3. kapitola. Teória grafov – jedna z najviac aplikovaných disciplin

In: Ján Černý (author): O aplikáciach matematiky. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1976. pp. 31–76.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403841

3. kapitola

TEÓRIA GRAFOV — JEDNA Z NAJVIAC APLIKOVANÝCH DISCIPLÍN

V posledných desaťročiach čoraz viac vystupujú do popredia aplikácie matematiky na riešenie problémov organizácie a riadenia. Vážnu úlohu tu hrá práve teória grafov. Táto síce nie je súčasťou povinnej matematiky na gymnáziách (i keď aj o tomto sa uvažuje), ale väčšina čitateľov, i mladých, sa s ňou už asi stretla pri iných príležitostiach, napr. v Rozhledoch, v krúžkoch, na akciách JČSMF apod.

3.1. Základné pojmy teórie grafov

Grafom nazývame dvojicu (V, H), kde V je nejaká množina a H je podmnožina množiny V^2 všetkých dvojíc (v_1, v_2), kde $v_1 \in V$, $v_2 \in V$. Množina V sa volá vrcholová množina grafu a my o nej budeme predpokladať, že je konečná. Jej prvky sa volajú vrcholy grafu. Množina H sa volá hranová množina grafu a jej prvky sa volajú hrany grafu.

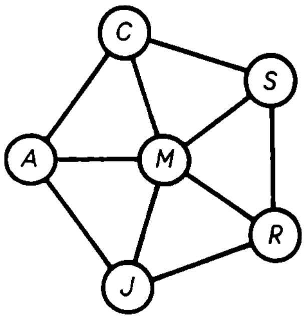
Ak chápeme hranu $h = (v_1, v_2)$ ako usporiadanú dvojicu, voláme ju orientovanou hranou, vrchol v_1 voláme jej začiatočným a vrchol v_2 jej koncovým vrcholom. Ak nám naopak pri hrane h nezáleží na poradí vrcholov v_1, v_2, voláme h neorientovanou hranou a v_1, v_2 voláme jej koncovými vrcholmi. Graf, ktorý obsahuje len orientované hrany sa volá orientovaný, graf, ktorý obsahuje len neorientované hrany sa volá neorientovaný, graf, ktorý obsahuje hrany oboch druhov sa volá čiastočne orientovaný.

Graf často znázorňujeme v rovine, a to tak, že každému vrcholu priradíme v rovine krúžok, pričom tieto krúžky sú navzájom disjunktné, tj. nemajú spoločné body. Ak v_1, v_2 je orientovaná hrana, narysujeme v rovine šípku z krúžku v_1 do v_2.

Ak (v_1, v_2) je neorientovaná hrana, spojíme krúžky v_1 a v_2 úsečkou, alebo oblúkom. Obrázok 7a a ďalšie sú príkladmi znázornenia grafov v rovine.

Na danom grafe $\mathscr{G} = (V, H)$ voláme vrcholy v_1 a v_2 susednými, ak $(v_1, v_2) \in H$, alebo $(v_2, v_1) \in H$. Navzájom rozne hrany h_1, h_2 voláme susednými, ak majú spoločný vrchol.

Vidíme, že graf je matematická štruktúra, ktorá vyjadruje istý vzťah medzi dvojicami prvkov množiny V, čiže binárnu reláciu na množine V. V praxi sa často stretávame práve s potrebou študovať množinu prvkov s binárnou reláciou, a preto má teória grafov také široké uplatnenie.



Obr. 7a

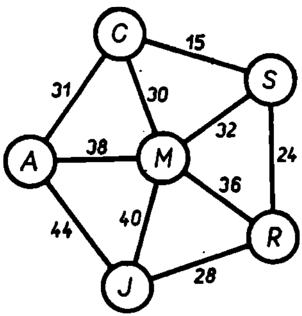
Uvážme napríklad neorientovaný graf z obr. 7a. Tento graf može mať mnoho rôznych významov, ako napríklad

3.1.1. Vrcholmi sú niektoré európske štáty (*C* — Československo, *S* — Sovietsky zväz, *A* — Rakúsko, *M* — Maďarsko, *J* — Juhoslávia a *R* — Rumunsko), hranou sú spojené susedné štáty.

3.1.2. Vrcholmi sú televízne vysielače I. programu. Dva vysielače spojíme hranou, ak na niektorom mieste možno prijímať signál s oboch vysielačov.

3.1.3. Vrcholmi grafu sú šiesti žiaci (Cyril, Stano, Andrej, Martin, Juraj a Roman) a hranou sú spojení tí dvaja, ktorí sa spolu priatelia.

3.1.4. Vrcholmi grafu sú objekty, ktoré má strážiť vojenská strážna jednotka (centrálny sklad, strelnica, autopark, muničný sklad, južný sklad a radarová stanica). Dva objekty sú spojené hranou, ak je medzi nimi priama viditeľnosť.



Obr. 7b

Niekedy pripisujeme hranám grafu číselné ohodnotenia, ako napríklad na obr. 7b. Tieto čísla môžu mať rôzny zmysel, napríklad

3.1.5. Tento graf môže vyjadrovať šesť homogénnych rovníc pre šesť neznámych A, C, J, M, R, S, ktoré dostaneme tak, že pre každý vrchol grafu napíšeme rovnicu, v ktorej označenie vrcholu je na ľavej strane rovnice a na pravej strane je súčet, ktorého členmi sú označenia susedných vrcholov násobené ohodnoteniami hrán, smerujúcich do vybraného vrcholu:

$$\begin{aligned}
A &= 31C + 44J + 38M \\
C &= 31A + 30M + 15S \\
J &= 44A + 40M + 28R \\
M &= 38A + 30C + 40J + 36R + 32S \\
R &= 28J + 36M + 24S \\
S &= 15C + 32M + 24R
\end{aligned}$$

3.1.6. Vrcholy grafu môžu znamenať mestá v niektorej oblasti, pričom hranou sú spojené susedné mestá a číselné ohodnotenie znamená vzdialenosť v kilometroch (prípadne v hodinách jazdy, alebo v nákladoch na prepravu jednej tony).

3.1.7. Vrcholmi grafu sú dopravné uzly; dva uzly sú spojené hranou, ak medzi nimi vedie priama dopravná tepna, ktorá už neprechádza žiadnym ďalším uzlom. Číselné ohodnotenie tu znamená priepustnosť, kapacitu dopravnej tepny. Priepustnosťou rozumieme maximálne množstvo dopravných jednotiek, ktoré môžu tepnou prejsť za jednotku časovú (napr. počet vozidiel za minútu apod.).

3.2. Najčastejšie aplikované metódy teórie grafov

Príklady, ktoré sme si uviedli, nám ukazujú, aké rozmanité situácie možno opísať pomocou grafov, ba dokonca aj pomocou toho istého grafu. Opis tu však býva len začiatkom, zriedkakedy konečným cieľom práce. Zvyčajne sa pomocou niektorej metódy teórie grafov hľadá odpoveď na istú praktickú otázku. V ďalšom texte si preberieme niektoré úlohy teórie grafov i prípadne s metódami na ich riešenie, ktoré sa častejšie vyskytujú v praktických aplikáciách.

3.2.1. Farebná úloha. Uvážme časť mapy Európy, na ktorej je Československo, Sovietsky zväz, Rakúsko, Maďarsko, Juhoslávia a Rumunsko. Úlohou je nájsť minimálny počet farieb, ktorými možno túto mapu vyfarbiť, a to tak, že celé územie jedného štátu je jednofarebné, ale územia susedných štátov sú vyfarbené rôznymi farbami. Riešenie tejto úlohy by sme sa síce mohli pokúsiť nájsť priamo na spomínanej mape, ukážeme si však lepšiu grafickú pomôcku. Je ňou graf z obr. 7a. Pre nás je totiž zaujímavé len to, aké prvky má množina skúmaných štátov a ktoré z nich sú susedné. Ako sme si už uviedli v príklade 3.1.1, tieto skutočnosti vyjadruje práve graf z obr. 7a.

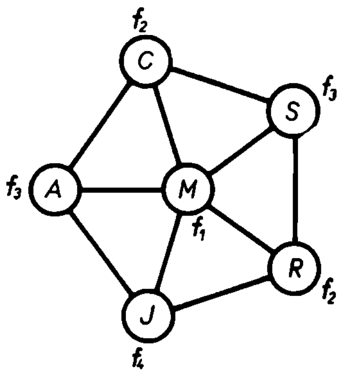
Naša úloha je špeciálnym prípadom všeobecnej farebnej úlohy pre vrcholy grafu, ktorá je nasledovná:

Pre daný graf $\mathscr{G} = (V, H)$ nájsť množinu farieb $F_{\mathscr{G}} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ a zobrazenie f množiny V do $F_{\mathscr{G}}$ také, že

1. pre všetky $(v, w) \in H$ platí $f(v) \neq f(w)$,
2. číslo n je minimálne.

Ak existuje riešenie tejto úlohy, ktoré spĺňa tieto podmienky, hovoríme, že na vyfarbenie grafu treba minimálne n farieb čiže, že graf je n-farebný. Ak sa splní len podmienka 1, hovoríme, že na vyfarbenie grafu stačí n farieb.

Algoritmy, ktoré poznáme na riešenie všeobecnej farebnej úlohy sú málo uspokojivé. Počet počtových výkonov, ktoré sú potrebné na ich vykonanie, prudko rastie s rastúcim počtom vrcholov a hrán grafu a je temer porovnateľný s počtom výkonov pri „absolútnom" algoritme preskúmania všetkých variantov. Jeden z algoritmov si popíšeme neskôr.



Obr. 8

V našom konkrétnom prípade je však zrejmé, že štyrmi farbami je možné graf vyfarbiť (obr. 8), kým tri farby nestačia, čo si môžeme dokázať nepriamo: Predpokladajme, že by tri farby stačili na vyfarbenie tohto grafu. Označme si farby, priradené vrcholom M, C, S po rade f_1, f_2, f_3, tj. $f(M) = f_1$, $f(C) = f_2$, $f(S) = f_3$. Potom nutne $f(A) = f_3$, $f(R) = f_2$, a teda susedné vrcholy vrcholu J majú farby f_1, f_3, f_2, čiže žiadnu z týchto farieb nemožno priradiť vrcholu J, čo je spor s predpokladom.

Čitatelia si iste uvedomujú, že farbenie máp je úloha veľmi špeciálna a v praxi tak zriedkavá, že by sa sotva oplatilo o nej hovoriť, keby neexistovali iné, významnejšie aplikácie farebnej úlohy. Jedna z nich súvisí s príkladom 3.1.2.

