Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu

X. Užití integrálů

In: Karel Hruša (author): Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 170–188.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403353

e) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+x-3}}\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8-5x-3x^2}}$,

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}$, h) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$, i) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-3x-x^2}}$.

j) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{3-x}{2+x}}\,\mathrm{d}x$.

90. Methodou částečné integrace dokažte, že

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4a}(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b^2-4ac}{8a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Počítejte podle toho a) $\int \sqrt{x^2+3x-4}\,\mathrm{d}x$,
b) $\int \sqrt{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$, c) $\int \sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x$.

X. UŽITÍ INTEGRÁLŮ

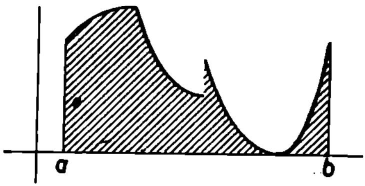
Integrální počet má velmi četné použití v praxi; na tomto místě si však všimneme pouze dvou jeho aplikací důležitých v geometrii, a to obsahu rovinných oborů a délky rovinné čáry.

Budiž dána funkce $f(x)$, definovaná v jistém uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, která má tu vlastnost, že v celém intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(x) \geqq 0$. Vezměme v úvahu množinu všech bodů v rovině, jejichž souřadnice x, y vyhovují nerovnostem $a \leqq x \leqq b$, $0 \leqq y \leqq f(x)$ (obr. 66, v němž je tato množina naznačena šrafováním). Tuto množinu budeme nazývat *plocha* a přiřadíme jí určité číslo P, které budeme nazývat *obsah plochy*. Z důvodů, které za chvíli vyložíme, budeme definovat

$$P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{71}$$

pokud ovšem tento integrál existuje.

V elementární geometrii se hovoří o obsazích některých ploch, na př. obdélníka, trojúhelníka atd. Nyní jsme obsah



Obr. 66

plochy definovali novým způsobem; je ovšem třeba ukázat, že tato nová definice je ve shodě s definicí plochy zavedené v elementární geometrii. V elementární geometrii vycházíme z těchto jednoduchých zákonů:

1. Obsah plochy není nikdy záporný.

2. Plocha, která vznikne složením dvou ploch s obsahy P_1 a P_2, má obsah $P_1 + P_2$.

3. Leží-li celá plocha obsahu P_1 uvnitř plochy obsahu P_2, je $P_1 \leqq P_2$.

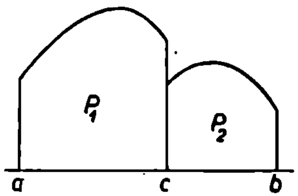
4. Obsah obdélníka o rozměrech z, v je zv.

Naše definice (71) těmto požadavkům vyhovuje:

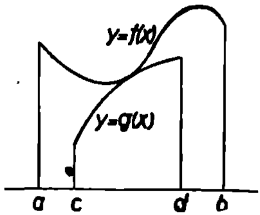
1. $f(x) \geqq 0$ pro každé x z $\langle a, b\rangle$; proto podle věty 34 je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq \int_a^b 0\,\mathrm{d}x = 0.$

2. Podle důsledku 1 věty 35 je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $a < c < b$. Je tedy obsah plochy, která

vznikla složením dvou ploch o obsazích $P_1 = \int_a^c f(x)\,dx$ a $P_2 = \int_c^b f(x)\,dx$, vskutku roven součtu $P_1 + P_2$ (obr. 67).



Obr. 67



Obr. 68

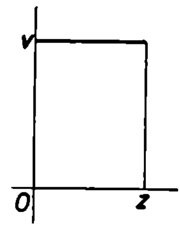
3. Jestliže plocha o obsahu $P_1 = \int_c^d g(x)\,dx$ leží celá uvnitř plochy o obsahu $P_2 = \int_a^b f(x)\,dx$ (obr. 68), je jednak $a \leqq c < < d \leqq b$ a jednak $f(x) \geqq g(x)$ pro každé x z $\langle c, d\rangle$. Je-li $a < c$ nebo $d < b$, položíme ještě $g(x) = 0$ pro každé x z intervalu $\langle a, c)$ a z intervalu $(d, b\rangle$; pak je $f(x) \geqq g(x)$ pro každé x z $\langle a, b\rangle$. Podle důsledku 1 věty 35 platí

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^c g(x)\,dx + \int_c^d g(x)\,dx + \\ + \int_d^b g(x)\,dx = \int_c^d g(x)\,dx,$$

neboť $\int_a^c g(x)\,dx = 0$, $\int_d^b g(x)\,dx = 0$.

