. Budeme-li znát dva úhly libovolného trojúhelníka, pak pomocí vzorce (1.1) vypočteme třetí úhel; budeme-li znát dvě strany pravoúhlého trojúhelníka, pak užitím vzorce (1.2) vypočteme třetí stranu. Uveďme alespoň dva typické příklady.

Příklad 1.1. V trojúhelníku je jeden úhel 57°14′46″, druhý úhel 63°5′32″; jak je veliký zbývající úhel?

Řešení. Označme prvý úhel α, druhý β a hledaný γ. Ze vzorce (1.1) plyne $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$. V našem případě je $\alpha + \beta = 120°20'18''$ a tedy $\gamma = 59°39'42''$.

Příklad 1.2. V pravoúhlém trojúhelníku je délka přepony 13,5 cm a délka jedné odvěsny 4,6 cm; jaká je délka druhé odvěsny?

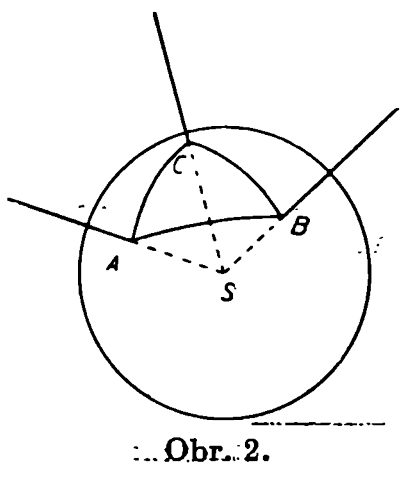
Řešení. Pro výpočet bude výhodné, když upustíme od označení stran v cm. Přeponu označme c, danou odvěsnu a, hledanou odvěsnu b. Tedy je $c = 13{,}5$, $a = 4{,}6$. Ze vzorce (1.2) plyne $b^2 = c^2 - a^2 = 182{,}25 - 21{,}16 = 161{,}09$. A tedy $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{161{,}09} \doteq 12{,}7$ (symbol $\doteq$ čteme: *rovná se přibližně*; výpočet jsme totiž provedli jen na jedno desetinné místo). Hledaná odvěsna je rovna 12,7 cm.

Jestliže si nyní čtenář řádně rozváží vše, co bylo dosud probráno, napadne ho jistě otázka: Existují ještě další věty a vzorce, které by vyjadřovaly číselné vztahy mezi stranami a úhly trojúhelníka? Právě touto otázkou se zabývá trigonometrie.

Základním úkolem trigonometrie je hledat a odvozovat další vzájemné vztahy mezi stranami a úhly trojúhelníka, vyjadřovat tyto vztahy vzorci a nalezených vzorců užívat k řešení trojúhelníků. Přitom řešením trojúhelníka rozumíme výpočet jeho neznámých prvků pomocí daných prvků.

Trigonometrie však nezůstává při těchto základních úkolech. Odvozují se v ní také vzorce, které udávají závislost dalších prvků trojúhelníka (na př. výšky, poloměru kružnice opsané, plošného obsahu atd.) na základních, eventuálně i na jiných prvcích. Dále řeší také čtyřúhelníky a obecněji mnohoúhelníky.

V praxi se trigonometrie užívá všude tam, kde se v úlohách vyskytují trojúhelníky, jejichž pomocí pak vypočítáváme hledané prvky.



Obr. 2.

Poznámka. Někdy se také trigonometrii, jejíž obsah a význam byl právě načrtnut, říká *rovinná trigonometrie*. Je tak nazývána na rozdíl od t. zv *sférické trigonometrie*, která se zabývá řešením sférických trojúhelníků, což jsou trojúhelníky na kouli (sféře). Takový trojúhelník dostaneme, jestliže kouli protneme trojhranem, jehož vrchol je ve středu koule (obr. 2).

Cvičení).*

1.1. V trojúhelníku je jeden úhel 103°54'16", druhý úhel 51°29'56". Vypočtěte třetí úhel.

1.2. V pravoúhlém trojúhelníku jsou odvěsny rovny 16,5 cm a 13,7 cm. Vypočtěte přeponu.

1.3. V pravoúhlém trojúhelníku je přepona rovna 101 mm a odvěsna 99 mm; vypočtěte druhou odvěsnu.

2. PODOBNOST TROJÚHELNÍKŮ

V trigonometrii se neobejdeme bez znalosti některých pomocných, byť jednoduchých, ale důležitých pojmů a vět z matematiky a zvláště z geometrie. Většinou si takové pojmy a věty jen krátce připomeneme v poznámce na místě, kde se s nimi setkáme. S jednou skupinou vět, týkajících se podobnosti trojúhelníků, se seznámíme již nyní. Samozřejmě si musíme předem říci, které trojúhelníky nazýváme podobnými, t. j. musíme si zavést pojem podobnosti. Obvykle se tento pojem zavádí touto definicí.

DEFINICE 2.1. Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže úhly jednoho trojúhelníka jsou stejně veliké jako úhly druhého trojúhelníka.

Tato definice říká: Jsou-li úhly jednoho trojúhelníka postupně rovny α, β, γ, pak jenom tehdy, jsou-li také úhly druhého trojúhelníka rovny α, β, γ, dané trojúhelníky nazýváme podobné.

Hned však ukážeme, že k tomu, abychom zjistili, zda dané trojúhelníky jsou či nejsou podobné, není třeba vyšetřovat všechny tři úhly obou trojúhelníků. Platí totiž věta:

---

*) Řešení příkladů ke cvičení jsou uvedena v odst. 19 (str. 167).

VĚTA 2.1. **Jestliže dva úhly jednoho trojúhelníka jsou stejně veliké jako dva úhly druhého trojúhelníka, pak oba trojúhelníky jsou podobné.**

Důkaz. Vzhledem k definici 2.1, věta vlastně říká: jsou-li dva úhly jednoho trojúhelníka stejně veliké jako dva úhly druhého trojúhelníka, pak již třetí úhel prvého je roven třetímu úhlu druhého trojúhelníka. A to skutečně platí, neboť třetí úhel v každém z obou trojúhelníků vypočteme (dle věty 1.1), když od 180° odečteme součet prvých dvou úhlů. Tento součet je však v obou trojúhelnících týž, tedy i zbývající úhly musí být stejně veliké, což však právě podle definice 2.1 značí, že oba trojúhelníky jsou podobné. Tím je věta dokázána.

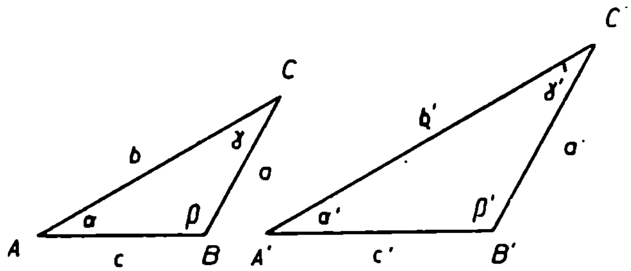
Poznámka. Dříve než uvedeme další věty o podobnosti trojúhelníků, zmíníme se o některých označeních. Tak především vrcholy trojúhelníků značíme velkými písmeny, obvykle takovými, která jdou v abecedě za sebou, strany malými písmeny a úhly písmeny malé řecké abecedy*). Přitom dbáme toho, aby vrchol, úhel při tomto vrcholu a strana, jež neleží na ramenech tohoto úhlu, byly označeny stejným písmenem, ovšem příslušné abecedy. Někdy opatřujeme všechna písmena navíc ještě stejným indexem, po případě jinou značkou; na př. v obr. 3 jsou podle těchto pravidel označeny oba trojúhelníky. Stranám, jež leží na ramenech zvoleného úhlu, říkáme *strany přilehlé* (k tomuto úhlu), zbývající straně říkáme *strana protější* (k tomuto úhlu); na př. v levém trojúhelníku v obr. 3 jsou strany b, c přilehlé k úhlu α, strana a je protější k úhlu α.

Dva podobné trojúhelníky často značíváme stejnými písmeny, která odlišujeme indexy (v obr. 3 jsou to $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$). Přitom stejným písmenem značíme úhly sobě

*) Její písmena jsou: α alfa, β béta, γ gamma, δ delta, ε epsílon, ζ dzéta, η éta, ϑ théta, ι ióta, $\varkappa$ kappa, λ lambda, μ mý, ν ný, ξ ksí, o omikron, π pí, ϱ ró, σ sigma, τ tau, υ ypsílon, φ fí, χ chí, ψ psí, ω omega.

rovné (na př. $\alpha = \alpha'$). Stejně označeným vrcholům, stranám i úhlům říkáme pak *odpovídající si* vrcholy, strany a úhly; na př. strany a, a' v obr. 3 jsou odpovídající si strany v podobných trojúhelnících ABC a $A'B'C'$.

Nyní teprve přistoupíme k dalším větám o podobnosti trojúhelníků. Přitom doporučujeme, aby si čtenář vždy znění příslušné věty ozřejmil na obr. 3, kde jsou právě dva podobné trojúhelníky zobrazeny.



Obr. 3.

VĚTA 2.2a. V podobných trojúhelnících jsou odpovídající si strany úměrné.

Formulace věty, ač se právě v tomto tvaru často užívá, je poněkud nevýhodná; nejsou v ní zachyceny matematicky příslušné vzorce. Proto ji hned uvedeme v jiném znění:

VĚTA 2.2b. Nechť a, b, c a a', b', c' jsou odpovídající si strany dvou podobných trojúhelníků; pak platí úměra

$$a : b : c = a' : b' : c'. \tag{2.1}$$

Poznámka. Snad bude dobré aspoň několika slovy se zmínit o úměrách. Úměra 2.1, které se říká *postupná*, je zkráceným zápisem pro tři úměry

$$a : b = a' : b', \; a : c = a' : c', \; b : c = b' : c', \tag{2.2}$$

z nichž na př. prvou čteme a ku b jako se má a' ku b'. Znamená to, že poměr $a : b$ je týž jako poměr $a' : b'$. Jelikož však místo poměru $a : b$ můžeme psát podíl $\frac{a}{b}$, můžeme úměry (2.2) nahradit rovnicemi

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}. \tag{2.3}$$

Důležité je, že k větě 2.2a platí také věta obrácená, jež zní takto:

VĚTA 2.3a. Mají-li dva trojúhelníky všechny strany úměrné, pak jsou podobné.

Opět bude výhodnější větu formulovat tak, abychom její znění mohli snadno vypsat ve vzorcích, a to takto:

VĚTA 2.3b. Jestliže pro strany a, b, c a a', b', c' dvou trojúhelníků platí postupná úměra

$$a : b : c = a' : b' : c', \tag{2.4}$$

pak oba trojúhelníky jsou podobné.

Ukážeme alespoň na dvou jednoduchých příkladech, jak právě uvedených vět používáme k tomu, abychom rozhodli, zda dané trojúhelníky jsou či nejsou podobné.

Příklad 2.1. Nechť v $\triangle ABC$ je $\alpha = 30°$, $\beta = 70°$, $\gamma = 80°$ a v $\triangle A_1B_1C_1$ nechť $\alpha_1 = 80°$, $\beta_1 = 70°$, $\gamma_1 = 30°$. Jsou či nejsou podobné?

Řešení. Jsou podobné. Zaveďme totiž nové označení. Položme $A' = C_1$, $B' = B_1$, $C' = A_1$; pak je $\alpha' = \gamma_1 = 30°$, $\beta' = \beta_1 = 70°$. A jelikož je $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, platí podle věty 2.1, že dané trojúhelníky jsou podobné.

Příklad 2.2. Rozhodněte, zda trojúhelníky o stranách 7, 4,5, 5 a 14,4, 22,4, 16 jsou či nejsou podobné.

Řešení. Strany obou trojúhelníků seřadíme podle velikosti a označíme $a = 4{,}5$, $b = 5$, $c = 7$; $a' = 14{,}4$, $b' = 16$, $c' = 22{,}4$. Jelikož nyní platí $a : b : c = a' : b' : c'$, jsou dané trojúhelníky — podle věty 2.3 — podobné.

Poznámka. Pozornému čtenáři jistě neušlo, že jsme si vše značně ulehčili; uvedli jsme totiž tři věty a z nich jsme dokázali jen jedinou (větu 2.1). V matematice se však musí každé, i zdánlivě samozřejmé, tvrzení dokázat. Důkazy zbývajících vět jsou provedeny v dodatku (odst. 18).

Cvičení.

2.1. V $\triangle\ ABC$ je $\alpha = 15°50'$, $\beta = 107°55'$ a v $\triangle\ A_1B_1C_1$ je $\alpha_1 = 107°55'$, $\beta_1 = 56°15'$. Jsou či nejsou oba trojúhelníky podobné?

2.2. V $\triangle\ ABC$ je $\alpha = 60°$, $\beta = 75°45'$ a v $\triangle\ A_1B_1C_1$ je $\alpha_1 = 60°$, $\beta_1 = 45°$. Jsou či nejsou oba trojúhelníky podobné?

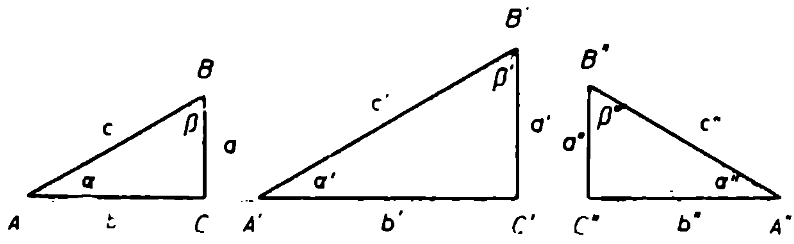
2.3. V $\triangle\ ABC$ jsou strany a, b, c v poměru $a : b : c = 5 : 3 : 4$. Jak velké jsou strany $\triangle\ A'B'C'$, který je s $\triangle\ ABC$ podobný, jestliže $a' = 12{,}5$ cm?

2.4. Rozhodněte, zda trojúhelník o stranách 7,8, 4,2, 9 je podobný trojúhelníku o stranách 7, 15, 13.

3. PODOBNOST PRAVOÚHLÝCH TROJÚHELNÍKŮ

Nyní se budeme v řadě odstavců zabývat jen pravoúhlými trojúhelníky. Zdůrazněme, že řekneme-li, že trojúhelník je pravoúhlý, říkáme tím, že známe velikost jednoho jeho úhlu: je rovný 90°. Z toho důvodu obvykle pod úhlem pravoúhlého trojúhelníka rozumíme již jen jeden ze zbývajících úhlů (žádný z nich už ovšem není pravý).

Věty o podobnosti trojúhelníků, které byly uvedeny v předchozím odstavci, platí přirozeně i pro pravoúhlé trojúhelníky; samozřejmě se mohou zjednodušit právě vzhledem k tomu,



Obr. 4.

že jeden jejich úhel je pravý. Zase bude výhodné, když při čtení vět přihlédneme k obr. 4, kde jsou znázorněny tři podobné pravoúhlé trojúhelníky.

Především věta 2.1 přejde ve větu:

VĚTA 3.1. *Jestliže dva pravoúhlé trojúhelníky mají (kromě pravého úhlu) jeden úhel stejně veliký, pak jsou podobné.*

Důkaz. Mají-li totiž dva pravoúhlé trojúhelníky jeden úhel stejně veliký, pak vzhledem k tomu, že jsou oba trojúhelníky pravoúhlé, mají ještě pravý úhel stejně veliký; jsou tedy dva úhly jednoho z nich stejně veliké jako dva úhly druhého. O takových trojúhelnících však věta 2.1 říká, že jsou podobné. Tím je věta 3.1 dokázána.

Protože ve větě 2.2 (přesněji řečeno ve větách 2.2a a 2.2b) se mluví jen o stranách, nemůžeme znění této věty pro pravoúhlé trojúhelníky zjednodušit. Nebude však na škodu, když i v tomto případě budeme větu formulovat zvlášť pro pravoúhlé trojúhelníky. Tedy dostáváme:

VĚTA 3.2. *Nechť a, b, c a a', b', c' jsou odpovídající si strany dvou podobných pravoúhlých trojúhelníků, pak pro ně platí*

$$a : b = a' : b', \quad a : c = a' : c', \quad b : c = b' : c'. \tag{3.1}$$

Také ve větě 2.3 vystupují jen strany; zdálo by se tedy, že ani tato věta se nedá pro pravoúhlé trojúhelníky zjednodušit. Pro pravoúhlé trojúhelníky máme však ještě k disposici Pythagorovu větu (větu 1.2), jejíž užitím dostaneme:

VĚTA 3.3. *Jestliže pro strany a, b, c a a', b', c' dvou pravoúhlých trojúhelníků platí jedna z úměr*

$$a : b = a' : b', \quad a : c = a' : c', \quad b : c = b' : c', \tag{3.2}$$

pak trojúhelníky jsou podobné.

Důkaz. Především si uvědomíme, v čem je rozdíl proti větě 2.3. Tam jsme mohli jen říci: jestliže platí postupná úměra (2.4), t. j. jestliže platí všechny tři úměry (3.2) (je ovšem zřejmé, že z kterýchkoliv dvou z nich plyne již třetí), pak trojúhelníky jsou podobné. Pro pravoúhlé trojúhelníky platí však daleko více: jestliže platí jen jedna z úměr (3.2), pak již oba trojúhelníky jsou podobné. Musíme tedy ukázat, že platí-li jedna z úměr (3.2), pak platí již zbývající dvě.

Předpokládejme na př., že platí prvá úměra (3.2), t. j. nechť je

$$a : b = a' : b' \tag{3.3}$$

Chceme ukázat, že je pak již splněna úměra $a : c = a' : c'$ (a tedy také úměra $b : c = b' : c'$). Počítejme nejprve poměr $a : c$. Dosadíme-li sem za c výraz $\sqrt{a^2 + b^2}$ (jak plyne z Pythagorovy věty), dostáváme $a : c = a : \sqrt{a^2 + b^2}$. Dělme pravou stranu úměry číslem b. Najdeme

$$a : c = \frac{a}{b} : \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1}. \tag{3.4}$$

Úplně stejně pro poměr $a' : c'$ dostaneme

$$a' : c' = \frac{a'}{b'} : \sqrt{\left(\frac{a'}{b'}\right)^2 + 1}. \tag{3.5}$$

Nyní dosaďme z (3.3) do (3.4.) Dostaneme $a : c = \frac{a'}{b'} : \sqrt{\left(\frac{a'}{b'}\right)^2 + 1}$.

Z tohoto výsledku a z úměry (3.5) je však hned vidět, že je $a : c = a' : c'$, jak jsme chtěli ukázat. Z poslední úměry a z (3.3) již plyne $b : c = b' : c'$. Skutečně tedy z prvé úměry (3.2) plynou další dvě úměry.

Podobně bychom ukázali, že z druhé úměry (3.2) plyne prvá (a tedy i třetí) a konečně, že ze třetí plyne prvá (a tedy i druhá). Důkaz však již nebudeme detailně provádět a přenecháme jej čtenáři.

Tím je však věta 3.3 dokázána.

Cvičení.

3.1. V pravoúhlém $\triangle ABC$ je $\alpha = 23°52'48''$ a v pravoúhlém $\triangle PQR$ je jeden úhel rovný $66°7'12''$. Jsou či nejsou oba trojúhelníky podobné?

3.2. V pravoúhlém trojúhelníku ABC jsou odvěsny a, b v poměru $a : b = 5 : 12$, v trojúhelníku $A'B'C'$, který je podobný $\triangle ABC$, je přepona 65 cm. Jak velké jsou jeho odvěsny?

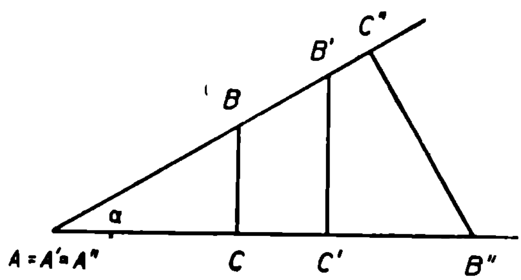
3.3. Rozhodněte, zda pravoúhlý trojúhelník ABC o odvěsnách 2,7 cm a 12 cm a pravoúhlý trojúhelník $A'B'C'$ o odvěsnách 60 cm a 13,5 cm jsou či nejsou podobné.

4. ÚKOS, STOUPÁNÍ.

Přistoupíme nyní k důsledkům vět o podobnosti pravoúhlých trojúhelníků. Prozatím si všimneme jen jednoho zvláštního případu.

Zvolme si libovolný *ostrý úhel* α (ostrý úhel je větší než 0° a menší než 90°). Pak můžeme vždy sestrojit pravoúhlé trojúhelníky ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$, ... tak, že jeden jejich úhel je rovný právě zvolenému úhlu α (obr. 5). Ze stran těchto trojúhelníků budeme uvažovat prozatím jen odvěsny. Určíme ve všech těchto trojúhelnících poměr odvěsny, která leží proti úhlu α a odvěsny, která leží na rameni úhlu α, t. j. užijeme-li již dříve zavedených názvů, určíme poměr protější odvěsny k přilehlé odvěsně. Dostáváme poměry $\overline{BC} : \overline{AC}$, $\overline{B'C'} : \overline{A'C'}$, $\overline{B''C''} : \overline{A''C''}$, ..., což můžeme podle naší úmluvy o označování stran trojúhelníků přepsat na $a : b$, $a' : b'$, $a'' : b''$, ...

Připomeňme teď, že všechny zmíněné trojúhelníky ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$, ... jsou vzájemně podobné. Skutečně: jsou to vesměs pravoúhlé trojúhelníky, jejichž jeden úhel je rovný α,

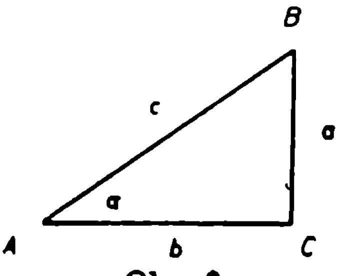


Obr. 5.

a právě o každých dvou takových trojúhelnících říká věta 3.1, že jsou podobné. Jelikož všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$, ... jsou podobné, můžeme pro každé dva z nich použít věty 3.2. Ta říká, že jsou-li trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ podobné, pak platí úměra $a : b = a' : b'$ (a ještě další dvě úměry, kterých prozatím neužijeme), což znamená, že poměr $\frac{a}{b}$ je rovný poměru $\frac{a'}{b'}$. To platí pro každé dva z trojúhelníků ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$, ..., a proto poměry $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots$ jsou stejně veliké, t. j. mají stejnou hodnotu t, která závisí jen na velikosti úhlu α. Jest tedy $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots = t$. To však znamená, že k určení hodnoty t těchto poměrů stačí sestrojit libovolný ze zmíněných trojúhelníků, na př. $\triangle\, ABC$ (obr. 6), a pomocí něho určit poměr $t = \frac{a}{b}$. Jako prozatímní výsledek můžeme říci, že právě popsaným postupem lze každému ostrému úhlu α přiřadit určité číslo t rovné hodnotě zlomku $\frac{a}{b}$. Abychom byli přesní, dodejme, že číslo $t = \frac{a}{b}$ musí být vždy kladné, protože samozřejmě jak a tak b jsou kladná čísla, neboť jsou to délky stran trojúhelníka. Přehledně lze uvedené přiřazení zapsat schematem

$$\text{ostrý úhel } \alpha \rightarrow \text{kladné číslo } t. \qquad (4.1)$$

Čteme je takto: ostrému úhlu α je jednoznačně přiřazeno kladné číslo t.



Obr. 6.

Dříve než uvedeme nějaký příklad, obrátíme ještě celou dosavadní úvahu. Předpokládejme, že naopak je dáno nějaké kladné číslo t. Pak zřejmě můžeme sestrojit pravoúhlé trojúhelníky $ABC, A'B'C', A''B''C'', \dots$ tak, že poměry jedné odvěsny k druhé odvěsně jsou v těchto trojúhelnících stále stejné, rovné číslu t; podrobněji vypsáno: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \dots = t$. Nyní však podle věty 3.3 dva pravoúhlé trojúhelníky ABC a $A'B'C'$, pro něž platí $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ (t. j. úměra $a : b = a' : b'$), jsou podobné. To podle definice podobnosti znamená, že mají úhly stejné. Tyto trojúhelníky mají tedy jistě také úhel proti prvé odvěsně (jednak proti a, jednak proti a') stejně veliký, rovný ostrému úhlu α. Tato úvaha platí nejen pro trojúhelníky ABC a $A'B'C'$, nýbrž také pro libovolné dva ze sestrojených trojúhelníků ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$, ...

Ke skutečnému sestrojení úhlu α stačí ovšem sestrojit libovolný z těchto trojúhelníků, na př. $\triangle ABC$; úhel α pak leží proti straně a.

Tím jsme udali předpis, jak lze obráceně každému kladnému číslu t přiřadit právě jediný ostrý úhel α. Tentokráte můžeme výsledek obrácené úvahy zapsat takto

$$\text{kladné číslo } t \rightarrow \text{ostrý úhel } \alpha. \tag{4.2}$$

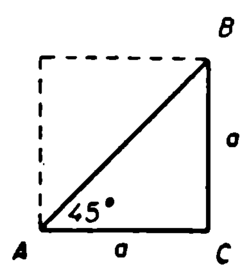
Čteme takto: kladnému číslu t je jednoznačně přiřazen ostrý úhel α. Je výhodné obě schema (4.1) a (4.2) zapsat souhrnně ve tvaru

$$\text{ostrý úhel } \alpha \rightleftarrows \text{kladné číslo } t. \tag{4.3}$$

Říkáme, že ostrý úhel α a kladné číslo t jsou si přiřazeny vzájemně jednoznačně nebo také, že jsou přiřazeny jednojednoznačně. Způsob tohoto přiřazení byl právě popsán.

