Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu

Výsledky cvičeni

In: Karel Hruša (author): Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 189–200.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403354

1. a) $y = 2x$ pro $x \geq 0$, $y = 0$ pro $x < 0$. b) $y = 2x - 1$ pro $x \geq 1$, $y = 1$ pro $0 \leq x < 1$, $y = 1 - 2x$ pro $x < 0$. c) $y = 5 - x$ pro $x \geq 1$, $y = 5x - 1$ pro $-1 \leq x < 1$, $y = x - 5$ pro $x < -1$. — **2.** a) Není definována pro $x = 2$ a pro $x = -2$. b) Není definována pro $x = 4$ a pro $x = -1$. c) Je definována. — **3.** První není definována pro a) $x = 0$, b) $x = -\frac{1}{2}$, c) $x = \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$, kdežto druhá ano. — **4.** a) $a_n = (-1)^{n-1}$. b) $a_n = \frac{1}{2}[1 - (-1)^n]$. c) $a_n = \dfrac{1}{n}$. — **5.** Rovnost může nastat, je-li buď $n = 1$, nebo $x = 0$. — **6.** a) $\left(\dfrac{1 + \dfrac{1}{n+1}}{1 + \dfrac{1}{n}}\right)^{n+1} = \left[1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} > 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{n}}$. b) $\left(\dfrac{1 + \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{1}{n+1}}\right)^{n+2} = \left[1 + \dfrac{1}{n(n+2)}\right]^{n+2} > 1 + \dfrac{1}{n}$. — **7.** a) Je-li $a \neq 0$, pro každé r, s; je-li $a = 0$ pro každé r a pro $s = 0$. b) Je-li $r \geq 0$, $s \geq 0$, pro každé a; je-li $r < 0$ nebo $s < 0$ (nebo obojí) pro $a \neq 0$. c) Je-li $r \geq 0$ pro každé a i pro každé b; je-li $r < 0$, pro $a \neq 0$, $b \neq 0$. d) Je-li $r \geq 0$, pro každé a a pro $b \neq 0$; je-li $r < 0$ pro $a \neq 0$, $b \neq 0$. e) Pro každé r. f) Pro $r \neq 0$. — **8.** a) $y = \pi x : 180$. b) $180 : \pi \doteq 57°17'45''$. — **9.** a) Definována pro každé x, hodnoty 0 nabývá pro $x = -a + k\pi$, hodnoty 1 pro $x = \frac{1}{2}\pi - a + 2k\pi$, hodnoty -1 pro $x = \frac{3}{2}\pi - a + 2k\pi$, k celé. b) Definována pro každé x, hodnoty 0 nabývá pro $x = k\pi : a$, hodnoty 1 pro $x = (1 + 4k)\,\pi : 2a$, hodnoty -1 pro $x = (3 + 4k)\,\pi : 2a$, k celé. c) Definována pro každé x, hodnoty 0 nabývá pro $x = \pm\sqrt{k\pi}$, hodnoty 1 pro $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 + 4k)\,\pi}$, hodnoty -1 pro $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(3 + 4k)\,\pi}$, $k \geq 0$ celé. d) Definována pro $x \neq 0$, hodnoty 0 nabývá pro $x = 1 : k\pi$, $k \neq 0$ celé, hodnoty 1 nabývá pro $x = 2 : (1 + 4k)\,\pi$, hodnoty -1 pro $x = 2 : (3 + 4k)\,\pi$, k celé. e) Definována pro $x \neq k\pi$, hodnoty 0 nenabývá, hodnoty 1 nabývá pro $x = \frac{1}{2}(1 + 4k)\,\pi$, hodnoty -1 pro $x = \frac{1}{2}(3 + 4k)\,\pi$, k celé. — **10.** a) $-\operatorname{tg} x$ pro $x \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\,\pi$; $-1 : \operatorname{tg} x$ pro $x \neq \frac{1}{2}k\pi$; $1 : \operatorname{tg} x$ pro $x \neq \frac{1}{2}k\pi$; $\operatorname{tg} x$ pro $x \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\,\pi$; $-\operatorname{tg} x$ pro $x \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\,\pi$, k celé. b) $x_1 \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\,\pi$, $x_2 \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\,\pi$, $x_1 + x_2 \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\,\pi$; $x \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\,\pi$, $x \neq \frac{1}{4}(2k + 1)\,\pi$; $x \neq (2k + 1)\,\pi$; $x \neq k\pi$, k celé.

