Druhý výlet do moderní matematiky

2. kapitola. Operace a grupy

In: Jan Vyšín (author); Jitka Kučerová (author): Druhý výlet do moderní matematiky. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1973. pp. 51–93.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403784

Terms of use:

© Jan Vyšín, 1973

© Jitka Kučerová, 1973

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

2. kapitola

OPERACE A GRUPY

Pojem operace a grupy je pro matematiky velmi důležitý; umožní nám najít v různých matematických disciplínách společné vlastnosti. Pomůže nám pochopit na příklad to, že se aritmetika, algebra a geometrie, které probíráme ve škole, neliší od sebe tak, jak se nám dosud zdálo. V článcích 2,1 a 2,2 se budeme zabývat převážně číselnými množinami a početními výkony (operacemi) s čísly. Nebude nás však zajímat numerické počítání, ale společné a odlišné vlastnosti různých početních výkonů (operací) v různých číselných množinách. Články 1,3 a 1,4 jsou věnovány spíše geometrii. Ukážeme si, že práce s množinami bodů v rovině se příliš neliší od práce s číselnými množinami.

V následujících článcích budeme často pracovat v různých číselných množinách; dohodneme se předem o jejich označení.

$\boldsymbol{N}$ ... množina všech **přirozených** čísel bez nuly

$$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$$

$\boldsymbol{N}_0$ ... množina všech přirozených čísel s nulou

$$\boldsymbol{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$\boldsymbol{C}$ ... množina všech **celých** čísel

$$\boldsymbol{C} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$\boldsymbol{Q}$ ... množina všech **racionálních** čísel; patří do ní všechna čísla, která lze napsat pomocí zlomků v jejichž čitateli i jmenovateli jsou celá čísla

$\boldsymbol{Q}^+$ ... množina všech kladných racionálních čísel (bez nuly!)

$\boldsymbol{R}$ ... množina všech **reálných** čísel. Reálná čísla jsou nejen všechna čísla racionální, ale i další čísla, (říkáme jim čísla **iracionální**), např. π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, atd.

Můžeme psát $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{N}_0 \subset \boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$,

$$\boldsymbol{Q}^+ \subset \boldsymbol{Q}.$$

2.1. Operace v množině

Budeme definovat *zobrazení, které uspořádané dvojici* $[a, b]$ *kartézského součinu* $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$ *přiřadí nejvýše jeden prvek* $c \in \boldsymbol{M}$. Platí: množina vzorů $\boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$, množina obrazů $\boldsymbol{O} \subset \boldsymbol{M}$.

Tento druh zobrazení nazýváme **operace v množině** $\boldsymbol{M}$ a zapisujeme vzorcem

$$a \bigcirc b = c\,.$$

Písmena a, b se nazývají nezávisle proměnné, c je závisle proměnná; znak $\bigcirc$ (někdy $*$, $+$, —, $\triangle$, ., atd.) je symbol operace a naznačuje nám způsob, jak k dvojici a, b vybíráme závisle proměnnou c. S některými druhy operací se setkáváme tak často, že jsme pro ně vyhradili zvláštní symboly:

např. znak $+$ je vyhrazen pro operaci sčítání (vzorem je dvojice sčítanců, obrazem je jejich součet)

— znamená operaci odečítání

. znamená operaci násobení

: znamená operaci dělení

Ve škole se učíme například „násobit“. To znamená, že se učíme k dvojici čísel $[a, b]$ přiřadit právě jedno celé číslo c (součin).

Operaci násobení můžeme znázornit tabulkou např. takto:

$a.b$	$a \diagdown b$	1	2	3	4	5	.	.	.
	1	1	2	3	4	5	.	.	.
	2	2	4	6	8	10	.	.	.
	3	3	6		12				
	4	4	8						
	5	5	10						
	.	.	.						
	.	.	.						
	.	.	.						

V příslušném políčku, které patří dvojici např. $[3, 4]$, zapíšeme obraz dvojice (součin), tj. *12*.

PŘÍKLAD 2,1

$\boldsymbol{N}$ je množina všech přirozených čísel (bez nuly), $a, b \in \boldsymbol{N}$. Je-li $a > b$, pak přiřadíme uspořádané dvojici $[a, b]$ prvek $c \in \boldsymbol{N}$ (rozdíl). Je-li $a \leqq b$, nepřiřazujeme dvojici $[a, b]$ žádný prvek c. Rozdíl je přiřazen jen některým dvojicím $[a, b] \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$.

Operace odečítání je definována v množině všech přirozených čísel $\boldsymbol{N}$ a $\boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$.

Tabulka:

$a - b$	$a \diagdown b$	1	2	3	4	5	6	7	.	.	.
	1										
	2	1									
	3	2	1								
	4	3	2	1							
	5	4	3	2	1						
	6	5	4	3	2	1					
	7	6	5	4	3	2	1				
	.										
	.										
	.										

PŘÍKLAD 2,2

Je dána množina všech kladných racionálních čísel $\boldsymbol{Q}^+$ Operace : (dělení) přiřadí každé uspořádané dvojici $[a, b] \in \boldsymbol{Q}^+ \times \boldsymbol{Q}^+$ jediný prvek $c \in \boldsymbol{Q}^+$ (podíl). Operace dělení je definována v množině $\boldsymbol{Q}^+$ a $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{Q}^+ \times \boldsymbol{Q}^+$.

Operace dělení je definována pro každou dvojici $[a, b] \in \boldsymbol{Q}^+ \times \boldsymbol{Q}^+$ [někdy říkáme, že je definována na množině $\boldsymbol{Q}^+$].

PŘÍKLAD 2,3

$\boldsymbol{M}$ je množina všech bodů v rovině. Operace $\bigcirc$ je definována takto: Je-li $A \neq B$, je dvojici bodů $[A, B]$ přiřazen bod C, který je středem úsečky AB. Je-li $A = B$, je dvojici $[A, B]$ přiřazen bod A. Definovali jsme si „operaci střed“ pro každou dvojici bodů $[X, Y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$.

PŘÍKLAD 2,4

Při cvičení používáme čtyř povelů „vlevo v bok“ (L), „vpravo v bok“ (P), „čelem vzad“ (Z) a tak zvaný neutrální povel (N — „zůstat ve stejné poloze“). Množina povelů $\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{L}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{N}\}$. Operaci $*$ definujeme takto:

Uspořádané dvojici prvků $[a, b] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$ přiřadíme ten prvek c, kterým se dají oba prvky a, b nahradit. Sestrojíme tabulku pro kartézský součin $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$ konečné množiny $\boldsymbol{M}$ a doplníme obrazem c příslušné uspořádané dvojice.

Tabulka operace $*$:

$a * b$	$a \backslash b$	L	P	Z	N
	L	Z	N	P	L
	P	N	Z	L	P
	Z	P	L	N	Z
	N	L	P	Z	N

Z tabulky přečteme:

$P * Z = L$

Povel „vpravo v bok a čelem vzad“ můžeme nahradit povelem „vlevo v bok“.

Operace $*$ je definována pro každou dvojici $[a, b] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$.

Často slýcháme, že např. „sčítání je komutativní“ a rozumíme tím, že $a + b = b + a$ (při sčítání nezáleží na pořadí sčítanců). Tento výrok není přesný a musíme se nad pojmem **„komutativní operace“** zamyslet.

Operace $\bigcirc$ v množině $\boldsymbol{M}$ přiřazuje každé dvojici $[x, y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$ nejvýš jeden prvek $z \in \boldsymbol{M}$.

Mohou nastat tyto možnosti (a, b, c, d patří množině $\boldsymbol{M}$):

1) $a \bigcirc b = c, \quad b \bigcirc a = c$
2) $a \bigcirc b = c, \quad b \bigcirc a = d; \quad c \neq d$
3) $a \bigcirc b = c, \quad b \bigcirc a$ není v množině $\boldsymbol{M}$ definována
4) $a \bigcirc b$ není v množině $\boldsymbol{M}$ definována, $b \bigcirc a = c$
5) $a \bigcirc b$ ani $b \bigcirc a$ není v množině $\boldsymbol{M}$ definována

Říkáme, že operace $\bigcirc$ je komutativní v množině $\boldsymbol{M}$, právě když pro každou dvojici $[a, b] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$ nastane případ 1) nebo 5).

Jestliže najdeme aspoň jednu dvojici $[a, b] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$, pro něž nastal případ 2), 3) nebo 4), pak operace v množině $\boldsymbol{M}$ komutativní není.

PŘÍKLAD 2,5

Operace z příkladu 2,1 (odčítání v množině $\boldsymbol{N}$) není komutativní: Jestliže $a - b = c$ ($a \in \boldsymbol{N}$, $b \in \boldsymbol{N}$, $c \in \boldsymbol{N}$), pak $a > b$; dvojici $[b, a]$ není přiřazen žádný prvek z množiny $\boldsymbol{M}$, protože $b \leqq a$.

Operace z příkladu 2,2 (dělení v množině $\boldsymbol{Q}^+$) není komutativní, protože dvojicím $[a, b]$ a $[b, a]$ jsou sice přiřazeny prvky množiny $\boldsymbol{Q}^+$ (podíly), ale je-li $a \neq b$, pak $a : b \neq b : a$.

Operace z příkladu 2,3 (střed dvojice $[A, B]$) je komutativní, protože každé dvojici $[A, B]$ je přiřazen střed a pro každou dvojici platí, že střed dvojice $[A, B]$ je týž bod jako střed dvojice $[B, A]$.

Operace z příkladu 2,4 je komutativní — ověříme si přímo z tabulky.