Bude dobré uvést nějaký jednoduchý příklad.

Příklad 4.1. Najděte číslo t příslušející úhlu $\alpha = 45°$.



Obr. 7.

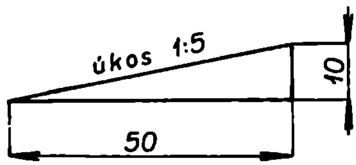
Řešení. Daný úhel 45° je ostrý, můžeme proto skutečně podle předchozího postupu číslo t vypočítat. Sestrojíme si libovolný pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož jeden úhel je právě α. Jelikož $\alpha = 45°$, je druhý úhel $\beta = 45°$ a tedy pravoúhlý trojúhelník ABC je vlastně tvořen úhlopříčkou a dvěma stranami čtverce (obr. 7). Tedy, má-li jedna odvěsna délku a, má i druhá odvěsna (kterou jsme předtím nazvali b) délku a. Poměr obou odvěsen je $t = \frac{a}{a} = 1$. Našli jsme, že úhlu $\alpha = 45°$ přísluší číslo $t = 1$.

Příklad 4.2. Najděte úhel α příslušný číslu $t = 1$.

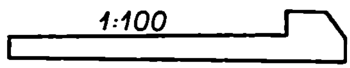
Řešení. Na základě formule (4.3) a výsledku příkladu 4.1 je okamžitě zřejmé, že příslušný úhel je $\alpha = 45°$. Přesto ukážeme, jak bychom bez znalosti výsledku příkladu 4.1 došli k řešení. Sestrojíme si libovolný pravoúhlý $\triangle\, ABC$ takový, aby v něm poměr odvěsny $\overline{BC}$ k odvěsně $\overline{AC}$ byl rovný 1, tedy aby $\overline{BC} : \overline{AC} = t = 1$. Zvolíme-li délku $\overline{BC}$ rovnou a, pak již z této úměry plyne, že musíme volit $\overline{AC} = a$, t. j. $\triangle\, ABC$ je takový, že jeho obě odvěsny jsou stejně dlouhé, rovné a. Je tedy tento trojúhelník tvořen dvěma stranami čtverce a jeho úhlopříčkou (obr. 7) a v takovém trojúhelníku je úhel α při vrcholu A rovný 45°.

Základní vztah (4.3) je každému již jistě známý z praxe. Je jen třeba připomenout, kde jste se s ním snad setkali, po případě říci, kde se ho užívá. Číslo t, jež je přiřazeno úhlu α, má různé názvy.

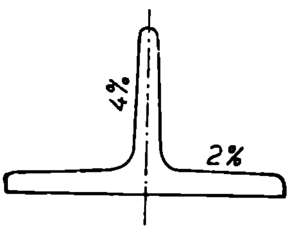
Tak především ve strojnické praxi se číslu t říká *úkos.* Tedy úkos je poměr protější odvěsny k přilehlé odvěsně (v pravoúhlém trojúhelníku). Schema (4.3), jež jsme si odvodili, pak říká: každému ostrému úhlu přísluší určitý úkos, každému úkosu přísluší určitý ostrý úhel. Úkos se obvykle neudává hodnotou poměru, nýbrž přímo poměrem (obr. 8, kde úkos je 1:5, nebo obr. 9, kde je zobrazen t. zv. klín s nosem, úkos je 1:100) nebo v procentech (obr. 10, kde je zobrazeno široké *T* železo, úkos je jednak 2%, jednak 4%), což není nic jiného než zase poměr, neboť 1% je totéž jako poměr 1:100. Úkos se obyčejně připisuje k přeponě příslušného trojúhelníka (který se ovšem nemusí ani zakreslit, jak je tomu v obr. 9 a 10).



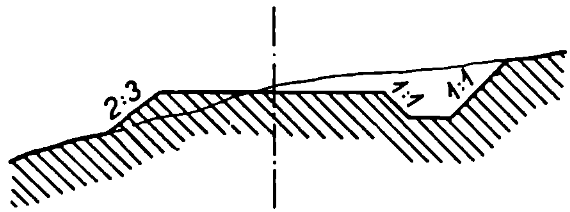
8.



Obr. 9.



Obr. 10.



Obr. 11.

Také v pozemním stavitelství se užívá místo úhlů raději čísla *t*. Říká se mu zde obvykle *spád*. Spádem tedy rozumíme poměr protější odvěsny k přilehlé odvěsně. Tak na př. v obr. 11 je zakreslen příčný profil vozovky v terénu. Neudává se úhel, který svírají násypy a výkopy s vodorovnou rovinou, nýbrž udává se vždy jen jejich spád. V obr. 11 má násyp spád 2:3, výkopy mají spád 1:1. Velikost spádu se připisuje k přeponě příslušného pravoúhlého trojúhelníka (který se však zpravidla nezakreslí).

Někdy se místo slova spád užívá také názvu *stoupání* nebo *klesání*. Tak na př. říkáme, že silnice má stoupání 5% nebo že trať má klesání 3‰.

Nebudeme probírat vše do podrobností, jenom ještě jednou zdůrazníme, že v žádném z uvedených praktických příkladů se neudává úhel, nýbrž právě číslo *t*, které je ovšem podle

(4.3) jednoznačně přiřazeno jakémusi ostrému úhlu α; tento úhel umíme ovšem pomocí udaného čísla t (ať už úkosu nebo spádu nebo stoupání nebo klesání) vždy sestrojit.

V matematice zavádí se však pro číslo t naprosto jiný název; promluvíme o tom v dalším odstavci.

Cvičení.

4.1. Sestrojte úhel příslušný úkosu 1 : 10.

4.2. Klínek o úkosu 1 : 15, jehož podélným řezem je pravoúhlý lichoběžník, má délku (= výška lichoběžníka) 12 cm, kratší základna lichoběžníka je 2 cm; jak velká je druhá základna lichoběžníka?

4.3. Šířka dna kanálu, jehož profilem je rovnoramenný lichoběžník, je 4,5 m; jeho pobočné stěny mají spád 2 : 3. Jaká je hloubka vody, jestliže šířka hladiny je 7,5 m?

5. TANGENS OSTRÉHO ÚHLU

Hlavním výsledkem předchozího odstavce bylo zjištění, udané schematem (4.3,) že každému ostrému úhlu α lze přiřadit určité kladné číslo t a také obráceně, ke každému kladnému číslu t lze přiřadit určitý ostrý úhel α. Tomuto číslu t budeme od nynějška říkat *tangens úhlu* α. Pro tangens úhlu α platí tedy vše, co jsme si řekli o čísle t. Vysvětlení, proč se zavádí název tangens, podáme později. Vzhledem k tomu, že číslo t přiřazené ostrému úhlu α bylo určeno poměrem protější odvěsny k přilehlé odvěsně v pravoúhlém trojúhelníku, jehož jeden úhel je právě α, je přesná definice tangenty tato:

DEFINICE 5.1a. Tangens ostrého úhlu α (v pravoúhlém trojúhelníku) je poměr protější odvěsny (k úhlu α) k přilehlé odvěsně.

Hned poznamenejme, že se velice často místo této přesné definice stručně říkává:

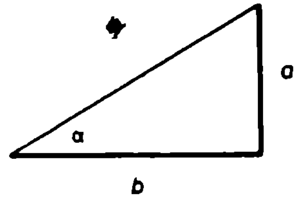
DEFINICE 5.1b. Tangens je poměr protější odvěsny k přilehlé odvěsně.

Poznámka. Tato definice je poněkud neúplná, neboť se v ní nemluví, o jaký úhel se jedná. Jestliže se však předem omezíme jen na ostré úhly, pak právě uvedená druhá definice tangenty je zcela vhodná. Doporučujeme, abyste si zapamatovali (vlastně naučili nazpaměť tak, abyste se nikdy později nespletli) toto druhé jednodušší znění definice tangenty, ale měli vždy přitom na paměti, že platí jen pro ostré úhly.

V definici tangenty se mluví jen o pravoúhlém trojúhelníku, jehož jeden úhel je ostrý úhel α; nic více se o trojúhelníku neříká. Není také třeba, neboť u všech pravoúhlých trojúhelníků, jejichž jeden úhel je α, je poměr protilehlé odvěsny k přilehlé (což je dle definice 5.1 právě tangens úhlu α) týž, jak jsme zjistili v předchozím odstavci.

Pro tangens úhlu α je třeba ještě zavést nějaký vhodnější matematický symbol, než je pouhé označení t, z něhož by bylo patrno, ke kterému úhlu přísluší. Volí se značka tgα; čteme ji vždy „tangens úhlu α“ nebo prostě „tangens α“. Jestliže tedy protější odvěsna k úhlu α jest a a přilehlá odvěsna b (obr. 12), pak obsah definice 5.1 zapíšeme takto

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}. \qquad (5.1)$$



Obr. 12.

Při zapisování tohoto vzorce čteme: tangens úhlu α rovná se poměru protější odvěsny a k přilehlé odvěsně b nebo jen krátce: tangens α rovná se a ku b.

Poznámka. Jestliže jsme upozornili na to, že je třeba znát definici 5.1, pak je nutno ještě dodat, že stejně potřebné je umět tuto definici zapsat matematický vzorcem (5.1). Při zapisování vzorce (5.1) si uvědomte, že tgα je jediný symbol, to znamená, že napsat ve vzorci samotné tg bez označení úhlu, o který se jedná, nemá smyslu. Tedy píšeme vždy tgα, tgβ a pod., nebo známe-li přímo velikost úhlu, na př. $\alpha = 45°$

pak píšeme samozřejmě tg45°. Zdůrazněme ještě, že tangens ostrého úhlu je hodnota jistého poměru kladných délek, tedy je to číslo nepojmenované (a ovšem vždy kladné).

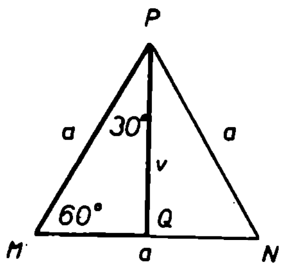
První otázka, kterou si každý položí, je, jak se skutečně k danému ostrému úhlu α najde jeho tangenta. Odpověď je snadná: přesně podle definice. Ostatně právě v předchozím odstavci jsme se tím zabývali, neboť číslo t není nic jiného než tangenta úhlu α. Formulujme zmíněnou otázku jako úlohu:

ÚLOHA 5.1. Jest dán ostrý úhel α; najděte jeho tangentu.

Řešení. Sestrojíme si libovolný pravoúhlý trojúhelník, jehož jedním úhlem je úhel α, určíme délku obou odvěsen a najdeme poměr protější (k úhlu α) k přilehlé. Hodnota tohoto poměru je právě tgα.

V řešení je uvedeno: ...určíme délku obou odvěsen. Jenže jak tyto délky určíme? Většinou změřením obou odvěsen; ovšem při měření dopouštíme se vždy nepřesností, takže takto určený tangens je jen jeho přibližná hodnota. V některých případech lze však stanovit takto tangens přesně, a to užitím planimetrických pouček. Takto byl v příkladu 4.1 určen tg45°; hledali jsme sice číslo t příslušné úhlu 45°, ale toto číslo je právě tg45°. Našli jsme $t = 1$, tedy je tg45° $= 1$. Obdobně pomocí planimetrie určíme snadno tg30° a tg60°, jak bude ukázáno v dalším příkladu.

Příklad 5.1. Určete tg30° a tg60°.



Obr. 13.

Řešení. Všimneme si rovnostranného $\triangle MNP$ (obr. 13); jeho výška odděluje pravoúhlý $\triangle MPQ$ s úhly 30° a 60°. Je-li a délka strany $\triangle MNP$, pak v $\triangle MPQ$ je odvěsna $\overline{MQ}$ rovna $\frac{1}{2}a$ (neboť v rovnostranném $\triangle MNP$ výška PQ půlí stranu MN), druhá odvěsna PQ je rovna výšce v rovnostranného trojúhelníka, t. j. rovna $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ (podle Pythagorovy věty z $\triangle MPQ$ totiž najdeme $v = \sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}a)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$). Tedy $\operatorname{tg}30° = \overline{MQ} : \overline{PQ} = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a\sqrt{3} = 1 \ \sqrt{3} = \sqrt{3} : 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Podobně najdeme $\operatorname{tg}60° = \overline{PQ} : \overline{MQ} = \frac{1}{2}a\sqrt{3} : \frac{1}{2}a = \sqrt{3}$. Je výhodné znát zpaměti hodnoty tangent úhlů 30°, 45° a 60°, a proto si nalezené hodnoty shrneme do stručné tabulky

$$\operatorname{tg}30° = \tfrac{1}{3}\sqrt{3},\ \operatorname{tg}45° = 1,\ \operatorname{tg}60° = \sqrt{3}. \tag{5.2}$$

Zbývá ještě řešit úlohu obrácenou k úloze 5.1:

Úloha 5.2. Sestrojte ostrý úhel α, znáte-li jeho tangentu.

Řešení. Úlohu můžeme formulovat podrobněji: sestrojte ostrý úhel α, je-li $\operatorname{tg}\alpha = t$, kde t je pevné kladné číslo. Zvláštním případem této úlohy byl příklad 4.2. Naši úlohu budeme řešit úplně stejně jako tento příklad. Sestrojíme si libovolný pravoúhlý trojúhelník ABC, ve kterém by poměr odvěsen $\overline{BC} : \overline{AC}$ byl rovný číslu t, pak úhel při vrcholu A v tomto trojúhelníku je hledaný ostrý úhel. Při skutečné konstrukci $\triangle ABC$ postupujeme takto: zvolíme si nejprve zcela libovolně odvěsnu $\overline{AC}$, v koncovém bodě C této úsečky vztyčíme kolmici k AC a naneseme na ni od bodu C úsečku $\overline{BC}$ délky $t \,.\, \overline{AC}$. Tím dostaneme $\triangle ABC$. Skutečně je v něm

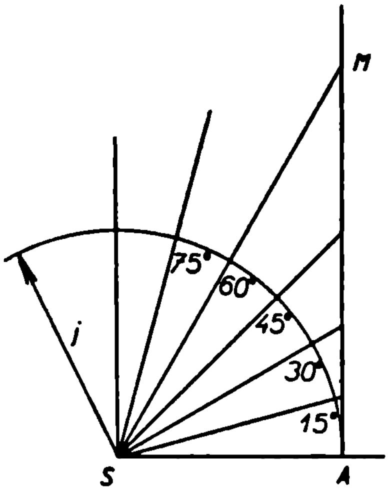
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{t \,.\, \overline{AC}}{\overline{AC}} = t.$$

Příklad 5.2. Sestrojte ostrý úhel α, je-li $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}1$.

Řešení. Sestrojíme na př. pravoúhlý $\triangle ABC$ tak, aby $\overline{AC} = 10$ cm, $\overline{BC} = 1$ cm, pak úhel α při vrcholu A je hledaný úhel.

Podívejme se nyní blíže na hodnoty tangenty ostrých úhlů. Chceme-li na př. získat tangenty úhlů postupujících po 5°, sestrojíme podle postupu uvedeného v řešení úlohy 5.1 pro úhly $\alpha = 5°, 10°, 15°, \ldots, 85°$ příslušné pravoúhlé

trojúhelníky a ze změřených odvěsen najdeme hodnoty tangent těchto úhlů. Výhodně postupujeme podle obr. 14, kde jsou sestrojeny trojúhelníky tak, že všechny mají společnou jednu odvěsnu SA a společný vrchol S. Úhel při vrcholu S nabývá postupně zvolené velikosti; nanášíme jej stále v jednom pevně zvoleném smyslu od prvního ramene SA (v obr. 14 tak, že druhé rameno je stále nad ramenem SA). Druhé rameno zvoleného úhlu (v obr. 14 jsou vyznačeny jen úhly 15°, 30°, ...) protíná kolmici vztyčenou v bodě A k přímce SA v třetím vrcholu trojúhelníka. Tangens zvoleného úhlu je pak rovný poměru protější odvěsny k přilehlé, t. j. je rovný délce protější odvěsny měřené délkou úsečky $\overline{SA}$. Přirozeně takto najdeme přibližné hodnoty tangenty, neboť při každé konstrukci a při měření se dopouštíme nějaké nepřesnosti. Na př. v obr. 14 pro úhel 60° najdeme délku protější odvěsny $\overline{MA} \doteq 3{,}5$ cm a protože je voleno $\overline{SA} =$
$= 2$ cm, je $\mathrm{tg} 60° \doteq \dfrac{3{,}5 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 1{,}75$, jak souhlasí vcelku dobře s dříve uvedeným výsledkem z (5.2), neboť při výpočtu $\sqrt{3}$ na dvě desetinná místa najdeme $\sqrt{3} = 1{,}73$.



Obr. 14.

Poznámka. Volíme-li úsečku $\overline{SA}$ za jednotku délky (v našem případě jednotka je $j = 2$ cm), pak délka úsečky $\overline{MA}$ vyjádřená v této jednotce (3,5 cm $= 1{,}75 \cdot j$), ovšem po vynechání označení délkových jednotek (tedy po vynechání j), je tangentou příslušného úhlu (v uvedeném případě 1,75). V tom právě spočívá důvod, proč se tangentě říká tangenta, neboť její hodnota se měří na *tečně* (*tangentě*) MA jednotkové kružnice, t. j. kružnice o středu S a poloměru $\overline{SA} = j$ (obr.

14). Vše se ještě více zjednoduší a stane názornější, volíme-li za jednotku j na př. 1 dm; pak totiž není třeba vůbec nic přepočítávat a délka úsečky $\overline{MA}$ (po vynechání označení dm) přímo udává tgα.

Podle právě uvedeného si již sestavíme snadno alespoň krátký přehled přibližných hodnot tangent pro jednotlivé úhly, na př. pro $\alpha = 5°, 10°, \ldots, 85°$. Tyto hodnoty (určené jen na dvě desetinná místa) jsou uvedeny v tabulce (obr. 15), jejíž čtení je jistě každému srozumitelné a nepotřebuje bližšího vysvětlení.

α	tgα	α	tgα	α	tgα
5°	0,09	35°	0,70	65°	2,15
10°	0,18	40°	0,84	70°	2,75
15°	0,27	45°	1,00	75°	3,73
20°	0,36	50°	1,19	80°	5,67
25°	0,47	55°	1,43	85°	11,43
30°	0,58	60°	1,73		

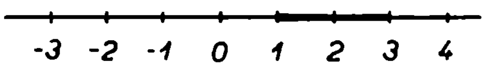
Obr. 15.

Již několikrát jsme se zmínili a z tabulky v obr. 15 je to dobře patrno, že tangenta závisí na velikosti úhlu α; tuto okolnost vyjadřujeme v matematice rčením, že tangens je *funkcí* úhlu α. Jelikož závisí na úhlu, říkáme, že tangenta je *úhloměrná funkce* nebo také *goniometrická funkce* (úhel — řecky *gonia*).

Poznámka. Pojem funkce, který je pro matematiku velice důležitý, není tak zcela běžný, a proto se s ním alespoň trochu seznámíme. Nejdříve však promluvíme krátce o číslech; pokud o nich budeme v dalším jednat, budeme jimi rozumět vždy *reálná čísla*, což jsou čísla, která lze znázornit na t. zv. *ose číselné* (obr. 16). Jsou-li a, b dvě čísla, pak mohou pro ně, pokud se jejich velikosti týče, nastat jen tyto tři případy:

buď *a je menší než b* (pak píšeme $a < b$), nebo *a rovná se b* ($a = b$), nebo *a je větší než b* (což zapisujeme $a > b$). Na ose číselné v 1. případě je a nalevo od b, ve 2. případě se obě čísla ztotožní, ve 3. případě je a napravo od b.

Máme-li dvě různá čísla a, b, pro která platí $a < b$, pak souhrnu všech čísel x, která jsou větší než a a současně menší než b, t. j. souhrnu čísel x, pro která platí $a < x < b$, říkáme



Obr. 16.

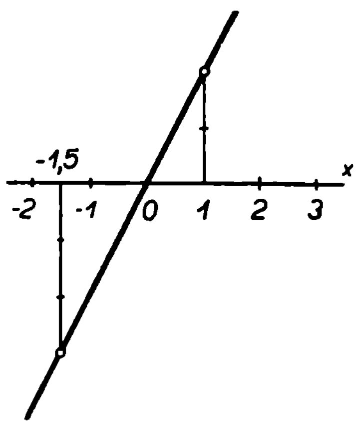
interval a, b. Často říkáme určitěji: *otevřený* interval a, b, abychom vyjádřili, že koncová čísla a, b k němu nepočítáme; označujeme jej (a, b). Na ose číselné čísla x leží mezi čísly a a b. Na př. v obr. 16 je silnější čarou zakreslen interval (1,3); patří k němu všechna čísla x větší než 1 a současně menší než 3. Někdy je však vhodné k intervalu počítat také koncová čísla a, b; pak mluvíme o *uzavřeném* intervalu a, b; pro každé číslo x z tohoto intervalu platí $a \leqq x \leqq b$ (čteme: x je větší nebo rovno a a současně menší nebo rovno b). Značka tohoto intervalu je $\langle a, b\rangle$. Tak interval $\langle 1,3\rangle$ značí všechna čísla mezi 1 a 3 včetně 1 a 3. Pro označení souhrnu všech čísel zavádíme znak $(-\infty, +\infty)$ a čteme: interval minus nekonečno, plus nekonečno.

Teď si již můžeme zavést pro naše účely vhodnou definici funkce. Říkáme, že *v daném intervalu I je definovaná funkce, je-li dán předpis, kterým se každému x z intervalu I přiřazuje nějaké číslo y* (kterému říkáme *hodnota* funkce). Hned si ukážeme jednoduchý příklad funkce.

Příklad 5.3. Nechť interval I je $(-\infty, +\infty)$; daný předpis je: každému x z I (t. j. každému číslu) přiřadíme dvojnásobek čísla x. To znamená, že $y = 2x$ je funkce (definovaná v intervalu $(-\infty, +\infty)$). Tak na př. číslu $x = 1$ je přiřazeno danou funkci číslo $y = 2{,}1$, tedy hodnota dané funkce pro $x = 1$ je $y = 2$; číslu $x = -1{,}5$ je přiřazeno číslo $y = 2 \cdot -1{,}5$, tudíž hodnota funkce pro $x = -1{,}5$ je $y = -3$ atd.

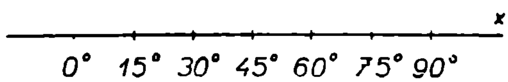
Abychom si učinili názornější představu o dané funkci, sestrojíme její *grafický obraz*, a to tak, že v bodě číselné osy, který znázorňuje číslo x, vztyčíme kolmici k číselné ose a na tuto kolmici naneseme od osy hodnotu funkce. Obyčejně volíme číselnou osu vodorovně; pak kladné hodnoty funkce nanášíme nad číselnou osu, záporné hodnoty pod osu. Takto dostaneme jeden bod grafického obrazu dané funkce; čím přesněji chceme zachytiti grafický průběh funkce v daném intervalu, tím více takových bodů musíme sestrojit. Obyčejně se spokojíme jen několika přesně sestrojenými body, polohu dalších bodů odhadneme a sestrojené body spojíme křivkou, které říkáme *graf funkce*.

Příklad 5.4. Sestrojte grafický obraz funkce $y = 2x$ z příkladu 5.3 (obr. 17). Našli jsme, že pro $x = 1$ je $y = 2$. Tedy bod grafického obrazu funkce $y = 2x$ dostaneme, jestliže v bodě $x = 1$ osy vztyčíme k této ose kolmici a na ni od osy naneseme hodnotu funkce $y = 2$. Podobně v bodě $x = -1{,}5$ sestrojíme k ose kolmici, na kterou od osy naneseme hodnotu funkce $y = -3$ atd. Dá se lehko ukázat, že všechny takto sestrojené body leží na přímce. Tedy grafem funkce $y = 2x$ (definované v intervalu $(-\infty, +\infty)$) je určitá přímka.



Obr. 17.

