6. kapitola

ŘEŠENÍ CVIČENÍ

1.4. V případě $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ nastává rovnost. V opačném případě zjistíme, projdeme-li důkaz, že platí ostrá nerovnost.

1.5. Označme strany obdélníka a, b, jeho obvod o a obsah p. Podle cvič. 1.4. nastane v nerovnosti

$$\frac{a}{\sqrt{ab}} + \frac{b}{\sqrt{ab}} \geqq 2$$

čili

$$4\sqrt{p} \leqq o$$

rovnost v případě $a = b$, kdy bude $p = \frac{o^2}{16}$, zatímco v případě $a \neq b$ bude $p < \frac{o^2}{16}$. Největší obsah má tedy čtverec. (Místo odvolání na cvič. 1.4. jsme mohli přímo diskutovat nerovnost $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqq 0$).

1.6. Označme hrany kvádru a, b, c, jeho objem o a povrch p. Podle cvičení 1.4. nastane v nerovnosti

$$\frac{ab}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} + \frac{ac}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} + \frac{bc}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} \geqq 3$$

čili

$$p \geqq 6o^2$$

rovnost v případě $a = b = c$, kdy bude $p = 6o^2$, zatímco jinak bude $p > 6o^2$. Nejmenší povrch má tedy krychle.

1.7. Označme strany trojúhelníka a, b, c, polovinu jeho obvodu o a obsah p. Podle Heronova vzorce je

$$p = \sqrt{o(o-a)(o-b)(o-c)}\,.$$

Podle cvič. 1.4. nastane v nerovnosti

$$\frac{o-a}{\sqrt[3]{(o-a)(o-b)(o-c)}} + \frac{o-b}{\sqrt[3]{(o-a)(o-b)(o-c)}} + \frac{o-c}{\sqrt[3]{(o-a)(o-b)(o-c)}} \geqq 3$$

neboli

$$27p^2 \leqq o^4$$

rovnost právě když $a = b = c$. Největší obsah má tedy rovnostranný trojúhelník.

1.8. Čísla $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_3}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{x_n}{x_1}$ jsou kladná a jejich součin je 1. Podle věty z úlohy 4 není jejich součet menší než n.

1.9. Dvěma způsoby: $4 . 2{,}50 + 9 . 0{,}30$ a $1 . 2{,}50 + 34 . 0{,}30$.

1.10. Např. u čtverečků vedle sebe v tomtéž řádku.

1.11. Pro $m = 0$ je $a^m + \frac{1}{a^m} = 2$ a pro $m < 0$ je $a^m + \frac{1}{a^m} =$

$$= a^{-m} + \frac{1}{a^{-m}}\,,$$ což je celé číslo podle věty z úlohy 7.

1.12. Pro $m = 1$ platí věta. Pro $m = 2$ také, neboť

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2\,.$$

Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že pro $m = p$ i pro $m = p + 1$ věta platí. Pro $m = p + 2$ dostáváme

$$a^{p+2} + \frac{1}{a^{p+2}} = a^{p+2} + \frac{1}{a^{p+2}} + a^p + \frac{1}{a^p} - a^p - \frac{1}{a^p} =$$

$$= \left(a^{p+1} + \frac{1}{a^{p+1}}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(a^p + \frac{1}{a^p}\right).$$

To je podle indukčního předpokladu celé číslo.

1.13. a) Pro jednu kružnici věta platí. Buď p přirozené číslo a nechť věta platí pro p kružnic. Je-li dáno $p + 1$ kružnic, obarvěme nejprve dvěma barvami části, na něž dělí rovinu některých p z nich. Potom vyměňme barvy uvnitř $(p + 1)$-té kružnice.

b) Pro $n = 1$ věta platí. Buď p přirozené číslo a nechť pro p přímek věta platí. Buď dáno $p + 1$ přímek. Zvolme jednu z nich. Ta protíná ostatních p přímek v p různých bodech a prochází tedy právě $p + 1$ z $\dfrac{p(p + 1)}{2} + 1$ částí, na něž dělí rovinu ostatních p přímek; $p + 1$ přímek tedy dělí rovinu na

$$\frac{p(p + 1)}{2} + 1 + p + 1 = \frac{(p + 1)(p + 2)}{2} + 1$$

částí.

c) Pro $n = 1$ věta platí. Buď p přirozené číslo a nechť pro $n = p$ věta platí. Pro $n = p + 1$ platí

$$11^{p+2} + 12^{2p+1} = 11 . 11^{p+1} + 144 . 12^{2p-1} =$$
$$= 144 (11^{p+1} + 12^{2p-1}) - 133 . 11^{p+1} .$$

Podle indukčního předpokladu je první sčítanec dělitelný číslem 133 a věta tedy platí i pro $n = p + 1$.