Operace $x \bigcirc y = z$, kde $z = \dfrac{2xy}{x + y}$ v množině všech reálných čísel $\boldsymbol{R}$ je komutativní:

a) Je-li $x \neq -y$, pak $x \bigcirc y = \dfrac{2xy}{x + y}$,

$$y \bigcirc x = \frac{2yx}{y + x},$$

a protože sčítání a násobení reálných čísel je komutativní, je

$$\frac{2xy}{x + y} = \frac{2yx}{y + x}$$

b) Je-li $x = -y$, pak $x + y = y + x = 0$ a dvojici $x \bigcirc y$ ani dvojici $y \bigcirc x$ není přiřazeno žádné reálné číslo.

Podobně zkoumáme, je-li operace $\bigcirc$ v množině $\boldsymbol{M}$ **asociativní.**

Jsou-li prvky $a \in \boldsymbol{M}, b \in \boldsymbol{M}, c \in \boldsymbol{M}$, pak zkoumáme výsledek operace $(a \bigcirc b) \bigcirc c$ a $a \bigcirc (b \bigcirc c)$.

Operace $\bigcirc$ je asociativní v množině $\boldsymbol{M}$, právě když platí:

a) Je-li $(a \bigcirc b) \bigcirc c \in \boldsymbol{M}$ a současně $a \bigcirc (b \bigcirc c) \in \boldsymbol{M}$, pak $(a \bigcirc b) \bigcirc c = a \bigcirc (b \bigcirc c)$.

b) $(a \bigcirc b) \bigcirc c \notin \boldsymbol{M}$ právě když $a \bigcirc (b \bigcirc c) \notin \boldsymbol{M}$. (Výsledek není definován v množině $\boldsymbol{M}$ pro žádný z obou případů.)

PŘÍKLAD 2,6

Operace z příkladu 2,1 (odečítání v množině $\boldsymbol{N}$) není asociativní. Může se stát, že $(a - b) - c \in \boldsymbol{N}$ a také $a - (b - c) \in \boldsymbol{N}$, ale výsledky se sobě nerovnají. Stačí najít jeden takový případ a už nelze o operaci odečítání v množině $\boldsymbol{N}$ říci, že je asociativní:

např.: $a = 6, \quad b = 3, \quad c = 1$

$$(6 - 3) - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$6 - (3 - 1) = 6 - 2 = 4$$

Operace z příkladu 2,2 (dělení v množině $\boldsymbol{Q}^+$ není asociativní. Je sice $(a : b) : c \in \mathbf{Q}^+$ i $a : (b : c) \in \mathbf{Q}^+$, ale stačí dosadit např. $a = 48$, $b = 12$, $c = 2$:

$$(48 : 12) : 2 = 4 : 2 = 2$$

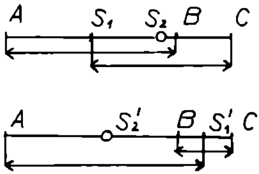
$$48 : (12 : 2) = 48 : 6 = 8$$

Aspoň v jednom případě tedy je

$$(a : b) : c \neq a : (b : c)$$

a operace není asociativní.

Operace „střed" z příkladu 2,3 není asociativní (viz obr. 50).



Obr. 50

Operace z příkladů 2,4 je asociativní. Ověříme si z tabulky všechny možnosti např.:

$$(L * P) * Z = N * Z = Z$$

$$L * (P * Z) = L * L = Z$$

Operace sčítání a násobení v množině $\boldsymbol{N}$ jsou asociativní. Tuto vlastnost obou operací nebudeme dokazovat.

Existuje-li takový prvek $n \in \boldsymbol{M}$, že pro každé $a \in \boldsymbol{M}$ platí $a \bigcirc n = n \bigcirc a = a$, nazývá se n **neutrálním prvkem operace $\bigcirc$ v množině $\boldsymbol{M}$**.

PŘÍKLAD 2,7

Operace sčítání v množině $\boldsymbol{N}$ všech přirozených čísel bez nuly nemá neutrální prvek.

Operace sčítání v množině $\boldsymbol{N}_0$ všech přirozených čísel s nulou má neutrální prvek 0 (nulu). Pro každé $a \in \boldsymbol{N}_0$ platí

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Operace „střed" z příkladu 2,3 na množině všech bodů v rovině nemá neutrální prvek. Neexistuje takový bod N, aby pro každý bod A platilo $A \bigcirc N = N \bigcirc A = A$.

Neutrálním prvkem v množině povelů z příkladu 2,4 je prvek N (zůstat v původní poloze), jak si ověříme z tabulky.

Existuje-li k prvku $a \in \boldsymbol{M}$ takový prvek $\bar{a} \in \boldsymbol{M}$, že $a \bigcirc \bar{a} = \bar{a} \bigcirc a = n$, kde n je neutrální prvek operace $\bigcirc$, nazývá se prvek $\bar{a}$ **inverzním prvkem operace** $\bigcirc$ **v množině** $\boldsymbol{M}$. Můžeme také říci, že prvky a a $\bar{a}$ jsou navzájem inverzní prvky operace $\bigcirc$ v množině $\boldsymbol{M}$. Jestliže totiž $a \bigcirc \bar{a} = \bar{a} \bigcirc a$, pak můžeme také psát $\bar{a} \bigcirc a = a \bigcirc \bar{a}$ (vyměnili jsme obě strany rovnosti), a to znamená podle definice, že prvek a je inverzní k prvku $\bar{a}$, v operaci $\bigcirc$.

Povrchní pohled na definici inverzního prvku by nás mohl svést k úsudku, že z komutativnosti operace vyplývá existence inverzního prvku a naopak; jak uvidíme v příkladech, je tento úsudek nesprávný.

PŘÍKLAD 2,8

Operace sčítání v množině $\boldsymbol{N}_0$ (všech přirozených čísel s nulou) je komutativní a má neutrální prvek. Inverzní prvek existuje pouze k prvku nula. Ostatní přirozená čísla nemají prvky k sobě inverzní.

Operace sčítání v množině $\boldsymbol{N}$ (přirozená čísla bez nuly) je komutativní a nemá neutrální ani inverzní prvek.

Operace sčítání v množině $\boldsymbol{C}$ (všech celých čísel) je komutativní, má neutrální prvek (nula) a ke každému prvku existuje prvek inverzní (t. zv. číslo opačné). Např.

k číslu $+5$ je inverzní číslo -5
k číslu -2 je inverzní číslo $+2$
k číslu 0 je inverzní číslo 0

PŘÍKLAD 2,9

Operace $\odot$, v množině $\boldsymbol{M} = \{a, b, c, d, e, f\}$ je definována pomocí tabulky

$x \odot y$	$x \backslash y$	a	b	c	d	e	f
	a	a	b	c	d	e	f
	b	b	c	a	f	d	e
	c	c	a	b	e	f	d
	d	d	e	f	a	b	c
	e	e	f	d	c	a	b
	f	f	d	e	b	c	a

Operace $\odot$ která je definována pro všechny dvojice $[x, y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$:

a) není komutativní: např. $b \odot d = f$
$d \odot b = e$

b) je asociativní; přesvědčíme se, přezkoušíme-li všechny možné případy např. $(b \odot d) \odot c = f \odot c = e$
$b \odot (d \odot c) = b \odot f = e$

c) má neutrální prvek a:
pro každý prvek $x \in \boldsymbol{M}$ platí $x \odot a = a \odot x = x$

d) ke každému prvku $x \in \boldsymbol{M}$ existuje prvek inverzní $\bar{x} \in \boldsymbol{M}$

$$\begin{aligned} \bar{a} &= a \\ \bar{b} &= c \\ \bar{c} &= b \\ \bar{d} &= d \\ \bar{e} &= e \\ \bar{f} &= f \end{aligned}$$

U této operace jsme si ukázali, že operace nemusí být komutativní a přece má neutrální prvek a ke každému prvku má prvek inverzní.

Pamatujte si:

Operace v množině
Operace komutativní
Operace asociativní
Neutrální prvek operace
Inverzní prvek operace k prvku a

Cvičení

1. V množině $\boldsymbol{M} = \{a, b, c, d\}$ je dána operace $\bigcirc$ takto:

$x \bigcirc y = z$	$x \diagdown y$	a	b	c	a
	a	a	a	a	a
	b	a	b	c	d
	c	a	c	d	b
	d	a	d	b	c

a) Zjistěte, existuje-li takový prvek $n \in \boldsymbol{M}$, že pro každé $x \in \boldsymbol{M}$ je

$$x \bigcirc n = n \bigcirc x = x .$$

b) Najděte všecky prvky $x \in \boldsymbol{M}$, k nimž existuje takový prvek $\bar{x} \in \boldsymbol{M}$, že

$$x \bigcirc \bar{x} = \bar{x} \bigcirc x = n ,$$

kde n je prvek z úlohy a).

2. V množině $\boldsymbol{R}$ všech reálných čísel je definována operace takto:

$$a \bigcirc b = a + 2b .$$

Zjistěte, existuje-li takový prvek $n \in \boldsymbol{R}$, že pro každé $a \in \boldsymbol{R}$ je

$$a \bigcirc n = n \bigcirc a = a .$$

3. V rovině ϱ je dána přímka p. Ke každé dvojici bodů A, B roviny ϱ přiřadíme bod $C = A \bigcirc B$ tak, aby $AC \parallel p$, $BC \perp p$. Vyšetřte, je-li $\bigcirc$ operace v množině všech bodů roviny ϱ, a je-li to operace, rozhodněte, je-li komutativní nebo asociativní!

4. $\boldsymbol{Z}$ je neprázdná množina a $\boldsymbol{M}$ je množina všech podmnožin množiny $\boldsymbol{Z}$. Je-li $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{M}$ (tj. $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{Z}$), označme $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$. Ukažte, že $\cap$ je operace v množině $\boldsymbol{M}$ a že tato operace je komutativní a asociativní. Vyšetřte dále, má-li operace $\cap$ v množině $\boldsymbol{M}$ neutrální prvek a který!