Na našom území máme už postavených, alebo plánovaných, niekoľko stovák vysielačov rôzneho výkonu pre I. televízny program. Ak z nich zostavíme graf podobne, ako v 3.1.2 a podarí sa nám ho zafarbiť menej, ako 12 farbami, potom, ak považujeme každú z farieb za niektorý vysielací kanál, nájdeme vysielacie kanály pre všetky vysielače tak, aby sa navzájom nerušili. Hovoríme o menej, ako 12 farbách preto, že k dispozícii je len 11 kanálov, hoci na televízore ich je 12. Tretí kanál sa používa pre VKV rozhlas.

Teraz si opíšeme jeden z algoritmov na riešenie všeobecnej farebnej úlohy. Jeho presnou úlohou je zistiť, či možno pre daný graf a dané n vystačiť s n farbami. Viacnásobne opakovaným použitím tohto algoritmu nakoniec zistíme minimálne n.

1. krok: Pre každé $v \in V$ a $i = 1, \ldots, n$ definujme premennú x_{vi} (tzv. binomickú), ktorá môže nadobúdať len hodnoty 0, 1.

2. krok: Riešme systém rovníc a nerovníc

$$\sum_{i=1}^{n} x_{vi} = 1 \qquad (v \in V)$$

$$x_{vi} + x_{wi} \leqq 1 \qquad ((v, w) \in H\,, \quad i = 1, \ldots, n)$$

Ako sa takýto systém rieši, si povieme v 4. kapitole.

Ak riešenie neexistuje, nemožno graf vyfarbiť n farbami. Ak áno, tak n farieb na to stačí a $x_{vi} = 1$ znamená, že $f(v) = f_i$.

3.2.2. Úloha o vnútornej stabilite. Predstavte si, že by sme zo žiakov, ktorých spomíname v príklade 3.1.3, potrebovali vybrať predsedu a pokladníka triedneho výboru. Bolo by pritom žiadúce, aby neboli blízkymi priateľmi. Existuje takáto dvojica? Na grafe z obr. 7a vidíme, že ich existuje niekoľko, napr. Cyril—Juraj, Cyril—Roman, atď., spolu 5 dvojíc. Ak by sme však chceli vybrať troch žiakov tak, aby žiadni dvaja neboli blízkymi priateľmi, už sa nám to nepodarí. Ak na grafe z obr. 7a vyberieme akúkoľvek množinu troch vrcholov, vždy sa medzi nimi nájdu aspoň dva spojené hranou. Číslo 2 má teda pre tento graf istý význam, ktorý môžeme všeobecne formulovať takto:

Majme graf $\mathcal{G} = (V, H)$. Množina $W \subset V$ sa volá vnútorne stabilná, ak žiadne dva jej vrcholy nie sú susedné (spojené hranou). Najväčšie číslo $v_{\mathcal{G}}$, ku ktorému v grafe $\mathcal{G}$ existuje vnútorne stabilná množina s počtom prvkov $v_{\mathcal{G}}$, sa volá číslo vnútornej stability grafu $\mathcal{G}$.

Algoritmus na vyhľadanie vnútorne stabilnej množiny s maximálnym počtom prvkov, je popísaný v Bergeho knihe [4]. Táto úloha, prípadne úlohy k nej príbuzné, možu mať aplikácie tam, kde ide o tvorenie kompletov z viacerých zložiek, pričom niektoré dvojice zložiek nesmú byť obsiahnuté v jednom komplete. Čitatelia sa môžu vlastnou úvahou presvedčiť, že úloha o rozmiestení maximálneho počtu dám na šachovnici tak, aby žiadne dve se nemohli navzájom zobrať (tento maximálny počet je 8), je tiež úlohou o maximálnej vnútorne stabilnej množine.

3.2.3. Úloha o vonkajšej stabilite. Uvážme strážené objekty, ktoré spomíname v príklade 3.1.4. Predpokladajme, že netreba obsadiť strážnym všetky objekty, ale že stačí, ak na každý neobsadený objekt je vidno z niektorého obsadeného. Stačilo by teda napríklad obsadiť objekty C a J, ale nestačilo by H a S. Zvláštnosťou grafu z obr. 7a (iné grafy túto vlastnosť nemusia mať) je, že vrchol M je susedný všetkým ostatným vrcholom a teda stačí obsadiť M, ostatné sú z neho vidno. Úloha, o ktorej sme teraz hovorili, je špeciálnym prípadom nasledovnej všeobecnej úlohy, ktorá sa volá úlohou o vonkajšej stabilite:

Majme graf $\mathcal{G} = (V, H)$. Množinu $W \subset V$ voláme navonok stabilnou, ak pre každý vrchol $v \in (V - W)$ platí, že je susedný k niektorému $w \in W$ (čiže každý vrchol grafu alebo padne do W, alebo je k tejto množine susedný). Najmenšie číslo $w_{\mathcal{G}}$, ku ktorému existuje v grafe $\mathcal{G}$ navonok stabilná množina W s počtom prvkov $w_{\mathcal{G}}$, sa volá číslo vonkajšej stability grafu $\mathcal{G}$.

S algoritmami na vyhľadanie najmenšej navonok stabilnej množiny je situácia podobná, ako pri farebnej úlohe; sú veľmi zdĺhavé. Aj túto úlohu možno riešiť použitím binomických premenných:

Ku každému $v \in V$ definujeme binomickú premennú x_v ($x_v = 1$ bude znamenať, že $v \in W$, $x_v = 0$, že $v \notin W$), Treba nájsť minimum tzv. cieľovej funkcie

$$z = \sum_{v \in V} x_v$$

na množine, určenej podmienkami

$$x_v + \sum_{w \text{ sus. k } v} x_w \geqq 1 \qquad (v \in V).$$

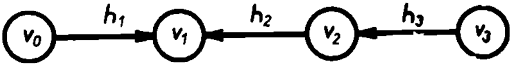
Úloha o vonkajšej stabilite má širšie uplatnenie, ako úloha o stabilite vnútornej. Ukážeme si jeden príklad.

Predpokladajme, že v istom meste sa chystá nejaká významná akcia (festival, spartakiáda apod.). Nech V je množina všetkých jeho križovatiek. Predpokladajme, že pre veľký počet prvkov v množine V nie je možné každú križovatku v meste obsadiť informátorom, ale že by bolo žiadúce, aby v prípade, že na niektorej križovatke informátor nie je, existovala križovatka ku nej susedná, na ktorej už informátor je. Najmenšia množina obsadených križovatiek s touto vlastnosťou je najmenšia navonok stabilná množina v grafe $\mathscr{G} = (V, H)$, kde $(v, w) \in H$, ak sú križovatky v, w susedné v dopravnom zmysle.

Iným príkladom takejto úlohy je problém umiestenia minimálneho počtu dám na šachovnici tak, aby každé pole, na ktorom dáma nestojí, bolo v dosahu niektorej z nich. Čitateľ sa môže sám presvedčiť, že táto úloha je úlohou o minimálnej navonok stabilnej množine.

3.2.4. Cesty na grafoch. Cestou na grafe $\mathscr{G} = (V, H)$ voláme konečnú postupnosť $\mathscr{C} = (v_0, h_1, v_1, \ldots, h_n, v_n)$, kde v_0 a v_1 sú rôzne vrcholy hrany h_1, v_1 a v_2 sú rôzne vrcholy hrany $h_2, \ldots, v_{n-1}$ a v_n sú rôzne vrcholy hrany h_n.

Dôležité je, aby sme si uvedomili, že v prípade orientovanej hrany h_1 nežiadame, aby v_0 bol jej začiatočný a v_1 koncový vrchol. Môže to byť aj naopak!



Obr. 9

Na obr. 9 máme príklad cesty $\mathscr{C} = (v_0, h_1, v_1, h_2, v_2, h_3, v_3)$ na orientovanom (prípadne čiastočne orientovanom grafe).

Ak naviac všetky orientované hrany $h_i = (v_{i-1}, v_i)$

majú svoje vrcholy i v tomto poradí na ceste $\mathscr{C}$ hovoríme, že $\mathscr{C}$ je usmernená cesta. Na obr. 9 je cesta (v_3, h_3, v_2, h_2, v_1) usmernená.

Ak pre cestu $\mathscr{C}$ platí $v_0 = v_n$ a všetky ostatné vrcholy sú navzájom rôzne, voláme ju kružnicou. Ak to platí pre usmernenú cestu $\mathscr{C}$, voláme ju usmernenou kružnicou.

3.2.5. Vyhľadanie cesty medzi dvoma vrcholmi. Táto úloha sa môže zdať čitateľom triviálna, veď kto by mohol mať starosti napríklad s vyhľadaním cesty z S do A na grafe z obr. 7a. Zdanie sa však tento raz mýli. Omyl spočíva v tom, že nie vždy máme možnosť „systematického" pohľadu na graf ako celok. Predstavme si, že by sme nemohli kresliť žiadne obrázky, ale mali graf značený takto:

$$V = \{C, A, J, R, S, M\}$$

$$h_1 = (C, A), \quad h_2 = (A, J), \quad h_3 = (J, R), \quad h_4 = (R, S)$$
$$h_5 = (S, C), \quad h_6 = (M, C), \quad h_7 = (M, A), \quad h_8 = (M, J)$$
$$h_9 = (M, R), \quad h_{10} = (M, S)$$

(takýmto spôsobom by mohol byť graf z obr. 7a zadaný napríklad v pamäti počítača). Pri takomto spôsobe určenia grafu nevidno cestu z S do A „na prvý pohľad".

Predstavme si však, že pri takomto spôsobe zadania by vrcholov nebolo 6, ale 60 a hrán okolo 300. Potom vzniká skutočne netriviálna otázka, podľa akého algoritmu treba postupovať (napríklad pri riešení na počítači) pri hľadaní cesty medzi dvoma vrcholmi grafu.

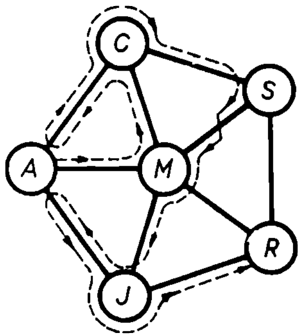
Takýto istý algoritmus by mohol potrebovať aj speleológ (= jaskyniar), keď by zablúdil v spleti podzemných chodieb a potreboval by sa dostať von. Podzemné chodby možno totiž považovať za hrany niektorého grafu a križovatky chodieb za jeho vrcholy. Speleológ pritom nielen že nemá celkový pohľad na graf, ale nevidí nič, okrem chodby, ktorou ide a chodieb, ktoré do nej ústia.