d) Pro $r = 1$ věta platí. Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že pro $r = p$ věta platí. Pro $r = p + 1$ dostáváme $(x_1 + \dots + x_{p+1})^2 = (x_1 + \dots + x_p)^2 + x_{p+1}^2 + 2x_{p+1}(x_1 + \dots + x_p) \leqq p(x_1^2 + \dots + x_p^2) + x_{p+1}^2 + 2x_{p+1}(x_1 + \dots + x_p) = (p + 1)(x_1^2 + \dots + x_{p+1}^2) - x_1^2 - \dots - x_p^2 - px_{p+1}^2 + 2x_{p+1}(x_1 + \dots + x_p) = (p + 1)(x_1^2 + \dots + x_{p+1}^2) - (x_1 - x_{p+1})^2 - \dots - (x_p - x_{p+1})^2 \leqq (p + 1)(x_1^2 + \dots + x_{p+1}^2)$.

e) Pro $n = 2$ jde o rovnost

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - 2 .$$

Dosadíme-li do ní podle vzorce

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} ,$$

zjistíme, že platí. Buď nyní $p > 1$ přirozené číslo a předpokládejme, že pro $n = p$ věta platí. Podle vzorce pro tangens součtu úhlů platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} [(p + 1)\alpha - p\alpha] = \frac{\operatorname{tg} (p + 1)\alpha - \operatorname{tg} p\alpha}{1 + \operatorname{tg} (p + 1)\alpha \operatorname{tg} p\alpha}$$

a odtud plyne

$$\operatorname{tg} p\alpha \operatorname{tg} (p + 1)\alpha = \frac{\operatorname{tg} (p + 1)\alpha - \operatorname{tg} p\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - 1 .$$

Pro $n = p + 1$ dostáváme

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha + \dots + \operatorname{tg} p\alpha \operatorname{tg} (p + 1)\alpha = \frac{\operatorname{tg} p\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - p +$$

$$+\frac{\operatorname{tg}(p+1)\alpha - \operatorname{tg} p\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - 1 = \frac{\operatorname{tg}(p+1)\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - (p+1).$$

f) Pro $n = 2$ jde o nerovnost $\frac{3}{8} < \frac{1}{\sqrt{7}}$ a ta platí. Buď $p > 1$ přirozené číslo a předpokládejme, že pro $n = p$ nerovnost platí. Vynásobme obě její strany číslem $\frac{2p+1}{2p+2}$. K tomu, abychom dokázali platnost věty pro $n = p + 1$, stačí dokázat nerovnost

$$\frac{2p+1}{(2p+2)\sqrt{3p+1}} \leqq \frac{1}{\sqrt{3p+4}}.$$

To se nám snadno podaří.

g) Pro $n = 2$ jde o nerovnost $\sqrt{2} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$ a ta, jak se snadno přesvědčíme, platí. Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že pro $n = p$ nerovnost platí. Přičtěme k ní $\frac{1}{\sqrt{p+1}}$. K tomu, abychom dokázali platnost věty pro $n = p + 1$, stačí dokázat nerovnosti

$$\sqrt{p+1} \leqq \sqrt{p} + \frac{1}{\sqrt{p+1}}, \quad 2\sqrt{p} + \frac{1}{\sqrt{p+1}} \leqq 2\sqrt{p+1}.$$

To je snadné.

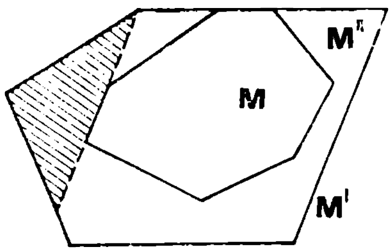
h) Pro $n = 3$ věta triviálně platí. Buď $p \geqq 3$ přirozené číslo a předpokládejme, že pro všechna přirozená k taková, že $3 \leqq k \leqq p$, věta platí. Uvažujeme konvexní $(p + 1)$-úhelník a v něm maximální počet úhlopříček, které se uvnitř něho neprotínají. Zvolme některou z nich. Ta rozděluje $(p + 1)$-úhelník na dva konvexní mnohoúhelníky, z nichž jeden má v vrcholů a druhý $p - v + 3$ vrcholy $(3 \leqq v \leqq p$ a tedy $3 \leqq p - v + 3 \leqq \leqq p)$. Původní úhlopříčky se tak rozpadnou na dvě části podle toho, v kterém z menších mnohoúhelníků leží. Každá část je přitom maximální soustavou úhlopříček příslušného menšího mnohoúhelníka (jinak bychom došli ke sporu s maximalitou v původním mnohoúhelníku). Podle indukčního předpokladu je jich i s rozdělující úhlopříčkou celkem $(v - 3) + (p - v + 3 - 3) + 1 = p - 2$ a dělí původní mnohoúhelník na $(v - 2) + (p - v + 3 - 2) = p - 1$ částí.