5. $\boldsymbol{Z}$ je neprázdná množina a $\boldsymbol{M}$ je množina všech podmnožin množiny $\boldsymbol{Z}$ jako v úloze 4. Je-li $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{D} \in \boldsymbol{M}$ označme $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}$. Ukažte, že $\cup$ je operace v množině $\boldsymbol{M}$ a že tato operace je komutativní a asociativní. Vyšetřte, má-li operace $\cup$ v množině $\boldsymbol{M}$ neutrální prvek a který!

6. V množině $\boldsymbol{M} = \{0, 1, 2\}$ je dána operace $\oplus$ takto: je-li $a \in \boldsymbol{M}$, $b \in \boldsymbol{M}$, je $a \oplus b$ zbytek, který dostaneme, dělíme-li součet $a + b$ třemi (např. $1 \oplus 1 = 2$, $1 \oplus 2 = 0$, $2 \oplus 2 = 1$). Sestavte tabulku této operace a ukažte, že je to operace komutativní a asociativní. Ze sestavené tabulky pro operaci $\oplus$ zjistěte, má-li tato operace neutrální prvek a který. Z téže tabulky vyčtěte, ke kterým prvkům množiny $\boldsymbol{M}$ existuje inverzní prvek operace $\oplus$ a udejte, který je to prvek!

7. V množině $\boldsymbol{R}$ všech reálných čísel je dána operace $\triangle$ vzorcem

$$a \triangle b = a + b + ab .$$

Vyšetřte, je-li tato operace komutativní a asociativní, najděte její neutrální prvek a ke každému prvku $a \in \boldsymbol{R}$ najděte inverzní prvek $\bar{a} \in \boldsymbol{R}$ operace $\triangle$ (pokud takový prvek existuje). Existují v množině $\boldsymbol{R}$ prvky, které jsou samy k sobě inverzní vzhledem k operaci $\triangle$? Najděte je všechny!

2.2. Grupa

Množinu $\boldsymbol{M}$, *v níž je definována operace* $\bigcirc$ *nazýváme* **grupou** *vzhledem k operaci* $\bigcirc$ *(nebo vůči operaci* $\bigcirc$*), právě když:*

a) *Operace* $\bigcirc$ *je definována pro každou dvojici* $[x, y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$;

b) *Operace* $\bigcirc$ *je asociativní v množině* $\boldsymbol{M}$;

c) *Operace* $\bigcirc$ *má neutrální prvek* $n \in \boldsymbol{M}$;

d) *Ke každému prvku* $a \in \boldsymbol{M}$ *existuje inverzní prvek* $\bar{a} \in \boldsymbol{M}$ *operace* $\bigcirc$.

Je-li kromě toho operace $\bigcirc$ v množině $\boldsymbol{M}$ komutativní, nazývá se množina $\boldsymbol{M}$ **komutativní grupou vůči operaci** $\bigcirc$.

V číselných množinách máme často definovány operace, které splňují pouze první dvě vlastnosti (např. sčítání nebo násobení v množině $\boldsymbol{N}$ všech přirozených čísel). Takovou množinu nazýváme pak **pologrupou vzhledem k operaci** $\bigcirc$.

Vyšetřujeme na příklad, zda množina $\boldsymbol{N}$ je grupou vůči operaci dělení. Dělíme-li dvě nesoudělná přirozená čísla, nedostaneme jako podíl číslo přirozené. Vlastnost a) není splněna a množina $\boldsymbol{N}$ není grupou (ani pologrupou) vzhledem k operaci dělení.

PŘÍKLAD 2,10

V číselných množinách je definována operace + (sčítání). Zjistěme, které číselné množiny tvoří grupu vůči operaci sčítání. Ověříme, zda jsou splněny podmínky z definice grupy pro množinu $\boldsymbol{C}$ (celých čísel).

1. Součet každých dvou celých čísel je číslo celé.
2. Sčítání celých čísel je asociativní.
3. Operace + má neutrální prvek — nulu.
4. Ke každému celému číslu existuje v $\boldsymbol{C}$ inverzní prvek (číslo opačné).
5. Operace sčítání $\boldsymbol{C}$ je komutativní.

Množina všech celých čísel je komutativní grupou vůči operaci sčítání.

Stejně si můžeme ověřit, že i *množina všech racionálních čísel* $\boldsymbol{Q}$ a *množina všech reálných čísel* $\boldsymbol{R}$ *jsou komutativní grupy vůči sčítání.*

Množina $\boldsymbol{N}_0$ není grupou vůči sčítání. Podmínky *a, b, c* jsou splněny, ale k žádnému přirozenému číslu kromě nuly neexistuje inverzní prvek z množiny $\boldsymbol{N}_0$. Rovněž množiny $\boldsymbol{Q}^+$ a $\boldsymbol{N}$ nejsou grupami vůči operaci sečítání.

PŘÍKLAD 2,11

Vyšetříme, které číselné množiny jsou grupou vzhledem k operaci (násobení).

Množina $\boldsymbol{Q}^+$ *je komutativní grupou vůči operaci násobení*, neboť:

1. Součin každých dvou kladných racionálních čísel je kladné racionální číslo.
2. Násobení kladných racionálních čísel je asociativní.

3. Operace násobení má neutrální prvek. Je jím kladné racionální číslo *1*.

4. Ke každému kladnému racionálnímu číslu a existuje inverzní prvek $\bar{a}$ (číslo převrácené: $a.\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.a = 1$).

5. Operace násobení je komutativní.

Množina $\boldsymbol{N}$ je pouze pologrupou, ale nikoliv grupou vůči operaci násobení. Jedině prvek *1* má inverzní prvek vzhledem k násobení ($\bar{1} = 1$).

K žádnému jinému přirozenému číslu neexistuje v $\boldsymbol{N}$ prvek inverzní (převrácená čísla k číslům přirozeným nejsou čísla přirozená).

Množiny $\boldsymbol{N}_0$, $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{R}$ nejsou rovněž grupami vůči násobení. Všechny tři uvedené množiny obsahují nulu a k ní neexistuje inverzní (převrácený) prvek pro operaci násobení.

Pro nulu by totiž muselo platit

$$0.\bar{0} = 1$$

Neexistuje však žádné reálné číslo, které násobeno nulou, by dalo číslo jedna.

Pamatujte si!

Grupa vzhledem k operaci $\bigcirc$
Komutativní grupa

Cvičení

1. Budiž $\ast$ operace v množině $\boldsymbol{R}$ všech reálných čísel definována vzorcem

$$a \ast b = a + b + 1, \; a \in \boldsymbol{R}, \; b \in \boldsymbol{R}.$$

a) Vyšetřete, je-li tato operace komutativní a asociativní.

b) Zjistěte, existuje-li takový prvek $n \in \boldsymbol{R}$, aby pro každé $a \in \boldsymbol{R}$ bylo

$$a \ast n = a\,, \quad n \ast a = a\,.$$

c) Zvolte libovolný prvek $a \in \boldsymbol{R}$. Zjistěte, existuje-li k němu takový prvek $\bar{a} \in \boldsymbol{R}$, aby

$$a \ast \bar{a} = n\,, \quad \bar{a} \ast a = n\,,$$

kde n je prvek, který vyhovuje úloze b.

d) Vypočtěte $\overline{2}$, $\overline{1}$, $\overline{0}$, $\overline{-1}$, $\overline{-2}$.

2. $\boldsymbol{M}$ je množina $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. V množině $\boldsymbol{M}$ je dána operace $x \square y = z$, kde

$$z = \max(x, y) = \begin{cases} x, \text{ je-li } x \geqq y\,, \\ y, \text{ je-li } x < y\,. \end{cases}$$

[Např. $\max(2, 3) = 3$, $\max(4, 1) = 4$, $\max(2, 2) = 2$; $\max(x, y)$ čteme: největší (maximum) z čísel x, y.]
Sestavte tabulku pro tuto operaci. Vyšetřete, je-li tato operace komutativní nebo asociativní a zda je $\boldsymbol{M}$ grupou vůči této operaci.
Návod: Je třeba buď vyšetřit všecky možné uspořádané dvojice, popř. trojice prvků množiny $\boldsymbol{M}$, nebo můžeme vzít libovolné prvky x, y, popř. x, y, z množiny $\boldsymbol{M}$ a odlišit případy $x \geqq y$, $y > x$ (při komutativnosti), popř. případy $x \geqq y \geqq z$, $x \geqq z \geqq y$, $y \geqq x \geqq z$, $y \geqq z \geqq x$, $z \geqq x \geqq y$, $z \geqq y \geqq x$ (při asociativnosti).

3. V množině $\boldsymbol{R}$ všech reálných čísel je dána operace $\square$ vzorcem

$$a \square b = a + b - 10\,.$$

Vyšetřte, je-li tato operace komutativní a asociativní, najděte její neutrální prvek a k libovolnému prvku $a \in \boldsymbol{R}$ najděte inverzní prvek $\bar{a} \in \boldsymbol{R}$ operace $\square$ (pokud takový prvek existuje). Existují v množině $\boldsymbol{R}$ prvky, které jsou samy k sobě inverzní vzhledem k operaci $\square$? Najděte je všechny.