Hoci pre prácu aplikovaného matematika je viac charakteristická tvorba matematických modelov, ako výber algoritmov, algoritmus pre vyhľadanie cesty na grafe si preberieme ako zaujímavú ukázku. Čitatelia si potom môžu premyslieť, ako by bolo treba tento algoritmus upraviť pre hľadanie usmernenej cesty na orientovanom, prípadne čiastočne orientovanom grafe.

Algoritmus na vyhľadanie cesty z vrchola v do w na grafe $\mathscr{G} = (V, H)$ opíšeme tak, že určíme pravidlá, pomocou ktorých sa ďalej predĺži cesta, ktorá začala vo vrchole v a zatiaľ dospela po vrchol u:

3.2.5.1. Nikdy nevybrať hranu, ktorá už raz do cesty vybraná bola, v tom istom smere (= poradí vrcholov), ako predtým. Inými slovami, neslobodno ísť po žiadnej hrane po druhý raz smerom, ktorým sme už raz išli.

3.2.5.2. Ak je vrchol $u \neq v$ a vrchol u sa na konštruovanej ceste $\mathscr{C}$ vyskytuje po prvý raz na hrane $(\bar{u}, u)$, predĺžime cestu $\mathscr{C}$ hranou $(u, \bar{u})$ len vtedy, keď niet inej



Obr. 10

možnosti. Inými slovami, hranou, po ktorej sme do vrchola prišli po prvý raz, sa slobodno vrátiť len vtedy, keď nemáme inú možnosť.

Dá sa dokázať (dôkaz je napríklad v knihe [4]), že po konečnom počte krokov buď dosiahneme vrchol w, ktorý sme chceli dosiahnuť, alebo skončíme vo vrchole v tak, že cestu C nebude možné ďalej predĺžiť bez porušenia pravidla 3.2.5.1. Táto druhá možnosť potom znamená, že hľadaná cesta na grafe neexistuje.

Na obr. 10 vidíme príklad cesty z A do R (čiarkovanej), ktorú sme predlžovali podľa pravidiel 3.2.5.1 a 3.2.5.2, pričom ak bolo možné vyberať si z viacerých možností, vyberali sme si náhodne.

3.2.6. Vyhľadanie najkratšej cesty na grafe. Kým predchádzajúca úloha sa v praxi zriedkakedy vyskytuje samostatne (skôr ako súčasť širšieho problému), úloha o najkratšej ceste má veľa priamych aplikácií.

Väčšina čitateľov už iste používala automapu nášho, alebo cudzieho územia pri hľadaní najkratšej cesty medzi dvoma mestami. Pritom zistila, že najmä pre vzdialenejšie mestá je to neľahká úloha. (stačí si skúsiť vyhľadať najkratšiu cestu z Popradu do Znojma, alebo z Oradey do Giurgiu v Rumunsku). Dopravné závody ČSAD, alebo dopravné útvary iných podnikov, však musia takéto úlohy riešiť temer denne a preto sa na jej opakované riešenie postupne nasadzujú samočinné počítače.

Všeobecná formulácia úlohy o najkratšej ceste na grafe je nasledovná:

Nech $\mathcal{G} = (V, H)$ je graf, na ktorom pre každé $h \in H$ je dané kladné číslo $d(h)$ (toto ohodnotenie môže vyjadrovať dĺžku hrany h, alebo čas, potrebný na jej prechod, alebo cenu za prepravu jednotkového nákladu cez túto hranu). Nech $v \in V$, $w \in V$. Treba nájsť takú cestu $\mathscr{C} = (v = v_0, h_1, \ldots, h_n, v_n = w)$, aby číslo

$$d(\mathscr{C}) = \sum_{i=1}^{n} d(h_i)$$

bolo minimálne.

Výpočtový postup (algoritmus) je typickou ukázkou metódy, vhodnej pre použitie na počítači.

Pri tomto algoritme priraďujeme vrcholom grafu pomocné ohodnotenia. Postupujeme takto:

1° Vrcholu v (východisku) priradíme ohodnotenie $f(v) = 0$, všetkým ostatným vrcholom priradíme ohodnotenie $f(u) = \infty$, alebo $f(u) = m$, kde m je nejaké veľmi veľké číslo, napríklad $m = 10^{20}$ apod. Potom prejdeme ku kroku 2°.

2° Ak existuje hrana $h = (u, \bar{u}) \in H$, na ktorej

$$f(\bar{u}) - f(u) > d(h)$$

nahradíme $f(\bar{u})$ hodnotou $f(u) + d(h)$ a vrátíme sa na začiatok kroku 2°. Ak taká hrana neexistuje, prejdeme ku kroku 3°.

3° Ohodnotenia vrcholov, ku ktorým sme dospeli, znamenajú minimálne hodnoty $d(\mathscr{C})$ pre cesty $\mathscr{C}$ z východiska do príslušného bodu. Minimálnu cestu $\mathscr{C}$ z východiska v do vrcholu w potom zostrojíme spätne od vrcholu w podľa 4°.

4° Ak už máme zostrojenú koncovú časť cesty $v_{n-k}, h_{n-k+1}, v_{n-k+1}, \ldots, h_n, v_n = w$ a platí $v_{n-k} \neq v$, nájdeme vrchol v_{n-k-1} taký, že $h_{n-k} = (v_{n-k-1}, v_{n-k}) \in H$ a platí

$$d(h_{n-k}) = f(v_{n-k}) - f(v_{n-k-1})$$

Cestu potom predĺžime v spätnom smere na tvar $v_{n-k-1}, h_{n-k}, v_{n-k}, h_{n-k+1}, \ldots, h_n, v_n = w$. Taký vrchol v_{n-k-1} vždy existuje vďaka spôsobu, ktorým sme vykonali kroky 1° a 2°.

Ak po tomto kroku je už prvým vrcholom na ceste vrchol v, sme hotoví. Ak nie, zopakujeme krok 4° s predĺženou cestou. Po konečnom počte krokov napokon dospejeme k hľadanej ceste $\mathscr{C} = (v = v_0, h_1, v_1, \ldots, h_n, v_n = w)$.

Ako príklad použitia tejto metódy si ukážeme postup (napr. v počítači) pri určovaní vzdialenosti z vrcholu A do R na grafe z obr. 7b. Postupujme podľa tabuľky 2.

body	Ohodnotenie								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	m	m	31	31	31	31	31	31	31
J	m	m	m	44	44	44	44	44	44
M	m	38	38	38	38	38	38	38	38
R	m	m	m	m	m	74	72	72	70
S	m	m	m	m	70	70	70	46	46

Tab. 2

Každej zmene pomocných ohodnotení vrcholov tu zodpovedá nový stĺpec tabuľky. Čitateľov možno prekvapí „hlúpy" postup pri určovaní stĺpca 5, kde oprava ohodnotenia $f(S)$ sa vykonala pomocou hrany (M, S), hoci „múdrejšie" by bolo urobiť to pomocou hrany (C, S). Lenže pozor! Počítač nemá celkový prehľad a použije prvú hranu $h = (u, \bar{u})$, na ktorú natrafí a pre ktorú $f(\bar{u}) - f(u) > d(h)$. Záleží teda potom len od poradia, v ktorom má počítač hrany v pamäti uložené. Ak má skôr (M, S), ako (C, S), postupuje tak, ako v tomto prípade.

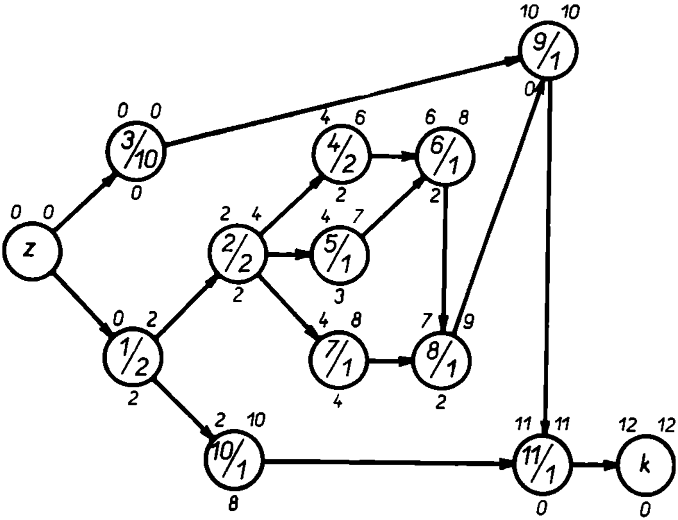
3.2.7. Metoda kritickej cesty. Pomocou orientovaného grafu môžeme znázorniť aj následnosť dielčich činností, ktoré sú potrebné pri vykonávaní niektorej práce.

Predstavme si, že by sme v niektorej chatovej oblasti, kde ešte nie je uzáver chatovej výstavby, chceli postaviť chatu niektorého z typov, ktoré ponúka n. p. Drevina. Cesta, ktorú musíme prejsť od tohto nášho rozhodnutia, až po ukončenia hrubej výstavby chaty, sa skladá z viacerých nutných činností (etáp). Ich zoznam vidíme v tabuľke 3. Tretí stĺpec tabuľky obsahuje trvanie čin-

Číslo činnosti	Názov činnosti	Trvanie činnosti	Predchádzajúce činnosti
1	Projektové práce	2	—
2	Povolenie na výstavbu	2	1
3	Objednávka a výroba chaty u n. p. Drevina	10	—
4	Výkop základov	2	2
5	Nákup a dovoz železa a dreva na debnenie	1	2
6	Debnenie základov a armovanie	1	4,5
7	Nákup a dovoz kameňa, štrku a cementu	1	2
8	Vybudovanie základov	1	6,7
9	Montáž chaty	1	3,8
10	Nákup a dovoz krytiny	1	2
11	Pokrytie chaty	1	9,10

Tab. 3

nosti v mesiacoch, a štvrtý, veľmi dôležitý, nám ukazuje, ktoré činnosti už musia byť ukončené, aby sa niektorá činnosť mohla začať. Napríklad činnosť 8 — vybudovanie základov, sa môže začať, až keď sú ukončené činnosti 6 a 7, t. j. debnenie základov s armovaním a dovoz potrebného stavebného materiálu.