i) Pro $n = 1$ věta platí. Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že pro $n = p$ věta platí. Pro $n = p + 1$ dostáváme

$$a_1 + (a_1 + 1) a_2 + \ldots + (a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_p + 1) a_{p+1} = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_p + 1) - 1 + (a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_p + 1) a_{p+1} = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_p + 1)(a_{p+1} + 1) - 1 .$$

1.14. Projdeme-li důkazy, zjistíme, že rovnost nastane právě když $x_1 = x_2 = \ldots = x_r$.

1.15. Označme $o(\mathsf{K})$ obvod n-úhelníka K. Pro monohoúhelníky K, L označme $n(\mathsf{K}, \mathsf{L})$ počet stran mnohoúhelníka K, jež nejsou obsaženy ve stranách mnohoúhelníka L. Vnitřní z mnohoúhelníků uvažovaných ve cvičení označme M a vnější M'. Je-li $n(\mathsf{M}, \mathsf{M}') = 0$, jsou mnohoúhelníky M, M' totožné a $o(\mathsf{M}) = o(\mathsf{M}')$. Buď p celé nezáporné číslo a předpokládejme, že věta platí pro všechny mnohoúhelníky K obsahující mnohoúhelník M takové, že $n(\mathsf{M}, \mathsf{K}) = p$. Nechť $n(\mathsf{M}, \mathsf{M}') = p + 1$. Prodlužme jednu ze stran mnohoúhelníka M neležící ve straně mno-



hoúhelníka $\mathbf{M}'$ až k obvodu mnohoúhelníka $\mathbf{M}'$ (viz obrázek). Tak rozdělíme mnohoúhelník $\mathbf{M}'$ na dva mnohoúhelníky. Ten z nich, který obsahuje mnohoúhelník $\mathbf{M}$, označme $\mathbf{M}''$. Zřejmě je $o(\mathbf{M}'') < o(\mathbf{M}')$ a $n(\mathbf{M}, \mathbf{M}'') = p$. Podle indukčního předpokladu je $o(\mathbf{M}) \leqq o(\mathbf{M}'')$ a tedy $o(\mathbf{M}) < o(\mathbf{M}')$.

1.16. Nejprve musíme nějak definovat, co to znamená, že autobus je poloprázdný, abychom věděli, o čem vlastně uvažujeme. Ať to třeba znamená, že v autobuse je nejvýše m cestujících. Poslední věta úvahy není pravdivá pro $k = m$. Princip matematické indukce však požaduje, aby platila pro každé přirozené číslo k.

1.17. Platí-li pro nějakou větu pomocná věta (2), pak tím spíše platí pomocná věta (6), jejíž předpoklady v sobě zahrnují předpoklady pomocné věty (2).

1.19. Princip (I)—(II) vyplývá z principu (V)—(VI) takto: Nechť množina M má vlastnosti (I) a (II). Vlastnost (I) je identická s vlastností (V) a vlastnost (VI) je důsledkem vlastnosti (II). Množina M má tedy vlastnosti (V) a (VI) a podle principu (V)—(VI) obsahuje všechna přirozená čísla.

1.20. V textu jsme odvodili (1)—(2) z (I)—(II). Pomocí (1)—(2)

dokážeme, že platí věta „Pro každé přirozené číslo n platí: Množina M, která má vlastnosti (I) a (II), obsahuje číslo n“.

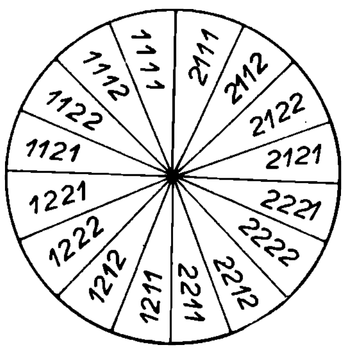
1.21. Stejně jako ve cvič. 1.20. dokážeme, že formulace označené římskými číslicemi jsou ekvivalentní s formulacemi označenými arabskými číslicemi. V textu je dokázáno (I)—(II) $\Rightarrow$ (III)—(IV) a (I)—(II) $\Rightarrow$ (V)—(VI). Ve cvič. 1.19 je dokázáno (V)—(VI) $\Rightarrow$ (I)—(II). Dále je zřejmé (III)—(IV) $\Rightarrow$ (I)—(II) (položíme $k = 1$) a (VII)—(VIII) $\Rightarrow$ (I)—(II) (položíme $r = 1$). Dokážeme nyní (IX)—(X) $\Rightarrow$ (I)—(II). Zvolme přirozené číslo k. Jestliže má množina M vlastnosti (I) a (II), má též vlastnosti (IX) a (X) a podle principu (IX)—(X) obsahuje k. Protože k bylo libovolné, obsahuje M všechna přirozená čísla.