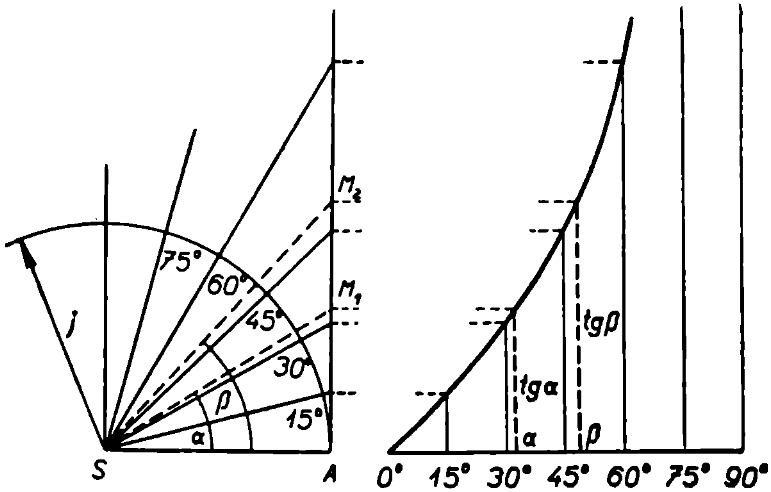
S ohledem na právě uvedenou definici funkce a na definici tangenty můžeme nyní říci určitěji: *tangens* (ostrého úhlu) *je úhloměrná funkce definovaná v otevřeném intervalu* $(0°, 90°)$. Zdá se, že je tady jistá nedůslednost. Dosud jsme mluvili o intervalu jen v souvislosti s čísly. Nyní říkáme, že také úhly tvoří interval. Nedůslednost je jen zdánlivá, protože je možno každému úhlu okamžitě přiřadit číslo, a to tak, že zvolíme jednotkovou kružnici a úhlu α přiřazujeme délku oblouku, který ramena středového úhlu α vytínají na této jednotkové kružnici. Délka příslušného oblouku je $\frac{\pi\alpha}{180}$, neboť obvod jednotkové kružnice (o poloměru 1) je 2π. (Předpokládáme znalost vzorce $o = 2\pi r$ pro obvod o kružnice, kde r je poloměr dané kružnice.) Středovému úhlu $1°$ přísluší oblouk $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ a tedy středovému úhlu α přísluší oblouk $\frac{\pi\alpha}{180}$. Oblouk jednotkové kružnice příslušný středovému úhlu α se nazývá *arkus* α a značí se arcα. Je tedy arc$\alpha = \pi\alpha : 180$. Speciálně $\text{arc}90° = \pi \,.\, 90 : 180 = \frac{1}{2}\pi \doteq 1{,}57$. Jestliže v dalším budeme mluvit o znázornění úhlu α na číselné ose, budeme tím rozumět toto: na číselné ose najdeme číslo, jehož velikost je arcα a k němu připíšeme α. Dostaneme tím na číselné ose novou stupnici, a to ve stupních. Tak v obr. 18 je znázorněn interval $\langle 0°, 90° \rangle$, velikost příslušné úsečky je $\frac{1}{2}\pi \doteq 1{,}57 \,.\, j$; protože jsme volili $j = 2\,\text{cm}$ je $\frac{1}{2}\pi$ znázorněno úsečkou 3,14 cm. Při této příležitosti uveďme, že právě provedené znázornění vede k tomu, že



Obr. 18.

raději místo úhlové míry pro úhly se užívá *obloukové míry*; rozumíme tím: místo měření úhlů ve stupních, měříme je pomocí *arku* α. Tak na př. místo úhel měří 360°, říkáme úhel je 2π, nebo místo úhel je pravý, říkáme úhel je $\frac{1}{2}\pi$ atd. V dalším se však přidržíme známého měření úhlů ve stupních.

Nyní již lehko sestrojíme grafický obraz tangenty. Stačí na kolmice k číselné ose v jednotlivých bodech znázorňujících úhly α z intervalu $(0°, 90°)$ nanést od osy příslušnou hodnotu tangenty; přitom s výhodou použijeme konstrukce těchto hodnot uvedené v obr. 14. Postup sestrojování jednotlivých bodů grafického obrazu tangenty je patrný z obr. 19. Pomocí



a) Obr. 19. *b)*

grafu tangenty můžeme stanovit hodnotu tangenty libovolného úhlu z intervalu $(0°, 90°)$. Největší výhoda grafického obrazu tangenty spočívá v tom, že nám udává přehledný obraz průběhu tangenty. Z obr. 19 vidíme, že křivka stoupá odleva doprava, což znamená: roste-li (t. j. zvětšuje-li se) úhel, roste také jeho tangenta. K tomuto důležitému poznatku jsme došli jen na základě grafického obrazu, ale můžeme jej přímo dokázat. Uveďme jej proto větou.

VĚTA 5.1. Tangens ostrého úhlu je funkce rostoucí. Přesněji: roste-li úhel α v otevřeném intervalu $(0°, 90°)$, pak $\mathrm{tg}\,\alpha$ roste v otevřeném intervalu $(0, +\infty)$.

Důkaz. Vyslovená věta vlastně říká: jestliže α, β jsou ostré úhly a je-li $\alpha < \beta$, pak je také $\mathrm{tg}\,\alpha < \mathrm{tg}\,\beta$. To skutečně platí. Je-li totiž $\alpha < \beta$, pak v příslušných trojúhelnících

SAM_1 a SAM_2 (obr. 19a) při stejné odvěsně $\overline{SA}$ je nutně $\overline{AM_1} < \overline{AM_2}$, což však právě říká, že tg$\alpha <$ tgβ. Doplněk věty plyne z těchto dvou vlastností $\triangle SAM$: 1. jestliže α se blíží 0°, pak $\overline{AM}$ se blíží 0, 2. jestliže α se blíží 90°, pak $\overline{AM}$ roste nade všechny meze.

Grafický obraz tangenty ostrého úhlu v obr. 19b nám umožňuje nejen vyhledat (alespoň přibližně) tangentu libovolného ostrého úhlu, nýbrž také naopak dává možnost k dané tangentě (t. j. k libovolnému kladnému číslu) vyhledat (zase jen přibližně) příslušný ostrý úhel. Tím se však už nebudeme podrobně zabývat, neboť obvykle k vyhledání hodnot tangenty a obráceně k určování úhlu z dané tangenty užíváme podrobnějších *tabulek* alespoň třímístných (ale i vícemístných), jež jsou sestavovány na naprosto jiném podkladě, o kterém v této knížce nemůžeme jednat. Název třímístné (čtyřmístné atd.) tabulky nám říká, na kolik desetinných míst přesné jsou v tabulkách vypočítány hodnoty tangenty.

Takové tabulky (nejen tangenty ale i ostatních goniometrických funkcí, jimiž se budeme zabývat v několika dalších odstavcích) jsou v matematické části téměř každé technické příručky a samozřejmě i ve speciálních matematických tabulkách*). Pro pohodlí čtenáře je na konci knížečky připojena třímístná tabulka goniometrických funkcí, kde se vyskytují také hodnoty tangenty ostrých úhlů postupujících po 1° Čtení v této tabulce je v podstatě stejné jako v tabulce v obr. 15. Úhly do 45° jsou uvedeny po levé straně tabulky (rostou shora dolů), hodnoty jejich tangent se čtou v příslušném řádku a ve sloupci nadepsaném nahoře tg. Úhly nad 45° jsou uvedeny po pravé straně tabulky (rostou zdola nahoru) a hodnoty jejich tangent se čtou ve sloupci, který je dole označen tg. Uspořádání čtyřmístných a pěti-

*) Na př. M. Valouch a M. A. Valouch: *Pětimístné tabulky logaritmické* (Praha 1950, Přírodovědecké vydavatelství), kde tabulky hodnot goniometrických funkcí jsou pětimístné.

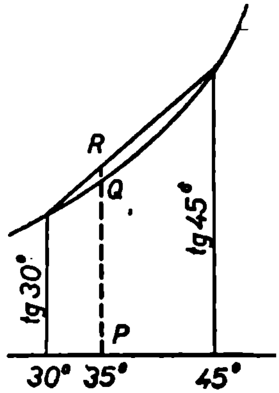
místných tabulek hodnot tangenty se celkem neliší od tohoto uspořádání.

Abychom se mohli snadno orientovat ve čtení takových podrobnějších tabulek, uveďme alespoň krátký výňatek z pětimístných tabulek hodnot tangenty (obr. 20). V prvém sloupci jsou uvedeny úhly ve stupních a desítkách minut, v dalším sloupci v příslušném řádku jsou vypsány hodnoty tangenty. O třetím sloupci bude řeč poněkud později. Aby tabulky získaly na přehlednosti, neopakují se údaje, jež si snadno můžeme doplnit. Zvláště upozorňujeme na to, že hodnoty tangent jsou uvedeny přesně jen u celých stupňů. U ostatních hodnot je obvykle uvedena jen pětimístná skupina cifer za desetinnou čárkou. Cifru před desetinnou čárkou je nutno doplnit. Tak na př. z tab. najdeme tg 25°40′ = 0,48055. Je-li naopak známo, že tangenta ostrého úhlu α je na př. tgα = 0,49134, pak z tabulky hned najdeme α = 26°10′

°	tg	*d*. 1′
25 0	0,46 631	35,4
10	46 985	35,6
20	47 341	35,7
30	47 698	35,7
40	48 055	35,9
50	48 414	35,9
26 0	0,48 773	36,1
10	49 134	36,1
20	49 495	

Obr. 20.

Často je třeba najít tangentu úhlu, který není přímo uveden v tabulkách; pomocí téchže tabulek můžeme však stanovit hodnotu jeho tangenty alespoň přibližně. Užíváme přitom t. zv. *interpolace* (vkládání nových hodnot). Vysvětlíme nejprve podstatu interpolace na grafu tangenty z obr. 19b, kde jsou konstruktivně přesně stanoveny body křivky na př. pro $\alpha = 30°$ a $\alpha = 45°$, příslušné hodnoty tangent jsou (viz tabulku v obr. 15) tg30° = 0,58 a tg45° = 1. Vidíme: vzroste-li úhel o 15° (a to z 30° na 45°), pak hodnota tangenty vzroste o 0,42 (z 0,58 na 1). Chceme-li nyní alespoň zhruba stanovit tg35°, pak prostě graf tangenty pro úhly intervalu ⟨30°, 45°⟩ nahradíme úsečkou spojující oba příslušné body (viz schematický obr. 21). Toto geometrické nahrazení křivky úsečkou umožňuje právě přibližný výpočet hodnot tangenty úhlů intervalu ⟨30°, 45°⟩, neboť potom platí tato úvaha: jestliže při vzrůstu o 15° (z 30° na 45°) tangenta vzroste o 0,42, pak vzroste-li úhel jen o 1°, vzroste tangenta o 0,42 : : 15 = 0,028 a tedy, vzroste-li úhel o 5° (z 30° na 35°), pak tangens se zvětší o 0,028 . 5 = 0,14. Je tedy přibližně tg35° $\doteq$ 0,58 + 0,14 = 0,72. Porovnáme-li tuto přibližnou hodnotu s hodnotou z tabulky v obr. 15, vidíme, že je tu poměrně dobrá shoda.



Obr. 21.

Říkáme, že jsme tg35° vypočetli interpolací (z hodnot tg30° a tg45°). Geometricky to značí, že jsme správnou hodnotu tangenty $\overline{PQ}$ (obr. 21), měřenou od číselné osy ke křivce, nahradili přibližnou hodnotou $\overline{PR}$, měřenou od osy k dříve zmíněné úsečce. Početně toto nahrazení křivky mezi dvěma body úsečkou znamená totéž jako říci, že v *uvažovaném intervalu je rozdíl úhlů přímo úměrný rozdílu příslušných hodnot tangenty*. Čím menší bude ten interval, tím přesnější výsledky dostaneme. Interpolace používáme právě k výpočtu hodnot tangent úhlů, jež už nejsou obsaženy v tabulkách.

Příklad 5.5. Vypočtěte tg25°46′ (užitím interpolace).

Řešení. V pětimístných tabulkách (obr. 20) jsou uvedeny jen tg25°40′ = 0,48055 a tg25°50′ = 0,48414; vzroste-li úhel o 10′ (z 25°40′ na 25°50′), vzroste tangenta o 0,00359 (= 0,48414 — 0,48055), na 1′ připadne 0,000359 a na 6′ tedy 0,000359 . 6 $\doteq$ 0,00215 (zaokrouhlíme vždy na pět desetinných míst). Hledaná tangenta je pak tg25°46′ = = 0,48055 + 0,00215 = 0,48270.

Při skutečném výpočtu si počínáme takto. Najdeme tangentu nejblíže nižšího úhlu (t. j. v našem případě 0,48055) a stanovíme t. zv. *tabulkový rozdíl* (*tabulkovou diferenci*) jako rozdíl hodnot tangent nejblíže nižšího a nejblíže vyššího úhlu uvedených v tabulkách (t. j. 0,00359); dále určíme *diferenci příslušnou* 1′ (t. j. 0,000359), násobením této diference počtem minut, kterým přesahuje daný úhel příslušný úhel uvedený v tabulkách (u nás 6) a zaokrouhlením na pět desetinných míst dostaneme *opravu* (t. j. 0,00215), kterou přičteme [neboť tangens je v intervalu (0°, 90°) funkcí rostoucí] k hodnotě tangenty nejblíže nižšího úhlu. Celý postup zapíšeme krátce takto

$$\begin{array}{r l} \mathrm{tg}25°40' = 0{,}48055 & \\ \underline{2154} & \ldots (35{,}9 \,.\, 6) \\ 0{,}48270 & \end{array}$$

Násobení uvedené v závorce provádíme obvykle nazpaměť. Ještě poznamenejme, že tabulková diference příslušející 1′ bývá uvedena v tabulkách (obr. 20, třetí sloupec). Čísla tam uvedená znamenají stotisíciny.

Tutéž úlohu můžeme však také řešit pomocí třímístných tabulek (viz tab. na str. 180 a 181). Vyhledáme $\mathrm{tg}25° = 0{,}466$, $\mathrm{tg}26° = 0{,}488$; tabulková diference je $0{,}488 - 0{,}466 = 0{,}022$. Tabulková diference připadající na 1′ (= 1° : 60) je 0,022 : 60 a tedy oprava, t. j. diference příslušná 46′, je $\frac{0{,}022}{60} \,.\, 46 \doteq 0{,}017$. Hledaná tangenta pak je $\mathrm{tg}25°46' = 0{,}466 + 0{,}017 = 0{,}483$ (jak skutečně dobře souhlasí s dříve nalezeným výsledkem 0,48270, zaokrouhleným ovšem na tři desetinná místa). Celkový postup zapíšeme opět krátce takto

$$\begin{array}{r l} \mathrm{tg}\alpha = 0{,}466 & \\ \underline{17} & \quad \frac{22}{60} \,.\, 46 \\ 0{,}483 & \end{array}$$

Příklad 5.6. Najděte ostrý úhel α, je-li $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}47104$ (užitím interpolace).

Řešení. V tabulkách (obr. 20) není ve sloupci tg uvedena hodnota 0,47104; nejblíže nižší hodnota 0,46985 přísluší úhlu $\alpha = 25°10'$. Hledaný úhel bude tedy mezi $25°10'$ a $25°20'$. Na $1'$ (mezi $25°10'$ a $25°20'$) připadá tabulkový rozdíl 0,000356; naše hodnota 0,47104 je o 0,00119 větší než $\operatorname{tg}25°10'$, tato diference 0,00119 přísluší tolika minutám, kolikrát je diference příslušná jedné minutě obsažena v naší diferenci, t. j. $0{,}00119 : 0{,}000356 = 119 : 35{,}6 \doteq 3$; tedy oprava je $3'$, kterou přičteme (neboť tangens je funkce rostoucí) k $25°10'$. Hledaný úhel je $\alpha = 25°13'$. Celý zápis výpočtu je opět jednoduchý

$$\begin{array}{rlr}
\operatorname{tg}\alpha = & 0{,}47104 & \\
 & \underline{46985} & 25°10' \\
 & 119 : 35{,}6 & \underline{3'} \\
 & & \alpha = 25°13'.
\end{array}$$

Úplně obdobně postupujeme, máme-li k disposici na př. jen naše třímístné tabulky na str. 180 a 181. V tomto případě zaokrouhlujeme danou hodnotu $\operatorname{tg}\alpha$ na tři deset. místa, tedy $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}471$. Nebudeme už popisovat celý postup, napíšeme jen snadno srozumitelný stručný zápis

$$\begin{array}{rlr}
\operatorname{tg}\alpha = & 0{,}471 & \\
 & \underline{466} & 25° \\
 & 5 : \frac{22}{60} & \underline{14'} \\
 & & \alpha = 25°14'.
\end{array}$$

Zlomek $\frac{22}{60}$ znamená vlastně $\frac{22}{60}$ tisíciny a je to diference příslušná $1'$; vždyť tabulková diference příslušná $1°$ je $0{,}488 - 0{,}466 = 0{,}022$. Nalezený výsledek se sice liší o $1'$ od dřívějšího výsledku, nesmíme však zapomenout, že v obojím postupu používáme přibližné methody výpočtu a ještě navíc vždy zaokrouhlujeme. Samozřejmě přesnější výsledek je prvý, kdy jsme používali podrobnějších tabulek.

Nyní učiníme rozhodný krok, ze kterého vynikne důležitost zavedení pojmu tangenty. Ve vzorci (5.1), t. j. ve vzorci

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \tag{5.3}$$

vystupují tři základní prvky pravoúhlého trojúhelníka: 1. odvěsna a, 2. odvěsna b a 3. úhel α. Známe-li dva z těchto prvků, pak můžeme právě pomocí (5.3) třetí prvek vypočítat. Tento výpočet skutečně provedeme v následujících třech úlohách o pravoúhlém trojúhelníku; obecné řešení v úloze bude vždy hned provázeno číselným příkladem.

Úloha 5.3. Jsou dány odvěsny a, b pravoúhlého trojúhelníka; vypočtěte úhel α (užitím $\operatorname{tg}\alpha$).

Řešení. Jelikož známe obě odvěsny, můžeme hned podle vzorce (5.3) vypočítat $\operatorname{tg}\alpha$; úhel α pak již vyhledáme z tabulek hodnot tangenty.

Příklad 5.7. V pravoúhlém trojúhelníku je $a = 13$ cm, $b = 35$ cm; vypočtěte úhel α.

Řešení. Nejdříve vypočteme $\operatorname{tg}\alpha$. Jest $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$. V našem případě tedy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{13 \text{ cm}}{35 \text{ cm}} \doteq 0{,}37143$. V pětimístných tabulkách tangenty najdeme hodnotu 0,37057, jež přísluší úhlu $\alpha = 20°20'$. Naše diference je 86, tabulková 33,1, tedy oprava je $86 : 33{,}1 \doteq 3$. Úhel α je $20°20' + 3' = 20°23'$ (pomocí třímístných tabulek bychom našli $20°21'$).

Úloha 5.4. Je dán úhel α a přilehlá odvěsna b pravoúhlého trojúhelníka: vypočtěte protější odvěsnu a.

Řešení. Ze vzorce (5.3) plyne (násobíme-li levou i pravou stranu vzorce číslem b) $b \operatorname{tg}\alpha = a$, t. j.

$$a = b \operatorname{tg}\alpha; \tag{5.4}$$

tedy protější odvěsnu a vypočteme, když nejdříve k danému úhlu α najdeme pomocí tabulek $\operatorname{tg}\alpha$ a pak nalezenou hodnotu násobíme délkou přilehlé odvěsny b.

Příklad 5.8. V pravoúhlém trojúhelníku je $\alpha = 72°14'$, $b = 2{,}5$ cm; vypočtěte a.

Řešení. Ze vzorce $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ obdržíme $a = b \operatorname{tg}\alpha$. V našem případě je $a = 2{,}5 \text{ cm} \,.\, \operatorname{tg}72°14'$. Nejprve pomocí (třímístných) tabulek určíme

$$\begin{array}{rl} \operatorname{tg} 72°14' = 3{,}078 & \\ \underline{45} & \quad \frac{195}{60} \,.\, 14 \\ 3{,}123 & \end{array}$$

a pak již snadno pro hledanou odvěsnu najdeme $a = 2{,}5 \,.\, 3{,}123 \text{ cm} \doteq 7{,}8$ cm. Při této příležitosti poznamenejme, že hledanou délku obyčejně vypočítáme jen na tolik deset. míst, na kolik míst jsou dány původní délky.

Úloha 5.5. Je dán úhel α a protější odvěsna a pravoúhlého trojúhelníka; vypočtěte přilehlou odvěsnu b.

Řešení. Ze vzorce (5.3) najdeme (nejprve $b \operatorname{tg}\alpha = a$, z něho dělením levé a pravé strany číslem $\operatorname{tg}\alpha$)

$$b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}; \tag{5.5}$$

tedy zase najdeme nejprve k úhlu α pomocí tabulek $\operatorname{tg}\alpha$, přilehlá odvěsna pak je rovna protější odvěsně dělené $\operatorname{tg}\alpha$.

Příklad 5.9. V pravoúhlém trojúhelníku je $a = 10$ cm, $\alpha = 37°$; určete b.

Řešení. Hledáme přilehlou odvěsnu. Ze vzorce $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ vyjádříme tedy b; dostaneme $b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$. V našem případě $b = \frac{10 \text{ cm}}{\operatorname{tg}37°} = \frac{10}{0{,}754} \text{ cm} \doteq 13{,}3$ cm. Jelikož se vzorce (5.4), který jsme si odvodili ze vzorce (5.3), velice často užívá, vyjádříme jeho obsah ještě zvlášť větou.

VĚTA 5.2. Odvěsna a pravoúhlého trojúhelníka je rovna součinu druhé odvěsny b a tangenty úhlu α ležícího proti hledané odvěsně:

$$a = b\,\mathrm{tg}\alpha. \tag{5.6}$$

Cvičení.

5.1. Bez užití tabulek najděte a) tg25°, b) tg68°30′ a porovnejte s hodnotami z tabulek.

5.2. Vyjádřete $\mathrm{tg}\beta$ v pravoúhlém trojúhelníku ABC (a to poměrem příslušných odvěsen).

5.3. V pravoúhlém $\triangle\ ABC$ je odvěsna $a = 16$ cm, odvěsna $b = 4$ cm; vypočtěte a) $\mathrm{tg}\alpha$, b) $\mathrm{tg}\beta$.

5.4. V pravoúhlém $\triangle\ ABC$ je přepona $c = 13$ cm, odvěsna $b = 5$ cm; vypočtěte a) $\mathrm{tg}\alpha$, b) $\mathrm{tg}\beta$.

5.5. Sestrojte ostrý úhel α, je-li a) $\mathrm{tg}\alpha = 0{,}57$, b) $\mathrm{tg}\alpha = 2{,}5$.

5.6. V tabulkách vyhledejte hodnoty a) tg37°, b) tg81°, c) tg15°20′, d) tg50°50′, e) tg23°46′, f) tg63°8′.

5.7. K daným hodnotám tangenty vyhledejte pomocí tabulek příslušné ostré úhly: a) $\mathrm{tg}\alpha = 0{,}32492$, b) $\mathrm{tg}\beta = 2{,}24604$, c) $\mathrm{tg}\gamma = 0{,}55812$, d) $\mathrm{tg}\delta = 1{,}13029$, e) $\mathrm{tg}\varphi = 0{,}65863$, f) $\mathrm{tg}\psi = 1{,}33357$, g) $\mathrm{tg}\lambda = \frac{3}{5}$, h) $\mathrm{tg}\mu = \frac{9}{4}$. Užijete-li jen třímístných tabulek, pak předem zaokrouhlete dané hodnoty na tři desetinná místa; v posledních dvou příkladech převeďte nejdříve dané zlomky na desetinné zlomky.

5.8. Kterému úhlu přísluší úkos 1 : 5?

5.9. Jaký sklon má násyp o spádu 2 : 3?

5.10. Jaký sklon má silnice o stoupání 7,5 %?

5.11. V pravoúhlém trojúhelníku ABC je odvěsna $a = 36$ cm a odvěsna $b = 24$ cm; jak velký je úhel α?

5.12. V jakém úhlu jeví se slunce nad obzorem, jestliže svislá tyč 1,6 m vysoká vrhá na vodorovnou rovinu stín 1 m dlouhý?

5.13. V pravoúhlém $\triangle\ ABC$ je $\alpha = 48°15'$, $b = 10$ cm; jak velká je druhá odvěsna?

5.14. V obdélníku svírá strana $p = 12{,}5$ cm s úhlopříčkou úhel $\omega = 27°30'$; jak velká je druhá strana q obdélníka?

5.15. V pravoúhlém $\triangle\ ABC$ je $\alpha = 63°40'$, $a = 5$ cm; jak velká je přilehlá odvěsna?

6. KOTANGENS OSTRÉHO ÚHLU

Základem podrobných úvah 4. a 5. odstavce byla tato vlastnost pravoúhlých trojúhelníků o společném úhlu α: poměr protější odvěsny k přilehlé odvěsně (který jsme nazvali $\operatorname{tg}\alpha$) je pro všechny takové trojúhelníky stejný a závisí jen na velikosti ostrého úhlu α.

Je okamžitě zřejmé, že tutéž vlastnost má také převrácený poměr. Tedy poměr přilehlé odvěsny k protější odvěsně je rovněž pro všechny pravoúhlé trojúhelníky o společném úhlu α týž. Tomuto převrácenému poměru budeme říkat *kotangens* α a značit $\operatorname{cotg}\alpha$. Tedy (obr. 12):

DEFINICE 6.1a. Kotangens ostrého úhlu α (v pravoúhlém trojúhelníku) je poměr přilehlé odvěsny (k úhlu α) k protilehlé odvěsně, t. j.

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}. \tag{6.1}$$

A zase, jestliže se omezíme již předem na ostré úhly, můžeme definici 6.1a vyslovit ve stručnější formě:

DEFINICE 6.1b. Kotangens je poměr přilehlé odvěsny k protější odvěsně.

Poznámka. Definici kotangenty (právě tak jako tangenty) je třeba umět zpaměti. Ještě dodejme, že stejně jako tangenta je i kotangenta ostrého úhlu hodnotou poměru, tedy číslo nepojmenované (a vždy kladné).