11. Pro $|x| \neq 1$ je $\dfrac{x^2 - 1}{|x| - 1} = |x| + 1$. Nechť $1 \leq p < 2 < q$. Pak pro $p - 1 < x < q - 1$ je $p < x + 1 < q$ a pro $-p + 1 > x > > -q + 1$ je $p < -x + 1 < q$. — **12.** Zvolme libovolné $k > 0$. Pak a) pro $x > 1 : \sqrt{k}$ nebo pro $x < -1 : \sqrt{k}$ je $1 : x^2 < k$; b) pro $-1 : : \sqrt{k} < x < 1 : \sqrt{k}$ je $1 : x^2 > k$. — **13.** Zvolme libovolné $k > 0$. Pak a) pro $x > \sqrt{k}$ nebo pro $x < -\sqrt{k}$ je $x^2 > k$; b) pro $x > \sqrt[3]{k}$ je $x^3 > k$ a pro $x < -\sqrt[3]{k}$ je $x^3 < -k$. — **14.** a) Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Pak $\left|\frac{ax + b}{cx + d} - \frac{a}{c}\right| = \frac{|bc - ad|}{|c(cx + d)|} < \varepsilon$, když buď $bc - ad = 0$, nebo $x > > \frac{|bc - ad|}{c^2\varepsilon} - \frac{d}{c}$, nebo $x < -\frac{|bc - ad|}{c^2\varepsilon} - \frac{d}{c}$. b) Předpokládejme, že $c > 0$. (Kdyby tomu tak nebylo, změníme znaménko čitatele i jmenovatele.) Zvolme libovolné $k > \frac{a}{c}$; pak $\frac{ax + b}{cx + d} > k$, když $-\frac{d}{c} < < x < -\frac{d}{c} + \frac{bc - ad}{c(ck - a)}$. Zvolme libovolné $k < \frac{a}{c}$; pak $\frac{ax + b}{cx + d} < k$, když $-\frac{d}{c} - \frac{bc - ad}{c(a - ck)} < x < -\frac{d}{c}$. — **15.** a) Je-li $p < a < q$ a jestliže pro $x \neq a$ platí $p < x < q$ a padne-li pro tato x hodnota $f(x)$ do jistého intervalu J_y, pak $p - a < x - a < q - a$, při čemž $p - a < < 0 < q - a$ a hodnota $f(x) = f[(x - a) + a]$ padne do téhož intervalu J_y a obráceně. b) Jestliže hodnota $f(x)$ padne do jistého intervalu J_y pro všecka $x > k$, pak hodnota $f(x) = f[(x - a) + a]$ padne do téhož intervalu pro všecka $x - a > k - a$ a obráceně. c) Jestliže pro všecka x z jistého intervalu J_x platí $|f(x)| > k > 0$, pak $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{k}$ a obráceně. — **16.** Jestliže v J_x platí $|f(x)| < m$, $|g(x)| < n$, pak $|f(x) \pm g(x)| \leqq |f(x)| + |g(x)| < m + n$, $|f(x) . g(x)| = |f(x)| . |g(x)| < < mn$. — **17.** Je-li $|f(x) - b| < \varepsilon$ pro všecka $x \neq a$ z nějakého okolí J_x, pak také $||f(x)| - |b|| \leqq |f(x) - b| < \varepsilon$. Obrácená věta neplatí (viz příklad 8). — **18.** Jestliže pro všecka $x \neq a$ z J_x platí $|f(x)| < \varepsilon$, pak také $|g(x)| < \varepsilon$. — **19.** Kdyby platilo $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$, pak by ke každému $\varepsilon > 0$ existovalo takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x by bylo $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$ čili $|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$. — **20.** Písmena J_x, J'_x atd. značí vesměs buď pravé, nebo levé okolí.

21. Je spojitá. — **22.** Funkce $\sin \frac{1}{x}$ nabývá v každém okolí bodu 0 hodnoty 1 i hodnoty -1 (viz cvič. 9d). Volíme-li za J_y třeba interval $(k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$, aspoň jedna z hodnot $1, -1$ do něho nepadne. —

23. $k = \lim\limits_{x\to 0}(x \sin\frac{1}{x})$, ale v okolí bodu 0 je funkce $\varphi(x) = x$ nekonečně malá a $\sin\frac{1}{x}$ omezená. Proto $k = 0$. — **24.** a) Pro $x = k\pi$, k celé. b) Pro $x = 0$ a pro $x = 1$. — **25.** a) $(\frac{1}{2}(2k - 1)\pi, \frac{1}{2}(2k + 1)\pi)$, b) $(k\pi, (k + 1)\pi)$, k celé. — **26.** a) 1. b) $\frac{4}{3}$. c) 6. — **27.** a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\,.\,5\right) = 5$. b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\,.\,\frac{1}{\cos x}\right) = 1$. c) $1 - \sin x = \sin\frac{1}{2}\pi - \sin x = 2\cos\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + x)\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - x)$, proto $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}\pi}\frac{1 - \sin x}{\frac{1}{2}\pi - x} = 0$. — **28.** a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2 + x - 2}{1 - x^3} = -1$. b) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}\pi}\frac{\sin x - \cos x}{1 - \mathrm{tg}\,x} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{4}\pi}\frac{\cos x(\sin x - \cos x)}{\cos x - \sin x} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n + 1)}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$. — **29.** Je-li $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, je také $||f(x)| - |f(a)|| \leqq |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. — **30.** Může, je-li na příklad $g(x) = \varphi(x) - f(x)$, kde $\varphi(x)$ je spojitá v bodě a.

31. a) $6x - 2$. b) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. c) $4x^3 + 3x^2 - 2x + 11$. d) $-\frac{\sqrt{5}}{x^2}$, $x \neq 0$. e) $\frac{4a^2x}{(a^2 - x^2)^2}$, $x \neq a$, $x \neq -a$. f) $\frac{x^2 - 6x + 7}{(x - 3)^2}$, $x \neq 3$. g) $\frac{-2x - a - b}{(x - a)^2(x - b)^2}$, $x \neq a$, $x \neq b$. h) $\frac{2(x - 1)}{(1 + x)^3}$, $x \neq -1$. i) $\mathrm{tg}^2 x$, $x \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$, k celé. j) $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$, k celé. k) $2x\sin x + x^2\cos x$. l) $2\cos 2x$. m) $\frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$, $x \neq \frac{1}{2}(4k + 1)\pi$, k celé. n) $\frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$, $x \neq \frac{1}{4}(4k + 1)\pi$, $x \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$, k celé. — **32.** a) $-1 : x^2$ pro $x > 0$, $1 : x^2$ pro $x < 0$. b) 2 pro $x > 0$, 0 pro $-1 < x < 0$, -2 pro $x < -1$. c) $\frac{-2}{(x - 1)^2}$ pro $x > 1$ a pro $x < -1$, $\frac{2}{(x - 1)^2}$ pro $-1 < x < 1$. — **33.** a) $v = c - gt$. b) $t = c : g$, $s = c^2 : 2g$. c) $t = 2c : g$, $v = -c$. — **34.** a) $x = 2k\pi$, $\mathrm{tg}\,\alpha = 1$; $x = (2k + 1)\pi$, $\mathrm{tg}\,\alpha = -1$, k celé. b) $x = k\pi$, $\mathrm{tg}\,\alpha = 1$. c) $x = 0$, $\mathrm{tg}\,\alpha = -1$; $x = 1$ a $x = -1$, $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$. — **35.** 1. Pro $n = 1$ je $(k_1u_1)' = k_1u_1'$. 2. Jestliže $v = k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n$, při čemž $v' = k_1u_1' + k_2u_2' + \ldots + k_nu_n'$, pak $(v + k_{n+1}u_{n+1})' = v' + k_{n+1}u_{n+1}'$. — **36.** a) 1. Pro $n = 1$ vzorec platí. 2. $[f^{n+1}(x)]' = [f^n(x)\,.\,f(x)]' = [f^n(x)]'\,.\,f(x) +$