Dokažme dále (I)—(II) $\Rightarrow$ (IX)—(X). Buď k přirozené číslo a množina M nechť má vlastnosti (IX) a (X). Označme M' množinu všech přirozených čísel větších než k. Množina $M \cup M'$ má vlastnost (I). Buď p přirozené číslo, $p \in M \cup M'$. Je-li $p < k$, je podle (IX) $p + 1 \in$ $\in M$. Je-li $p \geqq k$, je $p + 1 > k$ a proto $p + 1 \in M'$. V každém případě je tedy $p + 1 \in M \cup M'$ a množina $M \cup M'$ má vlastnost (II). Podle (I)—(II) obsahuje množina $M \cup M'$ všechna přirozená čísla. Množina M tedy obsahuje čísla $1, 2, \ldots, k$.

Konečně dokažme (III)—(IV) $\Rightarrow$ (VII)—(VIII). Buď r přirozené číslo a množina M nechť má vlastnosti (VII) a (VIII). Uvažujme ještě množinu M' obsahující právě všechna celá čísla m taková, že $m - r + 1 \in M, \ldots,$ $m - 1 \in M$, $m \in M$. Podle (VII) je $r \in M'$. Nechť $c \geqq r$, $c \in M'$. Podle definice M' je $c - r + 1 \in M, \ldots,$ $c - 1 \in M, c \in M$, podle (VIII) je pak $c + 1 \in M$ a podle definice M' je pak $c + 1 \in M'$. Množina M' má tedy vlastnosti (III) a (IV) (kde $k = r$) a podle (III)—(IV) obsahuje všechna přirozená čísla větší nebo rovná číslu r. Podle definice množiny M' obsahuje množina M všechna přirozená čísla.

1.22. Buď M' množina všech přirozených čísel j takových, že $n + 1 - j \in M$. Podle (α) je $1 \in M'$. Buď r přirozené číslo, $1 \leqq r < n$, a předpokládejme, že $r \in M'$. Protože $1 < n + 1 - r \leqq n$, $n + 1 - r \in M$, je podle (β) $n + 1 - r - 1 \in M$ a tedy $r + 1 \in M'$. Podle (IX)—(X) obsahuje množina M' čísla $1, 2, \ldots, n$ a tedy množina M obsahuje čísla $n, \ldots, 2, 1$.

2.1.



2.4. Označme ještě O těžiště $(n + 1)$-úhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$. Jak víme z úlohy 12, je

$$A_1O : OO_1 = A_2O : OO_2 = \ldots = A_{n+1}O : OO_{n+1} = n : 1$$

a

$$A_1A_2 \parallel O_2O_1,\ A_2A_3 \parallel O_3O_2,\ \ldots,\ A_{n+1}A_1 \parallel O_1O_{n+1}\,.$$

2.5. a) Pro $n = 1$ jde o rovnost $f_1 f_2 = f_1^2$ a ta platí, neboť $f_1 = f_2$. Buď p přirozené číslo a nechť pro $n = p$ rovnost platí. Pro $n = p + 1$ dostáváme

$$f_{p+1}f_{p+2} = f_{p+1}(f_p + f_{p+1}) = f_p f_{p+1} + f_{p+1}^2 =$$
$$= f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_{p+1}^2 \, .$$

b) Pro $n = 1$ jde o rovnost

$$f_2^2 - f_1 f_3 = 1^2 - 1 . 2 = -1 \, .$$

Buď p přirozené číslo a nechť pro $n = p$ rovnost platí. Pro $n = p + 1$ dostáváme

$$f_{p+2}^2 - f_{p+1}f_{p+3} = f_{p+2}(f_p + f_{p+1}) - f_{p+1}(f_{p+1} + f_{p+2}) =$$
$$= f_p f_{p+2} - f_{p+1}^2 = -(-1)^p = (-1)^{p+1} \, .$$

2.6. Ukážeme, že posloupnost definovaná uvedeným vzorcem vyhovuje rekurentnímu vzorci, jímž byla zavedena Fibonacciova posloupnost.

Pro $n = 1$ dostáváme

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \, ,$$

pro $n = 2$

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = 1$$

a dále

$$f_n + f_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right] =$$

$$= f_{n+2} \, .$$

2.8. Hledaný počet vlajek označme v_n. Zřejmě je $v_1 = 2$ (červená vlajka a bílá vlajka) a $v_2 = 3$ (červenobílá, bíločervená a červená). Buď k přirozené číslo. Všechny vlajky složené z $k + 2$ pruhů, z nichž spodní je červený, lze získat tak, že se ke všem v_{k+1} vlajkám složeným z $k + 1$ pruhů přišije dolů červený pruh. Všechny vlajky složené z $k + 2$ pruhů, z nichž spodní je bílý, lze získat tak, že ke všem v_k vlajkám složeným z k pruhů přišijeme dolů červený pruh a pod něj bílý pruh. Platí tedy

$$v_{k+2} = v_{k+1} + v_k$$

pro každé přirozené k.