Mezi tangentou a kotangentou téhož ostrého úhlu existuje velice úzký vztah, vyjádřený větou:

VĚTA 6.1. Pro libovolný ostrý úhel platí

$$\text{a) } \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad \text{b) } \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}. \tag{6.2}$$

Důkaz plyne okamžitě z toho, že podíly $\frac{a}{b}$ i $\frac{b}{a}$ odvěsen pravoúhlého trojúhelníka lze napsat také ve tvaru složeného zlomku. Je totiž

$$\text{a)}\ \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}}, \quad \text{b)}\ \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}. \tag{6.3}$$

Dosadíme-li do (6.3) ze vzorců (5.1) a (6.1), dostáváme právě vzorce (6.2a) a (6.2b), jichž se velice často užívá (a proto doporučuje se znát je zpaměti).

Přistupme nyní k základním úlohám o kotangentě.

Úloha 6.1. Jest dán ostrý úhel α; najděte jeho kotangentu.

Řešení je obdobné řešení úlohy 5.1. Sestrojíme opět libovolný pravoúhlý trojúhelník tak, aby jedním jeho úhlem byl α, určíme délku obou odvěsen; pak již podle definice poměr přilehlé k protější je hledaná kotangenta.

Příklad 6.1. Určete cotg30°, cotg45° a cotg60°.

Řešení. Především, abychom určili cotg45°, všimneme si libovolného pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka (obr. 7). Je-li délka jeho odvěsen a, pak podle definice cotg45° $= \frac{a}{a} = 1$. Podobně cotg 30° a cotg 60° určíme z $\triangle\, MPQ$ (obr. 13). $\text{cotg}30° = \overline{PQ}\ \ \overline{MQ} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}\ \ \frac{1}{2}a = \sqrt{3}$ a $\text{cotg}60° = \overline{MQ} : \overline{PQ} = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Tedy je

$$\text{cotg}30° = \sqrt{3},\quad \text{cotg}45° = 1,\quad \text{cotg}60° = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}, \tag{6.4}$$

jak jsme ostatně mohli dostat přímo podle vztahu (6.2a) ze známých hodnot tg30°, tg45° a tg60° (viz (5.2)).

Úloha 6.2. Sestrojte ostrý úhel α, je-li známa jeho kotangenta.

Řešení. Nechť cotg$\alpha = m$. Sestrojme libovolný pravoúhlý $\triangle\, ABC$, ve kterém by poměr $\overline{AC} : \overline{BC}$ byl rovný číslu m, pak hledaný úhel α je úhel při vrcholu A.

Příklad 6.2. Sestrojte ostrý úhel α, je-li $\cot g\alpha = 0{,}5$.

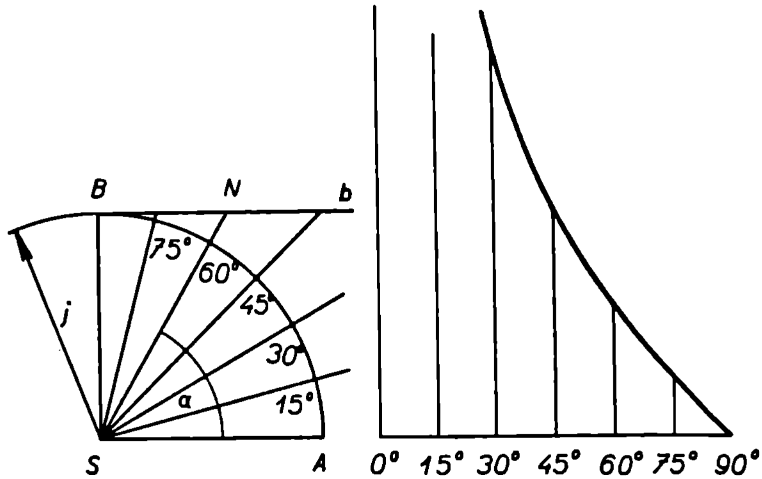
Řešení. Stačí sestrojit na př. pravoúhlý $\triangle ABC$ tak, aby jeho odvěsny byly $\overline{AC} = 5$ cm, $\overline{BC} = 10$ cm, pak úhel při vrcholu A je hledaný úhel.

Vzorec (6.2a), který je, jak jsme si všimli, velice užitečný, umožní nám odvodit další důležitou větu platící pro kotangentu.

VĚTA 6.2. Kotangens ostrého úhlu je funkce klesající. Podrobněji: roste-li úhel α v otevřeném intervalu $(0°, 90°)$, pak $\cot g\alpha$ klesá v otevřeném intervalu $(+\infty, 0)$.

Důkaz. Jak víme, roste-li jmenovatel zlomku, pak hodnota zlomku (při pevném čitateli, který není nulový) klesá. Z toho však, vzhledem ke vzorci (6.2a) a vzhledem k tomu, že tangens je funkce rostoucí (viz větu 5.1), ihned plyne, že kotangens je funkcí klesající.

Tvrzení právě dokázané věty můžeme pěkně sledovat na grafickém obrazu kotangenty, který získáme podobně jako graf tangenty. Zvolíme si opět jednotkovou kružnici (obr. 22a) o středu S a poloměru rovném zvolené jednotce j; úhly pak nanášíme již známým způsobem ve zvoleném smyslu tak, že jejich prvním ramenem je SA. Na rozdíl od dřívějška (obr. 14) si nyní všimneme průsečíku N druhého ramene zvoleného ostrého úhlu α s jinou tečnou, a to s tečnou b sestrojenou v bodě B jednotkové kružnice, který vznikne otočením bodu A ve dříve zvoleném smyslu o 90° kolem středu S. Dostaneme tak pravoúhlý $\triangle SBN$, ve kterém úhel při vrcholu N je právě rovný α. Pomocí tohoto trojúhelníka vyjádříme kotangens úhlu α. Jest $\cot g\alpha = \overline{BN} : \overline{BS}$. Jelikož však $\overline{BS} = \overline{AS} = j$ je jednotkou délky (v obr. 22 jest $j = 2$ cm), je délka úsečky $\overline{BN}$ vyjádřená touto jednotkou (po vynechání označení délkové jednotky) přímo rovna $\cot g\alpha$ (v našem případě při $\alpha = 60°$ najdeme $\overline{BN} \doteq 1{,}15$ cm $\doteq 0{,}57 \cdot j$ a tedy $\operatorname{cotg} 60° \doteq 0{,}57$) Našli jsme tedy, stručně řečeno, že kotangens úhlu α měříme na tečně sestrojené v bodě B. Graf kotangenty pak již dostaneme známým způsobem (obr. 22b); všimněme si, že příslušná křivka, jak ostatně již říká věta 6.2, klesá odleva doprava.



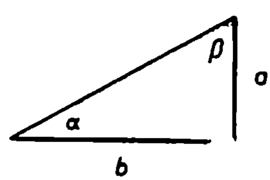
a) Obr. 22. b)

Kdybychom obr. 22a zakreslili do obr. 14, viděli bychom, že výsledný obraz by byl symetrický podle druhého ramene úhlu 45°; to však znamená, že grafický obraz kotangenty (obr. 22b) zakreslený do grafu tangenty (obr. 19b) by byl s ním souměrný podle kolmice k číselné ose v bodě 45°. Tuto důležitou souvislost tangenty a kotangenty vyjádříme větou a dokážeme ještě přímo početně.

VĚTA 6.3. Kotangens ostrého úhlu je rovný tangentě doplňkového úhlu, t. j.

$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha). \qquad (6.5)$$

Důkaz (obr. 23). Podle definice kotangenty jest $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$. Avšak k téže hodnotě dojdeme také, vyjádříme-li $\operatorname{tg}\beta$.



Obr. 23.

Jest totiž $\mathrm{tg}\beta = \frac{b}{a}$. Platí tedy

$$\mathrm{cotg}\alpha = \mathrm{tg}\beta. \tag{6.6}$$

Avšak v pravoúhlém trojúhelníku je $\beta = 90° - \alpha$ (t. j. β je rovný doplňku úhlu α) a tedy, dosadíme-li za β do (6.6), dostaneme hned dokazovaný vztah (6.5).

Poznámka. Vzorec (6.5) odůvodňuje název kotangenty; je v něm totiž vyjádřeno, že se jedná o *tangentu komplementu* (doplňku). Ke vzorci (6.5) existuje obdobný další vzorec platící pro ostré úhly

$$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{cotg}(90° - \alpha), \tag{6.7}$$

který se snadno dokáže stejně jako (6.5) (pokuste se sami o důkaz podle horního vzoru). Pomocí (6.5) můžeme opět odvodit (6.4) z (5.2). Tak na př. je $\mathrm{cotg}60° = \mathrm{tg}30° = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ atd.

Hodnoty kotangent ostrých úhlů jsou opět uvedeny v tabulkách (viz na př. tab. na str. 180 a 181). Čteme v nich úplně stejně jako v tabulkách hodnot tangenty. Pro úhly do 45°, jež jsou uvedeny v levém krajním sloupci tabulek, platí hodnoty kotangenty ve sloupci, který je nahoře nadepsán cotg, pro úhly nad 45°, jež jsou uvedeny v pravém krajním sloupci, platí hodnoty ve sloupci, který je zdola označen cotg. Všimneme-li si tabulek blíže, vidíme, že sloupec, který je shora označen tg, je zdola označen cotg a naopak. Toto výhodné uspořádání tabulek právě umožňují vzorce (6.5) a (6.7). Stačí totiž znát tangenty a kotangenty úhlů jen do 45°, tangenty a kotangenty úhlů nad 45° pak již určíme podle zmíněných vzorců.

Jak jsme již podotkli, čtení v tabulkách kotangenty nepůsobí obtíže. Musíme však být velice opatrni při interpolaci; je stále totiž třeba mít na paměti, že kotangens je funkce klesající. To při našem způsobu interpolace znamená, že opravu musíme odečítat. Jinak postupujeme úplně stejně jako při tangentě.

Příklad 6.3. Vypočtěte $\operatorname{cotg} 63°17'$ (užitím interpolace).

Řešení. K výpočtu užijeme na př. třímístných tabulek; řídíme-li se postupem udaným v příkladě 5.5, najdeme (opravu odečítáme, neboť kotangens je funkce klesající)

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} 63°17' &= 0{,}510 \\ &\underline{-\quad 6} \ldots \tfrac{22}{60} \cdot 17 \\ &\,0{,}504. \end{aligned}$$

Příklad 6.4. Najděte ostrý úhel α, je-li $\operatorname{cotg}\alpha = 1{,}18762$ (interpolací).

Řešení. Užijeme na př. pětimístných tabulek.

$$\begin{array}{rlrl} \operatorname{cotg}\alpha = & 1{,}18762 & & \\ & \underline{474} & & 40°10' \\ & 288 : 70{,}1 & & \underline{-\quad 4'} \\ & & \alpha = & 40°\ 6'. \end{array}$$

Přikročme nyní k užití kotangenty. V definičním vzorci (6.1) kotangenty vystupují tytéž prvky a, b, α jako ve vzorci pro tangens. To tedy znamená, že při všech třech základních úlohách 5.3, 5.4, 5.5, k jejichž řešení jsme užili tangenty, můžeme užít také kotangenty.

Úloha 6.3. Jsou dány obě odvěsny a, b pravoúhlého trojúhelníka; vypočtěte úhel α (užitím $\operatorname{cotg}\alpha$).

Řešení. Podle definice kotangenty je $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{b}{a}$; úhel α pak určíme z tabulek hodnot kotangenty.

Příklad 6.5. V pravoúhlém trojúhelníku je $a = 13$ cm, $b = 35$ cm; vypočtěte úhel α (viz příklad 5.7).

Řešení. Nejprve najdeme $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{35}{13} \doteq 2{,}69230$ a dále podle vzoru příkladu 6.4 určíme z tabulek $\alpha = 20°23'$, jak souhlasí s výsledkem příkladu 5.7.

Úloha 6.4. Je dán úhel α a přilehlá odvěsna b pravoúhlého trojúhelníka; vypočtěte protější odvěsnu a.

Řešení. Ze vzorce $\cot g\alpha = \frac{b}{a}$ najdeme nejdříve $a \cdot \cot g\alpha = b$ a z toho $a = \frac{b}{\cot g\alpha}$.

Příklad 6.6. V pravoúhlém trojúhelníku je $b = 2{,}5$ cm, $\alpha = 72°14'$; vypočtěte a (viz příklad 5.8).

Řešení. Užijeme-li kotangenty, pak podle úlohy 6.4 je $a = \frac{b}{\cot g\alpha}$; v našem případě tedy $a = \frac{2{,}5 \text{ cm}}{\cot g\ 72°14'}$. Pomocí třímístných tabulek najdeme $\cot g\ 72°14' = 0{,}321$ a tedy $a = 2{,}5 \text{ cm} : 0{,}321 \doteq 7{,}8$ cm (jako dříve).

ÚLOHA 6.5. Je dán úhel α a protější odvěsna a pravoúhlého trojúhelníka; vypočtěte přilehlou odvěsnu b.

Řešení. Ze vzorce $\cot g\alpha = \frac{b}{a}$ plyne $a \cdot \cot g\alpha = b$, t. j.

$$b = a \cot g\alpha. \tag{6.8}$$

Příklad 6.7. V pravoúhlém trojúhelníku je $a = 10$ cm, $\alpha \doteq 37°$; určete b (viz příklad 5.9).

Řešení. Hledáme přilehlou odvěsnu; užijeme kotangenty. Z definičního vzorce $\cot g\alpha = \frac{b}{a}$ vypočteme $b = a \cot g\alpha$.

V našem případě tedy $b = 10 \text{ cm} \cdot \cot g 37° = 10 \text{ cm} \cdot 1{,}32704 \doteq 13{,}3$ cm.

Poznámka. Jak jsme již podotkli, jsou úlohy 6.3, 6.4 a 6.5 tytéž jako 5.3, 5.4 a 5.5. Jediný rozdíl je v tom, že jednou jsme používali tangenty, po druhé kotangenty. Nyní je třeba jen kriticky rozhodnout, které řešení je s počtářského hlediska výhodnější. Hledáme-li úhel, pak nezáleží na tom, zda použijeme řešení úlohy 5.3 nebo 6.3. Hledáme-li protější odvěsnu, pak jistě dáme přednost řešení úlohy 5.4 před řešením v úloze 6.4, neboť při tomto řešení jen násobíme, což je výhodnější než dělení, které se vyskytuje v řešení úlohy 6.4. Právě proto jsme uvedli větu 5.2 pro výpočet protější odvěsny. Konečně, hledáme-li přilehlou odvěsnu, dáme přednost řešení úlohy 6.5, neboť se při řešení užívá jen násobení, naproti tomu v řešení úlohy 5.5 dělení. Z toho důvodu obsah vzorce (6.8) vyslovíme ještě větou:

VĚTA 6.4. Odvěsna b pravoúhlého trojúhelníka je rovna součinu druhé odvěsny a a kotangenty úhlu α přilehlého k hledané odvěsně:

$$b = a \operatorname{cotg} \alpha. \tag{6.9}$$

Cvičení.

6.1. Pomocí úhloměru zakreslete úhly a) 35°30′, b) 65° a najděte bez užití tabulek jejich kotangenty. Nalezený výsledek srovnejte s hodnotami z tabulek.

6.2. Je dán pravoúhlý $\triangle PQS$ s pravým úhlem při vrcholu S; úhel při vrcholu P (Q) je φ (ψ). Vyjádřete $\operatorname{cotg}\varphi$ a $\operatorname{cotg}\psi$.

6.3. V pravoúhlém $\triangle EFG$ je odvěsna $\overline{EG} = 7$ cm, odvěsna $\overline{FG} = 12$ cm; vypočtěte $\operatorname{cotg}\varphi$, kde φ je úhel při vrcholu F.

6.4. Vypočtěte $\operatorname{cotg}\xi$, je-li a) $\operatorname{tg}\xi = \frac{1}{2}$, b) $\operatorname{tg}\xi = 1{,}25$, c) $\operatorname{tg}\xi = 0{,}353$.

6.5. Najděte $\operatorname{tg}\eta$, je-li a) $\operatorname{cotg}\eta = \frac{8}{15}$, b) $\operatorname{cotg}\eta = 3{,}5$, c) $\operatorname{cotg}\eta = 0{,}417$.

6.6. Sestrojte ostrý úhel ω, je-li a) $\operatorname{cotg}\omega = \frac{3}{4}$, b) $\operatorname{cotg}\omega = 2{,}25$, c) $\operatorname{cotg}\omega = 1{,}653$.

6.7. Pomocí tabulek určete a) cotg22°, b) cotg76°, c) cotg22°30′, d) cotg80°10′, e) cotg41°5′, f) cotg46°2′.

6.8. K daným hodnotám kotangenty určete pomocí tabulek příslušné ostré úhly a) $\operatorname{cotg}\alpha = 3{,}07768$, b) $\operatorname{cotg}\beta = 0{,}42447$, c) $\operatorname{cotg}\lambda = 2{,}78$, d) $\operatorname{cotg}\mu = 0{,}987$, e) $\operatorname{cotg}\varphi = \frac{3}{2}$, f) $\operatorname{cotg}\psi = \frac{2}{5}$. Užijete-li třímístných tabulek, pak nejprve zaokrouhlete dané kotangenty na tři deset. místa; obyčejné zlomky převeďte na desetinné.

6.9. Najděte $\operatorname{cotg}(90° - \omega)$, víte-li, že $\operatorname{tg}\omega = 0{,}7$.

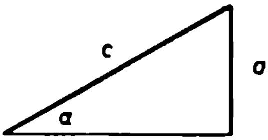
6.10. V pravoúhlém trojúhelníku ABC jsou známy odvěsny $a = 13{,}5$ cm, $b = 40{,}5$ cm; najděte úhel α ležící proti odvěsně a (užitím kotangenty).

6.11. Jak veliký sklon ω má střecha, jestliže krov má rozpětí $l = 12$ m a výšku $v = 5$ m? (Při výpočtu úhlu ω použijte $\operatorname{cotg}\omega$; všimněte si pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách v a $\frac{1}{2}l$).

6.12. V pravoúhlém $\triangle RST$ je odvěsna $\overline{ST} = 12{,}5$ cm a protější úhel $\varrho = 53°15′$; jak velká je odvěsna $\overline{RT}$?

6.13. Jak dlouhý stín vrhá svislý stožár 15,4 m vysoký na vodorovnou rovinu, je-li výška slunce nad obzorem 37°45′?

Od 4. odst. jsme se v podstatě zabývali jen jedinou z úměr (3.1), a to úměrou $a : b = a' : b'$. Došli jsme tím k tangentě (odst. 5) a kotangentě (odst. 6). Kdybychom však vyšli z druhé úměry (3.1), t. j. z úměry $a : c = a' : c'$, pak bychom stejným postupem zjistili, že poměr protější odvěsny k přeponě je pro všechny pravoúhlé trojúhelníky o stejném ostrém úhlu α (obr. 5) týž a že závisí jen na velikosti úhlu α. Tímto jsme vedeni k další goniometrické funkci ostrého úhlu α, kterou nazveme *sinus* α a budeme značit $\sin\alpha$ (obr. 24).



Obr. 24.

Definice 7.1a. Sinus ostrého úhlu α (v pravoúhlém trojúhelníku) je poměr protilehlé odvěsny (k úhlu α) k přeponě:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}. \tag{7.1}$$

Obvykle místo této definice se uvádí kratší, kterou i my si zapamatujeme:

Definice 7.1b. Sinus je poměr protější odvěsny k přeponě.

Poznámka. Uvádíme-li tuto stručnější definici, musíme si ovšem uvědomit, že tím vždy rozumíme sinus ostrého úhlu, ačkoliv výslovně o tom nemluvíme. Z definice je okamžitě patrno, že sinus je jako hodnota poměru číslo nepojmenované, a to kladné, protože a, c jsou strany trojúhelníka. Dále je zřejmé, že sinus (ostrého úhlu) musí být vždy menší než 1, neboť přepona pravoúhlého trojúhelníka je větší než odvěsna, a to znamená, že ve zlomku $\frac{a}{c}$ je jmenovatel větší než čitatel. Je tedy $0 < \sin\alpha < 1$. Ještě poznamenejme, že název je od latinského *sinus* (záliv).

Přikročme nyní k řešení nejjednodušších úloh o sinu.

Úloha 7.1. Jest dán ostrý úhel α; určete jeho sinus.

Řešení. Sestrojíme si libovolný pravoúhlý trojúhelník, jehož jeden úhel je právě α; pak již postupujeme podle definice: určíme délku protější odvěsny a a délku přepony c. Poměr $\frac{a}{c}$ je hledaný sinus.

Příklad 7.1. Vypočtěte sin30°, sin45°, sin60°.

Řešení. K určení sin45° užijeme rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka (obr. 7). Jsou-li délky jeho odvěsen a, pak délku přepony c vypočteme z Pythagorovy věty Jest $c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2 \, . \, a^2} = a\sqrt{2}$ (což není nic jiného než úhlopříčka čtverce o straně a). Potom $\sin 45° = a : a\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Ke stanovení sin30° a sin60° užijeme opět $\triangle MPQ$ z obr. 13. Lehko najdeme $\sin 30° = \overline{MQ} : \overline{MP} = \frac{1}{2}a : a = \frac{1}{2}$ a dále $\sin 60° = \overline{PQ} : \overline{PM} = v : a = \frac{1}{2}a\sqrt{3} : a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Tedy přehledně

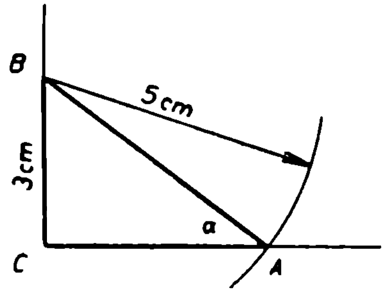
$$\sin 30° = \tfrac{1}{2}, \quad \sin 45° = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \sin 60° = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}. \tag{7.2}$$

(Doporučuje se znát tyto hodnoty zpaměti.)

Úloha 7.2. Sestrojte ostrý úhel α, víte-li, že $\sin\alpha = s$ (při čemž pro číslo s platí $0 < s < 1$).

Řešení. Sestrojíme libovolný pravoúhlý $\triangle ABC$ tak, aby v něm $\overline{BC} : \overline{AB} = s$; hledaný úhel α je pak při vrcholu A.

Příklad 7.2. Sestrojte ostrý úhel α, je-li $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

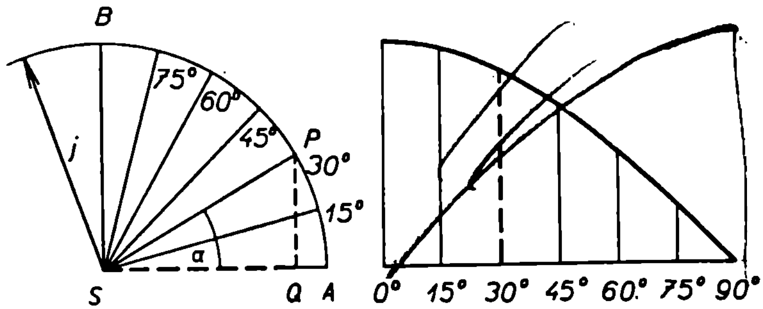


Obr. 25.

Řešení (obr. 25). Nejprve narýsujeme pravý úhel o vrcholu C. Na jedno rameno tohoto úhlu naneseme od bodu C na př. 3 cm; tím dostaneme bod B. Zbývá sestrojit bod A. Protože je $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

a protější odvěsnu jsme volili 3 cm, musí přepona být 5 cm. Stačí tedy kruhovým obloukem o středu B a poloměru 5 cm přetnout druhé rameno pravého úhlu. Tím najdeme vrchol A. Úhel α při vrcholu A je hledaný úhel.

Abychom získali přehled o hodnotách sinu, sestrojíme si opět grafický obraz této funkce. V jednotkové kružnici (o středu S a poloměru j — v našem případě $j = 2$ cm) nanášíme úhly v pevně zvoleném smyslu tak, že jejich společný



a) Obr. 26. b)

vrchol je S a společné rameno SA (obr. 26a). Druhé rameno protíná kružnici v bodě P. Kolmice z tohoto bodu na SA protíná SA v bodě Q. Pomocí pravoúhlého $\triangle$ SPQ určíme již $\sin\alpha$. Podle definice jest $\sin\alpha = \overline{PQ} : \overline{SP}$. Ale $\overline{SP} = \overline{SA} = j$ je jednotka délky, a proto přímo úsečka $\overline{PQ}$ (měřená touto jednotkou) po vynechání označení jednotky udává hodnotu $\sin\alpha$. Volíme-li na př. $\alpha = 30°$, pak při naší volbě jednotky je $\overline{PQ} = 1$ cm $= \frac{1}{2}j$ a tedy $\sin 30° = \frac{1}{2}$, jak už víme.

Graf sinu sestrojíme pak takto (obr. 26b): na číselnou osu naneseme interval $(0°, 90°)$ a v každém bodě tohoto intervalu naneseme od osy (a to nad osu) na kolmici k ose příslušnou hodnotu sinu nalezenou právě popsaným způsobem (viz obr. 26a a 26b). Z grafu získáme názorný přehled o hodnotách sinu. Vidíme, že křivka stoupá zleva doprava. Tento důležitý poznatek, který si odůvodníme podrobněji, vyslovíme větou:

VĚTA 7.1. Sinus ostrého úhlu je funkce rostoucí. Podrobněji: roste-li úhel α v otevřeném intervalu $(0°, 90°)$, potom $\sin\alpha$ roste v otevřeném intervalu $(0,1)$.