4. V množině $\boldsymbol{R}$ všech reálných čísel je dána operace $\square$ tak jako ve cvičení 3. Najděte všecka reálná čísla x, která splňují rovnice

a) $10 \square x = 10\,,$ b) $10 \square x = 0\,,$ c) $x \square 0 = 10\,.$

5. Znáte „cikánskou násobilku"? Máte-li znásobit dvě celá čísla a, b, pro která platí $5 < a < 10$, $5 < b < 10$, natáhněte na jedné ruce tolik prstů, oč a je větší než 5 a na druhé ruce tolik prstů, oč je b větší než 5 a ostatní prsty skrčte. Součet natažených prstů udává počet desítek a součin skrčených prstů počet jednotek výsledku. Odůvodněte správnost tohoto postupu. (Návod: natažených prstů je $a - 5$, popř. $b - 5$ a skrčených $10 - a$, popř. $10 - b$.)

6. ***M*** je množina čtvercových schemat. (Tato schemata se nazývají obyčejně *matice*.)

$$S_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad S_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad S_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$S_4 = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad S_5 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad S_6 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

Operace $\odot$ je zavedena vzorcem

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array} \odot \begin{array}{|c|c|} \hline e & f \\ \hline g & h \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline ae + bg & af + bh \\ \hline ce + dg & cf + dh \\ \hline \end{array}$$

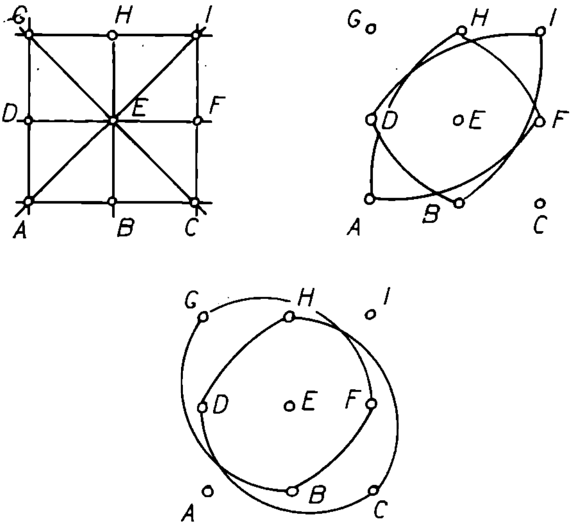
a) Popište, jak se operace $\odot$ provádí.
b) Sestavte její tabulku.
c) Zjistěte, zda operace $\odot$ je komutativní, zda je asociativní a zda má neutrální prvek.
d) Zjistěte, zda množina $\boldsymbol{G} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$ je grupa vzhledem k operaci $\odot$.

7. V moderním sídlišti je 9 křižovatek, které jsou spojeny osmi přímými komunikacemi (obr. 51a) a čtyřmi okružními komunikacemi (obr. 51b, c). Křižovatky označte písmeny A, B, C, D, E, F, G, H, I.
Komunikace tvoří křižovatku jen v kroužkovaných bodech; jinak se křižují v různých úrovních.
a) Každými dvěma křižovatkami prochází jediná z 12 komunikací; dokažte.
b) Neleží-li křižovatka X na komunikaci p, prochází křižo-

vatkou jediná komunikace q, která nemá s komunikací p žádnou společnou křižovatku; dokažte.

c) Kolik komunikací prochází každou křižovatkou? Udejte komunikace, které procházejí křižovatkou A (ABC, ...).

d) Čisticí podnik umyje během noci právě 3 křižovatky.



Obr. 51a, b, c

Umyje-li křižovatky X, Y, umyje také křižovatku Z, která leží na téže komunikaci jako X, Y. Tím je v množině $\boldsymbol{M}$ všech křižovatek zavedena operace $Z = X \ast Y$; přitom $X \ast X = X$; Sestavte její tabulku.

e) Je množina $\boldsymbol{M}$ grupou vzhledem k operaci $\ast$?

f) Čisticí podnik umyje během noci právě tři křižovatky. Umyje-li křižovatky X, Y, umyje ještě křižovatku T určenou takto: T je třetí křižovatka ležící na téže komunikaci jako A a $Z = X \ast Y$. Tím je v množině $\boldsymbol{M}$ zavedena operace $T = X \vartriangle Y$. Sestrojte její tabulku.

g) Je množina M grupou vzhledem k operaci $\triangle$?

8. V množině R všech reálných čísel je dána operace $\square$: $a \square b = a + b - 10$. Najděte všechna reálná čísla, která splňují rovnice

$$10 \square x = 10$$
$$10 \square x = 0$$
$$x \square 0 = 10$$

2.3. Skládání permutací

Ve článku 2,2 jsme se zabývali většinou operacemi v množinách, jejichž prvky byly čísla, body, písmena apod. Některé operace jsme znali ze školy (sečítání, násobení, operace „střed úsečky"), u jiných jsme si celkem jednoduše popsali, jak najdeme k daným dvěma prvkům (číslům, bodům) prvek třetí jako výsledek operace.

V tomto článku si zavedeme novou operaci **„skládání permutací"** a budeme zkoumat její vlastnosti v množinách shodných zobrazení — tedy na objektech geometrických. Možná, že vás zaujmou výsledky, které dostaneme při skládání různých druhů přemístění — to však není to hlavní. Měli bychom si uvědomit, že novou operací se nám probudily k životu množiny jiného druhu, složitější stavby, než byly ty, které obsahovaly jako prvky čísla nebo body. Operace „skládání permutací" je definována v množině permutací — to znamená, že uspořádané dvojici permutací přiřadíme permutaci třetí.

Zavedeme si operaci **„skládání permutací"** takto:

Je dána množina M (konečná nebo nekonečná) a dvě její permutace P_1 a P_2. Vzoru $x \in M$ je permutací P_1

přiřazen obraz $y \in \boldsymbol{M}$ ($x \xrightarrow{P_1} y$). Vzoru $y \in \boldsymbol{M}$ je permutací $\boldsymbol{P}_2$ přiřazen obraz $z \in \boldsymbol{M}$, $y \xrightarrow{P_2} z$. Zobrazení $\boldsymbol{P}_3$, které vzoru $x \in \boldsymbol{M}$ přiřadí obraz $z \in \boldsymbol{M}$, je rovněž permutace a říkáme, že vznikla složením permutace $\boldsymbol{P}_1$ s permutací $\boldsymbol{P}_2$ v tomto pořadí.

V množině všech permutací $\boldsymbol{G}$ množiny $\boldsymbol{M}$ jsme zavedli operaci $*$, která je definována pro každou dvojici $[\boldsymbol{P}_1; \boldsymbol{P}_2] \in \boldsymbol{G} \times \boldsymbol{G}$ a která se nazývá „skládání permutací“.

Píšeme $\boldsymbol{P}_1 * \boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_3$.

Skládání permutací je operace, která není vždy komutativní.

PŘÍKLAD 2,12

Množina $\boldsymbol{M} = \{a, b, c, d\}$

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{Bmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{Bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}_2 = \begin{Bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & a & d \end{Bmatrix}$$

Složíme permutaci $\boldsymbol{P}_1$ s permutací $\boldsymbol{P}_2$

$$a \xrightarrow{P_1} c \xrightarrow{P_2} a$$
$$b \xrightarrow{P_1} d \xrightarrow{P_2} d \quad \text{atd.}$$

$$\boldsymbol{P}_1 * \boldsymbol{P}_2 = \begin{Bmatrix} a & b & c & d \\ a & d & b & c \end{Bmatrix}$$

Složíme permutaci $\boldsymbol{P}_2$ s permutací $\boldsymbol{P}_1$

$$a \xrightarrow{P_2} b \xrightarrow{P_1} d$$
$$b \xrightarrow{P_2} c \xrightarrow{P_1} a$$

$$\boldsymbol{P}_2 * \boldsymbol{P}_1 = \begin{Bmatrix} a & b & c & d \\ d & a & c & b \end{Bmatrix}$$

Je tedy $\boldsymbol{P}_1 * \boldsymbol{P}_2 \neq \boldsymbol{P}_2 * \boldsymbol{P}_1$

PŘÍKLAD 2,13

Rozhodněte, zda množina $\boldsymbol{G}$ všech permutací tříprvkové množiny $\boldsymbol{M} = \{A, B, C\}$ je grupou vůči operaci skládání permutací.

Vypíšeme si všechny permutace množiny $\boldsymbol{M} = \{A, B, C\}$

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{P}_2 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_3 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{P}_4 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_5 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{P}_6 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{Bmatrix}$$

Do tabulky zapíšeme výsledky operace skládání permutací

$x * y$	$x \backslash y$	$\boldsymbol{P}_1$	$\boldsymbol{P}_2$	$\boldsymbol{P}_3$	$\boldsymbol{P}_4$	$\boldsymbol{P}_5$	$\boldsymbol{P}_6$
	$\boldsymbol{P}_1$	$\boldsymbol{P}_1$	$\boldsymbol{P}_2$	$\boldsymbol{P}_3$	$\boldsymbol{P}_4$	$\boldsymbol{P}_5$	$\boldsymbol{P}_6$
	$\boldsymbol{P}_2$	$\boldsymbol{P}_2$	$\boldsymbol{P}_1$	$\boldsymbol{P}_4$	$\boldsymbol{P}_3$	$\boldsymbol{P}_6$	$\boldsymbol{P}_5$
	$\boldsymbol{P}_3$	$\boldsymbol{P}_3$	$\boldsymbol{P}_5$	$\boldsymbol{P}_1$	$\boldsymbol{P}_6$	$\boldsymbol{P}_2$	$\boldsymbol{P}_4$
	$\boldsymbol{P}_4$	$\boldsymbol{P}_4$	$\boldsymbol{P}_6$	$\boldsymbol{P}_2$	$\boldsymbol{P}_5$	$\boldsymbol{P}_1$	$\boldsymbol{P}_3$
	$\boldsymbol{P}_5$	$\boldsymbol{P}_5$	$\boldsymbol{P}_3$	$\boldsymbol{P}_6$	$\boldsymbol{P}_1$	$\boldsymbol{P}_4$	$\boldsymbol{P}_2$
	$\boldsymbol{P}_6$	$\boldsymbol{P}_6$	$\boldsymbol{P}_4$	$\boldsymbol{P}_5$	$\boldsymbol{P}_2$	$\boldsymbol{P}_3$	$\boldsymbol{P}_1$