$+ f^n(x) \,.\, f'(x)$. b) Je-li $m = -n$, pak $[f^n(x)]' = \left[\frac{1}{f^m(x)}\right]' =$
$= \frac{-mf^{m-1}(x) \,.\, f'(x)}{f^{2m}(x)} = -mf^{-m-1}(x) \,.\, f'(x)$, pokud $f(x) \neq 0$. c) $\sin 2x$;
$\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$, $x \neq \frac{1}{2}(2k+1)\,.\,\pi$; $46(1+2x)^{22}$. — **37.** 1. Pro $n = 1$ vzorec platí. 2. Označme $u_1 u_2 \ldots u_n = v$. Je-li $\frac{v'}{v} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \ldots + \frac{u_n'}{u_n}$, je $\frac{(vu_{n+1})'}{vu_{n+1}} = \frac{v'u_{n+1} + vu_{n+1}'}{vu_{n+1}} = \frac{v'}{v} + \frac{u_{n+1}'}{u_{n+1}}$. Pro $u_1 = u_2 = \ldots = u_n =$
$= f(x)$ máme $\frac{[f^n(x)]'}{f^n(x)} = \frac{n\, f'(x)}{f(x)}$. — **38.** Je-li $f(-x) = f(x)$, je $\lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$; je-li $f(-x) =$
$= -f(x)$, je $\lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$. — **39.** a)
Rostoucí pro $x > \frac{1}{3}\sqrt{3}$ a pro $x < -\frac{1}{3}\sqrt{3}$, klesající pro $-\frac{1}{3}\sqrt{3} < x < \frac{1}{3}\sqrt{3}$, maximum pro $x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$, minimum pro $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. b) Rostoucí pro $x > 1$ a pro $-1 < x < 0$, klesající pro $0 < x < 1$ a pro $x < -1$, maximum pro $x = 0$, minimum pro $x = 1$ a pro $x = -1$. c) Rostoucí pro $x < 0$, klesající pro $x > 0$, maximum pro $x = 0$. d) Rostoucí pro $-1 < x < 1$, klesající pro $x > 1$ a pro $x < -1$, minimum pro $x = -1$. e) Rostoucí pro $x > 1$, klesající pro $x < -1$, konstantní pro $-1 \leq x \leq 1$. f) Rostoucí pro každé x. g) Rostoucí pro $\frac{1}{2}k\pi < x < \frac{1}{2}(k + \frac{1}{2})\,\pi$, klesající pro $\frac{1}{2}(k - \frac{1}{2})\,\pi < x < \frac{1}{2}k\pi$, maximum pro $x = \frac{1}{4}(2k+1)\,\pi$, minimum pro $x = \frac{1}{2}k\pi$, k celé. — **40.** a) $\sin x -$
$- \sin 0 = (x - 0)\,.\,\cos\xi < x$. b) $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 0 = (x - 0)\,.\,\frac{1}{\cos^2 \xi} > x$.

41. a) Označme $\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} f(x)\,dx = I$, $\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} k\, f(x)\,dx = I'$, $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = K$, $\int_{\underline{a}}^{b} k\, f(x)\,dx = K'$. D budiž rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Horní a dolní součet příslušný k funkci $f(x)$ označme $S(D)$ a $s(D)$; horní a dolní součet příslušný k funkci $k\, f(x)$ označme $S'(D)$ a $s'(D)$. 1. Pro $k = 0$ je $S'(D) = 0$, $k\, S(D) = 0$ pro každé D. Proto $I' = kI = 0$. Podobně $s'(D) = 0$, $k\, s(D) = 0$ pro každé D. Proto $K' = kK = 0$. 2. Pro $k > 0$ je $S'(D) = k\, S(D)$, $s'(D) = k\, s(D)$. Proto $I' = kI$, $K' = kK$. 3. Pro $k < 0$ je $S'(D) = k\, s(D)$, $s'(D) = k\, S(D)$. Proto $I' = kK$, $K' = kI$. b) Je-li $I = K$, je $kI = kK$ a tedy $I' = K'$. — **42.** a) Označme $\overline{\int_a^b}[f(x) + g(x)]\,dx = I$, $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = I_1$, $\overline{\int_a^b} g(x)\,dx = I_2$; stejně tvořené dolní integrály označme K, K_1, K_2. Horní součty příslušné k funkcím $f(x) + g(x)$, $f(x)$, $g(x)$ označme $S(D)$, $S_1(D)$, $S_2(D)$, podobně dolní součty příslušné k týmž funkcím označíme $s(D)$, $s_1(D)$, $s_2(D)$. Platí $S(D) \leqq S_1(D) + S_2(D)$ pro každé D, neboť je-li M_k, M_k', M_k'' supremum funkcí $f(x) + g(x)$, $f(x)$, $g(x)$ v k-tém dílčím intervalu $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$, je $M_k \leqq M_k' + M_k''$ (dosáhnou-li obě funkce svého suprema v témž bodě intervalu $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$, je $M_k = M_k' + M_k''$; dosáhnou-li ho v různých bodech, je $M_k < M_k' + M_k''$). Proto $I \leqq I_1 + I_2$. Podobně pro dolní součty platí $s(D) \geqq s_1(D) + s_2(D)$ a odtud $K \geqq K_1 + K_2$. b) Poněvadž $I_1 + I_2 \geqq I \geqq K \geqq K_1 + K_2$, proto pro $I_1 = K_1$, $I_2 = K_2$ dostáváme $I = K$. — **43.** Užijeme výsledku cvičení 41b a 42b. — **44.** Označme $\int_a^b f(x)\,dx = I$. Poněvadž I je infimum horních součtů, existuje takové rozdělení D_1, že $S(D_1) < I + \frac{1}{2}\varepsilon$. Poněvadž I je zároveň supremum dolních součtů, existuje takové rozdělení D_2, že $s(D_2) > I - \frac{1}{2}\varepsilon$. Je-li D společné zjemnění rozdělení D_1 a D_2, je $S(D) \leqq S(D_1)$, $s(D) \geqq s(D_2)$, takže $S(D) < I + \frac{1}{2}\varepsilon$, $s(D) > I - \frac{1}{2}\varepsilon$. Odtud $S(D) - s(D) < \varepsilon$. — **45.** Je-li $g(x) = 0$ pro každé x z intervalu $\langle a, b\rangle$, je $S(D) = 0$, $s(D) = 0$ pro každé rozdělení D, takže $\int_a^b 0\,dx = 0$. Pak podle věty 34 $\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b 0\,dx = 0$. — **46.** Podle věty 34 je $\int_b^a f(x)\,dx \leqq \int_b^a g(x)\,dx$ čili $-\int_a^b f(x)\,dx \leqq -\int_a^b g(x)\,dx$. — **47.** Je-li funkce f spojitá v $\langle a, b\rangle$, existuje $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (věta 33), která je spojitá v $\langle a, b\rangle$ (věta 37), při čemž $F'(x) = f(x)$ (věta 38). Vedle toho $F(a) = 0$. Podle věty o přírůstku funkce tedy existuje v $\langle a, b\rangle$ vnitřní bod c tak, že $F(b) - F(a) = (b - a) \,.\, F'(c)$. — **48.** Je-li $a < b$ je $\int_a^x f(t)\,dt = \int_c^a f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt$, je-li $a > b$, je $\int_c^x f(t)\,dt = \int_c^b f(t)\,dt + \int_b^x f(t)\,dt$. Na poslední integrály v obou rovnicích užijeme vět 37 a 38. — **49.** Platí $\int_x^c f(t)\,dt = -\int_c^x f(t)\,dt$. Dále podle cvič. 48. —