Důkaz. V podstatě máme ukázat: jestliže pro dva ostré úhly α_1, α_2 platí $\alpha_1 < \alpha_2$, pak je $\sin\alpha_1 < \sin\alpha_2$. A tomu skutečně tak je: v příslušných trojúhelnících SP_1Q_1 a SP_2Q_2 sestrojených podle předchozího pro úhly α_1 a α_2 je nutně $\overline{P_1Q_1} < \overline{P_2Q_2}$, neboť P_1 je na oblouku $\widehat{AB}$ kružnice před P_2. A dále: jestliže se α blíží $0°$, pak P se blíží bodu A, t. j. $\overline{PQ}$ se blíží 0; jestliže se α blíží $90°$, pak P se blíží bodu B, t. j. $\overline{PQ}$ se blíží $\overline{SB} = j$.

Hodnoty sinu ostrých úhlů jsou uvedeny podobně jako hodnoty tangent a kotangent také v tabulkách. Čtení v nich jistě nebude dělat obtíže. Jen ještě upozorníme, že vzhledem k tomu, že sinus je rostoucí funkce, budeme při hledání hodnot sinu interpolací postupovat úplně stejně jako při tangentě: opravy budeme přičítat.

Příklad 7.3. Vypočtěte $\sin 50°13'$.

Řešení. K výpočtu užijeme pětimístných tabulek:

$$\begin{array}{rl} \sin 50°13' = 0{,}76791 & \\ 56 & \ldots\ 18{,}6 \,.\, 3 \\ \hline 0{,}76847. & \end{array}$$

Příklad 7.4. Vyhledejte ostrý úhel α, pro který $\sin\alpha = 0{,}45$.

Řešení. Použijeme zase pětimístných tabulek:

$$\begin{array}{rrr} \sin\alpha = 0{,}45000 & & \\ 44880 & & 26°40' \\ \hline 120 : 26 & & +\ \ 5' \\ & \alpha = & \overline{26°45'}. \end{array}$$

Ve vzorci (7.1), kterým se definuje sinus ostrého úhlu, t. j. ve vzorci

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \tag{7.3}$$

vystupují tyto základní prvky pravoúhlého trojúhelníka: úhel α, protější odvěsna a a přepona c. Jestliže známe právě dva z těchto prvků, pak třetí můžeme již z rovnice (7.3) určit, jak učiníme v dalších třech úlohách.

Úloha 7.3. V pravoúhlém trojúhelníku je dána odvěsna a a přepona c; jest najít úhel α ležící proti dané odvěsně.

Řešení vlastně již známe. Poměr $\frac{a}{c}$ je sinus hledaného úhlu; úhel pak již vyhledáme užitím goniometrických tabulek.

Příklad 7.5. V pravoúhlém trojúhelníku je přepona $c = 13$ cm, odvěsna $a = 5$ cm; vypočtěte úhel α ležící proti a.

Řešení. Počítejme na př. pomocí trojmístných tabulek; určíme tedy $\sin\alpha$ jen na tři desetinná místa. Jest $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{5\ \text{cm}}{13\ \text{cm}} \doteq 0{,}385$. Dále již podle vzoru příkladu 7.4 snadno najdeme $\alpha = 22°37'$.

Úloha 7.4. V pravoúhlém trojúhelníku je dána přepona c a úhel α; určete odvěsnu a ležící proti danému úhlu.

Řešení. Ze vzorce (7.3) najdeme (násobením c) pro hledanou odvěsnu $c\sin\alpha = a$, t. j.

$$a = c\sin\alpha. \tag{7.4}$$

Příklad 7.6. V pravoúhlém trojúhelníku je známa přepona $c = 5{,}5$ cm a úhel $\alpha = 71°30'$. Určete protější odvěsnu a.

Řešení. Ze vzorce (7.3) najdeme $a = c\sin\alpha$, tedy v našem případě $a = 5{,}5\ \text{cm} \,.\, \sin 71°30'$. Pomocí třímístných tabulek určíme snadno $\sin 71°30' = 0{,}948$. A tedy $a = 5{,}5 \,.\, 0{,}948\ \text{cm} \doteq 5{,}2$ cm.

ÚLOHA 7.5. V pravoúhlém trojúhelníku je dána odvěsna a a protilehlý úhel α; určete přeponu c.

Řešení. Zase vyjdeme ze základního vzorce (7.3), odkud vypočteme $c \sin\alpha = a$ a dále dělením číslem $\sin\alpha$ najdeme

$$c = \frac{a}{\sin\alpha}. \tag{7.5}$$

Příklad 7.7. V pravoúhlém trojúhelníku je dána odvěsna $a = 315$ mm a protilehlý úhel $\alpha = 40°$; určete přeponu c.

Řešení. Ze vzorce $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ vypočteme $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ (t. j. najdeme vzorec (7.5)). V našem případě tedy $c = 315$ mm : : $\sin 40° = 315$ mm : $0{,}643 = 489{,}8..$ mm $\doteq 490$ mm.

V řešení předchozích úloh 7.4 a 7.5 jsme si velice snadno odvodili ze základního vzorce (7.3) nové vzorce (7.4) a (7.5). Tyto nové vzorce není třeba si pamatovat právě proto, že si je každý v případě potřeby okamžitě odvodí ze základního (7.3). Přesto je dobře upozornit, že tím byly vlastně dokázány pro pravoúhlý trojúhelník dvě věty:

VĚTA 7.2. Odvěsna pravoúhlého trojúhelníka je rovna jeho přeponě násobené sinem protějšího úhlu, t. j.

$$a = c \sin\alpha. \tag{7.6}$$

VĚTA 7.3. Přepona pravoúhlého trojúhelníka je rovna jeho odvěsně dělené sinem protějšího úhlu, t. j.

$$c = \frac{a}{\sin\alpha}. \tag{7.7}$$

Poznámka. Právě tak, jak jsme v 6. odst. z tangenty došli ke kotangentě, můžeme ze sinu přejít k nové goniometrické funkci, když místo poměru $\frac{a}{c}$ (protější odvěsny ku přeponě) uvažujeme převrácený poměr $\frac{c}{a}$ (přepony k protější odvěsně).

Tato nová funkce se nazývá *kosekans* α a značí se $\operatorname{cosec}\alpha$. V praxi se vůbec neužívá, proto se jí nebudeme blíže zabývat a uvedeme jen její definici.

Definice 7.2. Kosekans ostrého úhlu α (v pravoúhlém trojúhelníku) je poměr přepony k protilehlé odvěsně (k úhlu α):

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}. \tag{7.8}$$

Cvičení.

7.1. Bez použití tabulek najděte a) $\sin 20°$, b) $\sin 77°$ a nalezené výsledky porovnejte s hodnotami uvedenými v tabulkách (úhly sestrojte pomocí úhloměru).

7.2. Je dán pravoúhlý $\triangle\ ABC$; vyjádřete $\sin\beta$.

7.3. Je dán pravoúhlý $\triangle\ VQM$ s pravým úhlem při vrcholu Q a s úhlem ω při vrcholu V; vyjádřete $\sin\omega$.

7.4. V pravoúhlém $\triangle\ ABC$ je odvěsna $a = 5$ cm a přepona $c =$ $= 7$ cm; vypočtěte $\sin\alpha$.

7.5. Sestrojte ostrý úhel α, je-li a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, b) $\sin\alpha = 0{,}653$.

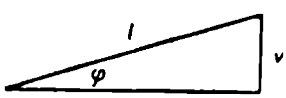
7.6. V tabulkách vyhledejte hodnoty a) $\sin 13°$, b) $\sin 68°$, c) $\sin 22°40'$, d) $\sin 81°50'$, e) $\sin 32°47'$, f) $\sin 46°24'$.

7.7. Dány jsou siny ostrých úhlů; vyhledejte pomocí tabulek příslušné úhly a) $\sin\alpha = 0{,}22495$, b) $\sin\beta = 0{,}92718$, c) $\sin\gamma = 0{,}3$, d) $\sin\delta = 0{,}75$, e) $\sin\varphi = 0{,}38238$, f) $\sin\psi = \frac{5}{14}$. Při použití třímístných tabulek zaokrouhlete nejprve na tři desetinná místa, v posledním případě převeďte nejprve na deset. zlomek.

7.8. V pravoúhlém $\triangle\ ABC$ je odvěsna $a = 6{,}5$ cm, přepona $c =$ $= 10$ cm; jak velký je úhel α protější k dané odvěsně?

7.9. Rovnoměrně stoupající přímá silnice stoupne na délku 500 m o 60 m; v jakém úhlu stoupá?

7.10. V pravoúhlém $\triangle\ MNP$ je dána přepona $\overline{PM} = 16{,}3$ cm a úhel $\omega = 39°$ při vrcholu M; jak velká je odvěsna $\overline{PN}$?



Obr. 27.

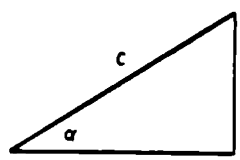
7.11. Nakloněná rovina (obr. 27) o délce $l = 1$ m má sklon $\varphi =$ $= 15°30'$; jaká je její výška?

7.12. V pravoúhlém $\triangle$ ABC je dána odvěsna $a = 4{,}35$ m a protější úhel $\alpha = 53°45'$; vypočtěte jeho přeponu c.

7.13. Vypočtěte délku s površky rotačního kužele, jehož výška je $v = 25$ cm a jehož površky svírají s rovinou základny úhel $\omega = 56°30'$. (Zakreslete si osový řez a v něm si všimněte pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny jsou výška kužele a poloměr základní kružnice a přeponou je površka kužele.)

8. KOSINUS OSTRÉHO ÚHLU

Zbývá ještě blíže si povšimnout poslední z úměr (3.1), a to úměry $b : c = b' : c'$. Úplně stejnou úvahou jako v odst. 4 bychom zase ukázali, že tento poměr přilehlé odvěsny k přeponě je týž pro všechny pravoúhlé trojúhelníky, které mají stejný úhel α a že závisí jen na velikosti α. Goniometrická funkce tímto poměrem definovaná se nazývá *kosinus* α a značí se $\cos\alpha$ (obr. 28). Definujeme tedy:



Obr. 28.

Definice 8.1a. Kosinus ostrého úhlu α (v pravoúhlém trojúhelníku) je poměr přilehlé odvěsny (k úhlu α) k přeponě:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}. \tag{8.1}$$

Máme-li na mysli jen ostré úhly, pak stačí uvádět (a zapamatovat si) jednodušší znění horní definice:

Definice 8.1b. Kosinus je poměr přilehlé odvěsny k přeponě.

Poznámka. Stejně jako sinus je i kosinus ostrého úhlu číslo nepojmenované, vždy kladné a menší než 1; tedy $0 < \cos\alpha < 1$.

Obrátíme se zase nejprve k základním úlohám.

Úloha 8.1. Je dán ostrý úhel α; najděte jeho kosinus.

Řešení. V libovolném pravoúhlém trojúhelníku, jehož jeden úhel je α, určíme délku odvěsny b přilehlé úhlu α a délku přepony c. Poměr $\frac{b}{c}$ je hledaný kosinus.

Příklad 8.1. Vypočtěte cos30°, cos45° a cos60°

Řešení. cos45° určíme pomocí nám známého rovnoramenného trojúhelníka (obr. 7), jehož obě odvěsny mají délku a a přepona je (jak jsme již našli v příkladu 7.1) $c = a\sqrt{2}$. Tedy $\cos 45° = a : a\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Pro stanovení cos30° a cos60° užijeme zase $\triangle\, MQP$ (obr. 13). Jest $\cos 30° = \overline{PQ} : \overline{PM} = \frac{1}{2}a\sqrt{3} : a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. A dále $\cos 60° = \overline{MQ} : \overline{MP} = \frac{1}{2}a : a = \frac{1}{2}$. Celkem jsme našli hodnoty

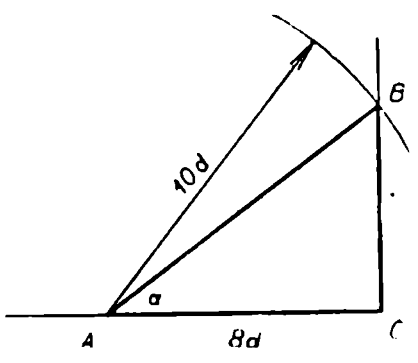
$$\cos 30° = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},\quad \cos 45° = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\quad \cos 60° = \tfrac{1}{2}, \qquad (8.2)$$

jež je výhodné si zapamatovat.

Úloha 8.2. Sestrojte ostrý úhel α, víte-li, že $\cos\alpha = k$ (kde pro k platí $0 < k < 1$).

Řešení. Sestrojíme libovolný pravoúhlý $\triangle\, ABC$, ve kterém by poměr jedné odvěsny b k přeponě c byl právě k; pak úhel α přilehlý k odvěsně b je hledaný.

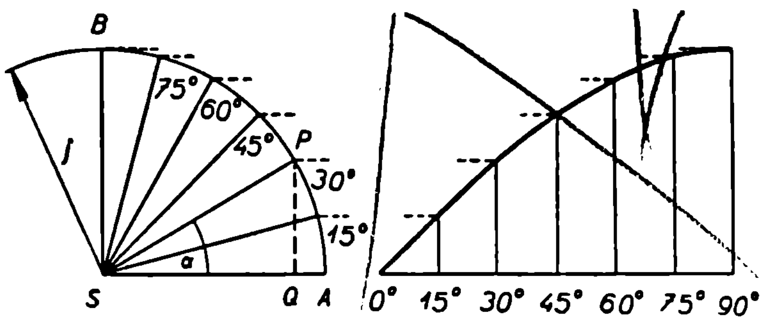
Příklad 8.2. Sestrojte ostrý úhel α, je-li $\cos\alpha = 0{,}8$.



Obr. 29.

Řešení. Na jedno rameno pravého úhlu o vrcholu C (obr. 29) naneseme od vrcholu délku $8d$, kde d je libovolná nenulová úsečka (v obr. $d = 3$ mm). Tím dostaneme bod A. Kruhový oblouk o středu A a poloměru rovném $10d$ protíná druhé rameno v bodě B. Úhel α při vrcholu A v $\triangle\, ABC$ je hledaný úhel.

Grafický obraz kosinu si sestrojíme podobně jako graf sinu (obr. 30a, b). Všimneme si nejprve téhož $\triangle\, SPQ$ jako v obr. 26a. Jeho pomocí najdeme $\cos x = \overline{SQ} : \overline{SP}$; vzhledem k tomu, že $\overline{SP} = j$, udává úsečka $\overline{SQ}$ (měřená jednotkou j) přímo $\cos\alpha$ (po vynechání označení j). V obr. 30a je voleno $\alpha = 30°$, $j = 2$ cm; změříme-li $\overline{SQ}$, najdeme $\overline{SQ} \doteq 17{,}3$ mm $=$



a) Obr. 30. b)

$= 0{,}865 \, . \, 2$ cm $= 0{,}865 \, . \, j$. Našli jsme tedy $\cos 30° \doteq$ $\doteq 0{,}865$. (Přesnější hodnotu najdeme pomocí prvého vzorce (8.2); dosadíme-li tam $\sqrt{3} \doteq 1{,}732$, dostaneme $\cos 30° \doteq$ $\doteq 0{,}866$).

Naneseme-li nyní známým způsobem (obr. 30b) v bodech intervalu $(0°, 90°)$ přiřazených jednotlivým ostrým úhlům takto sestrojené úsečky $\overline{SQ}$, t. j. hodnoty kosinu násobené zvolenou jednotkou j, dostaneme hledaný grafický obraz. Okamžitě vidíme, že křivka znázorňující průběh kosinu klesá zleva doprava. Kosinus se v tomto ohledu chová tedy podobně jako kotangenta. Vyjádříme to přesněji větou:

VĚTA 8.1. Kosinus ostrého úhlu je funkce klesající. Roste-li úhel α v otevřeném intervalu $(0°, 90°)$, pak $\cos\alpha$ klesá v otevřeném intervalu $(1, 0)$.

Důkaz. Uvažujme dva úhly α_1, α_2, pro které je $\alpha_1 < \alpha_2$. Příslušné trojúhelníky sestrojené podle obr. 30a označme $\triangle\, SP_1Q_1$ (s úhlem α_1) a $\triangle\, SP_2Q_2$ (s úhlem α_2). Protože

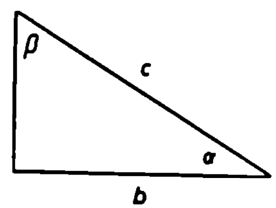
$\alpha_1 < \alpha_2$, musí na jednotkové kružnici být P_2 blíže k bodu B než P_1 a tedy Q_2 blíže k S než Q_1. To však znamená, že $\overline{SQ_2} < \overline{SQ_1}$ a tedy, vzhledem k významu těchto úseček, je $\cos\alpha_2 < \cos\alpha_1$, což je totéž jako $\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2$. Našli jsme tudíž, že pro $\alpha_1 < \alpha_2$ je $\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2$, jinými slovy: s rostoucím úhlem hodnoty kosinu klesají. Blíží-li se úhel α úhlu 0°, pak P se blíží bodu A a také Q se blíží A, t. j. $\cos\alpha$ se blíží 1; blíží-li se α úhlu 90°, pak P se blíží bodu B a Q bodu S, t. j. $\cos\alpha$ se blíží 0.

Pro kosinus si dokážeme hned další významnou větu:

VĚTA 8.2. Kosinus ostrého úhlu je rovný sinu doplňkového úhlu, t. j.

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha). \tag{8.3}$$

Důkaz (obr. 31). Podle definice kosinu je $\cos\alpha = \frac{b}{c}$. Vyjádříme nyní ještě $\sin\beta$; podle definice sinu je $\sin\beta = \frac{b}{c}$ a tedy



Obr. 31.

je $\cos\alpha = \sin\beta$, což se dá se zřetelem k tomu, že $\beta = 90° - \alpha$, napsat ve tvaru (8.3).

Poznámka. Právě vzhledem k vlastnosti vyjádřené větou 8.2 má kosinus svůj název: vyjadřuje totiž *sinus komplementu* (doplňkového úhlu). Úplně stejně jako (8.3) dá se odvodit

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha). \tag{8.4}$$

Užitím vzorce (8,3) můžeme hodnoty cos30°, cos45° a cos60° uvedené v (8.2) najít okamžitě pomocí (7.2).

Vzorec (8.3) umožňuje podobné vhodné uspořádání tabulek hodnot kosinu a sinu, s jakým jsme se setkali již u tangenty a kotangenty. Pro úhly do 45° (v levém sloupci) jsou hodnoty příslušných kosinů uvedeny ve sloupci, který je nahoře nadepsán cos, pro úhly nad 45° (v pravém sloupci) jsou příslušné hodnoty kosinů ve sloupci, který je dole označen cos. A právě vztah (8.3), po případě (8.4), umožňuje zjednodušení. Sloupec nahoře označený cos je zdola označen sin a obráceně.

Není třeba blíže vysvětlovat jak se hodnoty kosinů v tabulkách čtou. Na jednu okolnost je však třeba důrazně upozornit: kosinus je funkce klesající, to znamená, že při interpolaci musíme nalezené opravy odečítat (podobně jako tomu bylo u kotangenty).

Příklad 8.3. Vypočtěte $\cos 26°32'$.

Řešení. Máme-li k disposici jen třímístné tabulky (na str. 180 a 181), pak najdeme

$$\begin{array}{rl} \cos 26°32' = & 0{,}899 \\ & -\ \ \ 4 \qquad \frac{8}{60} \cdot 32 \\ \hline & 0{,}895. \end{array}$$

Příklad 8.4. Najděte ostrý úhel α, pro který je $\cos\alpha =$ $= 0{,}7348$.

Řešení. (Pomocí pětimístných tabulek.)

$$\begin{array}{rrrr} \cos\alpha = & 0{,}73480 & & \\ & 333 & & 42°50' \\ \hline & 147 & 19{,}8 & -7' \\ \hline & & \alpha = & 42°43'. \end{array}$$

Zbývá ještě ukázat užití kosinu. V definičním vzorci (8.1) pro kosinus ostrého úhlu

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \tag{8.5}$$

vystupují úhel α, přilehlá odvěsna b a přepona c. Známe-li kterékoliv dva z těchto základních prvků pravoúhlého trojúhelníka, můžeme zbývající prvek vypočítat právě pomocí vzorce (8.5). Dostaneme celkem tři případy.

Úloha 8.3. V pravoúhlém trojúhelníku je dána odvěsna b a přepona c; určete úhel α přilehlý k dané odvěsně.

Řešení. Pro hledaný úhel α najdeme nejprve kosinus. Jest $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; k této hodnotě kosinu určíme pak již α z tabulek.

Příklad 8.5. V pravoúhlém $\triangle ABC$ je odvěsna $b = 31{,}5$ mm, přepona $c = 40$ mm; určete úhel α.

Řešení. Jest $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, tedy v našem případě $\cos\alpha = \frac{31{,}5\ \text{mm}}{40\ \text{mm}} = 0{,}7875$. Užitím pětimístných tabulek najdeme již snadno (podle příkladu 8.4) $\alpha = 38°3'$.

Úloha 8.4. V pravoúhlém trojúhelníku je dána přepona c a úhel α; vypočtěte přilehlou odvěsnu b.

Řešení. Ze vzorce (8.5) najdeme vynásobením c pro přilehlou odvěsnu $c \cdot \cos\alpha = b$, t. j.

$$b = c \cdot \cos\alpha. \tag{8.6}$$

Příklad 8.6. V pravoúhlém $\triangle ABC$ je $c = 17{,}5$ cm, $\alpha = 65°$; určete přilehlou odvěsnu b.

Řešení. Ze vzorce $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ vypočteme $b = c \cdot \cos\alpha$, tedy v našem případě $b = 17{,}5\ \text{cm} \cdot \cos 65° = 17{,}5 \cdot 0{,}423\ \text{cm} \doteq 7{,}4$ cm.

Úloha 8.5. V pravoúhlém trojúhelníku je dána odvěsna b a přilehlý úhel α; vypočtěte jeho přeponu c.

Řešení. Vyjdeme opět ze vzorce $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, odtud nejprve najdeme $c \cdot \cos\alpha = b$; vydělením číslem $\cos\alpha$ dostaneme pro hledanou přeponu

$$c = \frac{b}{\cos\alpha} \tag{8.7}$$

Příklad 8.7. V pravoúhlém $\triangle ABC$ je odvěsna $b = 15$ cm a přilehlý úhel $\alpha = 23°50'$; určete přeponu c.

Řešení. Ze vzorce $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ vypočteme $c = \frac{b}{\cos\alpha}$; v našem případě $c = 15 \text{ cm} : \cos 23°50' = 15 \text{ cm} : 0{,}915 \doteq 16{,}4$ cm.

V úlohách 8.4 a 8.5 jsme si odvodili nové vzorce (8.6) a (8.7). Zase není třeba si je zvláště pamatovat, protože si je sami vždy okamžitě odvodíme ze základního vzorce (8.5). Obsah vzorců (8.6) a (8.7) lze vyjádřit větami:

VĚTA 8.3. **Odvěsna pravoúhlého trojúhelníka je rovna jeho přeponě násobené kosinem přilehlého úhlu:**

$$b = c \cos\alpha. \tag{8.8}$$

VĚTA 8.4. **Přepona pravoúhlého trojúhelníka je rovna jeho odvěsně dělené kosinem přilehlého úhlu**

$$c = \frac{b}{\cos\alpha}. \tag{8.9}$$

Poznámka 1. Hodláme-li si zapamatovat obsah vět 8.3 a 8.4, potom abychom si zbytečně nepletli příslušné vzorce, jistě poslouží tato poznámka: počítáme-li odvěsnu, t. j. kratší stranu, pak přeponu násobíme kosinem, vždyť kosinus je menší než 1 a násobením přepony číslem menším než 1 dostaneme délku menší než původní. A obráceně: počítáme-li přeponu, jež je delší než odvěsna, pak dělíme kosinem, neboť dělíme-li odvěsnu číslem menším než 1, dostaneme délku větší než původní. Podobnou poznámku jsme mohli ovšem uvést také za větami 7.2 a 7.3.

Poznámka 2. Uvažujeme-li místo poměru $\frac{b}{c}$ převrácený poměr $\frac{c}{b}$ (přepony k přilehlé odvěsně), dostáváme zřejmě zase novou — ale už také poslední — goniometrickou funkci, jež se nazývá *sekans* α a značí se $\sec\alpha$. Stejně jako jsme se nezabývali kosekansem, nebudeme se zabývat ani touto funkcí; uvedeme jen její přesnou definici:

DEFINICE 8.2. Sekans ostrého úhlu α (v pravoúhlém trojúhelníku) je poměr přepony k přilehlé odvěsně (k úhlu α), t. j.

$$\sec\alpha = \frac{c}{b}. \tag{8.10}$$

Poznámka 3. Nyní, když jsme probrali všechny goniometrické funkce ostrého úhlu, uveďme alespoň v poznámce, že v některých tabulkách bývá ještě uvedena zvláštní tabulka hodnot sinu a tangenty úhlů postupujících po $1'$ v intervalu $(0°, 4°)$. Tím jsou ovšem dány také hodnoty kosinu a kotangenty úhlů v intervalu $(86°, 90°)$.