1. Z tabulky je vidět, že složením každých dvou permutací z $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4, \boldsymbol{P}_5, \boldsymbol{P}_6\}$ vznikne permutace $\boldsymbol{P}_i \in \boldsymbol{G}$

2. Skládání permutací je asociativní — přesvědčíme se z tabulky, např.

$$(\boldsymbol{P}_2 * \boldsymbol{P}_3) * \boldsymbol{P}_4 = \boldsymbol{P}_4 * \boldsymbol{P}_4 = \boldsymbol{P}_5$$
$$\boldsymbol{P}_2 * (\boldsymbol{P}_3 * \boldsymbol{P}_4) = \boldsymbol{P}_2 * \boldsymbol{P}_6 = \boldsymbol{P}_5$$

3. Neutrálním prvkem skládání permutací je $\boldsymbol{P}_1$ (identita). Např.

$$\boldsymbol{P}_3 * \boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_1 * \boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{P}_3$$

4. Inverzní prvek ke každé permutaci najdeme rovněž z tabulky

$$\overline{\boldsymbol{P}_1} = \boldsymbol{P}_1 \qquad \overline{\boldsymbol{P}_4} = \boldsymbol{P}_5$$
$$\overline{\boldsymbol{P}_2} = \boldsymbol{P}_2 \qquad \overline{\boldsymbol{P}_5} = \boldsymbol{P}_4$$
$$\overline{\boldsymbol{P}_3} = \boldsymbol{P}_3 \qquad \overline{\boldsymbol{P}_6} = \boldsymbol{P}_6$$

5. Skládání permutací není komutativní v $\boldsymbol{G}$. Např.

$$\boldsymbol{P}_6 * \boldsymbol{P}_4 = \boldsymbol{P}_2$$
$$\boldsymbol{P}_4 * \boldsymbol{P}_6 = \boldsymbol{P}_3$$

Můžeme tedy říci, že *množina* $\boldsymbol{G}$ *všech permutací množiny* $\boldsymbol{M}$ *tvoří nekomutativní grupu vzhledem k operaci „skládání“*.

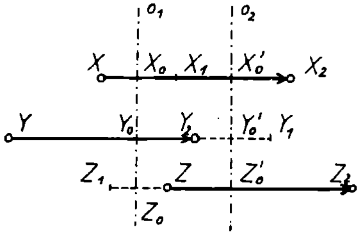
PŘÍKLAD 2,14

V rovině jsou dány dvě osové souměrnosti $\boldsymbol{O}_1$ a $\boldsymbol{O}_2$ s osami $o_1 \parallel o_2$. Vyšetřete, jaká permutace $\boldsymbol{P}$ roviny vznikne složením $\boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2$! (Obr. 52)

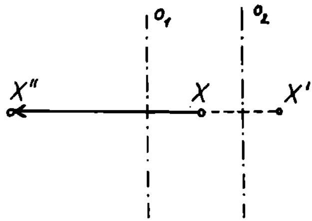
Permutace $\boldsymbol{P}$ přiřazuje vzoru X obraz X_2.

Přímky, které spojují každý vzor s jeho obrazem jsou navzájem rovnoběžné a kolmé k osám o_1 a o_2. Vzdálenost os označíme d. Platí:

$$X_0X = X_0X_1; \quad X_1X'_0 = X'_0X_2$$
$$XX_2 = 2X_1X_0 + 2X_1X'_0 = 2(X_1X_0 + X_1X'_0) = 2d$$
$$ZZ_2 = 2Z'_0Z_1 - 2Z_0Z_1 = 2(Z'_0Z_1 - Z_0Z_1) = 2d$$
$$YY_2 = 2Y_1Y_0 - 2Y_1Y'_0 = 2(Y_1Y_0 - Y_1Y'_0) = 2d$$



Obr. 52



Obr. 53

Permutace, která vznikla, je posunutí (translace) *v rovině.* Velikost posunutí je rovna dvojnásobku vzdálenosti os a směr je kolmý ke směru os, orientovaný od o_1 k o_2.

Složíme $\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}_1$ (obr. 53). Vznikne posunutí velikosti $2d$, ale opačného směru.

PŘÍKLAD 2,15

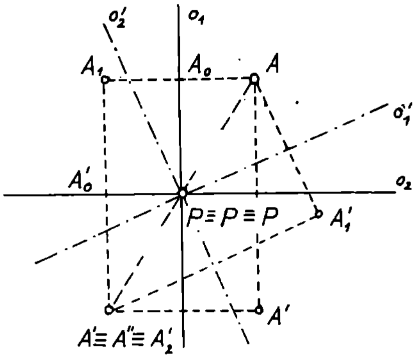
Složte dvě osové souměrnosti $\boldsymbol{O}_1$ a $\boldsymbol{O}_2$ s osami o_1, o_2, které jsou k sobě kolmé (obr. 54)!

Ve složené permutaci průsečík P os o_1 a o_2 je samodružný; spojnice AA_2 prochází bodem P a $AP = A_2P$. (Dokážeme ze shodnosti trojúhelníků $\triangle PAA_0 \cong \cong \triangle PA_1A_0 \cong \triangle PA_1A_0$, které jsou pravoúhlé a mají shodné odvěsny.)

Výsledná permutace je souměrnost podle středu P.

Souměrnost podle středu P vznikne i tehdy, zvolíme-li jinou dvojici $o_1' \perp o_2'$ tak, aby se o_1' a o_2' protínaly v bodě P.

Sestrojíme ještě obraz bodu A v permutaci $\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}_1$ ($A \xrightarrow{\boldsymbol{O}_1} A' \xrightarrow{\boldsymbol{O}_2} A''$). Snadno ověříme, že pro každý bod A



Obr. 54

platí $A_2 = A''$. To znamená, že *skládání osových souměrností, jejichž osy jsou navzájem kolmé, je komutativní*:

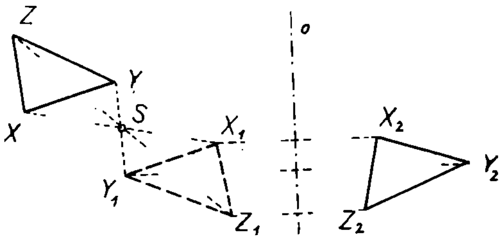
$$\boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2 = \boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}_1 .$$

Z příkladů 2,14 a 2,15 je vidět, že výsledkem operace skládání dvou osových souměrností bylo jednou posunutí a po druhé středová souměrnost. Množina všech osových souměrností není tedy grupou vůči operaci skládání.

PŘÍKLAD 2,16

Jaká permutace vznikne, složíme-li souměrnost $\boldsymbol{S}$ podle středu S se souměrností $\boldsymbol{O}$ podle osy o, která neprochází bodem S (obr. 55)?

Permutace, která vznikne, není ani identita, ani osová nebo středová souměrnost, ani posunutí nebo otočení.



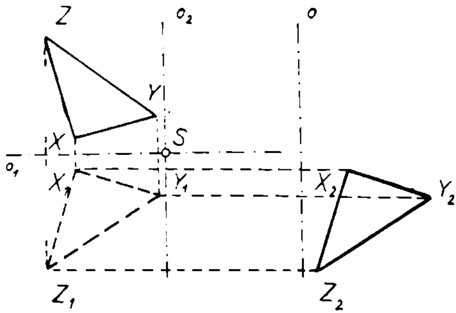
Obr. 55

Permutace $\boldsymbol{S} * \boldsymbol{O}$ je shodné zobrazení protože pro každou dvojici bodů X, Y platí $XY = X'Y'$ a $X'Y' = X''Y''$ (ve středové i osové souměrnosti se zachovává velikost úseček). Musí tedy platit pro každou dvojici bodů, že $XY = X''Y''$ a to je charakteristická vlastnost shodných zobrazení (přemístění). Tomuto novému druhu shodného zobrazení říkáme **posunuté zrcadlení $\boldsymbol{Z}$**.

Kdybychom chtěli hledat obrazy daných bodů v posunutém zrcadlení pomocí průsvitky, museli bychom průsvitku nejprve otočit o $2R$ kolem daného středu S a pak překlopit podle dané osy o. Název tohoto přemístění nevystihuje dost zřetelně fakt, že vzniklo složením středové a osové souměrnosti. Spíše bychom čekali, že posunuté zrcadlení vzniklo složením posunutí a osové souměrnosti (zrcadlení). To je ale rozpor pouze zdánlivý (viz obr. 56).

Uvažme toto:

1. Středová souměrnost vznikne složením kterýchkoliv dvou osových souměrností, jejichž osy jsou k sobě kolmé a protínají se ve středu souměrnosti.