50. $\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_c^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_c^a f(t)\,\mathrm{d}t.$

51. a) $\frac{1}{5}x^5$ v intervalu $(-\infty, \infty)$. b) $-\frac{1}{2x^2}$ v int. $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. c) $\frac{3}{2}x^2 - 2x$ v int. $(-\infty, \infty)$. d) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$ v int. $(-\infty, \infty)$. e) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5$ v int. $(-\infty, \infty)$. f) $\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x$ v int. $(-\infty, \infty)$. g) $x + \frac{2}{x}$ v int. $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. h) $x - \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}$ v int. $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Integrační konstanty jsou všude vynechány. — **52.** a) $-a\cos x + b\sin x$ v intervalu $(-\infty, \infty)$. b) $\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}x$ v int. $(\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$. c) $-\mathrm{cotg}x - x$ v int. $(k\pi, (k+1)\pi)$. d) $2x - \mathrm{tg}x$ v int. $(\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$. e) $-2\,\mathrm{cotg}2x$ v int. $(\frac{1}{2}k\pi, \frac{1}{2}(k+1)\pi)$. k značí celé číslo, integrační konstanty vynechány. — **53.** a) $x\sin x + \cos x$. b) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x$. c) $3(x^2-2)\sin x - x(x^2-6)\cos x$. d) $\frac{1}{2}(x + \sin x\cos x)$. e) $\frac{1}{2}\sin^2 x$. f) $-\frac{1}{3}(\sin^2 x + 2)\cos x$. Vesměs v intervalu $(-\infty, \infty)$; integrační konstanty vynechány. — **54.** $u = x^n$, $v' = \sin x$, resp. $u = x^n$, $v' = \cos x$. — **55.** $u = \sin^{n-1}x$, $v' = \sin x$, resp. $u = \cos^{n-1}x$, $v' = \cos x$. — **56.** a) $3x^3 - 6x^2 + 4x + 7$. b) $3x^3 - 6x^2 + 4x - 32$. — **57.** Lze užít buď úplné indukce s pomocí vzorce (34), nebo výsledku cvič. 35. — **59.** $s = \frac{1}{2}at^2 + c$, a je konstanta úměrnosti a c integrační konstanta. — **60.** a) $y = x^2$. b) $y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}$.

61. a) $10x(x^2-1)^4$. b) $\frac{-3(2x-1)}{(x^2-x-2)^4}$, $x \neq 2$, $x \neq -1$. c) $-3\sin 3x$. d) $-3\cos^2 x\sin x$. e) $-3x^2\sin x^3$. f) $\sin(a-2x)$. g) $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$, $x \neq \frac{1}{2}(2k+1)\pi$, k celé. h) $\frac{2}{\cos^2 2x}$, $x \neq \frac{1}{4}(2k+1)\pi$, k celé. — **62.** a) $an(ax+b)^{n-1}$ při $n > 0$ pro každé x, při $n \leq 0$ pro $x \neq -\frac{b}{a}$. b) $x^{m-1}(1-x)^{n-1}(m - mx - nx)$ při $m > 0$, $n > 0$ pro každé x, při $m \leq 0$, $n > 0$ pro $x \neq 0$, při $m > 0$, $n \leq 0$ pro $x \neq 1$, při $m \leq 0$, $n \leq 0$ pro $x \neq 0$, $x \neq 1$. c) $\frac{2m(1+x^m)(x^{m-1}-x)}{(1+x^2)^{m+1}}$ při $m > 0$ pro každé x, při $m \leq 0$ pro $x \neq 0$. d) $an\sin^{n-1}(ax+b)\cos(ax+b)$ při $n > 0$ pro každé x, při $n \leq 0$ pro $x \neq \frac{k\pi - b}{a}$, k celé. — **64.** a) $v = a\omega\cos(\omega t + k)$. b) $s = \pm a$. — **66.** a) $-\frac{1}{30}(3-2x^2)^5$ v int. $(-\infty, \infty)$. b) $-\frac{1}{2(x^2-1)}$ v int. $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$. c) $\frac{1}{3}\sin^3 x$ v int. $(-\infty,$