Cvičení.

8.1. Narýsujte úhly a) $15°$, b) $72°$ (bez užití úhloměru) a najděte jejich kosiny; porovnejte s hodnotami z tabulek.

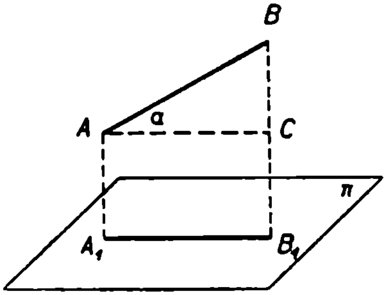
8.2. V pravoúhlém $\triangle\, KLM$ s pravým úhlem při vrcholu K a úhlem λ (μ) při vrcholu L (M) vyjádřete $\cos\lambda$ a $\cos\mu$.

8.3. V pravoúhlém $\triangle\, XYZ$ je odvěsna $\overline{XZ} = 10$ cm a přepona $\overline{XY} = 12{,}5$ cm; vypočtěte $\cos\xi$, kde ξ je úhel při vrcholu X.

8.4. Sestrojte ostrý úhel α, je-li a) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, b) $\cos\alpha = 0{,}345$.

8.5. Pomocí tabulek najděte a) $\cos 13°$, b) $\cos 57°$, c) $\cos 44°40'$, d) $\cos 82°10'$, e) $\cos 19°11'$, f) $\cos 70°6'$.

8.6. K daným hodnotám kosinů vyhledejte užitím tabulek příslušné ostré úhly a) $\cos\alpha = 0{,}78801$, b) $\cos\beta = 0{,}15643$, c) $\cos\xi = 0{,}95$, d) $\cos\eta = 0{,}4$, e) $\cos\zeta = 0{,}44544$, f) $\cos\omega = \frac{4}{5}$. Máte-li jen třímístné tabulky, pak zaokrouhlete předem dané kosiny na tři deset. místa; v posledním případě převeďte na deset. zlomek.



Obr. 32.

8.7. Určete $\cos(90° - \varphi)$, víte-li, že $\sin\varphi = 0{,}353$.

8.8. V pravoúhlém $\triangle\, ABC$ je odvěsna $b = 5$ cm a přepona $c = 14$ cm; jak velký je úhel α přilehlý k odvěsně b?

8.9. Jaký úhel svírá úsečka $\overline{AB} = 1$ dm s průmětnou π (obr. 32), jestliže délka jejího pravoúhlého průmětu $\overline{A_1B_1}$ do π je 6,5 cm?

8.10. V pravoúhlém $\triangle PQR$ je přepona $\overline{PQ} = 6,7$ cm a úhel při vrcholu P je $\varphi = 27°27'$; vypočtěte odvěsnu $\overline{PR}$.

8.11. Určete velikost pravoúhlého průmětu $\overline{A_1B_1}$ úsečky $\overline{AB} = 10,5$ cm (obr. 32), víte-li, že přímka AB svírá s průmětnou úhel $\alpha = 25°$.

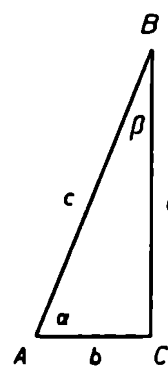
8.12. V pravoúhlém $\triangle RST$ je dána odvěsna $\overline{RT} = 65,5$ cm a úhel při vrcholu R je $\varrho = 33°15'$; určete délku přepony $\overline{RS}$.

8.13. Vypočtěte délku úhlopříčky u obdélníka, je-li jeho jedna strana $a = 7,5$ cm a úhel úhlopříčky u s touto stranou je 35°.

9. ŘEŠENÍ PRAVOÚHLÉHO TROJÚHELNÍKA

V úvodu jsme uvedli, že úkolem trigonometrie je řešení trojúhelníků, čímž rozumíme výpočet všech neznámých hlavních prvků (stran a úhlů) trojúhelníka pomocí jeho daných prvků. Užitím až dosud odvozených vět a vzorců můžeme již řešit *pravoúhlé trojúhelníky.*

Je známo, že pravoúhlý trojúhelník (obr. 33) je určen 1. přeponou a úhlem, 2. odvěsnou a úhlem, 3. přeponou a odvěsnou nebo 4. oběma odvěsnami. Musíme tedy celkem řešit čtyři základní úlohy; vždy ukážeme, jak nejvýhodněji pomocí daných prvků určíme zbývající hlavní prvky. Kromě toho uvedeme ještě navíc, jak se z daných prvků vypočte plošný obsah p trojúhelníka.



Obr. 33.

Poznámka. Je třeba poznamenat, že v dalším nebudeme vlastně řešit žádné nové úlohy; se všemi jsme se již setkali v úlohách předchozích odstavců. Uvedeme proto v řešení úlohy vždy přímo vzorce pro hledané prvky. Je jich celá řada; to však nikterak neznamená, že si nutně musíme všechny uvedené vzorce pamatovat. Kladli jsme stále důraz na to, abychom znali řádně definiční vzorce goniometrických funkcí ostrého úhlu, a to úplně stačí. Uvažme totiž, že dané dva prvky a další hledaný prvek určují trojici prvků; je-li tato trojice tvořena dvěma stranami a úhlem, pak k řešení použijeme vždy té goniometrické funkce uvedeného úhlu, jež je definována zmíněnými dvěma stranami. Z tohoto vzorce se již snadno vypočte hledaný prvek.

Úloha 9.1. Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li dána jeho přepona c a úhel α.

Řešení (obr. 33). Neznámé prvky a, b, β jsou dány těmito vzorci: $a = c \sin\alpha$ (viz (7.6)), $b = c \cos\alpha$ (viz (8.8)), $\beta = 90° -$ $- \alpha$. Jelikož plošný obsah pravoúhlého trojúhelníka je $p = \frac{1}{2}ab$, dostáváme při našem určení $p = \frac{1}{2}c^2 \sin\alpha \cos\alpha$.

Příklad 9.1. Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li $c = 53{,}5$ cm, $\alpha = 26°30'$.

Řešení. Z tabulek najdeme $\sin 26°30' = 0{,}446$, $\cos 26°30' =$ $= 0{,}895$ a dále podle horních vzorců:

$$a = c \sin\alpha;\ a = 53{,}5 \text{ cm} . \sin 26°30' = 53{,}5 \quad 0{,}446 \text{ cm} =$$
$$= 23{,}861 \text{ cm} \doteq 23{,}9 \text{ cm},$$
$$b = c \cos\alpha;\ b = 53{,}5 \text{ cm} \quad \cos 26°30' = 53{,}5 \quad 0{,}895 \text{ cm} =$$
$$= 47{,}8825 \text{ cm} \doteq 47{,}9 \text{ cm},$$
$$\beta = 90° - \alpha;\ \beta = 90° - 26°30' = 63°30',$$
$$p = \tfrac{1}{2}c^2 \sin\alpha \cos\alpha;\ p = \tfrac{1}{2}53{,}5^2 \text{ cm}^2 . 0{,}446 . 0{,}895 \doteq 571{,}3 \text{cm}^2.$$

K poslednímu výsledku uveďme, že kdybychom p počítali přímo podle vzorce $p = \frac{1}{2}ab$ s již vypočtenými přibližnými hodnotami a, b, tedy počítali $p = \frac{1}{2}\, 23{,}9 . 47{,}9 \text{ cm}^2$, pak bychom samozřejmě došli k méně přesnému výsledku, než když počítáme p přímo pomocí daných prvků ze vzorce $p = \frac{1}{2}c^2 \sin\alpha \cos\alpha$.

Úloha 9.2. Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li dána jeho odvěsna a a úhel α (nebo β).

Řešení (obr. 33). Hledáme b, c, β. Platí pro ně $b = a \operatorname{cotg}\alpha$ (viz (6,9)), $c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ (viz (7.7)), $\beta = 90° - \alpha$. Kdyby místo α

byl dán úhel β, pak buď nejdříve vypočteme $\alpha = 90° - \beta$ a užijeme předchozích vzorců, nebo přímo najdeme $b = a \operatorname{tg}\beta$, $c = \dfrac{a}{\cos\beta}$. Pro plošný obsah $p = \frac{1}{2}ab$ najdeme $p = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{cotg}\alpha$ nebo $p = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\beta$.

Příklad 9.2. Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li $a = 18{,}5$ dm, $\alpha = 42°24'$.

Řešení. Nejdříve pomocí tabulek určíme $\sin 42°24' = 0{,}674$, $\operatorname{cotg} 42°24' = 1{,}095$. Užijeme nyní vzorců z úlohy 9.2:

$$b = a \operatorname{cotg}\alpha; \quad b = 18{,}5 \text{ dm} \,.\, \operatorname{cotg} 42°24' = 18{,}5 \,.\, 1{,}095 \text{ dm} \doteq 20{,}3 \text{ dm},$$

$$c = \frac{a}{\sin\alpha}; \quad c = \frac{18{,}5 \text{ dm}}{\sin 42°24'} = 18{,}5 \text{ dm} : 0{,}674 \doteq 27{,}4 \text{ dm},$$

$$\beta = 90° - \alpha; \; \beta = 90° - 42°24' = 47°36',$$

$$p = \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{cotg}\alpha; \quad p = \tfrac{1}{2}\, 18{,}5^2 \text{ dm}^2 \,.\, \operatorname{cotg} 42°24' = \tfrac{1}{2}\, 342{,}25 \,.\, 1{,}095 \text{ dm}^2 \doteq 187{,}4 \text{ dm}^2.$$

Úloha 9.3. Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li dána přepona c a odvěsna a.

Řešení (obr. 33). Hledáme b, α, β. Odvěsnu b určíme pomocí Pythagorovy věty $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ (viz věta 1.2); úhel α najdeme ze vztahu $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$. Úhel β pak již stanovíme z podmínky $\beta = 90° - \alpha$. Pro p dostaneme po dosazení $p = \frac{1}{2}a\sqrt{c^2 - a^2}$. Často, místo abychom počítali b pomocí Pythagorovy věty (což je poměrně nevýhodné, neboť musíme odmocňovat), najdeme raději nejprve α a pak b vypočteme ze vzorce $b = c \cos\alpha$ (viz (8.6)) nebo z $b = a \operatorname{cotg}\alpha$ (viz (6.9)); plošný obsah p počítáme pak přímo podle vzorce $p = \frac{1}{2}ab$ (tedy pomocí vypočtené hodnoty b).

Příklad 9.3. Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li $c = 64{,}6$ cm, $a = 48{,}5$ cm.

Řešení. Postupujeme bez užití Pythagorovy věty. Jest:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\sin\alpha = \frac{48{,}5\ \text{cm}}{64{,}6\ \text{cm}} \doteq 0{,}751$ a tedy $\alpha = 48°40'$,

$b = c \cos\alpha$; $b = 64{,}6\ \text{cm} \quad \cos 48°40' = 64{,}6 \quad 0{,}66\ \text{cm} \doteq$
$\doteq 42{,}6\ \text{cm}$,

$\beta = 90° - \alpha$; $\beta = 90° - 48°40' = 41°20'$,

$p = \frac{1}{2}ab$; $p = \frac{1}{2}\ 48{,}5\ \text{cm} \ .\ 42{,}6\ \text{cm} \doteq 1033\ \text{cm}^2$.

Úloha 9.4. Řešte pravoúhlý trojúhelník, jsou-li dány odvěsny a, b.

Řešení (obr. 33). Hledáme c, α, β. Přeponu c určíme pomocí Pythagorovy věty $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; úhel α najdeme na př. ze vzorce $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$. Pro úhel β užijeme vztahu $\beta = 90° - \alpha$. Plošný obsah p je dán přímo vzorcem $p = \frac{1}{2}ab$. Podobně jako v předchozí úloze i zde se často vyhneme počítání s odmocninami a k výpočtu přepony c raději užijeme již nalezeného úhlu α; počítáme tedy buď $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ (viz (7.7)), nebo $c = \frac{b}{\cos\alpha}$ (viz (8.7)).

Příklad 9.4. Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li $a = 27{,}5$ cm, $b = 34{,}8$ cm.

Řešení. Výpočet provedeme bez užití Pythagorovy věty:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{27{,}5\ \text{cm}}{34{,}8\ \text{cm}} \doteq 0{,}79$ a tedy $\alpha = 38°19'$,

$c = \frac{a}{\sin\alpha}$; $c = \frac{27{,}5\ \text{cm}}{\sin 38°19'} = 27{,}5\ \text{cm} : 0{,}62 \doteq 44{,}4\ \text{cm}$,

$\beta = 90° - \alpha$; $\beta = 90° - 38°19' = 51°41'$,

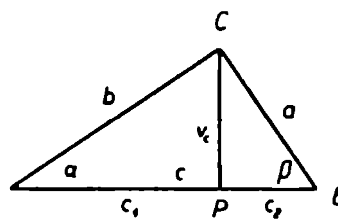
$p = \frac{1}{2}ab$; $p = \frac{1}{2}\ 27{,}5\ \text{cm} \ .\ 34{,}8\ \text{cm} = 478{,}5\ \text{cm}^2$.

Známe-li řešení těchto čtyř základních úloh pro pravoúhlé trojúhelníky, můžeme již přikročit k řešení některých dalších úloh týkajících se na př. určení pravoúhlých trojúhelníků jinými prvky než základními, k řešení rovnoramenných trojúhelníků, obdélníků, kosočtverců, lichoběžníků, pravidelných mnohoúhelníků atd. Úlohu budeme umět řešit, podaří-li se nám v daném útvaru vyhledat nějaké pravoúhlé trojúhelníky (určené základními prvky), pomocí nichž bychom mohli hledané prvky určit.

Vyřešíme několik typických úloh, u kterých právě vynikne zmíněný princip.

a) Všimneme si nejprve řešení *pravoúhlého trojúhelníka určeného jinými než základními prvky.*

Úloha 9.5. Řešte pravoúhlý trojúhelník, určený výškou v_c ke straně c a úhlem α.



Obr. 34.

Řešení (obr. 34). Hledáme a, b, c, β. Výška v_c dělí pravoúhlý $\triangle ABC$ na dva pravoúhlé trojúhelníky APC a BPC. V $\triangle APC$ známe odvěsnu v_c a protější úhel α, tedy podle úlohy 9.2 najdeme $b = \dfrac{v_c}{\sin\alpha}$, $c_1 = v_c \operatorname{cotg}\alpha$. V $\triangle BPC$ zase známe odvěsnu v_c a přilehlý úhel α, neboť $\sphericalangle PCB = \alpha$ a tedy podle téže úlohy je $a = \dfrac{v_c}{\cos\alpha}$, $c_2 = v_c \operatorname{tg}\alpha$. Našli jsme již a, b, ale také c známe, je totiž $c = c_1 + c_2$. Pro β ovšem platí $\beta = 90° - \alpha$. Tím jsou všechny základní prvky $\triangle ABC$ nalezeny.

Příklad 9.5. Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li $v_c = 5$ cm, $\alpha = 48°15'$.

Řešení (obr. 34). Postupujeme podle vzorců uvedených v obecném řešení:

$$b = \frac{v_c}{\sin\alpha};\ b = \frac{5\ \text{cm}}{\sin 48°15'} = 5\ \text{cm} : 0{,}746 \doteq 6{,}7\ \text{cm},$$

$c_1 = v_e \operatorname{cotg}\alpha$; $c_1 = 5\ \text{cm} \,.\, \operatorname{cotg}48°15' = 5\ \text{cm} \,.\, 0{,}892 = 4{,}46\ \text{cm}$,

$a = \dfrac{v_e}{\cos\alpha}$; $a = \dfrac{5\ \text{cm}}{\cos 48°15'} = 5\ \text{cm} : 0{,}666 \doteq 7{,}5\ \text{cm}$,

$c_2 = v_e \operatorname{tg}\alpha$; $c_2 = 5\ \text{cm} \,.\, \operatorname{tg}48°15' = 5\ \text{cm} \,.\, 1{,}121 = 5{,}605\ \text{cm} \doteq$
$\doteq 5{,}6\ \text{cm}$,

$c = c_1 + c_2$; $c = 4{,}46\ \text{cm} + 5{,}6\ \text{cm} \doteq 10{,}1\ \text{cm}$.

ÚLOHA 9.6. Řešte pravoúhlý trojúhelník, znáte-li jeho plošný obsah p a úhel α.

Řešení. Pro plošný obsah platí známý vzorec $p = \frac{1}{2}ab$; odvěsny a, b jsou však vázány ještě na př. vztahem $b = a \,.\, \operatorname{cotg}\alpha$. Dosadíme-li odtud za b do vzorce pro plošný obsah, dostaneme $p = \frac{1}{2}a^2\operatorname{cotg}\alpha$, což je rovnice pro neznámou stranu a; z toho již plyne $a = \sqrt{\dfrac{2p}{\operatorname{cotg}\alpha}} = \sqrt{2p \operatorname{tg}\alpha}$. Určili jsme tedy protější odvěsnu; dále můžeme proto postupovat podle úlohy 9.2.

Příklad 9.6. Vypočtěte obě odvěsny pravoúhlého trojúhelníka, je-li $p = 100\ \text{cm}^2$, $\alpha = 32°20'$.

Řešení. Užijeme výsledku obecného řešení:

$a = \sqrt{2p \operatorname{tg}\alpha}$; $a = \sqrt{2 \,.\, 100\ \text{cm}^2 \,.\, \operatorname{tg} 32°20'} = \sqrt{200 \,.\, 0{,}633}\ \text{cm} \doteq$
$\doteq 11{,}3\ \text{cm}$,

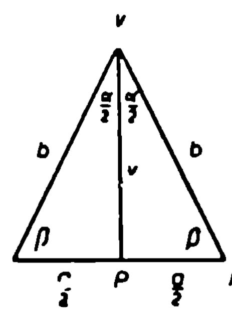
$b = a \operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{2p \operatorname{tg}\alpha \operatorname{cotg}^2\alpha} = \sqrt{2p \operatorname{cotg}\alpha}$;

$b = \sqrt{2 \,.\, 100\ \text{cm}^2 \,.\, \operatorname{cotg}32°20'} = \sqrt{200 \,.\, 1{,}580}\ \text{cm} \doteq 17{,}8\ \text{cm}$.

b) Máme-li řešit *rovnoramenný trojúhelník* (o základně a, ramenech b, úhlu α proti základně a úhlech β při základně — obr. 35), pak jej rozdělíme výškou v k základně na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky $\triangle\ MPV$ a $\triangle\ NPV$. Základními prvky každého z nich jsou: odvěsny $\frac{1}{2}a$, v, přepona b, úhel β protější k odvěsně v, úhel $\frac{1}{2}\alpha$ protější k odvěsně $\frac{1}{2}a$. Řešení rovnoramenných trojúhelníků lze tedy převést na řešení jednoho z těchto pravoúhlých trojúhelníků. Uveďme alespoň stručně řešení všech základních úloh; kromě základních prvků najdeme ještě plošný obsah p; připomeňme ještě, že oba úhly jsou vázány vztahem $\alpha + 2\beta = 180°$.

ÚLOHA 9.7. Řešte rovnoramenný trojúhelník, je-li dána základna a a úhel α (nebo β).

Řešení (obr. 35). Z $\triangle MPV$ určíme $b = \dfrac{\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = \dfrac{a}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}$ $\left(\text{nebo } b = \dfrac{\frac{1}{2}a}{\cos\beta} = \dfrac{a}{2\cos\beta}\right)$. Jelikož $p = \frac{1}{2}av$, musíme ještě najít v. Jest $v = \frac{1}{2}a\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha$ (nebo $v = \frac{1}{2}a\operatorname{tg}\beta$) a tedy $p = \frac{1}{4}a^2\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha$ (nebo $p = \frac{1}{4}a^2\operatorname{tg}\beta$).



Obr. 35.

Příklad 9.7. Řešte rovnoramenný trojúhelník, je-li $a = 48$ mm, $\alpha = 50°$.

Řešení. $b = \dfrac{a}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}$; $b = \dfrac{48\text{ mm}}{2\sin 25°} = \dfrac{48\text{ mm}}{2\,.\,0{,}423} \doteq 56{,}7$ mm. Z rovnice $2\beta + \alpha = 180°$ najdeme $\beta = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = \frac{1}{2}\,.\,130° = 65°$. Konečně $p = \frac{1}{4}a^2\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha$; $p = \frac{1}{4}\,.\,48^2\text{mm}^2\,.\operatorname{cotg}25° = \frac{1}{4}\,.\,2304\,.\,2{,}145\text{ mm}^2 \doteq 1236\text{ mm}^2$.

ÚLOHA 9.8. Řešte rovnoramenný trojúhelník, je-li dáno rameno b a úhel α.

Řešení (obr. 35). Z $\triangle MPV$ plyne $\frac{1}{2}a = b\sin\frac{1}{2}\alpha$ a tedy $a = 2b\sin\frac{1}{2}\alpha$. Pro v najdeme $v = b\cos\frac{1}{2}\alpha$ a tedy $p = \frac{1}{2}av = b^2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$. Kdyby byl dán úhel β, našli bychom nejdříve α a dále bychom počítali podle uvedeného.

Příklad 9.8. Řešte rovnoramenný trojúhelník, je-li $b = 25{,}4$ cm, $\alpha = 22°30'$.

Řešení. $a = 2b\sin\frac{1}{2}\alpha$; $a = 2\,.\,25{,}4\text{ cm}\,.\sin 11°15' = 2\,.\,25{,}4\,.\,0{,}195\text{ cm} \doteq 9{,}9$ cm, $\beta = \frac{1}{2}(180° - \alpha)$; $\beta = \frac{1}{2}(180° - 22°30') = 78°45'$;

$p = b^2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$; $p = 25{,}4^2\text{ cm}^2\,.\sin 11°15'\,.\cos 11°15' = 645{,}16\,.\,0{,}195\,.\,0{,}981\text{ cm}^2 \doteq 123{,}4\text{ cm}^2$.

Úloha 9.9. Řešte rovnoramenný trojúhelník, je-li dána základna a a rameno b.

Řešení (obr. 35). Úhel α najdeme pomocí $\triangle\, MPV$; jest $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{\frac{1}{2}a}{b} = \frac{a}{2b}$. Výšku v vypočteme pomocí Pythagorovy věty $v = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}$ a tedy $p = \frac{1}{2}av = \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}$ (nebo bez užití Pythagorovy věty $v = b\cos\frac{1}{2}\alpha$ a dále $p = \frac{1}{2}ab\,.\,\cos\frac{1}{2}\alpha$).

Příklad 9.9. Řešte rovnoramenný trojúhelník, je-li $a = 7{,}3$ cm, $b = 4{,}8$ cm.

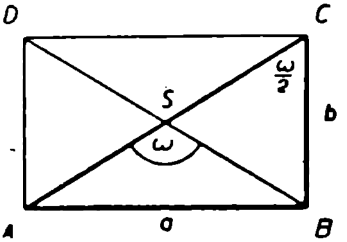
Řešení.

$\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{a}{2b}$; $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{7{,}3\text{ cm}}{2\,.\,4{,}8\text{ cm}} = 7.3 : 9{,}6 \doteq 0{,}76042$, tedy $\frac{1}{2}\alpha = 49°30'$, $\alpha = 99°$, $\beta = 90° - \frac{1}{2}\alpha$; $\beta = 90° - 49°30' = 40°30'$,

$p = \frac{1}{2}ab\cos\frac{1}{2}\alpha$; $p = \frac{1}{2}\,.\,7{,}3\text{ cm}\,.\,4{,}8\text{ cm}\,.\,0{,}649 \doteq 11{,}37\text{ cm}^2$.

c) Přikročme nyní k *řešení některých čtyřúhelníků* (obdélníků, kosočtverců, lichoběžníků), u kterých se pomocný pravoúhlý trojúhelník sestrojí velice snadno. Na př. obdélník je rozdělen úhlopříčkou na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky; kosočtverec je úhlopříčkami rozdělen na čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky atd. Uveďme alespoň některé příklady.

Příklad 9.10. Vypočtěte plošný obsah obdélníka, pro který je dána strana $a = 17{,}9$ cm a úhel úhlopříček $\omega = 128°36'$

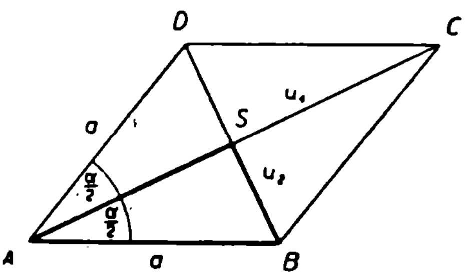


Obr. 36.

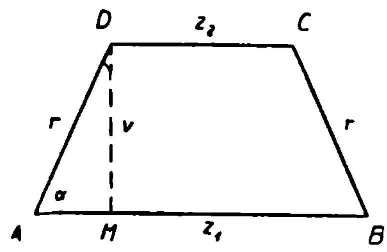
Řešení (obr. 36). Stačí určit stranu b; v pravoúhlém $\triangle\, ABC$ je úhel při vrcholu C rovný $\frac{1}{2}\omega$ a tedy $b = a\cot\text{g}\frac{1}{2}\omega$. Pro plošný obsah najdeme pak $p = ab = a^2\cot\text{g}\frac{1}{2}\omega$. V našem případě je $p = 17{,}9^2\text{ cm}^2\,.\,\cot\text{g}\,64°18' = 320{,}41\,.\,0{,}481\text{ cm}^2 \doteq 154{,}1\text{ cm}^2$.