Obr. 11

Obsah tabuľky 3 sa priam ponúka na to, aby sme ho vyjadrili pomocou grafu. Prvý možný spôsob vidíme na obr. 11, kde ide o tzv. sieťový graf vrcholového typu. O druhom možnom type, hranovom, si povieme neskôr.

Každá činnosť je tu znázornená vrcholom grafu, ktorý je označený zlomkom m/n, kde m je číslo činnosti a n jej trvanie. Vrchol m/n spojíme s p/q orientovanou hranou (šípkou), ak činnosti p-tej musí predchádzať m-tá podľa 4. stĺpca tab. 3. Okrem toho pridáme do grafu pomocné vrcholy z (začiatok) a k (koniec) s nulovým trvaním.

V tomto grafe vrcholového typu sú teda činnosti znázornené vrcholmi a nadväznosti hranami.

Sieťový graf nám nielen umožňuje veľmi názorne vyjadriť nadväznosti jednotlivých činností, ale aj zistiť niektoré časové relácie. Ak začneme čas počítať v mesiacoch od začiatku prác, zistíme postupne, že činnosti 1 a 3 môžu začať v čase 0, č. 2 a 10 v čase 2, č. 4, 5 a 7 v čase 4, č. 6 v čase 6 atď. až činnosť k v čase 12, t. j. o 12 mesiacov by sme mali mať chatu v hrubej stavbe hotovú. Čísla najskoršieho možného začiatku píšeme vľavo hore pri príslušnom vrchole.

Môžeme si však položiť aj ďalšiu otázku: aké sú najneskoršie nutné začiatky jednotlivých činností, ktoré by ešte nespôsobili predĺženie výstavby na čas dlhší, ako 12 mesiacov. Tieto časy si postupne odvodíme od konca. Pre činnosť 11 je to 11, pre č. 10 a 9 je to 10, atď. Údaj o najneskoršom nutnom začiatku píšeme vpravo hore pri príslušnom vrchole.

Rozdiel medzi nejneskorším nutným a najskorším možným začiatkom znamená rezervu, o ktorú možno trvanie tej ktorej činnosti predĺžiť bez toho, že by sa porušil konečný termín. Údaje o rezerve píšeme pod vrchol. Samozrejme, túto rezervu sme vypočítali za predpokladu, že ostatné činnosti prebehnú podľa plánu. Ak by sa totiž napríklad činnosť 2 predĺžila o 1 mesiac, nebude mať činnosť 7 rezervu 4, ale už len 3 mesiace apod.

Činnosti, ktoré nemajú žiadnu rezervu, majú zvláštne postavenie, pretože každé omeškanie sa v nich sa prejaví predĺžením času výstavby. Preto sa usmernená cesta, ktorá nimi prechádza z vrcholu k do z, volá kritická.

V našom prípade sú na kritickej ceste činnosti 3, 9 a 11. Stačí však, aby sme z nejakých dôvodov museli napríklad o 2 mesiace predĺžiť činnosť 1 (dajme tomu, že povolenie na výstavbu príde o dva mesiace neskôr), a už sa na kritickej ceste ocitnú aj činnosti 2, 4, 6, 8.

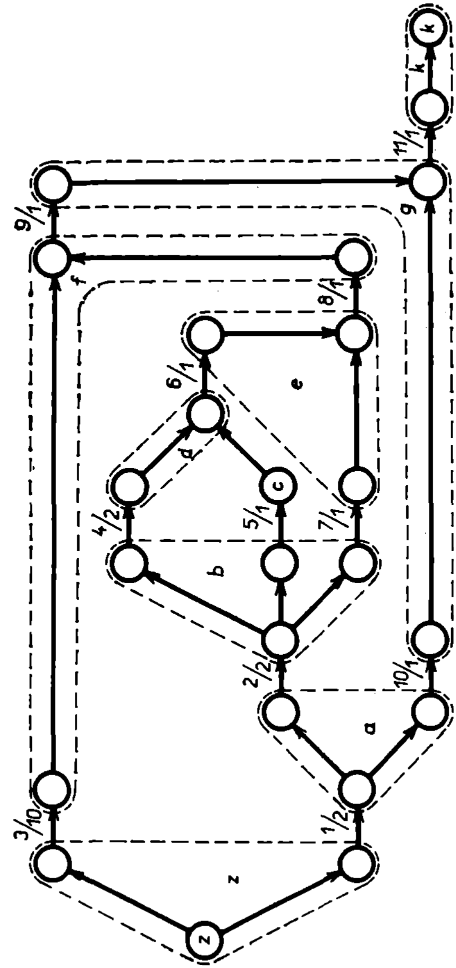
Metóda, ktorú sme si opísali, sa volá metóda kritickej cesty, skrátene CPM, podľa anglického názvu „critical path method", je najjednoduchšou z metód tzv. sieťovej analýzy, ktorá sa zaoberá štúdiom sieťových grafov, ktoré vyjadrujú nadväznosti dielčích činností. Tieto metódy sa už bežne používajú pri zostavovaní plánov výstavby väčších stavieb, plánovaní výskumu a vývoja nových zariadení apod.

Pri práci so sieťovým grafom z obr. 11 pociťujeme jednu nevýhodu, a to že má ohodnotené vrcholy, a nie hrany, ako sme boli zvyknutí, čoho dôsledkom je aj to, že činnosti, ktoré majú pomerne dlhé trvanie, sú znázornené vrcholmi, kým okamžiky prechodov medzi činnosťami sú znázornené hranami, teda útvarmi geometricky dlhšími. Ukážeme si, že od grafu vrcholového typu možno prejsť ku grafu hranového typu, kde činnosti budú vyjadrené ohodnotenými hranami.

Vykonajme dva kroky:

1° Nahraďme každý vrchol, s výnimkou z a k, dvojicou vrcholov, spojených orientovanou hranou (v smere zľava doprava). Hrany, ktoré predtým končili vo vrchole, budú teraz končiť v ľavom zo spomínaných vrcholov a hrany, ktoré predtým vo vrchole začínali, budú začínať v pravom z dvojice vrcholov. Pôvodné označenie vrchola priradíme teraz hrane, ktorou sme vrchol nahradili (obr. 12).

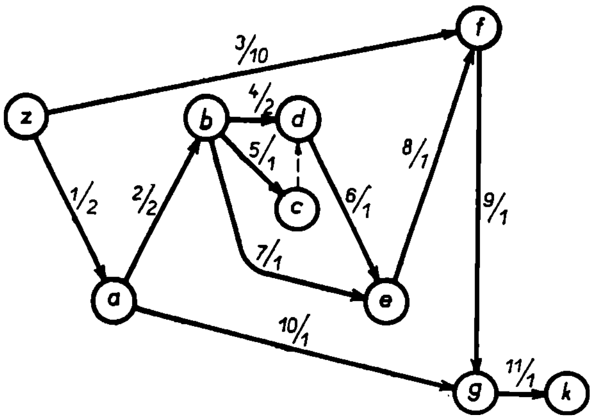
2° Každú dvojicu vrcholov, spojených neohodnotenou hranou, nahradíme postupne jedným vrcholom, ak sa splnia tieto podmienky:



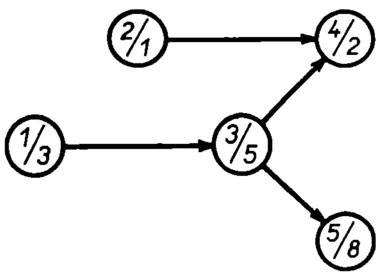
Obr. 12

2a) nepridá sa tým do grafu závislosť medzi takými činnosťami, ktoré predtým boli nezávislé,

2b) nespôsobí sa to, že by niektoré vrcholy boli spojené viac, než jednou hranou.

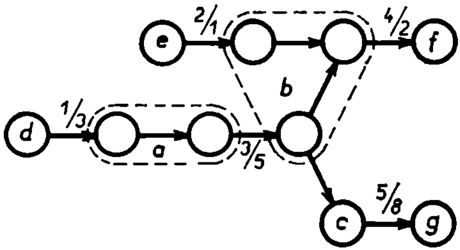


Obr. 13

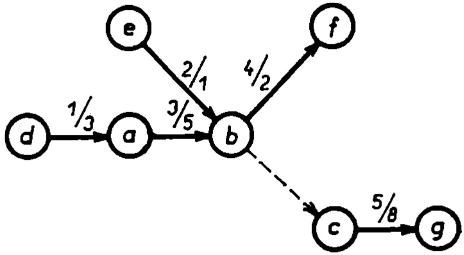


Obr. 14

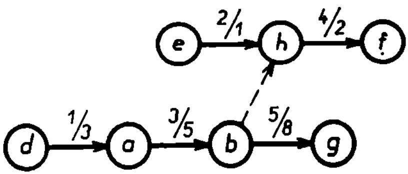
Vrcholy, ktoré po kroku 2° splynú do jedného, sme na obr. 12 čiarkovane ohraničili a pridelili sme im abecedné označenia. Ich spojením vznikne graf z obr. 13. Vrcholy *c*,



Obr. 15



Obr. 16



Obr. 17

d nemohli splynúť vzhľadom na pravidlo 2b. Pretože v našom príklade sa neuplatnilo pravidlo 2a, ukážeme si prípad, kedy sa s ním stretneme.

Predstavme si, že na obr. 14 máme časť sieťového grafu vrcholového typu, z ktorej po kroku 1° dostaneme graf z obr. 15. Ak by sme tu chybne zlúčili tri vrcholy do b, porušili by sme pravidlo 2a pridaním závislosti činnosti 5 na činnosti 2, ktorá vo východiskovom grafe nie je (obr. 16). Výsledok správneho zlúčenia máme na obr. 17.

3.3. Dopravné siete

Hoci teóriu dopravných sietí si uvádzame ako poslednú, je svojím významom pre aplikácie prvá a preto jej venujeme túto samostatnú časť.

Dopravnou sieťou voláme orientovaný graf $\mathcal{G} = (V, H)$ bez usmernených kružníc, v ktorom

1. každej hrane $h \in H$ je priradené ohodnotenie $k(h) > 0$; toto ohodnotenie sa volá priepustnosť, alebo kapacita hrany h,

2. existuje vrchol $p \in V$, v ktorom nekončí a vrchol $u \in V$, v ktorom nezačína žiadna hrana z H. Vrchol p sa volá prameň a u sa volá ústie siete.

Ak graf $\mathcal{G}$ spĺňa len podmienku 1., volá sa zovšeobecnená dopravná sieť.