∞). d) $-\frac{1}{4}\cos^4 x$ v int. $(-\infty, \infty)$. e) $\frac{1}{\cos x}$ v int. $(\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, k celé. f) $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$ v int. $(-\infty, \infty)$. g) $\frac{1}{8}\cos^8 x - \frac{1}{6}\cos^6 x$ v int. $(-\infty, \infty)$. h) $-\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x}$ v int. $(k\pi, (k+1)\pi)$, k celé. —

67. a) $\frac{1}{4a}(ax+b)^4$ v intervalu $(-\infty, \infty)$. b) $\frac{1}{a-x}$ v int. $(-\infty, a)$, (a, ∞). c) $-\frac{1}{2}\cos 2x$ v int. $(-\infty, \infty)$. d) $\frac{1}{3}\sin(3x-5)$ v int. $(-\infty, \infty)$. e) $\frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x$ v int. $(\frac{1}{6}(2k-1)\pi, \frac{1}{6}(2k+1)\pi)$, k celé. f) $-\frac{1}{4}\operatorname{cotg}(4x+1)$ v int. $(\frac{1}{4}(k\pi-1), \frac{1}{4}[(k+1)\pi-1])$, k celé. g) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ v int. $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, k celé. — **68.** a) $-\frac{1}{4}$. b) $\frac{1}{4}$. c) $\frac{1}{3}$. d) $\frac{2}{3}$. e) $\frac{1}{4}$.

71. $\frac{1}{x}$ pro $x > 0$ nebo pro $x < 0$. b) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ nebo $\frac{1}{-\sqrt{x}}$ pro $x > 0$. c) $\sqrt{1-x^2}$ nebo $-\sqrt{1-x^2}$ pro $0 \leqq x \leqq 1$. d) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ nebo $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ pro $0 < x \leqq 1$. e) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ pro každé x. — **72.** Má-li být funkce inversní totožná s původní funkcí $f(x)$, musí být graf funkce $f(x)$ souměrný podle přímky, která půlí úhel souřadnicových os. — **73.** a) $x = k\pi + \operatorname{arctg} a$. b) $x = 2k\pi \pm \arccos a$. c) $x = k\pi + \operatorname{arccotg} a$, k celé. — **74.** a) Je-li $\arcsin x = y$, je $x = \sin y$. Pak $\cos y = \cos(-y) = \sqrt{1-x^2} \geqq 0$. Je-li $x \geqq 0$, je $y \geqq 0$ a $y = \arccos\sqrt{1-x^2}$. Je-li $x \leqq 0$, je $y \leqq 0$ a $-y = \arccos\sqrt{1-x^2}$. b) Je-li $\arcsin x = y$, je $x = \sin y$. Pak $\operatorname{tg} y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. c) Je-li $\operatorname{arctg} x = y$, je $x = \operatorname{tg} y$. Pak $\sin y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $y = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. d) Je-li $\arcsin x = y$, je $x = \sin y$, $-x = \sin(-y)$, $-y = \arcsin(-x)$. e) Je-li $\operatorname{arctg} x = y$, je $x = \operatorname{tg} y$, $-x = \operatorname{tg}(-y)$, $-y = \operatorname{arctg}(-x)$. f) Je-li $\arccos x = y$, je $x = \cos y$, $-x = \cos(\pi - y)$, $\pi - y = \arccos(-x)$. g) Je-li $\operatorname{arccotg} x = y$, je $x = \operatorname{cotg} y$, $-x = \operatorname{cotg}(\pi - y)$, $\pi - y = \operatorname{arccotg}(-x)$. — **75.** a) Je-li $\arcsin x_1 = y_1$, $\arcsin x_2 = y_2$, je $\sin y_1 = x_1$, $\sin y_2 = x_2$, $\sin(y_1+y_2) = \sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2 = x_1\sqrt{1-x_2^2} + x_2\sqrt{1-x_1^2}$ i co do znaménka (viz cvič. 74a). Označme $x_1\sqrt{1-x_2^2} + x_2\sqrt{1-x_1^2} = z$. Je-li $|y_1+y_2| \leqq \frac{1}{2}\pi$, je $y_1 + y_2 = \arcsin z$. Pak $\cos(y_1+y_2) \geqq 0$, t. j. $\sqrt{1-x_1^2}\,.\,\sqrt{1-x_2^2} \geqq x_1x_2$. To nastane, když buď $x_1x_2 \leqq 0$, nebo když $x_1^2 + x_2^2 \leqq 1$. Je-li $y_1 + y_2 > \frac{1}{2}\pi$, je $\pi - y_1 - y_2 < \frac{1}{2}\pi$ a $\sin(\pi - y_1 - y_2) = z$, takže $y_1 + y_2 = \pi - \arcsin z$. Je-li $y_1 + y_2 < -\frac{1}{2}\pi$, je $-y_1 - y_2 - \pi > -\frac{1}{2}\pi$ a $\sin(-y_1 - y_2 - \pi) = z$, takže $y_1 + y_2 = -\pi - \arcsin z$. V obou posledních případech je $\cos(y_1 + y_2) < 0$, t. j. $\sqrt{1 - x_1^2} \cdot \sqrt{1 - x_2^2} < x_1x_2$. To nastane, když $x_1^2 + x_2^2 > 1$ a čísla x_1, x_2 jsou buď obě kladná, nebo obě záporná. b) Je-li $\operatorname{arctg} x_1 = y_1$, $\operatorname{arctg} x_2 = y_2$, je $\operatorname{tg} y_1 = x_1$, $\operatorname{tg} y_2 = x_2$, $\operatorname{tg}(y_1 + y_2) = \dfrac{\operatorname{tg} y_1 + \operatorname{tg} y_2}{1 - \operatorname{tg} y_1 \operatorname{tg} y_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{1 - x_1x_2}$. Označme $\dfrac{x_1 + x_2}{1 - x_1x_2} = z$. Je-li $|y_1 + y_2| < \frac{1}{2}\pi$, je $y_1 + y_2 = \operatorname{arctg} z$. Pak $\cos(y_1 + y_2) > 0$. To nastane, když $\operatorname{tg} y_1 \operatorname{tg} y_2 < 1$ (neboť $\cos y_1 > 0$, $\cos y_2 > 0$) čili $x_1x_2 < 1$. Je-li $y_1 + y_2 > \frac{1}{2}\pi$, je $y_1 + y_2 - \pi > -\frac{1}{2}\pi$ a $\operatorname{tg}(y_1 + y_2 - \pi) = z$, takže $y_1 + y_2 = \operatorname{arctg} z + \pi$. Je-li $y_1 + y_2 < -\frac{1}{2}\pi$, je $y_1 + y_2 + \pi < \frac{1}{2}\pi$ a $\operatorname{tg}(y_1 + y_2 + \pi) = z$, takže $y_1 + y_2 = \operatorname{arctg} z - \pi$. V obou posledních případech je $\cos(y_1 + y_2) < 0$. To nastane, když $x_1x_2 > 1$ a čísla x_1, x_2 jsou buď obě kladná, nebo obě záporná. — **76.** a) $7 : 8\sqrt[8]{x}$, $x > 0$. b) $\dfrac{3}{2\sqrt{3x+5}}$, $x > -\frac{5}{3}$. c) $\dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $-1 < x < 1$. d) $\dfrac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. e) $\dfrac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, $x > 0$. f) $\dfrac{1}{a^2 + x^2}$. g) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $-|a| < x < |a|$. h) $\dfrac{2 \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $-1 < x < 1$. i) $\dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ pro $0 < x < 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ pro $-1 < x < 0$. j) $\dfrac{-1}{x^2 + 1}$, $x \neq 1$. k) $\dfrac{2}{1 + x^2}$ pro $|x| < 1$, $\dfrac{-2}{1 + x^2}$ pro $|x| > 1$. l) $\dfrac{1}{(1 - x)\sqrt{-x}}$, $x < 0$. —