Příklad 9.11. Vypočtěte úhlopříčky u_1, u_2 kosočtverce, který je dán stranou $a = 42{,}5$ mm a úhlem $\alpha = 57°40'$ sousedních stran.

Řešení (obr. 37). Z pravoúhlého $\triangle\, ABS$, ve kterém známe přeponu a a úhel $\frac{1}{2}\alpha$, určíme obě odvěsny, t. j. $\frac{1}{2}u_1$ a $\frac{1}{2}u_2$. Jest $\frac{1}{2}u_1 = a\cos\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}u_2 = a\sin\frac{1}{2}\alpha$, tedy $u_1 = 2a\cos\frac{1}{2}\alpha$, $u_2 = 2a\sin\frac{1}{2}\alpha$. Dosazením daných hodnot najdeme $u_1 = 2\,.\,42{,}5\text{ mm}\,.\,\cos 28°50' = 2\,.\,42{,}5\,.\,0{,}876\text{ mm} \doteq 74{,}5\text{ mm}$, $u_2 = 2\,.\,42{,}5\text{ mm}\,.\,\sin 28°50' = 2\,.\,42{,}5\,.\,0{,}482\text{ mm} \doteq 41\text{ mm}$.



Obr. 37.

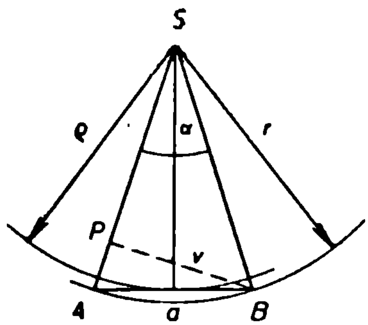


Obr. 38.

Příklad 9.12. Určete plošný obsah rovnoramenného lichoběžníka, jsou-li jeho základny $z_1 = 83{,}5$ cm, $z_2 = 31{,}7$ cm a úhel ramene se základnou $\alpha = 67°15'$

Řešení (obr. 38). Pro plošný obsah platí známý vzorec $p = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)v$. Stačí určit výšku v, jež je odvěsnou pravoúhlého $\triangle\, AMD$, ve kterém známe úhel α a přilehlou odvěsnu $\overline{AM} = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)$. Jest $v = \overline{AM}\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha$ a tedy $p = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)\,.\,\frac{1}{2}(z_1 - z_2)\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{4}(z_1{}^2 - z_2{}^2)\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Po dosazení najdeme $p = \frac{1}{4}(83{,}5^2\text{ cm}^2 - 31{,}7^2\text{ cm}^2)\ \mathrm{tg}\,67°15' = \frac{1}{4}(6972{,}25 - 1004{,}89)\,.\,2{,}386\text{ cm}^2 \doteq 3560\text{ cm}^2$.

d) Také u pravidelných mnohoúhelníků snadno najdeme pomocný pravoúhlý trojúhelník. *Pravidelný n-úhelník* je totiž složen z n shodných rovnoramenných trojúhelníků (obr. 39), které již umíme řešit. Úhel proti základně známe: je $\alpha = \dfrac{360°}{n} = \dfrac{4R}{n}$. U pravidelného n-úhelníka nás zajímají poloměr r kružnice opsané, poloměr ϱ kružnice vepsané a strana a. Jsou to postupně rameno, výška a základna každého ze zmíněných rovnoramenných trojúhelníků. Je-li tedy (kromě již známého úhlu α) dán jeden z těchto prvků, můžeme již ostatní vypočítat; obyčejně hledáme také plošný obsah p.



Obr. 39.

Úloha 9.10. Řešte pravidelný n-úhelník, je-li dán poloměr r kružnice opsané.

Řešení (obr. 39). Jest $\frac{1}{2}a = r \sin\frac{1}{2}\alpha = r \sin\frac{2R}{n}$, tedy $a = 2r \sin\frac{2R}{n}$. Dále $\varrho = r \cos\frac{2R}{n}$. Je li p' plošný obsah $\triangle ABS$, pak $p = np'$. Pro p' však platí $p' = \frac{1}{2}a\varrho = r^2 \sin\frac{2R}{n} \cos\frac{2R}{n}$ a tedy $p = nr^2 \sin\frac{2R}{n} \cos\frac{2R}{n}$. Tento vzorec můžeme poněkud zjednodušit. Vypočteme totiž pomocí pravoúhlého $\triangle BPS$ výšku v ke straně AS v $\triangle ABS$. Jest $v = r \sin\alpha = r \sin\frac{4R}{n}$. Tedy $p' = \frac{1}{2}rv = \frac{1}{2}r^2 \sin\alpha = \frac{1}{2}r^2 \sin\frac{4R}{n}$; pak je $p = np' = \frac{1}{2}nr^2 \sin\frac{4R}{n}$.

Příklad 9.13. Řešte pravidelný sedmiúhelník, je-li $r = 5$ cm.

Řešení. Pro pravidelný sedmiúhelník je $\alpha = \frac{4R}{7} \doteq 51°26'$

Postupně najdeme:

$a = 2r \sin\frac{2R}{n}$; $a = 2.5\,\text{cm} . \sin 25°43' = 2.5 . 0{,}434\,\text{cm} \doteq 4{,}3\,\text{cm}$,

$\varrho = r \cos \frac{2R}{n}$; $\varrho = 5$ cm. $\cos 25°43' = 5 \,.\, 0{,}901$ cm $\doteq 4{,}5$ cm,

$p = \frac{1}{2} nr^2 \sin \frac{4R}{n}$; $p = \frac{1}{2} \,.\, 7 \,.\, 5^2$ cm$^2 \,.\, \sin 51°26' = \frac{7}{2} \,.\, 25 \,.$

$.\, 0{,}782$ cm$^2 \doteq 68{,}4$ cm^2.

ÚLOHA 9.11. Řešte pravidelný n-úhelník, je-li dána strana a.

Řešení (obr. 39). Především je $r = \dfrac{\frac{1}{2}a}{\sin \frac{1}{2}\alpha} = \dfrac{a}{2 \sin \frac{2R}{n}}$.

Dále $\varrho = \frac{1}{2} a \operatorname{cotg} \frac{2R}{n}$ a tedy $p = np' = n.\ \frac{1}{2} a\varrho =$

$= \frac{1}{4} na^2 \operatorname{cotg} \frac{2R}{n}$.

Příklad 9.14. Vypočtěte plošný obsah pravidelného osmiúhelníka, je-li $a = 10$ cm.

Řešení. $p = \frac{1}{4} na^2 \operatorname{cotg} \frac{2R}{n}$; $p = \frac{1}{4} \,.\, 8 \,.\, 10^2$ cm$^2 \,.\, \operatorname{cotg} 22°30' =$

$= \frac{8}{4} \,.\, 100 \,.\, 2{,}41421$ cm$^2 \doteq 482{,}8$ cm^2.

ÚLOHA 9.12. Řešte pravidelný n-úhelník, je-li dán poloměr ϱ kružnice vepsané.

Řešení (obr. 39). Snadno najdeme $a = 2\varrho \operatorname{tg} \frac{2R}{n}$, $r = \varrho :$

$: \cos \frac{2R}{n}$ a $p = np' = n\frac{1}{2} a\varrho = n\varrho^2 \operatorname{tg} \frac{2R}{n}$.

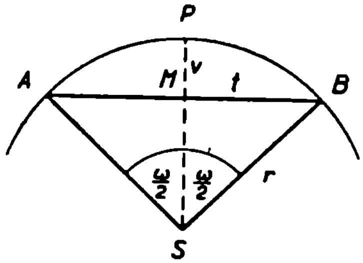
Příklad 9.15. Vypočtěte stranu a pravidelného desetiúhelníka, je-li $\varrho = 8{,}5$ cm.

Řešení. $a = 2\varrho \operatorname{tg} \frac{2R}{n}$; $a = 2 \,.\, 8{,}5$ cm $.\, \operatorname{tg} 18° = 2 \,.\, 8{,}5$

$.\, 0{,}32492$ cm $= 8{,}5 \,.\, 0{,}64984$ cm $\doteq 5{,}5$ cm.

Poznámka. Na základě vzorců, jež jsme si odvodili v úlohách 9.10 ÷ 9.12, jsou sestavovány tabulky pro pravidelné mnohoúhelníky. Čteme v nich na př., že strana pravidelného desetiúhelníka je $a = 0{,}64984\varrho$; úloha 9.12 nám říká, že koeficient při ϱ v tomto vzorci není nic jiného než $2\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{10} = 2\,\mathrm{tg}\,18^\circ$ (porovnejte s příkladem 9.15).

e) Ještě krátce si všimneme *tětivy t kružnice* (obr. 40); není-li tětiva průměrem kružnice, pak je základnou rovnoramenného trojúhelníka, jehož ramena se rovnají poloměru r kružnice a úhel proti základně je středový úhel ω příslušný tětivě t. Vzájemný vztah mezi prvky r, t, ω je dán vzorcem



Obr. 40.

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\frac{1}{2}t}{r} = \frac{t}{2r}.$$

Poznámka. Tětiva dělí kruh na dvě kruhové úseče, z nichž se obyčejně uvažuje ta, jejíž oblouk přísluší středovému úhlu $\omega < 180^\circ$. Výškou v úseče se rozumí vzdálenost středu P příslušného oblouku od středu M tětivy. Tedy $v = \overline{PS} - \overline{MS} = r - r\cos\frac{1}{2}\omega = r(1 - \cos\frac{1}{2}\omega)$. Plošný obsah kruhové úseče u příslušné středovému úhlu ω vypočteme, když od plošného obsahu kruhové výseče $SAPB$ odečteme plošný obsah rovnoramenného $\triangle\, SAB$. Plošný obsah výseče je $\frac{\pi r^2}{360^\circ}\omega = \frac{1}{2}r^2 \operatorname{arc}\omega$ a plošný obsah $\triangle\, SAB$ (podle vzorce $p' = \frac{1}{2}r^2 \sin\alpha$ pro plošný obsah rovnoramenného trojúhelníka, který jsme si mimochodem odvodili v úloze 9.10) je $\frac{1}{2}r^2 \,.\, \sin\omega$, tedy plošný obsah úseče u je

$$u = \tfrac{1}{2}r^2 \operatorname{arc}\omega - \tfrac{1}{2}r^2 \sin\omega = \tfrac{1}{2}(\operatorname{arc}\omega - \sin\omega)r^2.$$

Příklad 9.16. Vypočtěte délku tětivy t příslušné středovému úhlu $\omega = 116^\circ$ v kružnici o poloměru $r = 15$ cm.

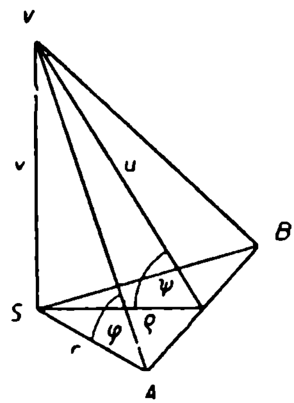
Řešení. Ze vztahu $\sin\frac{1}{2}\omega = \frac{t}{2r}$ plyne $t = 2r \sin\frac{1}{2}\omega$ a tedy

$t = 2 \,.\, 15\,\text{cm} \,.\, \sin 58^\circ = 2 \,.\, 15 \,.\, 0{,}84805\,\text{cm} = 15 \,.\, 1{,}69610\,\text{cm} \doteq$
$\doteq 25{,}4\,\text{cm}$.

Poznámka. Rovněž zde poznamenejme, že hodnoty t, v, u bývají vypočteny ve zvláštních tabulkách pro středové úhly postupující po 1°. Tak na př. pro úhel $\omega = 116^\circ$ najdeme v těchto tabulkách hodnotu $t = 1{,}69610r$; podle našeho výpočtu koeficient u r jest $2 \,.\, \sin 58^\circ$ (porovnejte s příkladem 9.16).

f) Také ve *stereometrii* (která se zabývá prostorovými úlohami) můžeme někdy k řešení úlohy použít vhodně zvolených pravoúhlých trojúhelníků. Ukažme to alespoň na jedné úloze.

ÚLOHA 9.13. Najděte úhel φ pobočných hran a úhel ψ pobočných stěn pravidelného n-bokého jehlanu s podstavou, je-li podstavná hrana a a pobočná hrana b.



Obr. 41.

Řešení (obr. 41). Podstavou je pravidelný n-úhelník, jehož základní prvky jsou $\alpha = \dfrac{4R}{n}$, r, ϱ, a. Především je $\cos\varphi =$ $= r : b$, kde $r = a : 2\sin\dfrac{2R}{n}$ (viz úloha 9.11). Tím je určen úhel φ. Podobně pro ψ najdeme $\cos\psi = \varrho : u$, kde u je výška ke straně a v pobočné stěně (a tedy $u = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}$) a kde ϱ jsme vypočetli (viz úlohu 9.11) již dříve, $\varrho = \frac{1}{2}a \operatorname{cotg}\dfrac{2R}{n}$.

Příklad 9.17. Určete φ a ψ pro pravidelný jehlan čtyřboký, jehož $a = 15{,}3$ cm, $b = 23{,}4$ cm.

Řešení. V tomto případě je $r = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, $\varrho = \frac{1}{2}a$ a tedy

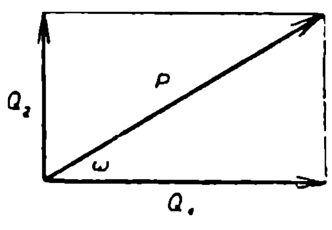
$$\cos\varphi = \frac{r}{b} = \frac{a\sqrt{2}}{2b};\ \cos\varphi = \frac{15{,}3\,\text{cm} \,.\, \sqrt{2}}{2 \,.\, 23{,}4\,\text{cm}} \doteq 0{,}462,\ \varphi = 62^\circ 28'$$

Dále je $\cos\psi = \frac{\varrho}{u} = \frac{a}{2\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}}$; $\cos\psi = \frac{15{,}3}{2\sqrt{23{,}4^2 - \frac{1}{4}\,15{,}3^2}} \doteq$ $\doteq 0{,}346$, $\psi = 69°45'$.

g) Až dosud jsme se zabývali jen úlohami z geometrie, ve kterých vyhledání vhodného pravoúhlého trojúhelníka bylo celkem průzračné. V řadě *praktických příkladů* však přistupují obtíže, které spočívají hlavně v tom, že na prvý pohled není patrno jejich geometrické jádro. Podaří-li se nám geometrisovat úlohu, pak další výpočet je již snadný. Zase uveďme jen jednu typickou úlohu.

ÚLOHA 9.14. Danou sílu P (vyjádřenou v kg) rozložte na dvě k sobě kolmé složky Q_1, Q_2 tak, aby úhel PQ_1 byl rovný ω (při čemž $0° < \omega < 90°$).

Řešení (obr. 42). Především je třeba z fysiky znát, že sílu lze znázornit úsečkou (při vhodné volbě jednotky, na př. 1 kg znázorníme úsečkou délky 1 cm) určitého směru a smyslu, tedy t. zv. *orientovanou úsečkou*. Úhlem ω sil P, Q_1 rozumíme úhel příslušných orientovaných úseček. Rčením „rozložte sílu P ve složky Q_1, Q_2" rozumíme nalézt velikosti sil Q_1 a Q_2, t. j. délky znázorňujících úseček. Další je již zřejmé. Geometricky úloha zní: Najděte strany Q_1 a Q_2 obdélníka, znáte-li jeho úhlopříčku P a úhel ω úhlopříčky P se stranou Q_1. Pro strany Q_1 a Q_2 najdeme délky $Q_1 = P\cos\omega$, $Q_2 = P\sin\omega$. Výsledek zase přečteme fysikálně: hledané složky jsou $P\cos\omega$ a $P\sin\omega$. Pro přesnost dodejme, že jsme mlčky předpokládali, že síla P není nulová.



Obr. 42.

Příklad 9.18. Sílu $P = 220$ kg rozložte na dvě k sobě kolmé složky Q_1, Q_2 tak, aby $\sphericalangle PQ_1 = \omega = 35°10'$.

Řešení. $Q_1 = P \cos\omega$; $Q_1 = 220 \text{ kg} \,.\, \cos 35°10' = 220 \,.\, 0{,}817 \text{ kg} \doteq 179{,}7 \text{ kg}$. $Q_2 = P \sin\omega$; $Q_2 = 220 \text{ kg} \,.\, \sin 35°10' = 220 \,.\, 0{,}576 \text{ kg} \doteq 126{,}7 \text{ kg}$.

Cvičení.

Řešte pravoúhlý trojúhelník z daných prvků, jestliže a, b jsou odvěsny, α, β protější úhly, c přepona, v_c výška k přeponě, p plošný obsah:

9.1. a) $c = 100$ cm, $\alpha = 21°30'$; b) $c = 17{,}8$ cm, $\alpha = 57°30'$; c) $c = 12{,}8$ cm, $\beta = 20°$.

9.2. a) $a = 51{,}7$ cm, $\alpha = 35°30'$; b) $a = 113$ mm, $\beta = 16°40'$; c) $b = 91$ mm, $\beta = 49°12'$; d) $b = 6{,}3$ cm, $\alpha = 71°55'$.

9.3. a) $c = 45$ mm, $a = 29$ mm; b) $c = 8{,}3$ cm, $b = 6{,}2$ cm.

9.4. a) $a = 13$ cm, $b = 7{,}5$ cm; b) $a = 65{,}3$ cm, $b = 27{,}8$ cm.

9.5. a) $v_c = 2{,}7$ cm, $\alpha = 31°50'$; b) $v_c = 10$ cm, $\beta = 76°$.

9.6. a) $a = 45{,}6$ cm, $v_c = 17{,}3$ cm; b) $b = 210$ mm, $v_c = 150$ mm.

9.7. a) $p = 23{,}8 \text{ cm}^2$, $\alpha = 40°$; b) $p = 1 \text{ dm}^2$, $\beta = 17°30'$.

9.8. a) $p = 17 \text{ cm}^2$, $a = 5{,}4$ cm; b) $p = 25 \text{ dm}^2$, $b = 125$ cm.

Řešte rovnoramenný trojúhelník z daných prvků, jestliže a je základna, b rameno, α úhel proti základně, β úhel při základně, v výška k základně:

9.9. a) $a = 6$ cm, $\alpha = 32°$; b) $a = 73{,}5$ mm, $\beta = 28°16'$.

9.10. a) $b = 45$ mm, $\alpha = 45°$; b) $b = 16{,}3$ cm, $\beta = 70°$.

9.11. $a = 126$ mm, $b = 76{,}8$ mm.

9.12. $a = 10$ cm, $v = 15$ cm.

9.13. $b = 85$ mm, $v = 67$ mm.

9.14. Určete plošný obsah obdélníka, je-li dána jeho strana $b = 3{,}5$ cm a úhel úhlopříček $\omega = 73°20'$.

9.15. Vypočtěte úhel úhlopříček obdélníka, jsou-li jeho strany $a = 8{,}4$ cm, $b = 4{,}5$ cm.

9.16. Vypočtěte délku úhlopříček u_1, u_2 kosočtverce, je-li jeho strana $a = 38{,}7$ mm, úhel jeho stran $\alpha = 43°20'$.

9.17. Určete úhel sousedních stran kosočtverce, jehož jedna úhlopříčka $u_1 = 8$ cm a strana $a = 4{,}5$ cm.

9.18. V rovnoramenném lichoběžníku jsou dány základny $z_1 = 75$ mm, $z_2 = 63$ mm a úhel ramene se základnou $\alpha = 55°30'$; vypočtěte plošný obsah.

9.19. Najděte délku základny z_2 rovnoramenného lichoběžníka, je-li $z_1 = 100$ mm, délka ramene $r = 37{,}3$ mm a úhel ramene se základnou $\alpha = 66°$.

Řešte pravidelný n-úhelník, je-li a jeho strana, r poloměr kružnice opsané, ϱ poloměr kružnice vepsané, p plošný obsah:

9.20. a) $n = 5$, $r = 6{,}5$ cm; b) $n = 10$, $r = 10$ cm.

9.21. a) $n = 7$, $a = 5$ cm; b) $n = 8$, $a = 4{,}5$ cm.
9.22. a) $n = 5$, $\varrho = 10$ cm; b) $n = 7$, $\varrho = 3{,}8$ cm.
9.23. a) $n = 5$, $p = 100$ cm^2; b) $n = 8$, $p = 100$ cm^2.

9.24. Vypočtěte délku tětivy t příslušné středovému úhlu $\omega = 75°$ v kružnici o poloměru $r = 25$ cm.

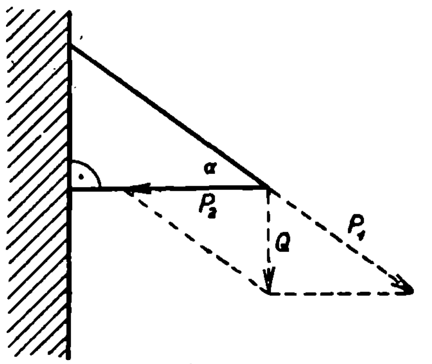
9.25. Jaký poloměr má kružnice, v níž středovému úhlu $\omega = 73°40'$ přísluší tětiva $t = 60$ cm?

9.26. V kružnici o poloměru $r = 6{,}5$ cm jest dána tětiva $t = 43$ mm; najděte příslušný středový úhel ω.

9.27. Jaká je výška v úseče příslušející středovému úhlu $110°$ v kružnici o poloměru $r = 7{,}5$ cm?

9.28. Je dán pravidelný čtyřstěn; vypočtěte a) úhel jeho hran se stěnami, b) úhel jeho stěn.

9.29. Určete velikost výslednice R dvou k sobě kolmých sil $P_1 = 65$ kg, $P_2 = 48$ kg působících na hmotný bod; jak veliký je úhel ω, který výslednice R svírá se silou P_1?



Obr. 43.

9.30. Rozložte sílu $R = 100$ kg na dvě k sobě kolmé složky P_1 a P_2 tak, aby $\omega = \sphericalangle P_1R = 27°40'$.

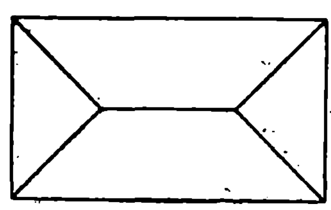
9.31. Prutový nosník (obr. 43), jehož pruty svírají úhel $\alpha = 22°30'$, je zatížen břemenem $Q = 275$ kg; stanovte namáhání na tah (P_1) a tlak (P_2).

9.32. Jaká je délka převodového řemene u převodu, jehož jedno kolo má průměr $d_1 = 850$ mm, druhé $d_2 = 250$ mm a vzdálenost středů obou kol je $l = 2250$ mm při a) otevřeném, b) zkříženém opásání?

9.33. Jaké je dovolené zatížení krátkého dutého sloupku, jehož průřez je omezen pravidelným osmiúhelníkem o malém průměru $d_1 = 230$ mm a soustřednou kružnicí o průměru $d_2 = 210$ mm (dovolené zatížení je $z = 7$ kg/mm^2, což čteme 7 kg na mm^2; $d_1 = 2\varrho$, kde ϱ je poloměr kružnice vepsané)?

9.34. Kolik m^3 vody proteče za hodinu kanálem lichoběžníkového průřezu, je-li šířka jeho dna $z = 3{,}5$ m, mají-li jeho stěny sklon $65°$ a $40°$ a je-li průměrná výška vody v kanále $h = 1{,}25$ m (rychlost vody je $v = 0{,}9$ m/sec)?

9.35. Vypočtěte plošnou velikost střechy nad obdélníkovým půdorysem (obr. 44) o rozměrech $a = 9{,}5$ m, $b = 12{,}5$ m, jestliže sklon střechy je $\alpha = 27°30'$.


Obr. 44.

Poznámka. Kdo neumí počítat s logaritmy, může tento odstavec vynechat, neboť se v něm jen ukazuje, jak můžeme pohodlněji a přesněji užitím logaritmů provádět nám již známé výpočty.

V předcházejících odstavcích a zvláště v posledním jsme se při trigonometrickém řešení úloh stále setkávali s násobením a dělením. Mnozí z vás vědí, že logaritmováním lze tyto početní výkony zjednodušit a převést na sčítání a odčítání — ovšem logaritmů daných čísel. Přitom mocnění a odmocňování se převádí na násobení a dělení. Je nasnadě položit si otázku, jak lze tohoto podstatného zjednodušení výpočtu užít při řešení goniometrických úloh. Zřejmě stačí znát kromě (dekadických) logaritmů obyčejných čísel ještě (dekadické) logaritmy goniometrických čísel*).