Tokom v dopravnej sieti voláme funkciu f, ktorá každej hrane $h \in H$ priradí nezáporné číslo $f(h) \leqq k(h)$, ktoré voláme veľkosťou toku cez hranu h, pričom

$$f_v^+ \underset{\text{df}}{=} \sum_{\{w : (v, w) \in H\}} f(v, w) = \sum_{\{w : (w, v) \in H\}} f(w, v) \underset{\text{df}}{=} f_v^-$$

pre ľubovoľné $v \in V - \{p, u\}$.

Táto podmienka sa podobá na Kirchhoffov zákon, známy z fyziky („čo do vrchola pritečie, musí z neho aj odtiecť“).

Tok f sa volá maximálny v dopravnej sieti $\mathscr{S} = (V, H, k)$, ak pre každý iný tok g v tejto sieti platí $f_p^+ \geqq g_p^+$.

Dopravnú sieť si môžeme predstaviť ako sieť vodných kanálov, do ktorých sa voda dostáva z jediného prameňa p a z ktorých ústi do jediného ústia u.

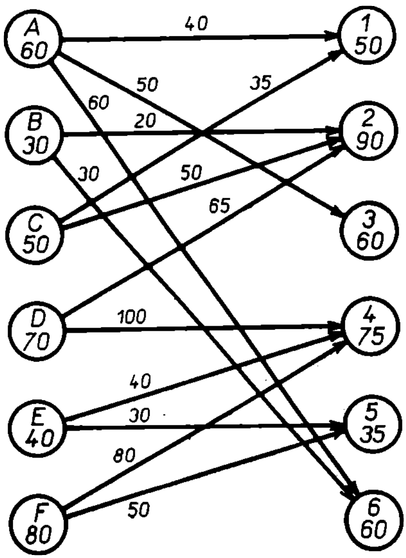
Dopravná sieť s jediným prameňom a jediným ústím by sa mohla zdať matematickým modelom príliš špeciálnym a preto aj málo aplikovateľným. Veď bežné dopravné siete (nie v matematickom zmysle), ako napríklad cestná, alebo železničná sieť, majú viac miest, z ktorých prúdy vozidiel vychádzajú, alebo kam prichádzajú.

V nasledujúcom príklade si ukážeme, že matematický pojem dopravnej siete má predsa len väčšie použitie, než by sa na prvý pohľad zdalo.

Zdroj	Odberateľ	1	2	3	4	5	6
	Požiad. \ Ponuka	50	90	60	75	35	60
A	60	40	0	50	0	0	60
B	30	0	20	0	0	0	30
C	50	35	50	0	0	0	0
D	70	0	65	0	100	0	0
E	40	0	0	0	40	30.	0
F	80	0	0	0	80	50	0

Tab. 4

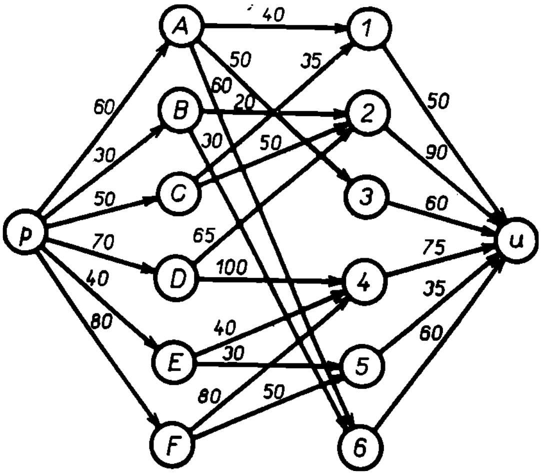
3.3.1. Príklad. Předpokladajme, že na jednom brehu mora sú zdroje A, B, C, D, E, F niektorej suroviny, ktorej odberatelia číslo 1, 2, 3, 4, 5, 6 sídlia na druhom brehu. Medzi sídlami zdrojov A—F, a odberateľov 1—6 premávajú rôzne lodné linky, ktoré prevážajú prípadne cestujúcich, rôzne tovary a na prepravu našej suroviny môžu vyčleniť kapacitu podľa tabuľky 4 (kapacitu meriame v jednotkách množstva za jednotku časovú). Pri zdrojoch hneď uvádzame ponúkané, pri odberateľoch požadované množstvo. Nula vovnútri tabuľky znamená, že od dodávateľa z príslušného riadku ku odberateľovi z príslušného stĺpca buď lodná linka nepre-



Obr. 18

máva, alebo na prepravu našej suroviny nemá žiadnu voľnú kapacitu. Číslo 50 v treťom riadku, druhom stĺpci napríklad znamená, že od zdroja C k odberateľovi 2 premáva linka s kapacitou 50 pre prepravu našej suroviny.

Túto situáciu môžeme vyjadriť grafom z obr. 18.



Obr. 19

Takýto graf, v ktorom sa množina vrcholov rozpadá na dve časti a hrany vedú len z časti prvej do druhej, sa v literatúre volá prostý graf. Definícii dopravnej siete síce nevyhovuje, ale ukážeme si, ako ho možno jednoduchým obratom upraviť na dopravnú sieť.

Pridajme ku množine vrcholov grafu z obr. 18 „umelý" (fiktívny) prameň p a ústie u (obr. 19). Pritom spojme vrchol p s každým z vrcholov $A, \ldots, F$ orientovanou hranou s kapacitou, ktorá sa rovná ponuke odpovedajúceho dodávateľa. Podobne spojíme vrcholy 1, ..., 6 s vrcholom u hranami s kapacitami, ktoré sa rovnajú požiadavkám odberateľov. Keďže v strednej časti grafu sú hrany v smere voľných lodných liniek s kapacitou, ktorá sa rovná kapacite týchto liniek, určuje každý tok v tejto sieti svojimi hodnotami v strednej časti grafu veľkosť dodávok od dodávateľov k spotrebiteľom. f je tok, a preto žiadnej linke sa neurčí prepraviť viac, než je jej kapacita, do žiadneho z vrcholov $A, \ldots, F$ nepríde, a teda ani z neho neodíde viac jednotiek toku (= suroviny), než je kapacita hrany, spojujúcej prameň s týmto vrcholom, teda než je ponuka tohto dodávateľa. Z podobných dôvodov ani žiaden odberateľ nedostane viac, než je jeho požiadavka. Maximálny tok v tejto sieti určí potom maximálne úhrnné množstvo suroviny, ktoré možno pri splnení daných podmienok previezť od dodávateľov k spotrebiteľom.

3.3.2. Ford-Fulkersonov algoritmus na vyhľadanie maximálneho toku v dopravnej sieti. Úloha o maximálnom toku má veľa aplikácií a preto nevyhnutne potrebuje efektívny algoritmus, ktorý možno dobre programovať na samočinnom počítači. Obidve tieto vlastnosti má Ford-Fulkersonov algoritmus, ktorý si preberieme podrobnejšie.

Pri použití tohto algoritmu vychádzame z nulového toku, ktorý každej hrane $h \in H$ priraďuje hodnotu $f(h) = 0$. Po konečnom počte krokov dospejeme ku maximálnemu toku.

Pri každom kroku sa nejprv rozhodneme, či tok, ktorý sme dosiahli, je už maximálny, alebo nie. Ak nie, ukážeme si, ako ho zväčšiť.

Predpokladajme, že sme zatiaľ dosiahli tok f, ktorý nie je maximálny, t. j. že ešte existuje niektorý tok g, pre ktorý

$$g_p^+ = \sum_{(p,w)\in H} g(p, w) > f_p^+ = \sum_{(p,w)\in H} f(p, w)$$

Potom musí existovať aspoň jeden vrchol w_1, pre ktorý

$$f(p, w_1) < g(p, w_1) \leqq k(p, w_1)$$

čiže hranou (p, w_1) priteká do vrcholu w_1 väčší tok g, ako f, a teda

1. buď existuje hrana $(w_1, w_2) \in H$, na ktorej

$$f(w_1, w_2) < g(w_1, w_2) \leqq k(w_1, w_2)$$

(t. j. touto hranou aj odteká väčší tok g, ako f,

2. alebo existuje hrana $(w_2, w_1) \in H$, na ktorej

$$f(w_2, w_1) > g(w_2, w_1) \geqq 0$$

(t. j. touto hranou sa nerovnosť z 1. zasa kompenzuje).

V prvom prípade možno vo vrchole w_2 zopakovať úvahu, ktorú sme vykonali vo vrchole w_1.

V druhom prípade z vrchola w_2 vychádza hranou (w_2, w_1) väčší tok f, ako g, a teda buď to kompenzuje iná hrana (w_2, w_3), na ktorej

$$f(w_2, w_3) < g(w_2, w_3) \leqq k(w_2, w_3)$$

alebo po niektorej hrane (w_3, w_2) do w_2 aj väčší tok vchádza, čiže

$$f(w_3, w_2) > g(w_3, w_2) \geqq 0$$

Úvahu, ktorú sme vykonali vo vrchole w_2, môžeme vykonať vo w_3 a definovať w_4, atď. Dostávame tým postupnosť vrcholov $p = w_0, w_1, w_2, \ldots$, ktorá má tú vlastnosť, že ak $(w_{i-1}, w_i) \in H$, tak platí

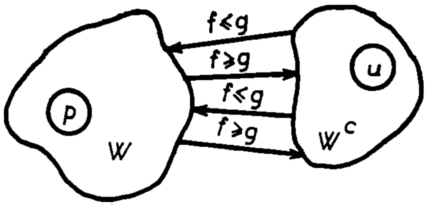
$$f(w_{i-1}, w_i) < g(w_{i-1}, w_i) \leqq k(w_{i-1}, w_i), \text{ čiže}$$
$$f(w_{i-1}, w_i) < k(w_{i-1}, w_i)$$

a ak $(w_i, w_{i-1}) \in H$, tak

$$f(w_i, w_{i-1}) > g(w_i, w_{i-1}) \geqq 0, \text{ čiže}$$
$$f(w_i, w_{i-1}) > 0$$

Uvážme teraz množinu $W \in V$ vrcholov, do ktorých sa takýmito postupnosťami môžeme dostať. Dokážeme si, že za nášho predpokladu $f_p^+ < g_p^+$ platí $u \in W$. Postupujme nepriamo. Nech by $u \in W^C = V - W$. Potom pre hrany $(w, v) \in H$, $w \in W$, $v \in W^C$ by platilo $f(w, v) \geqq g(w, v)$, pretože inak by sme postupnosť, ktorou dosiahneme vrchol w, mohli predĺžiť aj do bodu v a bolo by $v \in W$, $v \notin W^C$.