Jiné řešení: Nejprve určeme, kolik existuje vlajek, které mají uvedenou vlastnost a obsahují právě k červených pruhů (a tedy $n - k$ bílých pruhů). Mezi každými dvěma červenými pruhy jakož i na okrajích bude nejvýše po jednom bílém pruhu. Vlajek s k červenými pruhy bude tedy právě tolik, kolika způsoby lze rozmístit $n - k$ bílých pruhů na $k + 1$ míst ($k - 1$ mezer a dva kraje), tedy $\binom{k+1}{n-k}$ v případě $k + 1 \geqq n - k$ (neboli $k \geqq \frac{n-1}{2}$) a 0 v případě $k < \frac{n-1}{2}$. (Stále předpokládáme, že $k \leqq n$.) Celkový počet bude

$$\binom{a+1}{n-a} + \binom{a+2}{n-a-1} + \ldots + \binom{n}{1} + \binom{n+1}{0},$$

kde $a = \frac{n}{2}$ pro sudé n, $a = \frac{n-1}{2}$ pro liché n.

2.9. Z prvního řešení cvičení 8 je vidět, že pro každé přirozené n je $v_n = f_{n+2}$. Pro $n > 2$ je tedy podle druhého řešení

$$f_n = v_{n-2} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \ldots + \binom{a+1}{n-2-a},$$

kde $a = \frac{n}{2} - 1$ pro sudé n, $a = \frac{n-3}{2}$ pro liché n. Položíme-li $m = n - 2 - a$ a dosadíme sem za a, dostaneme $m = \frac{n-1}{2}$ pro lichá n a $m = \frac{n}{2} - 1$ pro sudé n a vzorec nabude tvaru uvedeného ve cvič. 9.

Jiné řešení: Ukážeme, že členy posloupnosti f_n definované vzorcem ze cvič. 9 vyhovují rekurentní definici Fibonacciovy posloupnosti. Pro $n = 1$ je $m = 0$ a $f_1 = \binom{0}{0} = 1$. Pro $n = 2$ je též $m = 0$ a $f_2 = \binom{1}{0} = 1$. Pro sudé n je

$$f_n + f_{n+1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \ldots +$$

$$+ \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-1} + \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}$$

a

$$f_{n+2} = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}}.$$

Pro liché n je

$$f_n + f_{n+1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \dots +$$

$$+ \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}} + \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-1}{2}}$$

a

$$f_{n+2} = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n+1}{2}}.$$

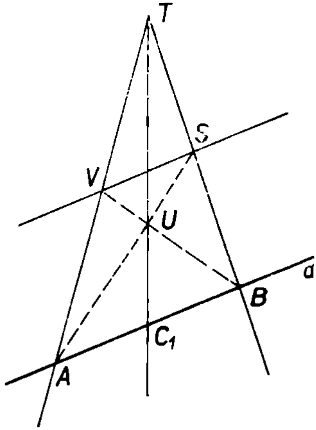
Vzhledem k tomu, že $\binom{r}{s} + \binom{r}{s+1} = \binom{r+1}{s+1}$ pro nezáporná celá $r > s$, a $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$, platí v obou případech

$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1}.$$

2.11. Jedna možnost je opakovat celý postup a sestrojit bod C^*_{n-1}, který dělí úsečku C_nB_n v poměru $C_nC^*_{n-1} : BC^*_{n-1} = 1 : (n-1)$, dalším provedením konstrukce z úlohy 14 sestrojit bod C^*_{n-2}, který dělí úsečku $C^*_{n-1}B$ v poměru

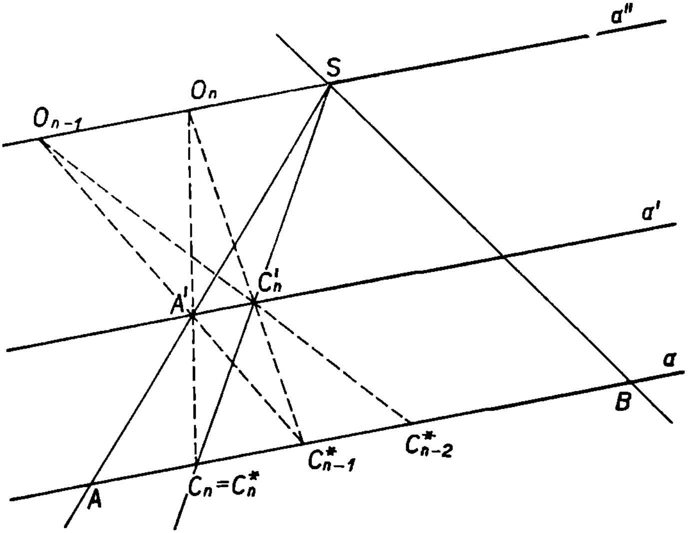
$$C^*_{n-1}C^*_{n-2} : BC^*_{n-2} = 1 : (n - 2), \text{ atd.}$$