Tyto (dekadické, někdy také nazývané Briggsovy) logaritmy goniometrických funkcí jsou sestaveny v tabulkách obdobným způsobem jako hodnoty goniometrických funkcí. Úhly v intervalu (0°, 45°) jsou uvedeny vlevo a hodnoty logaritmů dané funkce (na př. sinu) se čtou v příslušném řádku a ve sloupci, který nahoře nese označení log uvažované funkce (tedy v našem případě logsin, viz obr. 45). Úhly v intervalu (45°, 90°) jsou uvedeny vpravo, hodnoty se čtou ve sloupci, který je označen dole. Hodnoty logaritmů goniometrických funkcí bývají obyčejně zkracovány na čtyři nebo pět desetinných míst; podle toho se také říká čtyřmístné nebo pětimístné**) tabulky. V pětimístných tabulkách

---

*) O logaritmech, logaritmických tabulkách a počítání s nimi na př. poučí jeden ze svazků této knižnice Vítězslav Jozífek: *O logaritmech a logaritmických tabulkách*, Brána k vědění, sv. 7 (Praha, 1949, JČMF).

**) V dříve zmíněných Valouchových tabulkách (viz pozn. na str. 30) jsou jak čtyřmístné, tak pětimístné tabulky logaritmů hodnot goniometrických funkcí.

(a jen o nich budeme mluvit) postupují úhly po 1′ (obr. 45), každému stupni je obyčejně věnována jedna stránka tabulek. Pro logaritmy sinů a tangent malých úhlů (do 5′) a tedy současně pro logaritmy kosinů a kotangent velkých úhlů (přes 89°55′) bývá připojena přesnější tabulka pro úhly postupující po 1″

Protože — jak jsme dříve našli — jsou hodnoty sinu a kosinu ostrých úhlů čísla mezi 0 a 1, jsou jejich logaritmy záporná čísla. Na př. $\log\sin 30° = \log\frac{1}{2} = -\log 2 = -0{,}30103$. Z praktických důvodů se proto uvádí v tabulkách místo hodnot $\log\sin\alpha$ a $\log\cos\alpha$ vždy jejich doplněk do 10. Podobně i pro logaritmy tangenty a kotangenty. Tedy v horním případě najdeme v tabulkách pod logsin30° hodnotu 9,69897. Pro její skutečnou hodnotu ovšem platí $\log\sin 30° = -0{,}30103 = 10 - 0{,}30103 - 10 = 9{,}69897 - 10$. *Číslo — 10 (t. j. charakteristika — 10) není v tabulkách uváděno a je ho třeba vždy k hodnotám nalezeným v tabulkách připojit.*

22°

	logsin	d.
0	9,57 358	
		31
1	57 389	31
2	57 420	31
3	57 451	31
4	57 482	32
5	9,57 514	

Obr. 45.

Nyní již čtení tabulek nebude činit žádné obtíže. Na př. pro logsin22°3′ najdeme (obr. 45) 9,57451 — 10. Také však obráceně, víme-li, že na př. $\log\sin\alpha = 9{,}57389 - 10$, pak z tabulek snadno vyhledáme $\alpha = 22°1'$ (obr. 45). Není-li daný úhel nebo daný logaritmus některé z goniometrických funkcí uveden v tabulkách, pak užijeme *interpolace*. Princip interpolace je založen na téže myšlence jako interpolace goniometrických funkcí. Omezíme-li se totiž na malé intervaly úhlů, jsou zřejmě rozdíly úhlů vzatých z tohoto intervalu přibližně úměrny rozdílům logaritmů příslušných goniometrických hodnot. Při vhodné volbě zmíněného intervalu je chyba tak malá, že nalezené hodnoty (určené na pět desetinných míst) můžeme vzít za přesné hodnoty (zaokrouhlené na pět desetinných míst).

Příklad 10.1. Určete $\log\sin 22°3'27''$

Řešení. V tabulkách (obr. 45) najdeme jen hodnoty $\log\sin 22°3' = 9{,}57451 - 10$ a $\log\sin 22°4' = 9{,}57482 - 10$. Vzroste-li tedy úhel z $22°3'$ o $1'$ na $22°4'$, vzroste logaritmus jeho sinu o 31 jednotek posledního desetinného místa (tedy o 31 stotisícin). Na $1''$ (z intervalu $\langle 22°3', 22°4' \rangle$) připadá tedy 31:60 jednotek posledního desetinného místa; $27''$ přísluší pak přírůstek (*oprava*) $\frac{31}{60} \cdot 27 \doteq 14$ jednotek posledního deset. místa. Protože sinus ostrého úhlu je funkce rostoucí, je také jeho logaritmus funkce rostoucí, a proto opravu *přičteme*. Je tedy $\log\sin 22°3'27'' = 9{,}57451 - 10 + 0{,}00014 =$ $= 9{,}57465 - 10$. Celý výpočet napíšeme přehledně takto:

$$\begin{aligned} \log\sin 22°3'27'' &= 9{,}57451 - 10 \\ + \tfrac{31}{60} \cdot 27 \ldots \quad & \quad \underline{\phantom{9{,}574}14} \\ & \quad 9{,}57465 - 10 \end{aligned}$$

Diference sousedních hodnot logaritmů (v našem případě 31 stotisícin) bývá v tabulkách přímo uváděna ve sloupci označeném *d.*, a to v jednotkách posledního desetinného místa (obr. 45). V tabulkách bývají však často vypočítány i opravy příslušející jednotlivým vteřinám, a tó v části označené *P. P.* (*partes proportionales* — úměrné dílky). Pro každou *tabulkovou diferenci*, jež se vyskytuje na příslušné stránce tabulek (v našem případě pro diferenci 31), jsou vypočteny opravy v jednotkách pátého desetinného místa, a to pro $1'' \div 10''$, $20''$, $30''$, $40''$ a $50''$. Tak v našem případě najdeme pro $20''$ opravu 10,7 a pro $7''$ opravu 3,7, dohromady pro $27''$ opravu $14{,}4 \doteq 14$, jak jsme našli přímým výpočtem.

Příklad 10.2. Určete $\log\cos 37°15'32''$.

Řešení.

$$\begin{array}{rrl} \log\cos 37°15'32'' = & 9{,}90091 & - 10 \\ - \frac{9}{60} \cdot 32 & - \quad 5 & \\ \hline & 9{,}90086 & - 10 \end{array}$$

Kosinus ostrého úhlu je funkce klesající, proto opravu musíme *odečíst*. Abychom předešli chybám, které se tu často činí, je dobré předem si v tabulkách zjistit, mezi kterými hodnotami musí hledaná hodnota logaritmu ležet.

Příklad 10.3. Určete $\log\mathrm{tg}\, 63°47'56''$.

Řešení.

$$\begin{array}{rrl} \log\mathrm{tg}\, 63°47'56'' = & 10{,}30766 & - 10 \\ \frac{32}{60} \cdot 56 & + \quad 30 & \\ \hline & 10{,}30796 & - 10 \end{array}$$

Tangens ostrého úhlu je funkce rostoucí, proto opravu *přičteme*.

Příklad 10.4. Určete $\log\mathrm{cotg}\, 43°12'49''$.

Řešení.

$$\begin{array}{rrl} \log\mathrm{cotg}\, 43°12'49'' = & 10{,}02731 & - 10 \\ - \frac{26}{60} \cdot 49 & - \quad 21 & \\ \hline & 10{,}02710 & - 10 \end{array}$$

Kotangens ostrého úhlu je funkce klesající, proto opravu *odečítáme*.

Příklad 10.5. Určete ostrý úhel α, je-li $\log\sin\alpha = 9{,}57432 - - 10$.

Řešení. V tabulkách (obr. 45) najdeme jen hodnoty 9,57420 — 10 a 9,57451 — 10 příslušející úhlům $22°2'$ a $22°3'$. Hledaný úhel α bude ležet mezi těmito úhly. Přírůstku 31 jednotek posledního deset. místa přísluší vzrůst úhlu o $1' = 60''$.

Tedy naší diferenci 12 jednotek posledního deset. místa (totiž $9{,}57432 - 9{,}57420 = 0{,}00012$) přísluší oprava $12 : \frac{31}{60} \doteq 23$ vteřin. Je tedy $\alpha = 22°2'23''$. K určení opravy opět můžeme s výhodou použít části $P.P$; v našem případě ve sloupci 31 (tolik činí tabulková diference) hledáme, kolika stupňům přísluší naše diference 12. V pravém sloupci vyhledáme číslo nejblíže nižší 12, což je 10,3, k němuž přísluší oprava 20″; dále najdeme nejbližší číslo ke zbytku $12 - 10{,}3 = 1{,}7$, což je 1,6; této diferenci přísluší oprava 3″. Dohromady jako dříve najdeme 23″. Opravu přičteme, neboť sinus ostrého úhlu je funkce rostoucí. Celý postup opět zapisujeme přehledně

$$\begin{array}{rll}
\log\sin\alpha = & 9{,}57432 - 10 & \\
 & \underline{420} & \;\;22°2' \\
 & 12 : \frac{31}{60} & \underline{+\quad\;\; 23''} \\
 & \qquad\quad \alpha = & \;\;22°2'23''.
\end{array}$$

Příklad 10.6. Určete ostrý úhel α, je-li $\log\cos\alpha = 9{,}96164 - 10$.

Řešení.
$$\begin{array}{rll}
\log\cos\alpha = & 9{,}96164 - 10 & \\
 & \underline{162} & \ldots 23°44' \\
 & 2 : \frac{6}{60} & \underline{\;-\quad\;\; 20''} \\
 & \qquad\quad \alpha = & 23°43'40''.
\end{array}$$

Opravu odečítáme, neboť kosinus ostrého úhlu je funkce klesající.

Příklad 10.7. Určete ostrý úhel α, je-li $\log\operatorname{tg}\alpha = 10{,}76698 - 10$.

Řešení.
$$\begin{array}{rll}
\log\operatorname{tg}\alpha = & 10{,}76698 - 10 & \\
 & \underline{641} & \ldots 80°17' \\
 & 57 : \frac{76}{60} & \underline{\;+\quad\;\; 45''} \\
 & \qquad\quad \alpha = & 80°17'45''.
\end{array}$$

Tangens ostrého úhlu je funkce rostoucí, proto opravu přičítáme.

Příklad 10.8. Určete ostrý úhel α, je-li $\cot g\alpha = 9{,}79886 - 10$.

Řešení.

$$\begin{array}{rl} \log\cot g\alpha = 9{,}79886 - 10 & \\ \underline{860} & \ldots 57^\circ 50' \\ 26 : \frac{28}{60} & \underline{- \quad 56''} \\ \alpha = & 57^\circ 49'\ 4'' \end{array}$$

Kotangens ostrého úhlu je funkce klesající, proto opravu odečítáme.

Nakonec ještě ukažme řešení jednoduchých trigonometrických příkladů pomocí tabulek logaritmů goniometrických hodnot.

Příklad 10.9. Vypočtěte odvěsnu a pravoúhlého trojúhelníka, je-li jeho protější úhel $\alpha = 36^\circ 15' 47''$ a přepona $c = 117{,}32$.

Řešení. Podle (7.6) jest $a = c \sin\alpha$ a tedy $\log a = \log c + \log\sin\alpha$. V našem případě je $\log a = \log 117{,}32 + \log\sin 36^\circ 15' 47''$.

Najdeme tedy $\log 117{,}32 = 2{,}06937$ a $\log\sin 36^\circ 15' 47'' = 9{,}77195 - 10$, takže $\log a = 2{,}06937 + 9{,}77195 - 10 = 1{,}84132$. Z toho nalezneme $a = 69{,}393$; jelikož však c bylo dáno na dvě desetinná místa, zaokrouhlíme také a na dvě desetinná místa a tedy $a \doteq 69{,}39$. Celý postup píšeme obvykle opět přehledněji, na př. takto:

$$\begin{array}{ll} a = c \sin\alpha; & \log a = \log c + \log\sin\alpha \\ & \log a = 2{,}06937 \\ & \qquad\quad \underline{9{,}77195 - 10} \\ & \qquad\quad 1{,}84132 \\ a \doteq 69{,}39 & \qquad\quad 130 \ldots 69{,}393. \end{array}$$

Příklad 10.10. Vypočtěte přeponu c pravoúhlého trojúhelníka, je-li odvěsna $b = 316{,}35$ a přilehlý úhel $\alpha = 18^\circ 5' 54''$

Řešení. Pišme hned v snadno srozumitelné úpravě:

$$c = \frac{b}{\cos\alpha}; \qquad \log c = \log b - \log\cos\alpha$$

$$\begin{aligned}
\log c &= 2{,}50017 \\
& \underline{10 \qquad - 9{,}97796} \\
& 2{,}52221 \\
c = 332{,}82 \qquad & 218 \ldots 332{,}82.
\end{aligned}$$

Příklad 10.11. Najděte úhel α v pravoúhlém trojúhelníku, jehož odvěsny jsou $a = 153{,}34$, $b = 126{,}81$.

Řešení. $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$; $\log\mathrm{tg}\alpha = \log a - \log b$

$$\begin{aligned}
\log\mathrm{tg}\alpha &= \underline{2{,}18566 - 2{,}10315} \\
& \ \underline{0{,}08251} \\
& \ 10{,}08251 - 10 \\
\alpha = 50°24'37'' \qquad & \ 235 \quad \ldots 50°24'37''
\end{aligned}$$

K tomuto výpočtu poznamenejme, že jsme našli $\log\mathrm{tg}\alpha = 0{,}08251$. Toho nemůžeme přímo užít k vyhledání α, neboť v tabulkách jsou uvedeny hodnoty, ke kterým je třeba vždy připojit charakteristiku — 10. Odečteme tedy a přičteme současně k tomuto číslu 10, t. j. píšeme $0{,}08251 = 10{,}08251 - 10$. Pak můžeme již vyhledat podle dříve uvedeného postupu příslušný úhel α.

Příklad 10.12. Najděte úhel α v pravoúhlém trojúhelníku, je-li přepona $c = 516{,}32$ a odvěsna $a = 212{,}85$.

Řešení. $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$; $\log\sin\alpha = \log a - \log c$

$$\begin{aligned}
\log\sin\alpha &= \underline{2{,}32808 - 2{,}71292} \\
& \ 9{,}61516 - 10 \\
\alpha = 24°20'47'' \qquad & \ 494 \qquad \ldots 24°20'47''.
\end{aligned}$$

Opět je třeba připojit důležitou poznámku. Našli jsme totiž $\log\sin\alpha = 2{,}32808 - 2{,}71292$. Je to zřejmě záporné číslo, není však nutné je vůbec vyhledat; mějme totiž na paměti, že stejně musíme $\log\sin\alpha$ napsat ve tvaru jakéhosi kladného čísla a charakteristiky — 10. Připočteme tedy hned 10 k prvnímu číslu a samozřejmě odečteme ještě 10, t. j. upravíme zpaměti druhý řádek výpočtu na tvar

$$\log\sin\alpha = 12{,}32808 - 2{,}71292 - 10$$

a píšeme do třetího řádku hned rozdíl prvých dvou čísel, t. j. 9,61516, a připojíme ovšem ještě — 10.

Cvičení.

10.1. Vyhledejte z tabulek $\log\sin\alpha$, $\log\cos\alpha$, $\log\mathrm{tg}\,\alpha$, $\log\mathrm{cotg}\,\alpha$, je-li a) $\alpha = 42°15'$, b) $\alpha = 68°32'$, c) $\alpha = 32°15'27''$, d) $\alpha = 71°3'41''$.

10.2. Určete úhel α, je-li a) $\log\sin\alpha = 9{,}74093 - 10$, b) $\log\sin\alpha = 9{,}97966 - 10$, c) $\log\sin\alpha = -0{,}70660$, d) $\log\sin\alpha = 9{,}86028 - 10$, e) $\log\sin\alpha = -0{,}37195$.

10.3. Určete úhel α, je-li a) $\log\cos\alpha = 9{,}89771 - 10$, b) $\log\cos\alpha = -0{,}28027$, c) $\log\cos\alpha = 9{,}51253 - 10$, d) $\log\cos\alpha = -0{,}06714$.

10.4. Jaký je úhel α, je-li a) $\log\mathrm{tg}\,\alpha = 9{,}71833 - 10$, b) $\log\mathrm{tg}\,\alpha = 10{,}68575 - 10$, c) $\log\mathrm{tg}\,\alpha = -0{,}36586$, d) $\log\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}21070$, e) $\log\mathrm{tg}\,\alpha = 9{,}89165 - 10$, f) $\log\mathrm{tg}\,\alpha = 10{,}14748 - 10$, g) $\log\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}73512$?

10.5. Najděte úhel α, je-li a) $\log\mathrm{cotg}\,\alpha = 10{,}21751 - 10$, b) $\log\mathrm{cotg}\,\alpha = 9{,}31933 - 10$, $\log\mathrm{cotg}\,\alpha = -0{,}39834$, d) $\log\mathrm{cotg}\,\alpha = 10{,}26872 - 10$, e) $\log\mathrm{cotg}\,\alpha = 9{,}95768 - 10$, f) $\log\mathrm{cotg}\,\alpha = 0{,}08530$.

10.6. Řešte některé z příkladů ve cvičení k odst. 9 znovu užitím logaritmů a přesvědčte se o správnosti dřívějšího řešení.

11. VZTAHY MEZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI OSTRÉHO ÚHLU

Dříve než jsme došli k řešení pravoúhlých trojúhelníků, zavedli jsme si goniometrické funkce (uveďme je v pořádku, ve kterém se obvykle uvádějí: sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans a kosekans — z nichž posledních dvou se v praxi vůbec neužívá, a proto nebudeme o nich podrobně jednat) a odvodili jsme si pro ně několik jednoduchých vět. Tím se nám však obsah trigonometrie rozpadl ve dvě části: v t. zv. *goniometrii*, jež se zabývá odvozováním vlastností a vzájemných vztahů goniometrických funkcí a ve *vlastní trigonometrii*, ve které se řeší trojúhelníky.

Zatím jsme z goniometrie uvedli jen to nejnutnější pro praktické řešení pravoúhlých trojúhelníků. Nyní úvahy doplníme. Především jsme našli (viz (6.5), (6.7), (8.3), (8.4)),

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \cos(90^\circ - \alpha), \cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha) \\ \mathrm{tg}\alpha &= \mathrm{cotg}(90^\circ - \alpha), \mathrm{cotg}\alpha = \mathrm{tg}(90^\circ - \alpha). \end{aligned} \tag{11.1}$$

Tyto vzorce si lehko zapamatujeme, zavedeme-li si zjednodušující označení. Budeme totiž říkat, že kosinus (kotangens) je *kofunkcí* k funkci sinus (tangens) a stejně, že sinus (tangens) je kofunkcí k funkci kosinus (kotangens). Teď tedy obsah vzorců (11.1) můžeme vyslovit souhrnně v jediné větě:

VĚTA 11.1. Funkce ostrého úhlu α je rovna příslušné kofunkci doplňkového úhlu $90^\circ - \alpha$.

Dále připomeňme již dokázané vzorce (6.2), t. j.

$$\text{a) } \mathrm{cotg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}, \quad \text{b) } \mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{cotg}\alpha}; \tag{11.2}$$

můžeme je nahradit jediným vzorcem

$$\mathrm{tg}\alpha \,.\, \mathrm{cotg}\alpha = 1, \tag{11.3}$$

což vyslovíme větou:

VĚTA 11.2. Součin tangenty a kotangenty téhož ostrého úhlu α je roven 1.

Přikročme nyní k odvození nových vztahů. Dokážeme:

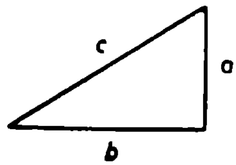
VĚTA 11.3. Tangens ostrého úhlu α je podílem sinu a kosinu téhož úhlu; kotangens ostrého úhlu α je podílem kosinu a sinu téhož úhlu, t. j.

$$\text{a) } \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \text{b) } \mathrm{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{11.4}$$

Důkaz. Tyto důležité vzorce odvodíme snadno: podle definice je totiž (obr. 46) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$, a proto

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

čímž jsou vzorce (11.4) dokázány.



Obr. 46.

Další věta mluví o vztahu sinu a kosinu téhož ostrého úhlu α.

VĚTA 11.4. Platí vzorec

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{11.5}$$

Důkaz. Především si řekneme, jak tento (zase důležitý) vzorec čteme: sinus na druhou α plus kosinus na druhou α rovná se jedné. A nyní přikročme k důkazu. Podle Pythagorovy věty platí $a^2 + b^2 = c^2$ (obr. 46). Vydělme tuto rovnici číslem c^2. Dostaneme

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1, \text{ čili } \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Protože však $\frac{a}{c} = \sin\alpha$ a $\frac{b}{c} = \cos\alpha$, dostaneme po dosazení do poslední rovnice

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1 \tag{11.6}$$

a to je hledaný výsledek. Je však zvykem jej psát ve tvaru (11.5), a proto si jej také v tomto tvaru zapamatujeme. Přitom mějme na paměti, že (11.5) a (11.6) je vlastně jeden a týž vzorec.

Poznámka. Rovnice (11.5) umožňuje vyjádřit jednu z funkcí $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ pomocí druhé; jest totiž

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \tag{11.7}$$

nebo

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}. \tag{11.8}$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do (11.4), dostaneme také vyjádření $\operatorname{tg}\alpha$ a $\operatorname{cotg}\alpha$ buď jen pomocí $\sin\alpha$ nebo jen pomocí $\cos\alpha$. Lehko najdeme

$$\text{a) } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}, \quad \text{b) } \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha}, \tag{11.9}$$

$$\text{a) } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}, \quad \text{b) } \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}. \tag{11.10}$$

Přirozeně, vzorce (11.7) ÷ (11.10) si nemusíme nutně pamatovat, neboť jsou snadnými důsledky základních vzorců (11.4) a (11.5).

Ještě další dva vzorce jsou velice důležité:

VĚTA 11.5. Platí

$$\text{a) } 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \text{b) } 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \tag{11.11}$$

Důkaz. Alespoň u prvého z nich řekneme, jak se čte: jedna plus tangens na druhou α rovná se jedna lomeno kosinus na druhou α. Dokážeme je opět ze známého vzorce (obr. 46) $a^2 + b^2 = c^2$; vydělíme-li tuto rovnici číslem b^2, dostaneme

$\frac{a^2}{b^2} + 1 = \frac{c^2}{b^2}$, t. j. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\left(\frac{b}{c}\right)^2}$. Dosadíme-li sem $\frac{a}{b} =$ $= \operatorname{tg}\alpha$, $\frac{b}{c} = \cos\alpha$, najdeme

$$(\operatorname{tg}\alpha)^2 + 1 = \frac{1}{(\cos\alpha)^2}, \tag{11.12}$$

což opět píšeme v jednodušším tvaru (11.11a). Úplně obdobně bychom odvodili (11.11b).

Poznámka. Místo rovnic (11.11) se uvádějí často

$$\text{a) } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}, \quad \text{b) } \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha}}, \tag{11.13}$$

které se však okamžitě dají odvodit z (11.11). Na příklad z (11.11a) plyne postupně $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha = 1$, $\cos^2\alpha =$ $= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$ a odtud už přímo (11.13a). Podobně se vypočte (11.13b) z (11.11b). Všimneme-li si blíže vzorců (11.13), vidíme, že prvý z nich vyjadřuje $\cos\alpha$ pomocí $\operatorname{tg}\alpha$, druhý $\sin\alpha$ pomocí $\operatorname{cotg}\alpha$. Zbývá ještě uvést vzorce, které by vyjadřovaly $\cos\alpha$ pomocí $\operatorname{cotg}\alpha$ a obdobně $\sin\alpha$ pomocí $\operatorname{tg}\alpha$. To již stačí do (11.13) dosadit z (11.2); najdeme

$$\text{a) } \cos\alpha = \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha}}, \quad \text{b) } \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}. \tag{11.14}$$

Skutečně: dosadíme-li na př. do (11.13a) za $\operatorname{tg}\alpha$ podle vzorce $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$, dostaneme postupně:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{cotg}^2\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha + 1}{\operatorname{cotg}^2\alpha}}} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{\operatorname{cotg}^2\alpha + 1}}{\operatorname{cotg}\alpha}} = \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2\alpha + 1}},$$

což je vlastně (11.14a). Úplně stejně se odvodí druhý vzorec.

Snad bude užitečné uvést, které z převodových vzorců (11.2) $\div$ (11.14) je třeba si pamatovat. Přehlédneme-li výsledky, shledáme, že stačí znát jen (11.3), (11.4), (11.5) a (11.11); z nich si již snadno odvodíme sami ostatní vzorce. Odmocniny ve všech těchto vzorcích je ovšem třeba brát kladně.

Příklad 11.1. Vyjádřete hodnoty $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$, víte-li že $\sin\alpha = \frac{5}{3}$.

Řešení. Podle (11.7) je $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$. Podle (11.4a) je $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$ a konečně podle (11.2a) je $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{\frac{3}{4}} = \dfrac{4}{3}$.

Cvičení.

11.1. Vypočtěte hodnoty $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$, znáte-li a) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, b) $\sin\alpha = \dfrac{m}{n}$ (při čemž $n > m > 0$).

11.2. Vypočtěte hodnoty $\sin\omega$, $\operatorname{tg}\omega$, $\operatorname{cotg}\omega$, je-li a) $\cos\omega = \frac{3}{5}$, b) $\cos\omega = \dfrac{p}{q}$ ($q > p > 0$).

11.3. Určete hodnoty zbývajících goniometrických funkcí, je-li a) $\operatorname{tg}\varphi = 2$, b) $\operatorname{cotg}\psi = k$ ($k > 0$).