Ďalej je z podobných dôvodov zrejmé, že ak $(v, w) \in H$, $v \in W^C$, $w \in W$, tak $f(v, w) \leqq g(v, w)$.



Obr. 20

Situáciu, ku ktorej sme dospeli, vidíme na obr. 20. Obsahuje v sebe spor, pretože toky f a g „vyvierajú" len vo vrchole p, všetky ostatné vrcholy množiny W vyšlú toľko toku, koľko ho prijmú. Pritom $f_p^+ < g_p^+$ a aj pre prítok z množiny W^C platí

$$\sum_{\substack{v \in W^C \\ w \in W}} f(v, w) < \sum_{\substack{v \in W^C \\ w \in W}} g(v, w)$$

Potom ale nevyhnutne

$$\sum_{\substack{w \in W \\ v \in W^C}} f(w, v) < \sum_{\substack{w \in W \\ v \in W^C}} g(w, v)$$

čo je v spore s tým, že na všetkých hranách z W do W^C má platiť $f(w, v) \geqq g(w, v)$. Predpoklad $u \in W^C$ teda vedie k sporu.

Tým sme dokázali, že $u \in W$, t. j. že existuje postupnosť $p = v_0, v_1, \ldots, v_n = u$, na ktorej

$$\text{(D)} \begin{cases} f(w_{i-1}, w_i) < k(w_{i-1}, w_i) & \text{pre } (w_{i-1}, w_i) \in H \text{ („vpred“)} \\ f(w_i, w_{i-1}) > 0 & \text{pre } (w_i, w_{i-1}) \in H \text{ („vzad“)} \end{cases}$$

Označme

$$d = \min \{\min_{(w_{i-1}, w_i) \in H}[k(w_{i-1}, w_i) - f(w_{i-1}, w_i)], \quad \min_{(w_i, w_{i-1}) \in H} f(w_i, w_{i-1})\}$$

a definujme teraz nový tok $\bar{f}$ pomocou postupnosti $p = w_0, w_1, \ldots, w_n = u$ a čísla d:

$$\text{(F)} \qquad \bar{f}(h) = \begin{cases} f(h) + d & \text{pre } h = (w_{i-1}, w_i) \\ f(h) - d & \text{pre } h = (w_i, w_{i-1}) \\ f(h) & \text{v ostatných prípadoch} \end{cases}$$

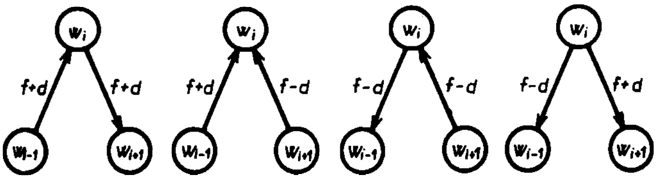
Ukážeme si, že $\bar{f}$ je opäť tok, väčší, ako f.

Z definície čísla d vyplýva, že $0 \leqq \bar{f}(h) \leqq k(h)$ pre všetky $h \in H$.

„Kirchhoffov zákon“ sa tiež nenaruší, pretože pre vrcholy, ktoré nie sú prvkami postupnosti, sa tok f nezmenil, a ak $i = 1, \ldots, n - 1$, tak môže nastať len jeden z prípadov z obrázku 21 a v žiadnom z nich sa táto podmienka nenaruší.

Pretože $w_0 = p$, platí $\bar{f}_p^+ = f_p^+ + d$ a teda tok sa zväčšil.

Postupnosť $p, w_1, \ldots, w_{n-1}, u$ nám teda poslúžila na zväčšenie toku f. Na zväčšenie toku $\bar{f}$ však už poslúžiť nebude môcť, pretože vďaka definícii korekcie d sa jedna z nerovností (D) stane rovnosťou.



Obr. 21

Pretože všetkých ciest na grafe s konečnou vrcholovou množinou je len konečný počet, po konečnom počte krokov už vyradíme všetky takéto korekčné postupnosti. Ford-Fulkersonov algoritmus má teda vždy len konečný počet krokov.

Môžeme teda zhrnúť:

1. Ak východiskový tok f nie je maximálny, tak existuje postupnosť vrcholov $p = w_0, w_1, \ldots, w_n = u$ s vlastnosťou (D) a pomocou nej možno ku f definovať nový tok $\bar{f}$, väčší, ako f.

2. Ak f je maximálny tok, tak takáto postupnosť neexistuje, pretože keby existovala, f by sa dal zväčšiť.

Cestu s vlastnosťami (D) môžeme hľadať viacerými spôsobmi. Napríklad pri ručnom spracovaní môžeme farebnou ceruzkou vyznačiť na jednotlivých hranách, či spĺňajú podmienku (D) vpred, vzad, alebo obidvoma smermi.

Pri spracovaní na počítači sa jeden krok Ford-Fulkersonovho algoritmu s východiskovým tokom f vykoná takto:

3.3.2.1. Vrcholu p priradíme pomocný index 0.

3.3.2.2. Ak vrchol v už pomocný index má a vrchol w nie, pričom $f(v, w) < k(v, w)$, priradíme vrcholu w pomocný index $+v$. Tým si označíme, že pri tvorení cesty s vlastnosťou (D) môže za vrcholom v nasledovať w v zmysle „vpred".

3.3.2.3. Ak vrchol v už pomocný index má a vrchol w nie, pričom $f(w, v) > 0$, priradíme vrcholu w pomocný index $-v$ („vzad").

3.3.2.4. Ak po pridelení pomocných indexov všetkým vrcholom, ktorým sa to dá, zostane vrchol u bez pomocného indexu, je tok f maximálny. Ak má vrchol u pomocný index $+v$, položíme $w_n = u$, $w_{n-1} = v$ (postupnosť konštruujeme od konca a číslo n zatiaľ nepoznáme). w_{n-2} bude potom vrchol, vymenovaný v pomocnom indexe vrchola w_{n-1} atď., až sa dostaneme k vrcholu p.

V prípade, že hľadáme celočíselný tok, a že aj kapacity $k(h)$ sú všetky celočíselné, môžeme súčasne s konštrukciou postupnosti ihneď opravovať tok o jednotku takto:

Ak má vrchol $u = w_n$ index $+w_{n-1}$, pridáme k $f(w_{n-1}, w_n)$ číslo $+1$.

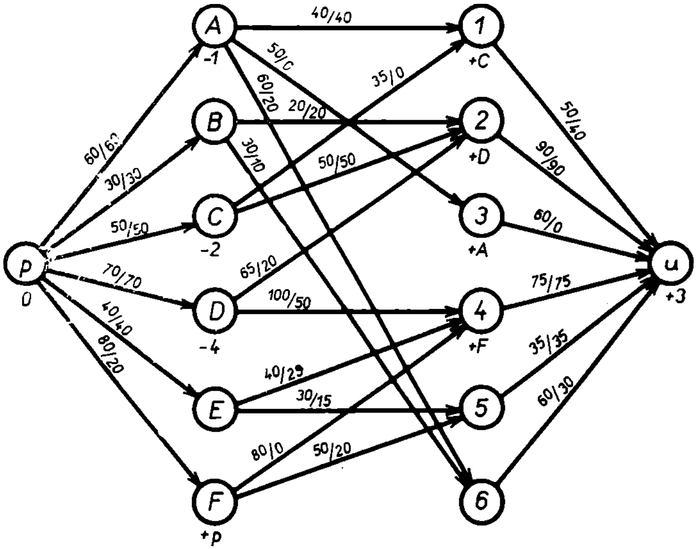
Ak má vrchol w_i index $+w_{i-1}$, pridáme k $f(w_{i-1}, w_i)$ číslo $+1$.

Ak má vrchol w_i index $-w_{i-1}$, odčítame od $f(w_i, w_{i-1})$ číslo 1.

Je zrejmé, že po konečnom počte krokov tento postup skončí, pretože tok je zhora ohraničený a pri každom kroku vzrastie o 1.

V prípade, že nejde o celočíselnú úlohu v tomto zmysle, musíme po skonštruovaní postupnosti vyrátať d a opraviť tok podľa (F).

3.3.3. Príklad (pokračovanie 3.3.1). Predpokladajme, že v sieti z obr. 19 je zatiaľ nulový tok. Vlastnosť (D) má napr. postupnosť $p, A, 1, u$ a môžeme na nej definovať opravu $d = 40$, ktorú pridáme k toku na hranách (p, A), $(A, 1)$ a $(1, u)$. Ďalej môžeme postupovať napr. takto:

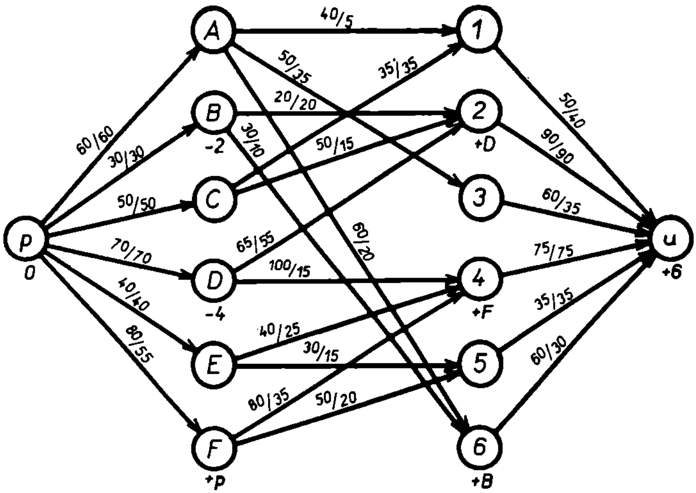


Obr. 22

Postupnosť p, A, 6, u nám dá opravu 20
Postupnosť p, B, 2, u nám dá opravu 20
Postupnosť p, B, 6, u nám dá opravu 10
Postupnosť p, C, 2, u nám dá opravu 50
Postupnosť p, D, 2, u nám dá opravu 20
Postupnosť p, D, 4, u nám dá opravu 50
Postupnosť p, E, 4, u nám dá opravu 25
Postupnosť p, E, 5, u nám dá opravu 15
Postupnosť p, F, 5, u nám dá opravu 20

Pri týchto úpravách pri ktorých sme použili smer vpred dôjdeme k sieti s tokom na obr. 22. Čitateľ zlomku na hrane znamená kapacitu, menovateľ veľkosť toku.