77. a) Definována pro $x \geqq 1$ a $x \leqq -1$, klesající pro všecka x, pro něž je $x > 1$ nebo $x < -1$. b) Definována pro $x \geqq 1$ a $x \leqq -1$, rostoucí pro všecka $x > 1$ nebo $x < -1$. c) Definována pro všecka $x \neq 0$, klesající pro každé $x \neq 0$. d) Definována pro každé $x \neq 0$, rostoucí pro každé $x \neq 0$. e) Definována pro každé x, $y = x - 2k\pi$ pro $2k\pi \leqq x \leqq (2k + 1)\pi$, $y = -x + 2k\pi$ pro $(2k - 1)\pi \leqq x \leqq 2k\pi$. f) Definována pro každé x; $y = x - \frac{1}{2}(4k - 1)\pi$ pro $(2k - 1)\pi \leqq x \leqq 2k\pi$; $y = -x + \frac{1}{2}(4k + 1)\pi$, $2k\pi \leqq x \leqq (2k + 1)\pi$. g) Definována pro $x \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$; $y = x - k\pi$ pro $\frac{1}{2}(2k - 1)\pi < x < \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$. h) Definována pro $x \neq k\pi$; $y = -x + \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$ pro $k\pi < x < (k + 1)\pi$. k značí vesměs číslo celé. — **78.** a) $\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}$ v intervalu $(0, \infty)$. b) $\frac{2}{9}(3x + 2)\sqrt{3x + 2}$ v int. $(-\frac{2}{3}, \infty)$. c) $-\sqrt{5 - x^2}$ v int. $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$. d) $\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{5}}$ v int. $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$. e) $\frac{2}{9}(x^3 + 1)\sqrt{x^3 + 1}$ v int. $(-1, \infty)$. f) $\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$ v int. $(-1, 1)$. g) $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2$

v int. $(-\infty, \infty)$. h) $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}x\right)$ v int. $(-\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$ (substituce $\operatorname{tg}x = z\sqrt{2}$). i) $\frac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}$ v int. $(-a, a)$ (substituce $x = a\sin t$). j) $\arcsin(x-1)$ v int. $(0, 2)$ (substituce $x - 1 = z$). — **79.** a) $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}x$ v int. $(-\infty, \infty)$. b) $x \,.\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ v int. $(-1, 1)$. c) $\frac{1}{4}(2x^2-1)\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$ v int. $(-1, 1)$. d) $\frac{1}{2}x\sqrt{3-2x^2} + \frac{3}{4}\sqrt{2}\arcsin\frac{1}{3}x\sqrt{6}$ v int. $(-\frac{1}{2}\sqrt{6}, \frac{1}{2}\sqrt{6})$. e) $\frac{1}{4}(2x+5)\sqrt{6-5x-x^2} + \frac{49}{8}\arcsin\frac{2x+5}{7}$ v int. $(-6, 1)$. — **80.** a) $\frac{m}{m+n}$. b) $\frac{1}{18}\pi\sqrt{3}$. c) $|a|(1-\frac{1}{2}\sqrt{3})$. d) $\frac{1}{3}\pi$. e) $\frac{1}{4}\pi a^2$.

