Uspořádané množiny

---

1. kapitola. Uspořádané množiny

In: Ladislav Beran (author): Uspořádané množiny. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1978. pp. 11–20.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403923

1. kapitola

USPOŘÁDANÉ MNOŽINY

Povšimněme si, že relace δ na množině $\boldsymbol{N}_4$, definovaná na str. 7, má některé vlastnosti společné s relací $\leqq$, definovanou na $\boldsymbol{R}$:

$$m \, \delta \, m$$ pro každé $m \in \boldsymbol{N}_4$; jestliže $m \, \delta \, n$ a $n \, \delta \, m$, pak $m = n$; jestliže $m \, \delta \, n$ a zároveň $n \, \delta \, k$, pak $m \, \delta \, k$.	$$m \mid m$$ pro každé $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$; jestliže $m \mid n$ a $n \mid m$, pak (pro $m, n \in \boldsymbol{N}_4$) $m = n$; jestliže $m \mid n$ a zároveň $n \mid k$, pak $m \mid k$.

Připomeňme názvy základních vlastností relací. Je-li ϱ relace na množině A, tj. $\varrho \subset A^2$, pak definujeme[1]):

Relace ϱ se nazývá *reflexívní*, jestliže

$$(a, a) \in \varrho$$ pro každé $a \in A$;	$$a \, \varrho \, a$$ pro každé $a \in A$;

Říkáme, že relace ϱ je *antisymetrická* právě tehdy, když má tuto vlastnost:

Je-li $(a, b) \in \varrho$ a $(b, a) \in \varrho$, pak $a = b$.	Je-li $a \, \varrho \, b$ a je-li $b \, \varrho \, a$, pak $a = b$.

---

[1]) Pro pohodlí čtenáře rozepisujeme definice v obou druzích zápisu.

Relace ϱ se nazývá *tranzitivní* právě tehdy, když platí toto:

Je-li $(a, b) \in \varrho$ a je-li $(b, c) \in \varrho$, pak $(a, c) \in \varrho$.	Je-li $a \varrho b$ a je-li $b \varrho c$, pak $a \varrho c$.

Relace ϱ se posléze nazývá *symetrická* právě tehdy, když pro ni platí toto:

Je-li $(a, b) \in \varrho$, pak $(b, a) \in \varrho$.	Je-li $a \varrho b$, pak $b \varrho a$.

Příklad 2. Pro dvě reálná čísla a, b pišme $a \sigma b$ právě tehdy, když $a : (a^2 + 1) \leqq b : (b^2 + 1)$. Máme vyšetřit vlastnosti relace definované takto na množině $\boldsymbol{R}$ reálných čísel.

Řešení. Relace σ je reflexívní, neboť pro každé reálné číslo a je podíl $a : (a^2 + 1)$ definován a platí $a : (a^2 + 1) \leqq a : (a^2 + 1)$. Tato relace není antisymetrická, neboť $1/2 \sigma 2$ a zároveň $2 \sigma 1/2$, ale $1/2 \neq 2$. Jedná se však o tranzitivní relaci, neboť ze vztahů $a : (a^2 + 1) \leqq b : (b^2 + 1)$, $b : (b^2 + 1) \leqq c : (c^2 + 1)$ plyne, že $a : (a^2 + 1) \leqq c : (c^2 + 1)$. Protože $0 \sigma 1$, ale $(1, 0)$ není prvkem relace σ, je zřejmé, že tato relace není symetrická.

Pro neprázdnou množinu P, na níž je definována relace ϱ, která je reflexívní, antisymetrická a tranzitivní, zavedeme stručnější název. Přesná formulace vypadá takto: Značí-li $\mathscr{P}$ uspořádanou dvojici (P, ϱ), kde P je neprázdná množina a ϱ je relace, která má uvedené tři vlastnosti, říkáme, že $\mathscr{P}$ je *uspořádaná množina*. Také budeme stručně říkat, že $\mathscr{P}$ je *poset* (název vzniklý zkrácením z anglického partially ordered set). Množina P se nazývá *nosič* posetu $\mathscr{P}$ a relace ϱ se nazývá *uspořádání* množiny P; prvky množiny P se nazývají *prvky uspořádané množiny* $\mathscr{P}$. Pro uspořádání definované na některé množině se někdy užívá symbol $\ll$ (zápis $a \ll b$ se čte „a předchází b“ nebo „b následuje a“) nebo se užívá (pokud nehrozí nebezpečí z nedorozumění) také symbol $\leqq$ (zápis $a \leqq b$ se čte „a je menší nebo rovno b“ nebo se čte stejně jako zápis $a \ll b$). Zápis $a \geqq b$ se považuje za rovnocenný zápisu $b \leqq a$.