Obr. 56

2. Posunutí vznikne složením dvou osových souměrností, jejichž osy jsou různé rovnoběžky.

3. Skládání je asociativní operace v množině všech shodných zobrazení.

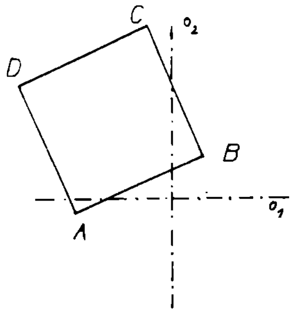
Pro posunutí zrcadlení $\boldsymbol{Z}$ platí:

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{S} * \boldsymbol{O}$$

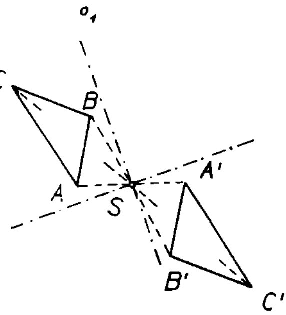
Osy o_1 a o_2 souměrností $\boldsymbol{O}_1$ a $\boldsymbol{O}_2$ z nichž vznikla středová souměrnost $\boldsymbol{S}$, zvolíme tak, aby první osa o_1 byla kolmá k ose o souměrnosti $\boldsymbol{O}$ a druhá osa o_2 byla s ní rovnoběžná: $\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2) * \boldsymbol{O}_3 = \boldsymbol{O}_1 * (\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O})$. Osa o_2 je rovnoběžná s osou o a složením $\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}$ vznikne posunutí ve směru osy o_1. Posunuté zrcadlení **Z** vznikne také složením osové souměrnosti a posunutí ve směru osy této souměrnosti.

Cvičení

1. Složte dvě osové souměrnosti $\mathbf{O}_1$ a $\mathbf{O}_2$ s osami, které jsou různoběžné, ale nejsou k sobě kolmé. Pokuste se dokázat, že výsledná permutace je otočení (rotace) kolem průsečíku os!



Obr. 57



Obr. 58

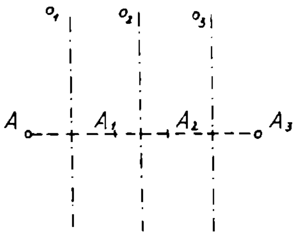
Je tato operace komutativní? Jak souvisí úhel otočení s odchylkou os?

2. Jaké zobrazení vznikne složením
a) dvou středových souměrností, které mají stejný střed?
b) dvou osových souměrností, které mají totožné osy?

3. Podle obr. 57 sestrojte obraz $\mathbf{Q}_1$ čtverce $ABCD$ ($\mathbf{Q}$) v souměrnosti podle osy o_1 a obraz $\mathbf{Q}_2$ čtverce $\mathbf{Q}_1$ v souměrnosti podle osy o_2. Ověřte, že čtverec $\mathbf{Q}_2$ je obraz čtverce $\mathbf{Q}$ v souměrnosti podle středu $o_1 \cap o_2$.

4. Podle obrázku 58 sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$ a jeho obraz $\triangle A'B'C'$ v souměrnosti podle středu S. Zvolte dvě přímky o_1, o_2 navzájem kolmé a procházející bodem S. Ověřte, že obraz $\triangle ABC$ v souměrnosti podle osy o_1 splyne s obrazem $\triangle A'B'C'$ v souměrnosti podle osy o_2.

5. Jsou dány tři přímky $o_1 \parallel o_2 \parallel o_3$. Vzdálenost o_1, o_2, je rovna vzdálenosti o_2, o_3 (obr. 59). Vyšetřte shodnost, která vznikne složením příslušných osových souměrností o_1, o_2, o_3.



Obr. 59

2.4. Grupy shodných zobrazení

V článku 2,3 jsme definovali shodné zobrazení (přemístění) roviny. Konstrukčním předpisem nebo pomocí průsvitky jsme určili, jak bodu roviny X (vzoru) přiřadíme bod roviny X' (obraz).

Poznali jsme tato shodná zobrazení (přemístění):

1. identita $\boldsymbol{J}$
2. souměrnost podle osy $\boldsymbol{O}$
3. souměrnost podle středu $\boldsymbol{S}$
4. otočení kolem středu $\boldsymbol{R}$
5. posunutí $\boldsymbol{T}$
6. posunuté zrcadlení $\boldsymbol{Z}$ (viz př. 2,16)

Prohlédneme-li si pozorně předchozí příklady a cvičení z článku 2,3, uvidíte, že všechna přemístění, která známe, můžeme dostat složením nejvýše tří osových souměrností.

Identitu dostaneme složením dvou osových souměrností, jejichž osy splývají.

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{O}_1 \ast \boldsymbol{O}_2 \quad (o_1 = o_2)$$

Posunutí složíme ze dvou osových souměrností, jejichž osy jsou různé rovnoběžky.

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{O}_1 \ast \boldsymbol{O}_2 \quad (o_1 \not\equiv o_2;\ o_1 \parallel o_2)$$

Středová souměrnost vznikne složením dvou osových souměrností, jejichž osy jsou k sobě kolmé

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{O}_1 \ast \boldsymbol{O}_2 \quad (o_1 \perp o_2)$$

Otáčení složíme ze dvou osových souměrností, jejichž osy jsou různoběžné

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{O}_1 \ast \boldsymbol{O}_2 \quad (o_1 \nparallel o_2)$$

Posunuté zrcadlení jsme složili ze středové a osové souměrnosti — to znamená, že jsme postupně skládali tři osové souměrnosti; osy prvních dvou byly k sobě kolmé, třetí neprocházela jejich průsečíkem.

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{S} \ast \boldsymbol{O}$$

Shodné zobrazení, které vzniklo složením sudého počtu osových souměrností, se nazývá přímá shodnost (průsvitku při přemístění nemusíme otáčet na rub) — to je otočení a středová souměrnost, posunutí a identita.

Složením lichého počtu osových souměrností dostaneme nepřímou shodnost (při přemístění musíme průsvitku otáčet na rub) — to je osová souměrnost a posunuté zrcadlení.

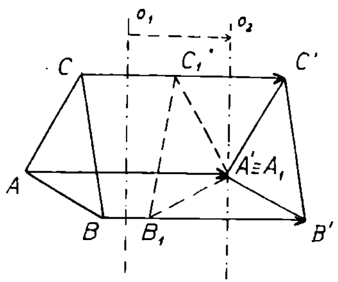
Napadne nás jistě otázka, zda existují ještě jiná shodná zobrazení kromě těch, která jsme dosud poznali— co se stane, složíme-li pět, deset, či sto osových souměrností. Aby byla odpověď aspoň trochu uspokojivá, musíme si říci ještě něco o rozkládání shodných zobrazení na osové souměrnosti.

Každé z našich shodných zobrazení (přemístění) umíme rozložit na osové souměrnosti a zvolíme-li osy vhodně, pak identitu, otočení, středovou souměrnost a posunutí rozložíme na dvě osové souměrnosti; posunuté zrcadlení na tři osové souměrnosti. Způsob rozkladu nám nejlépe ukáží příklady.

PŘÍKLAD 2,17

Je dáno posunutí *T*. Rozložte je na dvě osové souměrnosti!

Jednu z os (např. o_1) můžeme zvolit libovolně, ale tak, aby byla kolmá na směr posunutí. Druhá osa $o_2 \parallel o_1$ je od osy o_1 vzdálena ve směru posunutí o vzdálenost rovnou poloviční velikosti posunutí (obr. 60).



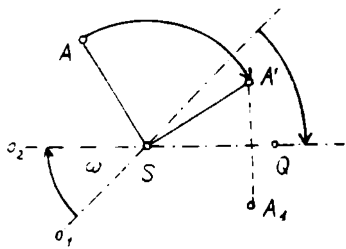
Obr. 60

Zvolíme-li libovolně druhou osu o'_2 (musí být ovšem kolmá na směr posunutí), pak $o'_1 \parallel o'_2$ je od osy o'_2 vzdálená proti směru posunutí o vzdálenost rovnou polovině velikosti posunutí.

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2 = \boldsymbol{O}'_1 * \boldsymbol{O}'_2$$

PŘÍKLAD 2,18

Rozložte dané otočení $\boldsymbol{R} = (S; + 90°)$ na dvě osové souměrnosti. Osa o_2 má procházet daným bodem $Q \neq S$.



Obr. 62

Osu o_2 zvolíme tak, aby procházela bodem Q a bodem S. Osa o_1 prochází rovněž bodem S a musí svírat s osou o_2 úhel $\varphi = + \frac{90}{2} = + 45°$ (od osy o_1 musíme přejít k ose o_2 „proti otáčení hodinových ručiček“) (obr. 62).

PŘÍKLAD 2,19

Najděte shodné zobrazení $\boldsymbol{P}$, které vznikne postupným složením čtyř osových souměrností $\boldsymbol{O}_1, \boldsymbol{O}_2, \boldsymbol{O}_3, \boldsymbol{O}_4$. Osy o_1 a o_2 jsou rovnoběžné, osy o_3 a o_4 různoběžné (viz obrázek 63).

Místo konstrukce provedeme výpočet (pozor! skládání osových souměrností není komutativní, ale je asociativní).

$$P = (O_1 * O_2) * (O_3 * O_4)$$

$$O_1 * O_2 = T; \quad O_3 * O_4 = R$$

$$P = T * R$$

Translaci T rozložíme na osové souměrnosti O_1' a O_2'. Osu o_2' druhé souměrnosti volíme tak, aby procházela průsečíkem os o_3 a o_4

$$P = O_1' * O_2' * R$$

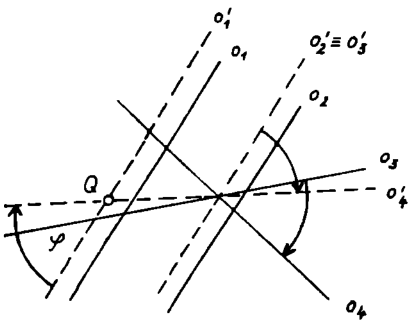
Rotaci R rozložíme na dvě osové souměrnosti O_3' a O_4'. Osu o_3' zvolíme tak, aby splynula s o_2'

$$P = (O_1' * O_2') * (O_3' * O_4')$$

$$P = O_1' * (O_2' * O_3') \times O_4'$$

$$O_2' = O_3'; \quad O_2' * O_3' = J$$

$$P = O_1' * J * O_4' = O_1' * O_4'$$



Obr. 63

(identita je neutrální prvek operace, můžeme ji vynechat).