Tu už sa nedá nájsť postupnosť s vlasnosťou (D), ktorá by používala len smer „vpred".



Obr. 23

Pre vyhľadanie korekčnej cesty použijeme pomocné indexy a postupne ich pridelíme takto:

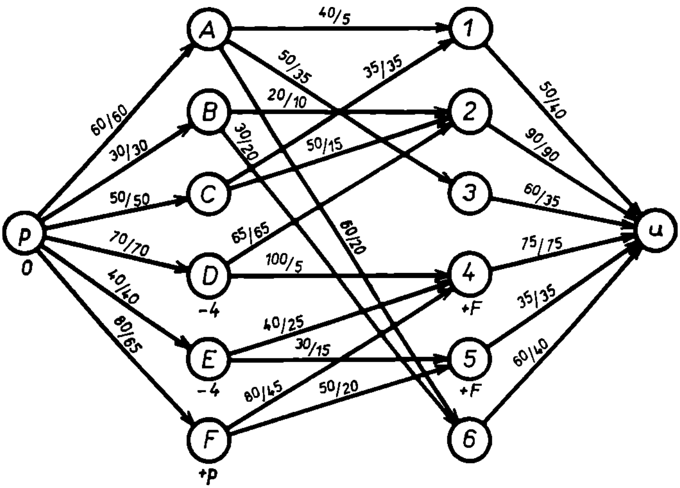
vrcholu	p,	F,	4,	D,	2,	C,	1,	A,	3,	u
index	0,	$+p$,	$+F$,	-4,	$+D$,	-2,	$+C$,	-1,	$+A$,	$+3$

Keďže sme už dosiahli vrchol u, nebudeme prideľovať ďalšie indexy, hoci by to bolo možné.

Na korekčnej ceste p, F, 4, D, 2, C, 1, A, 3, u máme $d = \min\{60, 80, 50, 45, 50, 35, 40, 50, 60\} = 35$

Toto číslo pridáme k toku na hranách (p, F), $(F, 4)$, $(D, 2)$, $(C, 1)$, $(A, 3)$, $(3, u)$ a uberieme na $(D, 4)$, $(C, 2)$, $(A, 1)$.

Dostaneme tok z obr. 23. Pridelíme pomocné indexy



Obr. 24

Zdroj	Odberateľ / Požiad. / Ponuka	1	2	3	4	5	6	spolu	Nevyuž. ponuka
		50	90	60	75	35	60	dodá	
A	60	5	—	35	—	—	20	60	—
B	30	—	10	—	—	—	20	30	—
C	50	35	15	—	—	—	—	50	—
D	70	—	65	—	5	—	—	70	—
E	40	—	—	—	25	15	—	40	—
F	80	—	—	—	45	20	—	65	15
Spolu dostaneme		40	90	35	75	35	40	315	
Neuspokojená požiadavka		10	—	25	—	—	20	Spolu prepravené	

Tab. 5

vrchol p, F, 4, D, 2, B, 6, u
index 0, $+p$, $+F$, -4, $+D$, -2, $+B$, $+6$

a na ceste p, F, 4, D, 2, B, 6, u dostaneme

$$d = \min\{35, 45, 15, 10, 20, 20, 30\} = 10$$

Po pridaní tohto čísla k toku na hranách (p, F), $(F, 4)$, $(D, 2)$, $(B, 6)$, $(6, u)$ a jeho ubraní od $(D, 4)$ a $(B, 2)$ dostaneme tok z obr. 24.

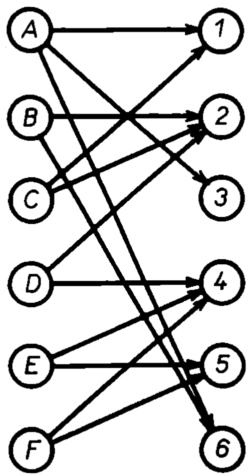
Tu môžeme dať pomocné indexy takto

vrchol p, F, 4, 5, E, D
index 0, $+p$, $+F$, $+F$, -4, -4

a žiadne ďalšie. Vrchol u teda index nedostane, čiže tok je maximálny.

Znamená to potom rozdelenie dodávok jednotlivými linkami podľa tabuľky 5. (napríklad z A do 1 dodávka 5, z A do 3 dodávka 35 atď.). Vidíme, že ponuka zdrojov sa využila temer úplne, kým požiadavka odberateľov (ktorá bola väčšia, než ponuka) zostala u niektorých z nich čiastočne neuspokojená.

3.3.4. Úloha o pridelení pracovníkov na pracoviská. Predpokladajme, že niektorý podnik rozširuje počty svojich pracovníkov, napríklad preto, že zakúpil nové stroje a potrebuje robotníkov na ich obsluhu. Predpokladajme, že ku strojom treba dovedna šesť pracovníkov na pracovné miesta č. 1, 2, ..., 6 a že podnik prijal šesť

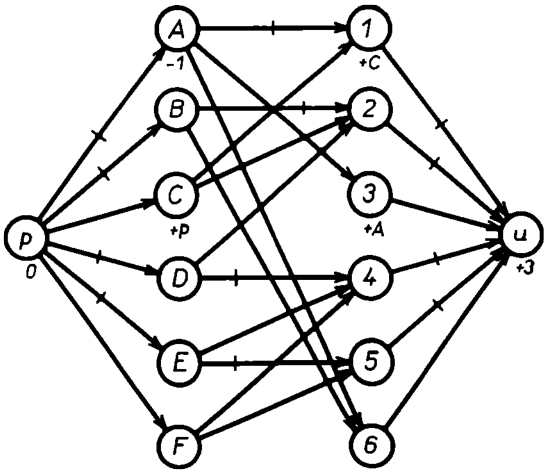


Obr. 25

nových robotníkov Adama, Blažeja, Cyrila, Dušana, Emila a Floriana, ktorých skrátene označíme A, B, C, D, E, F. Predpokladajme, že ide o pracovníkov kvalifikovaných a skúsených, pričom

A	má predpoklady zastať	miesto 1, 3, 6
B	—„—	miesto 2, 6
C	—„—	miesto 1, 2
D	—„—	miesto 2, 4
E	—„—	miesto 4, 5
F	—„—	miesto 4, 5

Vedúci by týchto pracovníkov rád rozmiestil tak, aby sa každý pracovník dostal na miesto, na ktoré už má predpoklady (kvalifikáciu, zapracovanie apod.), aby ho nebolo treba školiť.



Obr. 26

Pretože pracovníkov je pomerne málo, po istej námahe by sa (napríklad postupným preberaním všetkých variantov) vedúcemu podarilo nájsť najlepšie rozmiestenie. Ak by ich však bolo povedzme tridsať, úloha by bola nad jeho sily. Tu môže pomôcť matematika, presnejšie dopravné siete.

Áno, dopravné siete, hoci v zadaní úlohy o žiadnu dopravu nejde. Dostaneme sa k nim takto:

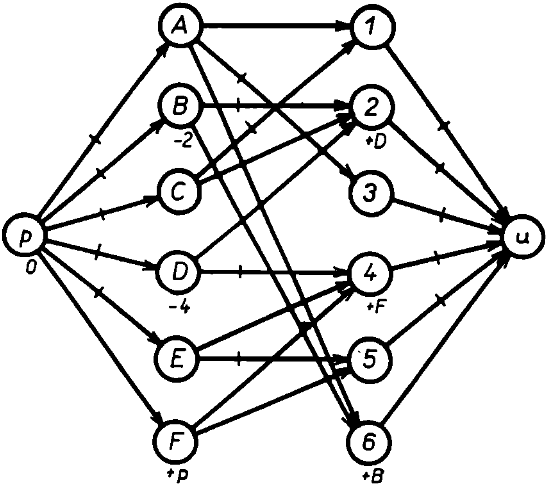
Je celkom prirodzené znázorniť pracovníkov a pracovné miesta vrcholmi grafu (obr. 25) a spojiť každého pracovníka orientovanou hranou s tými pracovnými miestami, pre zastávanie ktorých má predpoklady. Úloha, ktorú treba riešiť, je vybrať čo najväčší počet hrán tohto grafu tak, aby žiadne dve z nich nemali spoločné vrcholy. Táto úloha sa volá úlohou o párovaní vrcholov prostého grafu. No a k dopravným sieťam je už len krôčik. Stačí pridať ku grafu z obr. 25 fiktívny prameň p a ústie u (obr. 26), predpokladať, že všetky hrany majú kapacitu 1 a hľadať maximálny celočíselný tok.

Každý celočíselný tok f v tejto sieti môže na hranách siete nadobúdať len hodnoty 0, alebo 1. Hrany v strednej časti grafu, na ktorých $f = 1$, sú isté také, že žiadne dve z nich nemajú spoločný vrchol (nemôžu to byť napríklad hrany $(A, 1)$ a $(A, 3)$, pretože podľa „Kirchhoffovho zákona" by muselo byť $f(p, A) \geq 2$ čo je spor s tým, že kapacita hrany (p, A) je 1).

Čím väčší je tok f, tým viac je vybraných hrán (= dvojíc) na ktorých $f = 1$. Maximálny tok nám potom dá aj maximálnu vybranú množinu.

Riešme teraz našu úlohu vyhľadaním maximálneho toku v sieti z obr. 26. Postupným výberom korekčných ciest $(p, A, 1, u)$, $(p, B, 2, u)$, $(p, D, 4, u)$, $(p, E, 5, u)$ dostaneme tok f, pre ktorý $f_p^+ = 4$, pričom hrany h, na ktorých $f(h) = 1$ označíme čiaročkou. Tento tok sa už cestami „len vpred“ nedá zväčšiť, použijeme preto postupnosti, ktoré idú aj „vpred“ aj „vzad“ a hľadajme ich pomocou pridavných indexov. Tak postupne pridelíme tieto indexy:

vrchol	p,	C,	1,	A,	3,	u
index	0,	$+p$,	$+C$,	-1,	$+A$,	$+3$

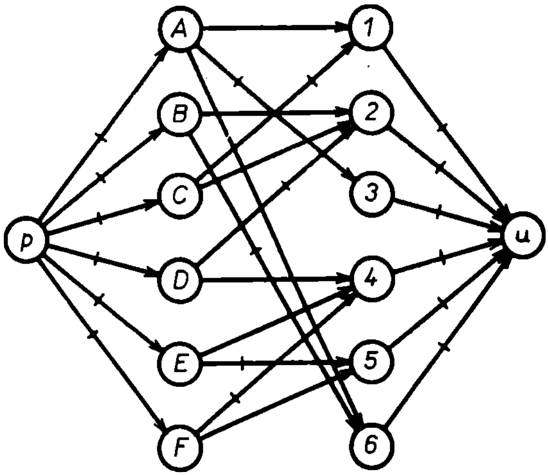


Obr. 27

Čiže pridáme jednotku toku na (p, C), $(C, 1)$, $(A, 3)$, $(3, u)$ a uberieme ju na $(A, 1)$ — obr. 27.
Potom podobne

vrchol	p,	F,	4,	D,	2,	B,	6,	u
index	0,	$+p$,	$+F$,	-4,	$+D$,	-2,	$+B$,	$+6$

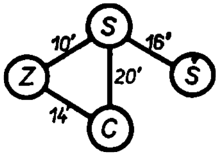
čím dostaneme tok (už maximálny) na obr. 28. Ten nám určuje, že pracovníkovi *A* treba prideliť miesto 3, *B*—6, *C*—1, *D*—2, *E*—5, *F*—4. Existuje aj riešenie v ktorom namiesto *E*—5, *F*—4 je *F*—5, *E*—4.