Příklad 3. Zvolme za množinu P otevřený interval $(1, \infty)$ a pro dvě reálná čísla p, q pišme $p \ll q$ právě tehdy, když $p\, \sigma\, q$, kde σ bylo definováno v příkladě 2. Máme dokázat, že relace $\ll$ je uspořádání množiny $(1, \infty)$.

Řešení. Vzhledem k úvahám z příkladu 2 stačí zjistit, že relace $\ll$ je antisymetrická. Nechť tedy a, b jsou dvě čísla z intervalu $(1, \infty)$ taková, že $a \ll b$ a zároveň $b \ll a$. Pak ovšem $a : (a^2 + 1) \leqq b : (b^2 + 1) \leqq a : (a^2 + 1)$ má za následek, že $a : (a^2 + 1) = b : (b^2 + 1)$. Odtud plyne nejprve

$$ab^2 + a = ba^2 + b\,,$$

poté

$$ab^2 - ba^2 = b - a$$

a tedy také ekvivalentní podmínka

$$ab(b - a) = b - a\,.$$

Z úvah obvyklých při řešení rovnic s parametrem je čtenáři dobře známo, že bez dalších úvah nelze v těchto situacích podlehnout pokušení a celou rovnici krátit číslem $b - a$. Jak tedy postupovat korektně? Zmíněná zkušenost nám napovídá, že musíme prozkoumat dvě možnosti, a to případ $b - a \neq 0$ a případ $b - a = 0$. Kdyby ale bylo $b - a \neq 0$, pak celou rovnici můžeme dělit nenulovým číslem $b - a$ a dostáváme $ab = 1$, což však pro naše dvě čísla a, b (pro něž $a > 1$ a $b > 1$) zřejmě není možné. Zůstává tedy jako jediná možnost případ $b - a = 0$, tj. $a = b$. Tak jsme dokázali, že $\ll$ je na $(1, \infty)$ antisymetrickou relací.

Příklad 4. Pro dvě reálná čísla $a, b > 1$ pišme $a \tau b$ právě tehdy, když obě čísla $\pi a : (a^2 + 1)$, $\pi b : (b^2 + 1)$ patří do oboru funkce $y = \operatorname{tg} x$ a když zároveň

$$\operatorname{tg} \frac{\pi a}{a^2 + 1} \leqq \operatorname{tg} \frac{\pi b}{b^2 + 1}.$$

Máme nalézt ty podmnožiny M množiny $(1, \infty)$, na nichž je takto definováno uspořádání.

Řešení. Předně musí být M neprázdná podmnožina množiny $(1, \infty)$. Relace τ je zřejmě při každém přípustném výběru M reflexívní a tranzitivní. Vyšetřování relace τ nyní na chvíli přerušíme. Pro další úvahy budeme potřebovat tento pomocný výrok:

(3) *Pro každé reálné číslo x platí*

$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{x}{x^2 + 1} \leqq \frac{1}{2},$$

přičemž v první nerovnosti nastává rovnost právě tehdy, když $x = -1$ a v druhé právě tehdy, když $x = 1$.

Důkaz. Protože $0 \leqq (x - 1)^2$ pro každé $x \in \boldsymbol{R}$ (a rovnost zde nastává právě tehdy, když $x = 1$), je $2x \leqq x^2 + 1$ a tedy $x : (x^2 + 1) \leqq 1/2$ (a rovnost nastává právě pro $x = 1$). Při volbě $x = -z$ tedy z právě dokázaného plyne, že pro každé $z \in \boldsymbol{R}$ platí

$$-\frac{z}{z^2+1} \leqq \frac{1}{2}$$

a rovnost nastává právě tehdy, když $x = -z = 1$, takže pro každé $z \in \boldsymbol{R}$ platí

$$\frac{z}{z^2+1} \geqq -\frac{1}{2}$$

a rovnost nastává právě tehdy, když $z = -1$, čímž jsme dokázali platnost první nerovnosti. Čtenáři doporučujeme jako cvičení odvodit si první nerovnost také přímo ze vztahu $0 \leqq (x+1)^2$.

Vraťme se nyní k vyšetření relace τ. Z (3) je zřejmé, že

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \frac{\pi a}{a^2+1} \leqq \frac{\pi}{2},$$

tj. že $\pi a : (a^2 + 1)$ patří do oboru funkce $y = \operatorname{tg} x$, právě tehdy, když $a \neq \pm 1$.