Přemístění $\boldsymbol{P}$ je složeno ze dvou osových souměrností, kde osy o_1', o_4' jsou různoběžné.

V našem případě je $\boldsymbol{P}$ otočení, jak nám ukáže konstrukce, kterou provedeme podle výpočtu (obr. 63). Výsledné otočení má střed Q a úhel otočení je φ.

PŘÍKLAD 2,20

Vyšetřete jaké zobrazení vznikne složením pěti různých osových souměrností: o_1, o_2 a o_3 navzájem rovnoběžné, $o_4 \parallel o_5$ jsou k nim kolmé (obr. 64).

Výpočet provedeme jen stručně:

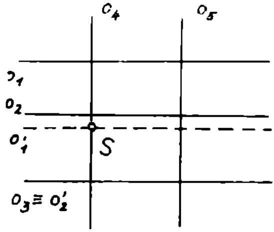
$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2) * \boldsymbol{O}_3 * (\boldsymbol{O}_4 * \boldsymbol{O}_5)$$

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{O}_1' * \boldsymbol{O}_2') * \boldsymbol{O}_3 * \boldsymbol{O}_4 * \boldsymbol{O}_5$$

$$o_2' = o_3$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{O}_1' * (\boldsymbol{O}_2' * \boldsymbol{O}_3) * \boldsymbol{O}_4 * \boldsymbol{O}_5$$

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{O}_1' * \boldsymbol{O}_4) * \boldsymbol{O}_5 = \boldsymbol{S} * \boldsymbol{O}_5$$



Obr. 64

Výsledné zobrazení je posunuté zrcadlení, které se skládá ze souměrnosti podle středu S a z osové souměrnosti $\boldsymbol{O}_6$.

PŘÍKLAD 2,21

Vyšetřete zobrazení, které vznikne složením konečného sudého počtu osových souměrností, jejichž osy jsou navzájem různé.

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}_3 * \boldsymbol{O}_4 * \ldots * \boldsymbol{O}_{2n}$$

Osové souměrnosti sdružíme do dvojic

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2) * (\boldsymbol{O}_3 * \boldsymbol{O}_4) * (\boldsymbol{O}_4 * \boldsymbol{O}_5) * \ldots * \\ * (\boldsymbol{O}_{2n-1} * \boldsymbol{O}_{2n})$$

Osy jsou vesměs různé a složením dvou osových souměrností s různými osami vznikne buď posunutí nebo otočení, podle vzájemné polohy os, např.

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R}_1 * \boldsymbol{R}_2 * \boldsymbol{T}_1 * \boldsymbol{T}_2$$

Při dalším postupném sdružování skládáme tyto možné dvojice:

a) $\boldsymbol{R}_1 * \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{P}_1$

b) $\boldsymbol{R} * \boldsymbol{T} = \boldsymbol{P}_2$

c) $\boldsymbol{T} * \boldsymbol{R} = \boldsymbol{P}_3$

d) $\boldsymbol{T}_1 * \boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{P}_4$

Vyšetříme výsledné zobrazení v jednotlivých případech:

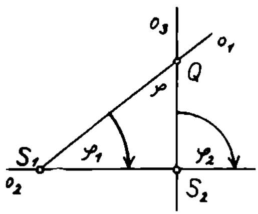
a) $\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{R}_1 * \boldsymbol{R}_2 = (\boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2) * (\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}_3) =$

$$= \boldsymbol{O}_1 * (\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}_2) * \boldsymbol{O}_3 = \boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_3$$

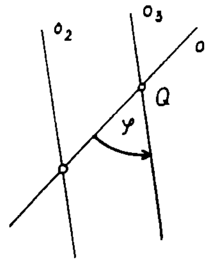
Osu o_2 souměrnosti $\boldsymbol{O}_2$ volíme tak, aby procházela středy obou otočení.

Zobrazení $\boldsymbol{P}_1$ *je otočení nebo posunutí, ve zvláštním případě identita*, jestliže osy o_1 a o_3 splynou (obr. 65).

$$\text{b) } \boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{R}.\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2) * (\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}_3) =$$
$$= \boldsymbol{O}_1 * (\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}_2) * \boldsymbol{O}_3 = \boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_3$$



Obr. 65



Obr. 66

Osu o_2 souměrnosti $\boldsymbol{O}_2$ jsme zvolili kolmo na směr posunutí tak, aby procházela středem otočení (obr. 66). *Zobrazení* $\boldsymbol{P}_2$ *je otočení* kolem středu Q o úhel φ.

$$\text{c) } \boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{T} * \boldsymbol{R} = (\boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2) * (\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}_3) =$$
$$= \boldsymbol{O}_1 * (\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}_2) * \boldsymbol{O}_3 = \boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_3$$

Osu o_2 volíme stejně jako v případě b).

Zobrazení $\boldsymbol{P}_3$ *je posunutí nebo otočení.*

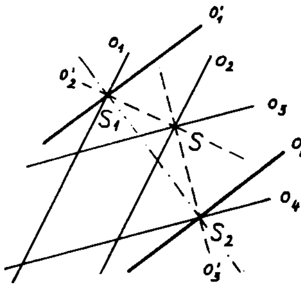
$$\text{d) } \boldsymbol{P}_4 = \boldsymbol{T}_1 * \boldsymbol{T}_2 = (\boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2) * (\boldsymbol{O}_3 * \boldsymbol{O}_4)$$

Jsou-li osy o_1, o_2, o_3, o_4 navzájem rovnoběžné, volíme opět $o_2 \equiv o_3$ a $\boldsymbol{P}_4 = \boldsymbol{O}_1 * (\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}_2) * \boldsymbol{O}_4 = \boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_4$

Osy o_1 a o_4 jsou rovnoběžné a $\boldsymbol{P}_4$ *je posunutí nebo identita.*

Nemají-li $\boldsymbol{T}_1$ a $\boldsymbol{T}_2$ stejný nebo opačný smysl, pak osy o_2 a o_3 se protnou a svírají stejný úhel jako o_1 a o_4.

$$\boldsymbol{P}_4 = \boldsymbol{O}_1 * (\boldsymbol{O}_2 * \boldsymbol{O}_2) * \boldsymbol{O}_4 = \boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{R} * \boldsymbol{O}_4$$



Obr. 67

Rotaci $\boldsymbol{R}$ rozložíme na dvě osové souměrnosti $\boldsymbol{O}_2'$ a $\boldsymbol{O}_3'$ tak, aby osa o_2' byla kolmá k ose o_1, osa o_3' je pak kolmá k o_4 (obr. 67).

$$\boldsymbol{P}_4 = \boldsymbol{O}_1 * (\boldsymbol{O}_2' * \boldsymbol{O}_3') * \boldsymbol{O}_4 = (\boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2') *$$
$$* (\boldsymbol{O}_3' * \boldsymbol{O}'_4) = \boldsymbol{S}_1 * \boldsymbol{S}_2$$

Středové souměrnosti $\boldsymbol{S}_1$ a $\boldsymbol{S}_2$ mají různé středy otáčení. Zvolíme osu o, která spojuje středy souměrností S_1 a S_2 a obě středové souměrnosti rozložíme

$$\boldsymbol{P}_4 = \boldsymbol{S}_1 * \boldsymbol{S}_2 = (\boldsymbol{O}_1' * \boldsymbol{O}) * (\boldsymbol{O} * \boldsymbol{O}_4') =$$
$$= \boldsymbol{O}_1' * (\boldsymbol{O} \times \boldsymbol{O}) * \boldsymbol{O}_4' = \boldsymbol{O}_1' * \boldsymbol{O}_4' = \boldsymbol{T}.$$

Osy souměrností $\boldsymbol{O}_1'$ a $\boldsymbol{O}_2'$ jsou různé rovnoběžky.

Zobrazení $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$, $\boldsymbol{P}_4$ jsou opět otočení, posunutí nebo identita.

Můžeme tedy znovu postupně skládat a při skládání nenastane žádná jiná možnost kromě těch, které byly probrány v případech a), b), c), d).

Konečný sudý počet osových souměrností tak postupně snižujeme, až zůstane jediné shodné zobrazení, kterým je buď *posunutí nebo otočení nebo identita.*

Podobně jako v příkladu 2,21, můžeme postupně skládat lichý počet osových souměrností. Vyšetření všech možných případů by trvalo dlouho a závěr by byl stejně jednoduchý jako v předchozím případě:

Složením konečného lichého počtu osových souměrností vznikne buď osová souměrnost nebo posunuté zrcadlení.

Teď už můžeme odpovědět na otázku, kterou jsme si položili, než jsme počali řešit příklad 2,17:

Složením libovolného konečného počtu osových souměrností dostaneme pouze tato shodná zobrazení:

a) *Identitu, posunutí nebo rotaci* (případně její zvláštní případ — středovou souměrnost), je-li počet osových souměrností sudý,

b) *osovou souměrnost nebo posunuté zrcadlení*, je-li počet osových souměrností lichý.

O množinách shodných zobrazení v rovině platí tyto věty:

a) *Množina* $\boldsymbol{G}$ *všech shodností v rovině je nekomutativní grupou vzhledem k operaci skládání. Neutrálním prvkem operace je identita.*

b) *Množina* $\boldsymbol{G}_1$ *všech přímých shodností v rovině je nekomutativní grupou vzhledem k operaci skládání. Neutrálním prvkem operace je identita.*

c) *Množina* $\boldsymbol{G}_2$ *všech posunutí a identity je komutativní grupou vzhledem k operaci skládání.*

Ověříme, zda jsou pro všechny uvedené množiny splněny vlastnosti grupy vzhledem k operaci skládání.