Méně pracný je však následující postup: Nejprve vedeme bodem S rovnoběžku s přímkou a. To provedeme takto: Na polopřímce opačné k SB zvolíme bod $T \neq S$ (viz obrázek). Průsečík přímek AS, TC_1 označme U a průsečík přímek AT, BU označme V. Přímky AB, VS jsou rovnoběžné, což se dokáže následujícím způsobem:



Rovnoběžku s přímkou a procházející bodem S označme a''. Její průsečík s přímkou AT označme V'. Dále označme U' průsečík přímek AS a BV'. Jak víme z prvního kroku úlohy 14, prochází přímka TU' bodem C_1. Je proto $U' = U$, $V' = V$ a přímky a, VS jsou totožné.

Vraťme se ke konstrukci. Sestrojili jsme bodem S rovnoběžku a'' s přímkou a. Položme $C^*_n = C_n$ (viz obrázek).



Buď $1 < k \leqq n$ přirozené číslo a předpokládejme, že je sestrojen bod C^*_k na úsečce AB. Průsečík přímek a'', $A'C^*_k$ označme O_k. Bod C^*_{k-1} bude průsečík přímek a, $O_kC'_n$. Z podobných trojúhelníků snadno zjistíme, že

$$AC^*_n = C^*_nC^*_{n-1} = \ldots = C^*_1B.$$

2.13. Vyjdeme-li od $x_1 = 1{,}5$ a zaokrouhlujeme-li dílčí výsledky na pět desetinných míst, vychází $x_2 = 1{,}41667$, $x_3 = 1{,}41422$, $x_4 = 1{,}41421$. Je tedy $\sqrt{2} \doteq 1{,}4142$.

2.15. Pro $n = 1$ je $x_2 = \frac{1}{2}\left(A + \frac{a}{A}\right) = f(A)$. Nechť p je přirozené číslo a předpokládejme, že $x_p = f(\ldots(f(A))\ldots)$, kde vpravo je p-krát složená funkce f. Potom je $x_{p+1} = f(x_p) = f(f(\ldots f(A))\ldots))$, kde vpravo je

$(p + 1)$-krát složená funkce f.

2.16. Pro $n = 1$ je

$$\frac{x_1 - \sqrt{a}}{x_1 + \sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2}\left(A + \frac{a}{A}\right) - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}\left(A + \frac{a}{A}\right) + \sqrt{a}} =$$

$$= \frac{A^2 + a - 2A\sqrt{a}}{A^2 + a + 2A\sqrt{a}} = \left(\frac{A - \sqrt{a}}{A + \sqrt{a}}\right)^2.$$

Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že

$$\frac{x_p - \sqrt{a}}{x_p + \sqrt{a}} = \left(\frac{A - \sqrt{a}}{A + \sqrt{a}}\right)^{2^p}.$$

Pro $n = p + 1$ dostáváme

$$\frac{x_{p+1} - \sqrt{a}}{x_{p+1} + \sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2}\left(x_p + \frac{a}{x_p}\right) - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}\left(x_p + \frac{a}{x_p}\right) + \sqrt{a}} =$$

$$= \frac{x_p^2 + a - 2x_p\sqrt{a}}{x_p^2 + a + 2x_p\sqrt{a}} = \left(\frac{x_p - \sqrt{a}}{x_p + \sqrt{a}}\right)^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{A - \sqrt{a}}{A + \sqrt{a}}\right)^{2^p}\right]^2 = \left(\frac{A - \sqrt{a}}{A + \sqrt{a}}\right)^{2^{p+1}}$$

Buď $\{K_n\}$ posloupnost $\left\{\left(\frac{A - \sqrt{a}}{A + \sqrt{a}}\right)^{2^n}\right\}$. Ze vzorce, který jsme právě odvodili, plyne, že pro každé přirozené n je

$$x_{n+1} = \frac{(K_n + 1)\sqrt{a}}{1 - K_n}.$$

Posloupnost $\{K_n\}$ je zřejmě omezená a nerostoucí a proto i posloupnost $\{x_{n+1}\}$ má tyto vlastnosti. Posloupnost $\{K_n\}$ konverguje k 0 a posloupnost $\{x_{n+1}\}$ tedy konverguje k $\dfrac{(0+1)\sqrt{a}}{1-0} = \sqrt{a}$.