81. a) Je-li $\log_a b = p, \log_b a = q$, je $a^p = b, b^q = a$; odtud $a^{pq} = a$. b) Je-li $\log_a b = p$, $\log_b c = q$, $\log_c a = r$, je $a^p = b$, $b^q = c$, $c^r = a$; odtud $a^{pqr} = b^{qr} = c^r = a$. c) Podle a) a b) je $\log_a c = 1 : \log_c a = \log_a b \,.\, \log_b c$. d) Je-li $\log_a c = p$, $\log_b c = q$, $\log_{ab} c = r$, je $a^p = c$, $b^q = c$, $(ab)^r = c$, čili $a^r b^r = c$; odtud $a^{pqr} \,.\, b^{pqr} = c^{pq}$, čili $c^{qr} \,.\, c^{pr} = c^{pq}$, $c^{(p+q)r} = c^{pq}$. — **82.** Je-li $0 < x_1 < x_2$, je $\lg x_1 < \lg x_2$. a) Je-li $a > 1$, je $\lg a > 0$, takže $\frac{\lg x_1}{\lg a} < \frac{\lg x_2}{\lg a}$ a $x_1 \lg a < x_2 \lg a$, čili $\lg a^{x_1} < \lg a^{x_2}$. b) Je-li $a < 1$, je $\lg a < 0$, takže $\frac{\lg x_1}{\lg a} > \frac{\lg x_2}{\lg a}$ a $x_1 \lg a > x_2 \lg a$. — **83.** Je-li $1 \leqq t \leqq 1 + \frac{1}{n}$, je $\frac{n}{n+1} \leqq \frac{1}{t} \leqq 1$. a) $\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$

$$= n\lg\left(1+\frac{1}{n}\right) = n\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{dt}{t} \leqq n\int_1^{1+\frac{1}{n}} dt = 1;\ \lg\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} =$$

$$= (n+1)\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{dt}{t} \geqq (n+1)\,.\,\frac{n}{n+1}\int_1^{1+\frac{1}{n}} dt = 1.$$

b) Poněvadž $\lg e = 1$, z nerovností v a) plyne $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqq e \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Odtud $e : \left(1+\frac{1}{n}\right) \leqq \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqq e$; proto $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (věta 13 a definice limity). c) Pak $e^x : \left(1+\frac{1}{n}\right)^x \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} \leqq e^x$. Dosadíme-li $nx = m$, $n = \frac{m}{x}$, je e^x: $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^x \leqq \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \leqq e^x$ a $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x$. — **84.** a) Podle vzorce (42). b) Substitucí $g(x) = t$. — **85.** a) $\lg x$, $x > 0$. b) $\frac{2}{\sin 2x}$, $k\pi < x < (k + \frac{1}{2})\pi$. c) $\frac{2x + 1}{x(x + 1)}$, $x > 0, x < -1$. d) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$, je-li $a > 0$ pro každé x, je-li $a < 0$ pro $|x| > \sqrt{-a}$. e) $\frac{1}{x^2 - 1}$, $-1 < x < 1$. f) $\frac{1}{x \lg x}$, $x > 1$. g) $\frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$. h) $2e^x \sin x$. i) $x^{\sin x}\left(\frac{1}{x}\sin x + \lg x \cos x\right)$, $x > 0$. j) $\frac{2}{(1 + x)^2}\left(1 + \lg\frac{1 - x}{1 + x}\right)\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^{\frac{1-x}{1+x}}$, $-1 < x < 1$. — **86.** a) $\lg|x + 1|$ v int. $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$. b) $x + 2\lg|x - 1|$ v int. $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$. c) $\frac{1}{3}\lg|3x + 2|$ v int. $(-\infty, -\frac{2}{3})$, $(-\frac{2}{3}, \infty)$. d) $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4\lg|x - 2|$ v int. $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$. e) $\lg(x^2 + 1)$ v int. $(-\infty, \infty)$. f) $-\lg|\cos x|$ v int. $(\frac{1}{2}(2k - 1)\pi, \frac{1}{2}(2k + 1)\pi)$, k celé. g) $\lg|\lg x|$ v int. $(0, 1)$, $(1, \infty)$. h) $\frac{1}{2}\lg^2 x$ v int. $(0, \infty)$. i) $-e^{-x}$ v int. $(-\infty, \infty)$. j) $\frac{-1}{e^x + 1}$ v int. $(-\infty, \infty)$. k) $\frac{1}{4}x^2(2\lg x - 1)$ v int. $(0, \infty)$. l) $(x^2 - 2x + 2)e^x$ v int. $(-\infty, \infty)$. m) $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$ v int. $(-\infty, \infty)$. n) $\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$ v int. $(-\infty, \infty)$. — **87.** a) $\frac{1}{3}x^3 - 3x + 4\lg|x|$ v int. $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$. b) $\frac{1}{2}x^2 + x + 3\lg|x - 2|$ v int. $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$. c) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \lg|x - 1|$ v int. $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$. d) $\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{9}{8}x + \frac{27}{16}\lg|2x - 3|$ v int. $(-\infty, \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2}, \infty)$. — **88.** $kx + h = \frac{k}{2a}(2ax + b) + h - \frac{bk}{2a}$. a) $\frac{15}{2}\lg|x - 6| - \frac{3}{2}\lg|x - 2|$ v int. $(-\infty, 2)$, $(2, 6)$, $(6, \infty)$. b) $\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{16}x + \frac{1}{64}\lg\left|\frac{2x - 1}{2x + 1}\right|$ v int. $(-\infty, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \infty)$. c) $x + \frac{16}{3}\lg|x - 4| - \frac{1}{3}\lg|x - 1|$ v int. $(-\infty, 1)$, $(1, 4)$, $(4, \infty)$. d) $\frac{2}{5}\lg|x - 1| - \frac{1}{15}\lg|3x + 2|$ v int. $(-\infty, -\frac{2}{3})$, $(-\frac{2}{3}, 1)$, $(1, \infty)$. e) $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{5}\lg|x| - \frac{21}{20}\lg|5 - 2x|$ v int. $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{5}{2})$, $(\frac{5}{2}, \infty)$. f) $\frac{1}{\sqrt{17}}\operatorname{arctg}\frac{3x - 2}{\sqrt{17}}$ v int. $(-\infty, \infty)$. g) $\frac{1}{2}x^2 - 2 \cdot \lg(x^2 + 4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}x$ v int. $(-\infty, \infty)$. h) $\frac{1}{2}\lg(x^2 + 2x + 7) + \frac{4}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x + 1}{\sqrt{6}}$ v int. $(-\infty, \infty)$. i) $4\lg|x - 3| - \frac{15}{x - 3}$ v int. $(-\infty, 3)$, $(3, \infty)$. j) $x - \frac{9}{x + 1} - 6\lg|x + 1|$ v int. $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$. — **89.** $kx + h = \frac{k}{2a}(2ax + b) + h - \frac{bk}{2a}$. a) $\lg(x + 2 +$