1. ad a) Složením shodných zobrazení vznikne shodné zobrazení, tedy prvek z $\boldsymbol{G}$.

ad b) Složením dvou přímých shodností vznikne přímá shodnost (průsvitka se neotáčí), tedy prvek z $\boldsymbol{G}_1$.

ad c) Složením dvou posunutí vznikne posunutí nebo identita.

2. Skládání shodných zobrazení je asociativní.

3. Neutrálním prvkem všech tří grup je identita (je to přímá shodnost).

4. Inverzním zobrazením ke každému shodnému zobrazení je zobrazení stejného typu.

K otočení kolem středu je inverzním prvkem otočení kolem téhož středu o úhel stejné velikosti opačného smyslu.

K translaci je inverzním prvkem translace téhož směru, ale opačného smyslu a stejné velikosti.

Osová a středová souměrnost a identita jsou inverzní k sobě:

$$\bar{\boldsymbol{O}} = \boldsymbol{O}$$
$$\bar{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}$$
$$\bar{\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{J}$$

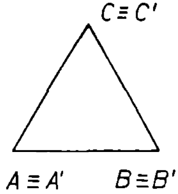
PŘÍKLAD 2,22

Najděte množinu $\boldsymbol{M}$ všech shodných zobrazení, které reprodukují daný rovnostranný trojúhelník, a dokažte, že $\boldsymbol{M}$ je grupa vzhledem k operaci skládání.

Je celkem šest shodných zobrazení, která reprodukují rovnostranný trojúhelník — je jich právě tolik, kolik je permutací tříprvkové množiny $\boldsymbol{M}' = \{A, B, C\}$, kde A,

B, C jsou vrcholy trojúhelníka. Každá z permutací určí jedno přemístění roviny:

1.

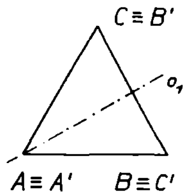


$$P_1 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{Bmatrix}$$

Rovnostranný trojúhelník se reprodukuje identitou J

Obr. 68a

2.

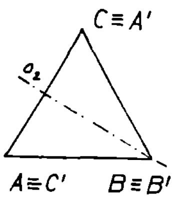


$$P_2 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{Bmatrix}$$

Rovnostranný trojúhelník se reprodukuje osovou souměrností O_1

Obr. 68b

3.

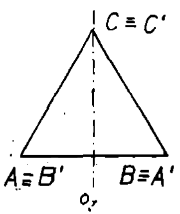


$$P_3 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{Bmatrix}$$

Rovnostranný trojúhelník se reprodukuje osovou souměrností O_2

Obr. 68c

4.

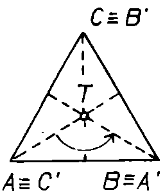


$$P_4 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{Bmatrix}$$

Rovnostranný trojúhelník se reprodukuje osovou souměrností O_3

Obr. 68d

5.

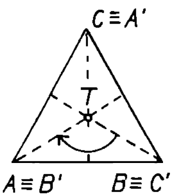


$$P_5 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ C & A & D \end{Bmatrix}$$

Rovnostranný trojúhelník se reprodukuje otáčením $\boldsymbol{R}_1$ se středem T o úhel $+\,120°$

Obr. 68e

6.



$$P_6 = \begin{Bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{Bmatrix}$$

Rovnostranný trojúhelník se reprodukuje otáčením $\boldsymbol{R}_2$ se středem v T o úhel $-\,120°$

Obr. 68f

Množina $\boldsymbol{M}$ má šest prvků $\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{J}, \boldsymbol{O}_1, \boldsymbol{O}_2, \boldsymbol{O}_3, \boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2\}$. Sestavíme si tabulku skládání shodných zobrazení v množině $\boldsymbol{M}$:

$x \ast y$	$x \diagdown y$	J	O_1	O_2	O_3	R_1	R_2
	J	J	O_1	O_2	O_3	R_1	R_2
	O_1	O_1	J	R_2	R_1	O_3	O_2
	O_2	O_2	R_1	J	R_2	O_1	O_3
	O_3	O_3	R_2	R_1	J	O_2	O_1
	R_1	R_1	O_2	O_3	O_1	R_2	J
	R_2	R_2	O_3	O_1	O_2	J	R_1

Podle tabulky si ověříme, zda množina $\boldsymbol{M}$ má všechny vlastnosti grupy:

1. Složíme-li dvě shodná zobrazení, která reprodukují rovnostranný trojúhelník, dostaneme shodné zobrazení, které ho rovněž reprodukuje.

2. Skládání shodných zobrazení je v množině **M** asociativní.

3. Neutrálním prvkem operace v množině **M** je identita.

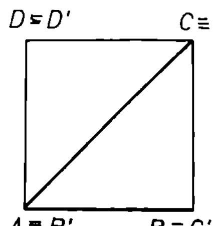
4. Ke každému shodnému zobrazení, které reprodukuje rovnostranný trojúhelník, existuje zobrazení inverzní, které ho rovněž reprodukuje.

5. Skládání shodných zobrazení není v množině **M** komutativní.

*Množina **M** všech shodných zobrazení, které reprodukují rovnostranný trojúhelník, je nekomutativní grupou vůči operaci skládání.*

PŘÍKLAD 2,23

Je dán čtverec $ABCD$. Najděte všechna shodná zobrazení, která jej reprodukují!



Obr. 69

V množině $\boldsymbol{M} = \{A, B, C, D\}$ existuje $4! = 24$ permutací. Snadno se však přesvědčíte, že pouze 8 z nich jsou přemístění. Zapíšeme si je:

$P_1 = \begin{Bmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{Bmatrix}$	Identita	$\boldsymbol{J}$
$P_2 = \begin{Bmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{Bmatrix}$	Osová souměrnost podle úhlopříčky AC	$\boldsymbol{O}_1$
$P_3 = \begin{Bmatrix} A & B & C & D \\ C & B & A & D \end{Bmatrix}$	Osová souměrnost podle úhlopříčky BD	$\boldsymbol{O}_2$
$P_4 = \begin{Bmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{Bmatrix}$	Osová souměrnost podle osy strany AB (CD)	$\boldsymbol{O}_3$
$P_5 = \begin{Bmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{Bmatrix}$	Osová souměrnost podle osy strany AD (BC)	$\boldsymbol{O}_4$
$P_6 = \begin{Bmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{Bmatrix}$	Středová souměrnost podle průsečíku úhlopříček	$\boldsymbol{S}$
$P_7 = \begin{Bmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{Bmatrix}$	Otočení kolem průsečíku úhlopříček o $\varphi_1 = +90°$	$\boldsymbol{R}_1$
$P_8 = \begin{Bmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{Bmatrix}$	Otočení kolem průsečíku úhlopříček o $\varphi_2 = -90°$	$\boldsymbol{R}_2$

Ostatní permutace vrcholů čtverce nejsou přemístění — snadno se přesvědčíme. (Obr. 69).

$$\boldsymbol{P} = \begin{Bmatrix} A & B & C & D \\ C & A & B & D \end{Bmatrix}$$

Kdyby byla tato permutace shodným zobrazením (přemístěním), které reprodukuje čtverec, zobrazila by se např. strana AB čtverce do jeho úhlopříčky $A'B' \equiv CA$ a to není možné, protože úhlopříčka čtverce je delší než jeho strana (shodné zobrazení zachovává velikost úseček).

Příklad 2,22 můžeme ještě doplnit otázkou, zda množina všech osmi shodných zobrazení, která reprodukují čtverec, je grupou vzhledem k operaci skládání. Sestavíme-li si tabulku podobně jako v příkladě 2,21, uvidíme, že všechny vlastnosti grupy jsou splněny a odpověď je kladná:

Množina všech shodných zobrazení, která reprodukují čtverec, je grupou vůči operaci skládání.

Cvičení

1. Ze všech permutací množiny $\boldsymbol{M} = \{A, B, C, D, F, F\}$, jejíž prvky tvoří vrcholy pravidelného šestiúhelníku, vyberte ty, které dostaneme přemístěním roviny, v níž šestiúhelník leží. Určete, o které shodné zobrazení se jedná, a rozhodněte, zda množina všech shodných zobrazení, která reprodukují pravidelný šestiúhelník, tvoří grupu vzhledem k operaci skládání.

2. $\boldsymbol{O}_1$ a $\boldsymbol{O}_2$ jsou osové souměrnosti s různými osami. Najděte osovou souměrnost $\boldsymbol{O}$ (pokud existuje), tak, aby platilo: $\boldsymbol{O}_1 * \boldsymbol{O}_2 = \boldsymbol{O} * \boldsymbol{O}_1$!

3. Je dáno pět osových souměrností, jejichž osy jsou navzájem různé rovnoběžky. Najděte zobrazení, které vznikne jejich postupným skládáním!

4. V rovině jsou dány dva různé body $A \neq B$. Všechny rotace, které zobrazí bod A do bodu $A' = B$, zobrazí bod B do bodu B'. Najděte geometrické místo všech takových bodů B'.

Návod: Uvažte, že všechny takové rotace můžeme rozložit na dvě osové souměrnosti; první z nich lze vždy volit tak, že její osa splyne s osou úsečky AB. Osa druhé souměrnosti musí pak vždy procházet bodem B a bude platit, že $BB' = AB$. Nezapomeňte vyšetřit zvláštní případy, kdy nevznikne rotace — $o_1 \parallel o_2$!