Nyní snadno nahlédneme, že relace τ je na každé podmnožině M množiny $(1, \infty)$ již nutně antisymetrická. Je-li totiž $a \, \tau \, b$ a zároveň $b \, \tau \, a$, pak

$$\operatorname{tg} \frac{\pi a}{a^2+1} = \operatorname{tg} \frac{\pi b}{b^2+1}$$

a protože dle (3) a výběru M patří čísla $\pi a : (a^2 + 1)$, $\pi b : (b^2 + 1)$ do intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, je $\pi a : (a^2 + 1) = \pi b : (b^2 + 1)$ a dle řešení příkladu 3 je proto $a = b$.

Podmínkám stanoveným v příkladu 4 vyhovuje tedy každá neprázdná podmnožina množiny $(1, \infty)$.

Úloha 1. Na množině $\boldsymbol{N}_0$ všech celých nezáporných čísel definujme relaci σ_1 tak, že $(a, b) \in \sigma_1$ právě tehdy, když $a \mid b$. Dokažte, že relace σ_1 je uspořádání množiny $\boldsymbol{N}_0$.

Úloha 2. Množina E nechť je některá pevně zvolená množina. Definujme $(M, N) \in \sigma_2$ právě tehdy, když $M \subset N$ a $N \subset E$. Dokažte, že relace σ_2 je uspořádání množiny všech podmnožin množiny E.

Úloha 3. Relaci σ_3 na množině $\boldsymbol{R}$ reálných čísel definujme tak, že pro dvě reálná čísla a, b je $(a, b) \in \sigma_3$ právě tehdy, když $a \leqq 1$ nebo $b \geqq -1$. Rozhodněte, zda σ_3 je a) reflexívní b) antisymetrická c) tranzitivní d) symetrická relace.

[a) ano, b) c) d) ne.]

Úloha 4. Rozhodněte, zda relace σ, zavedená pro reálná čísla v příkladě 2, definuje uspořádání na množině

a) $\langle 1, \infty)$;
b) $(-1, 1)$;
c) $\langle -1, 1\rangle$;
d) $(-\infty; -1\rangle$;
e) $(-\infty, 0)$.

[a) — d) ano, e) ne.]

Úloha 5. Dokažte, že vztah $a \sigma b$ je v případě b), c) z úlohy 4 ekvivalentní s tím, že $a \leqq b$ a v případě a), d) s tím, že $a \geqq b$.

Příklad 5. Pro dvě reálná čísla a, b pišme $a \sigma_4 b$ právě tehdy, když

$$\log\left[(a-b)+\sqrt{(a-b)^2+1}\right] \geqq 0.$$

Máme dokázat, že $a \sigma_4 b$ právě tehdy, když $a \geqq b$.

Řešení. Protože pro každé reálné číslo x je $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x|$, je také $x + \sqrt{x^2 + 1} > x + |x| \geqq 0$ a proto je výraz $\log (x + \sqrt{x^2 + 1})$ definován pro každé reálné číslo x. Je-li nejprve $x > 0$, pak $x + \sqrt{x^2 + 1} > x + 1 > 1$ a proto je $\log (x + \sqrt{x^2 + 1}) > \log 1 = 0$. Je-li posléze $x < 0$, pišme $x = -z$. Dle již dokázaného platí $0 < \log (z + \sqrt{z^2 + 1}) = \log (-x + \sqrt{x^2 + 1})$. Současně ale je $\log (-x + \sqrt{x^2 + 1}) + \log (x + \sqrt{x^2 + 1}) = \log [(-x + \sqrt{x^2 + 1}).(x + \sqrt{x^2 + 1})] = \log 1 = 0$ a proto $0 < \log (-x + \sqrt{x^2 + 1}) = -\log (x + \sqrt{x^2 + 1})$. Odtud (při výchozím předpokladu $x < 0$) plyne $0 > \log (x + \sqrt{x^2 + 1})$. Zatím jsme tedy dokázali toto (případ $x = 0$ je zřejmý):

(i) Je-li $x > 0$, pak $\log (x + \sqrt{x^2 + 1}) > 0$.
(ii) Je-li $x < 0$, pak $\log (x + \sqrt{x^2 + 1}) < 0$.
(iii) Je-li $x = 0$, pak $\log (x + \sqrt{x^2 + 1}) = 0$.