$+\sqrt{x^2+4x+13})$ v int. $(-\infty, \infty)$. b) $\sqrt{x^2-2x}+2\lg|x-1+\sqrt{x^2-2x}|$ v int. $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$. c) $\frac{1}{\sqrt{2}}\lg|x+\frac{1}{4}+\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}|$ v int. $(-\infty, -\frac{1}{2})$, $(1, \infty)$. d) $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-5x+3}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\lg(x-\frac{5}{4}+\sqrt{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}})$ v int. $(\frac{3}{2}, \infty)$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-5x+3}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\lg(\frac{5}{4}-x+\sqrt{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}})$ v int. $(-\infty, 1)$. e) $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+x-3}+\frac{3}{4\sqrt{2}}\lg|x+\frac{1}{4}+\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}}|$ v int. $(-\infty, -\frac{3}{2})$, $(1, \infty)$. f) $\frac{1}{3}\sqrt{3}\,.\arcsin\frac{6x+5}{11}$ v int. $(-\frac{8}{3}, 1)$. g) $\arcsin(\frac{1}{2}x-1)$ v int. $(0, 4)$. h) $-2\sqrt{4-x^2}-\arcsin\frac{1}{2}x$ v int. $(-2, 2)$. i) $-\sqrt{4-3x-x^2}-\frac{3}{2}\,.\arcsin(\frac{2}{5}x+\frac{3}{5})$ v int. $(-4, 1)$. j) $\sqrt{6+x-x^2}+\frac{5}{2}\arcsin(\frac{2}{5}x-\frac{1}{5})$ v int. $(-2, 3)$. — **90.** $u=\sqrt{ax^2+bx+c}$, $v'=1$; $2ax^2+bx=2(ax^2+bx+c)-(bx+2c)=2(ax^2+bx+c)-\frac{b}{2a}(2ax+b)+\frac{b^2-4ac}{2a}$. a) $\frac{1}{4}(2x+3)\sqrt{x^2+3x-4}-\frac{25}{8}\lg|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x-4}|$ v int. $(-\infty, -4)$, $(1, \infty)$. b) $\frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{3}{8}\lg(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1})$ v int. $(-\infty, \infty)$. c) $\frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{x(1-x)}+\frac{1}{8}\,.\arcsin(2x-1)$ v int. $(0, 1)$.

91. a) 2. b) $\frac{1}{n+1}$. c) πab. d) $\frac{1}{2}(x_2y_2-x_1y_1)-\frac{1}{2}\lg\frac{bx_2+ay_2}{bx_1+ay_1}$, kde x_1, y_1 a x_2, y_2 jsou souřadnice bodů omezujících oblouk hyperboly. — **92.** $4ab\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$. — **93.** $P=4\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\,dx=\frac{3}{8}\pi a^2$ (substituce $x=a\sin^3 t$). — **94.** a) Platí $x=f(\varphi)\cos\varphi$, $y=f(\varphi)\sin\varphi$, $dx=[f'(\varphi)\cos\varphi-f(\varphi)\sin\varphi]\,d\varphi$, $P=\int_{x_2}^{x_1}y\,dx+\frac{1}{2}x_2y_2-\frac{1}{2}x_1y_1$. Ale $x_2y_2-x_1y_1=f^2(\varphi_2)\sin\varphi_2\cos\varphi_2-f^2(\varphi_1)\sin\varphi_1\cos\varphi_1=$
$=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}[2f(\varphi)f'(\varphi)\,.\sin\varphi\cos\varphi+f^2(\varphi)\cos^2\varphi-f^2(\varphi)\sin^2\varphi]\,d\varphi$, takže $P=$
$=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}f^2(\varphi)\,d\varphi$. b) Dosadíme-li $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$, vyjde (po zanedbání hodnoty $\varrho=0$) $\varrho^2=2a^2\cos2\varphi$. Je-li $0\leqq\varphi\leqq\frac{1}{4}\pi$, je $\varrho^2\geqq0$, takže

čtvrtina plochy omezené lemniskatou je $\frac{1}{4}P = 2a^2 \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \cos 2\varphi \, d\varphi$, $P = 2a^2$.

95. $$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x_2^2+1} - $$

$$- \sqrt{x_1^2+1} + \lg \frac{x_2(\sqrt{x_1^2+1}+1)}{x_1(\sqrt{x_2^2+1}+1)} \quad \text{(substituce } \sqrt{x^2+1} = t + x\text{)}.$$

b) $$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{e^{2x}+1}\,dx = \sqrt{e^{2x_2}+1} - \sqrt{e^{2x_1}+1} + x_2 - x_1 - \lg \frac{\sqrt{e^{2x_2}+1}+1}{\sqrt{e^{2x_1}+1}+1}$$

(substituce $e^x = z$). — **96.** Je-li M_k supremum a m_k infimum funkce f v k-tém dílčím intervalu, je $\pi m_k^2 \Delta x_k \leq V_k \leq \pi M_k^2 \Delta x_k$, neboť objem části tělesa v k-tém dílčím intervalu není menší než objem válce, jehož poloměr je m_k a výška Δx_k, a není větší než objem válce o poloměru M_k a výšce Δx_k. — **97.** a) $\frac{4}{3}\pi r^3$. b) $\frac{4}{3}\pi ab^2$ resp. $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. — **98.** $\frac{1}{3}\pi(r^2 + 2\varrho^2)v$. — **99.** $2\pi^2 ar^2$. — **100.** a) $\frac{1}{3}\pi a^3[3\lg(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2}]$. b) $\frac{1}{2}\pi^2 a^3$.