2.17. Definice má smysl, neboť $y_n \neq 0$ pro každé n. Dokažme, že $y_n \geqq \sqrt[3]{a}$ pro všechna $n > 1$. Pro každé n je $y_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2y_n + \dfrac{a}{y_n^2}\right) = \dfrac{2y_n^3 + a}{3y_n^2} = y_n\left(1 + \dfrac{a - y_n^3}{3y_n^3}\right)$.
Z rekurentní definice posloupnosti $\{y_n\}$ je zřejmé, že $y_n > 0$ pro každé n. Z toho plyne, jak se snadno přesvědčíme, že

$$\frac{a - y_n^3}{3y_n^3} > -1 .$$

Podle Bernoulliovy nerovnosti (viz cvič. 3.2) je tedy

$$y_{n+1}^3 = y_n^3\left(1 + \frac{a - y_n^3}{3y_n^3}\right)^3 \geqq y_n^3\left(1 + 3\,\frac{a - y_n^3}{3y_n^3}\right) = a .$$

Dále dokažme, že $y_{n+1} \leqq y_n$ pro každé $n > 1$. To je také vidět z výše uvedeného vyjádření pro y_{n+1}, je totiž

$$1 + \frac{a - y_n^3}{3y_n^3} \leqq 1 ,$$

neboť $a \leqq y_n^3$ pro každé $n > 1$.
Posloupnost $\{y_{n+1}\}$ je tedy zdola omezená a nerostoucí, má tedy limitu; označme ji L. Z toho, co už víme, je zřejmé, že $L \geqq \sqrt[3]{a}$. Z rekurentního vzorce pro posloupnost $\{y_n\}$ plyne, že platí

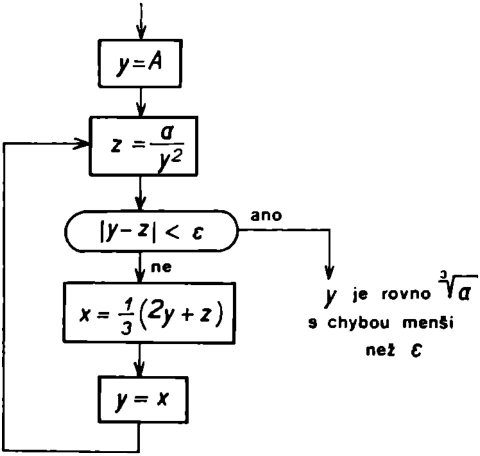
$$L = \frac{1}{3}\left(2L + \frac{a}{L^2}\right),$$

čili $L^3 = a$.

Zjistili jsme, že $y_n \geqq \sqrt[3]{a}$. Z toho vyplývá, že

$$\frac{a}{y_n^2} \leqq \sqrt[3]{a} = y_n$$

(pro $n > 1$). To umožňuje pohodlně odhadnout, jak se y_n liší od $\sqrt[3]{a}$. Praktický výpočet $\sqrt[3]{a}$ s chybou menší než ε bude probíhat podle schématu



2.18. Vyjdeme-li od $y_1 = 1{,}5$ a zaokrouhlujeme-li dílčí výsledky na pět desetinných míst, vychází $x_2 = 1{,}29629$, $x_3 = 1{,}26093$, $x_4 = 1{,}25992$, $x_5 = 1{,}25992$. Je tedy $\sqrt[3]{2} \doteq 1{,}2599$.

2.20. $t_{10} = 1430$.

2.21. Označme body $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ tak, jak jdou na kružnici za sebou. Bod A_1 může být spojen pouze s bodem se sudým indexem. Jinak by totiž na každé straně tětivy spojující bod A_1 s bodem o lichém indexu byl lichý počet bodů a alespoň jedna z $n - 1$ ostatních tětiv by ji pak protínala. Hledaný počet označme p_n. Nechť je bod A_1 spojen s bodem A_{2k}. Pak na jedné straně zůstane $2(k - 1)$ bodů (ty lze pospojovat p_{k-1} způsoby) a na druhé straně $2(n - k)$ bodů (ty lze pospojovat p_{n-k} způsoby). Bude tedy

$$p_1 = 1\,,$$

$$p_n = p_{n-1} + p_1 p_{n-2} + \ldots + p_{n-2} p_1 + p_{n-1} \text{ pro } n > 1\,.$$

Je zajímavé, že pro každé n je $p_n = t_{n+2}$, kde $\{t_n\}$ je posloupnost z úlohy 16.

3.1. Vzhledem k tomu, že $M \neq \emptyset$, existuje přirozené číslo $n \in M$. Stačí tedy větu dokázat pro množinu $M \cap \{1, 2, \ldots, n\}$, což je konečná množina. Dokážeme následující větu: Buď k přirozené číslo a buď dána k-prvková podmnožina $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ množiny přirozených čísel. Potom existuje $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ takové, že $p_i \leqq p_j$ pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Provedeme to matematickou indukcí. Pro $k = 1$ věta triviálně platí. Buď r přirozené číslo a nechť pro $k = r$ věta platí. Buď dána $(r + 1)$-prvková podmnožina $\{p_1, p_2, \ldots, p_{r+1}\}$ množiny všech přirozených čísel. Podle indukčního předpokladu existuje $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ takové, že $p_i \leqq p_j$ pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Je-li $p_i \leqq p_{r+1}$, položme $y = i$. Je-li $p_i > p_{r+1}$, položme $y = r + 1$. Pak je $p_y \leqq p_j$ pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, r + 1\}$.