Předpokládejme nyní, že číslo t je takové, že $\log (t + \sqrt{t^2 + 1}) > 0$. Podle (ii) je zřejmé, že není $t < 0$ a podle (iii) usuzujeme, že není ani $t = 0$. Zbývá proto jen možnost, že $t > 0$. Odtud (a z podobných úvah pro (ii), (iii)) plyne následující zesílení výroků (i) — (iii):

(i′) Vztah $\log (x + \sqrt{x^2 + 1}) > 0$ platí právě tehdy, když $x > 0$.

(ii′) Vztah $\log (x + \sqrt{x^2 + 1}) < 0$ platí právě tehdy, když $x < 0$.

(iii′) Vztah $\log (x + \sqrt{x^2 + 1}) = 0$ platí právě tehdy, když $x = 0$.

Nyní je již zřejmé, že

$$\log\left[(a-b)+\sqrt{(a-b)^2+1}\right] \geqq 0$$

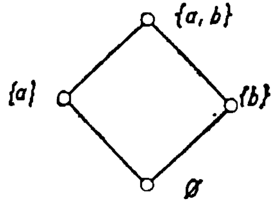
právě tehdy, když $a - b \geqq 0$, tj. právě v případě, je-li $a \geqq b$.

Podle výsledku úlohy 2 usuzujeme, že relace inkluze je uspořádání na množině $P(E)$ všech podmnožin množiny E, řečeno jinými slovy uspořádaná dvojice $(P(E), \subset)$ představuje uspořádanou množinu. Nyní budeme chtít znázornit takovouto uspořádanou množinu — alespoň v nejjednodušších případech — pomocí vhodných diagramů. Za tím účelem předešleme tuto obecně užívanou úmluvu: Je-li $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ uspořádaná množina, která má konečně mnoho prvků a platí-li pro její dva prvky a, b vztah $a \leqq b$, znázorníme oba prvky kroužkem, přičemž a umístíme pod b a spojíme je úsečkou. Pro jednoduchost provádíme takovéto pospojování jen v případě, kdy $a \neq b$ a kdy mezi a a b neleží žádný další prvek uspořádané množiny, tj. pokud $a \neq b$ a pokud z toho, že $z \in P$ a $a \leqq z \leqq b$ již plyne, že buď $a = z$ nebo $z = b$. V tomto případě se říká, že b *pokrývá* a.

Pro $E = \emptyset$ je diagram na obrázku 1, pro $E = \{a\}$ viz

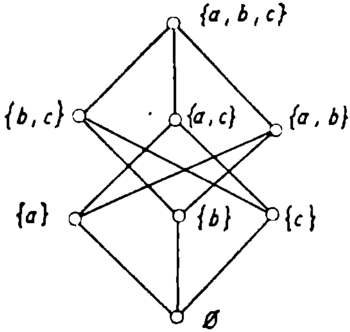
Obr. 1

Obr. 2



Obr. 3

obr. 2, pro $E = \{a, b\}$ viz obr. 3, pro $E = \{a, b, c\}$ viz obr. 4.



Obr. 4

Úloha 6. Budiž π některá rovina, V pevně zvolený bod této roviny. Pro dva body A, B z π píšeme $(A, B) \in \sigma_5$ právě tehdy, když úsečky VA, VB mají touž velikost. Máme tak definovánu relaci σ_5 na množině všech bodů roviny π. Vyšetřete ji. [Relace σ_5 je reflexívní, symetrická a tranzitivní, není antisymetrická.]

Úloha 7. Vyšetřete relaci | („dělí") na množině $\boldsymbol{Z}$ celých čísel.
[Je reflexívní, tranzitivní, není ani symetrická ani antisymetrická.]

Relace σ_5, | mají obě tu vlastnost, že jsou reflexívní a tranzitivní. Každá relace ϱ na neprázdné množině M, která je reflexívní a tranzitivní, se nazývá *preuspořádání* množiny M. Relace ϱ na neprázdné množině M, která je reflexívní, symetrická a tranzitivní, se nazývá *ekvivalence* na množině M.

Cvičení

1. Nalezněte všechny relace na dvouprvkové množině $\{a, b\}$.
2. Mezi relacemi ze cvičení 1 nalezněte
   a) všechny reflexívní;
   b) všechny symetrické;
   c) všechny antisymetrické;
   d) všechny tranzitivní.
3. Konstruujte příklad relace, která je symetrická a tranzitivní, ale není reflexívní.
4. Mezi relacemi ze cvičení 1 nalezněte
   a) všechna preuspořádání;
   b) všechna uspořádání;
   c) všechny ekvivalence.
5. Nalezněte všechny ekvivalence na
   a) tříprvkové množině $\{a, b, c\}$;
   b) čtyřprvkové množině $\{a, b, c, d\}$.