Obr. 28

3.3.5. Úloha o turnusoch dopravných prostriedkov. Táto úloha na rozdiel od predchádzajúcej, je dopravného charakteru, ale uplatnenie dopravných sietí v nej bude i tak založené na prekvapujúcom obrate.

Predpokladajme napríklad, že istá obec má staré centrum i so žel. stanicou — označíme ho *C*, ďalej nové sídlisko — *S*, závod — *Z* a školu — *Š*, (ktorá je mimo centra i sídliska, pretože slúži aj deťom zo susednej obce). Jazdné doby autobusov medzi týmito miestami sú vidno z obr. 29. Vzhľadom k tomu, že robotníci v závode pracujú od 6,00, administratívni pracovníci tamže o 6,45, v centre od 7,15, vlak odchádza o 6,30 a v škole sa začína dopoludňajšia smena o 7,30, je potrebné, aby chodili tieto autobusové spoje:



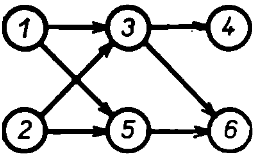
Obr. 29

Spoj. č. 1: centrum 5^{36} závod 5^{50}
Spoj. č. 2: sídlisko 5^{40} závod 5^{50}
Spoj. č. 3: sídlisko 6^{00} centrum 6^{20}
Spoj. č. 4: sídlisko 6^{40} centrum 7^{00}
Spoj. č. 5: centrum 6^{04} sídlisko 6^{24} závod 6^{34}
Spoj. č. 6: centrum 6^{48} sídlisko 7^{08} škola 7^{24}

Otázka je, aký minimálny počet autobusov je potrebný na obslúženie týchto spojov.

Pri riešení tejto úlohy (nielen tejto konkrétnej, ale aj všeobecnej úlohy v turnusoch vozidiel), hrá dôležitú úlohu binárna relácia na množine spojov. Dva spoje sú v tejto relácii, ak jeden dopravný prostriedok po obslúžení jedného spoja stihne obslúžiť aj druhý (táto relácia je zrejme nesymetrická, druhý spoj je vždy v časovej následnosti za prvým).

Jedna možnosť na využitie grafov sa tu priam núka. Zostrojme orientovaný graf, ktorého vrcholmi budú spoje s a orientované hrany budú vyjadrovať reláciu, o ktorej sme si už hovorili. Niektoré hrany však môžeme z grafu vynechať, a to tie, ktoré i tak vyplývajú z tranzitivity našej relácie. Napríklad ak pre tri spoje platí $s_1 \rightarrow s_2$ a $s_2 \rightarrow s_3$, zrejme aj $s_1 \rightarrow s_3$, ale túto hranu môžeme pre jednoduchosť a prehľadnosť vynechať z grafu. Pre náš konkrétny príklad máme tento graf na obr. 30. Postupnosť vrcholov $s_1, s_2, \ldots$, taká, že každá dvojica (s_{i-1}, s_i) je hranou grafu, určuje poradie spojov pre jednotlivé vozidlo, čiže jeho turnus.



Obr. 30

Úlohou je pokryť celú vrcholovú množinu najmenším možným počtom takýchto postupností. Ak by niektorý vrchol (= spoj) bol vo viacerých postupnostiach, jednoducho ho vynecháme zo všetkých postupností, okrem jednej.

Riešiť túto úlohu na grafe z obr. 30 je veľmi jednoduché. Na prvý pohľad nám stačia dve postupnosti, napríklad 1, 3, 4 a 2, 5, 6.

V skutočných úlohách z praxe sa však uvažujú desiatky, ba stovky spojov a tam sa už na intuíciu spoliehať nemožno. Treba mať algoritmus, ktorý zaručene vedie k optimálnemu riešeniu, čiže k minimálnemu počtu potrebných vozidiel, a to taký, ktorý by sa dal použiť aj na počítači.

Žiaľ, priamo pre úlohu v tom znení, o akom sme dosiaľ uvažovali, algoritmus nepoznáme. Tu príde fígeľ o ktorom sme už hovorili a ktorým úlohu prevedieme na dopravné siete.

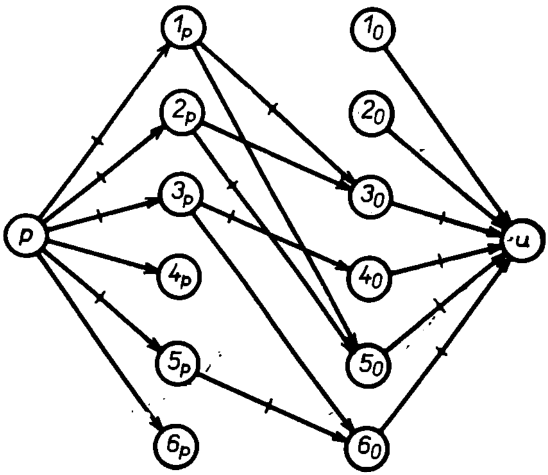
Najprv si uvedomíme, že pre riešenie našej úlohy nemusíme poznať celý spoj, od odchodu z východiska, cez prechod všetkými zastávkami až po príchod do cieľovej stanice. Stačí nám poznať ho v dvoch momentoch: pri odchode a pri príchode. Namiesto jedného spoja s stačí nám uvažovať jeho odchodovú charakteristiku s_o (čas odchodu a východisko) a príchodovú charakteristiku s_p. Čo keby sme teda každému spoju nepridelili jeden vrchol grafu, ale dva — príchodový a odchodový. Podobne, ako v grafe na obr. 18 môžeme dať „príchodové" vrcholy do ľavého a odchodové do pravého stĺpca. Pritom spojíme s_p hranou s vrcholom $\bar{s}_o$, ak jedno vozidlo po vykonaní spoja s môže vykonať spoj $\bar{s}$.

Uvážme teraz úlohu o párovaní v tomto grafe. Ak vyberieme pár, čiže hranu $(s_p, \bar{s}_o)$, znamená to, že to isté vozidlo vykoná spoj s a po ňom $\bar{s}$.

Predpokladajme, že spojov je dovedna m. Ak by sme z grafu nevybrali žiadnu hranu, potrebovali by sme toľko vozidiel, koľko je spojov, čiže m. Vybraním každej hrany sa potrebný počet vozidiel zníži o jedno, pri výbere n hrán je potrebný počet vozidiel $m—n$. Maximálnym možným počtom vybraných hrán minimalizujeme potrebný počet autobusov.

Ak máme vybrané hrany, turnusy už vytvoríme ľahko. Vyhľadáme taký vrchol $s_o^{(1)}$, do ktorého neústi žiadna hrana. Ten nám určí, že spoj $s^{(1)}$ bude prvým v turnuse pre niektoré vozidlo; ak z $s_p^{(1)}$ nevedie vybraná hrana do žiadného $s_o^{(2)}$, vykoná toto vozidlo len jeden spoj $s^{(1)}$. Ak vedie vybraná hrana do $s_o^{(2)}$, vykoná vozidlo po spoji $s^{(1)}$ spoj $s^{(2)}$. Podobne postupujeme ďalej.

Vidíme, že úlohu o optimalizácii turnusov sme previedli na úlohu o maximálnom párovaní vrcholov prostého grafu. No a o tejto úlohe sme si už ukázali, že pridaním fiktívneho prameňa p, ktorý teraz spojíme s každým s_p a ústia u, s ktorým teraz spojíme každý vrchol s_o, dostaneme dopravnú sieť, v ktorej kapacitu každej hrany predpokladáme jednotkovú. Maximálny tok v tejto sieti nám určí maximálne spárovanie a tým



Obr. 31

aj minimálny počet vozidiel. Pre náš jednoduchý príklad dostávame sieť z obr. 31, na ktorom už je aj optimálny tok, ktorý nám vyberá dvojice $(1_p, 3_o)$, $(2_p, 5_o)$, $(3_p, 4_o)$, $(5_p, 6_o)$. Vidíme, že do 1_o a 2_o žiadna vybraná (dokonca vôbec žiadna) hrana neústi a spoje č. 1 a 2 budú začiatkami turnusov. Ďalej je spojené $1_p \to 3_o$ a $3_p \to 4_o$, z čoho vyplýva turnus 1, 3, 4. Zo spojenia $2_p \to 5_o$ a $5_p \to 6_0$ vyplýva zasa turnus 2, 5, 6.

Cvičenia

1. Graf voláme rovinným, ak ho možno zakresliť do roviny tak, aby sa žiadne dve hrany nepretínali v inom bode, ako vo vrchole grafu. Nájdite najmenšie n tej vlastnosti, že existuje rovinný graf, ktorý má n vrcholov a ktorého vrcholy nemožno vyfarbiť troma farbami tak, aby všetky súsedné vrcholy mali rôznu farbu!

2. Vezmite si autoatlas ČSSR, v ktorom je aj tabuľka vzdialeností miest. Preverte, či niektoré vzdialenosti v tabuľke súhlasia so vzdialenosťami podľa mapy! Bolo by vo vašich silách preveriť všetky?

3. Máme daných n tovarov, o ktorých vieme, že niektoré dvojice z nich nesmú byť skladované v jednej miestnosti. Úlohou je do prvej, najväčšej skladovej miestnosti vybrať čo najviac druhov tovarov, ktoré sa môžu spolu skladovať. Ktorú známu úlohu teórie grafov tu možno využiť?