3.2. a) Pro $n = 1$ platí nerovnost. Buď p přirozené číslo a nechť pro $n = p$ nerovnost platí. Pro $n = p + 1$ dostáváme

$$(1 + x)^{p+1} = (1 + x)^p (1 + x) \geqq (1 + px)(1 + x) =$$
$$= 1 + (p + 1) x + px^2 \geqq 1 + (p + 1) x \,.$$

b) Podle binomické věty je

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \ldots \geqq 1 + nx \,.$$

Druhý důkaz je názornější, ale platí jen pro $x \geqq 0$ (členy na místě teček jsou nezáporné). Důkaz indukcí však platí pro $x \geqq -1$. (V tomto oboru jsme Bernoulliovu nerovnost potřebovali při řešení cvič. 2.18.)

3.3. Obvyklý postup selhává. Pokusme se modifikovat pravou stranu a převést úlohu na důkaz nerovnosti

$$\frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} \leqq \frac{1}{4} - \frac{a}{n^2} \,,$$

kde a je vhodná kladná konstanta. Především musí být pro $n = 2$

$$\frac{1}{8} \leqq \frac{1}{4} - \frac{a}{4}$$

a tedy $a \leqq \frac{1}{2}$. K tomu, aby se zdařil indukční krok postačí, aby pro každé n bylo

$$\frac{1}{4} - \frac{a}{n^2} + \frac{1}{(n + 1)^3} \leqq \frac{1}{4} - \frac{a}{(n + 1)^2} \,,$$

což platí pro všechna a splňující při každém n nerovnost

$$a \geqq \frac{1}{2} - \frac{3n^3 + 7n^2 + 5n + 1}{2(2n^4 + 7n^3 + 9n^2 + 5n + 1)} \,.$$

Zvolíme-li tedy např. $a = \frac{1}{2}$, důkaz modifikované nerovnosti se podaří.

Jiné řešení (ne podle návodu). Pro $n = 2, 3, 4$ dokazovaná nerovnost platí. Pro $n > 4$ dokážeme indukcí nerovnost

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} \leqq \frac{n}{4\,(n+1)},$$

jejíž pravá strana je zřejmě menší než 1/4: Pro $n = 5$ ověříme, že poslední nerovnost platí. Předpokládejme, že platí pro $n = k \geqq 5$. Pro $n = k + 1$ dostaneme

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{k^3} + \frac{1}{(k+1)^3} \leqq \frac{k}{4\,(k+1)} + \frac{1}{(k+1)^3} = \frac{k^3 + 2\,k^2 + k + 4}{4\,(k+1)^3} < \frac{k+1}{4\,(k+2)}.$$

Ještě jiné řešení (bez použití indukce). Pro každé $k > 1$ platí

$$\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k\,(k+1)\,(k-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k\,(k-1)} - \frac{1}{(k+1)\,k}\right)$$

a tedy

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n\,(n+1)}\right) < \frac{1}{4}.$$

A ještě poznámka pro toho, kdo zná pojem součtu nekonečné řady:

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots = 0{,}20205\ldots$$

3.4. Označme P množinu všech přirozených čísel, Q_c množinu všech celých čísel větších nebo rovných celému číslu c a R_k množinu všech přirozených čísel menších nebo rovných přirozenému číslu k. Je-li k přirozené číslo, c celé číslo a $T(n)$ výroková forma s příslušným definičním oborem, jsou principy (3)—(4) až (9)—(10) formálně zapsány takto:

(3)—(4): $T(c) \wedge (\forall q \in Q_c)\,[T(q) \Rightarrow T(q+1)] \Rightarrow$
$\Rightarrow (\forall q \in Q_c)\, T(q)$

(5)—(6): $T(1) \wedge (\forall p \in P)\,[(\forall r \in R_p)\, T(r) \Rightarrow$
$\Rightarrow T(p+1)] \Rightarrow (\forall p \in P)\, T(p)$

(7)—(8): $(\forall r \in R_k)\, T(r) \wedge (\forall p \in P)\,[(\forall r \in R_{p+k-1} -$
$- R_{p-1}) T(r) \Rightarrow T(p+k)] \Rightarrow (\forall p \in P)\, T(p)$

(9)—(10): $T(1) \wedge (\forall r \in R_{k-1})\,[T(r) \Rightarrow T(r+1)] \Rightarrow$
$\Rightarrow (\forall r \in R_k)\, T(r)$