4. Jde-li o obdélník o rozměrech z, v, je $f(x) = v$ pro každé x z intervalu $\langle 0, z\rangle$ (obr. 69), takže $P = \int_0^z v\,dx = vz$.

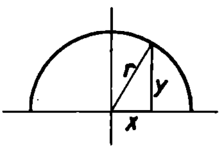
Tím můžeme považovat výklad o obsahu plochy za skončený; jde jen o to, abychom ještě objasnili, proč jsme k definici obsahu plochy volili právě rovnici (71) a žádnou jinou. Všimneme-li si geometrického významu horního součtu (viz obr. 50), vidíme, že plocha, jejíž obsah chceme vyjádřit, leží celá uvnitř plochy, jejíž obsah je vyjádřen horním součtem. Podobně plocha, jejíž obsah je vyjádřen dolním součtem (viz obr. 51), leží celá uvnitř plochy, jejíž obsah chceme stanovit. Proto podle našeho zákona 3 platí pro každé rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$



Obr. 69

$$S(D) \geqq P \geqq s(D).$$

To tedy značí, že P není nikdy větší než infimum horních součtů a současně není menší než supremum dolních součtů. Existuje-li integrál funkce f od a do b, musí tedy být tento integrál roven obsahu P.



Obr. 70

Příklad 68. Vypočísti obsah půlkruhu o poloměru r (obr. 70).

Jsou-li x, y souřadnice libovolného bodu na půlkružnici o poloměru r, platí $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, a proto podle (71) je

$$P = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx.$$ Položíme-li $x = rt$, $dx = r\, dt$, je

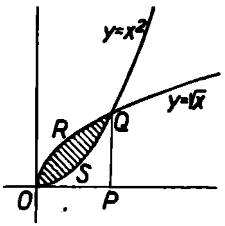
$$P = r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, dt = \tfrac{1}{2} r^2 [\arcsin t + t\sqrt{1 - t^2}]_{-1}^{1} = \tfrac{1}{2}\pi r^2$$

(viz příklad 59).

Příklad 69. Stanovit obsah plochy omezené oblouky křivek $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$ (obr. 71).

Obě křivky se protínají jednak v počátku, jednak v bodě o souřadnicích 1, 1. Jde vlastně o rozdíl ploch $OPQR$ a $OPQS$. Plocha $OSQR$, která je omezena oběma křivkami, je

$$P = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = [\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{3}x^3]_0^1 = \tfrac{1}{3}.$$



Obr. 71

Nyní se obrátíme k délce oblouku. V elementární geometrii se hovoří o délce úsečky. Jsou-li x_1, y_1 souřadnice jednoho krajního bodu P_1 a x_2, y_2 souřadnice druhého krajního bodu P_2 úsečky, jejíž délku označíme P_1P_2, pak $P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Jsou-li P_1, P_2, P_3 tři libovolné body, snadno dokážeme, že platí $P_1P_2 + P_2P_3 \geqq P_1P_3$. Souřadnice daných bodů označme x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; máme dokázat, že

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \geqq \geqq \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}.$$

Pro stručnost položme $x_2 - x_1 = a_1$, $y_2 - y_1 = b_1$, $x_3 - x_2 = a_2$, $y_3 - y_2 = b_2$. Pak je $x_3 - x_1 = a_1 + a_2$, $y_3 - y_1 = b_1 + b_2$. Máme tedy dokázat, že pro libovolná čísla a_1, a_2, b_1, b_2 je

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \geqq \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}.$$

Na obou stranách této nerovnosti jsou nezáporná čísla. Nerovnost bude zcela jistě splněna tehdy, když bude splněna nerovnost, která vznikne, když obě strany umocníme na druhou.

Tím dostaneme

$$a_1^2 + b_1^2 + 2\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} + a_2^2 + b_2^2 \geqq (a_1 + a_2)^2 + + (b_1 + b_2)^2$$

čili po úpravě

$$\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \geqq a_1a_2 + b_1b_2.$$

Na levé straně je nezáporné číslo; tato nerovnost bude zcela jistě splněna, bude-li

$$\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \geqq |a_1a_2 + b_1b_2|,$$

a tato podmínka bude opět splněna, bude-li splněna nerovnost vzniklá novým umocněním obou stran na druhou

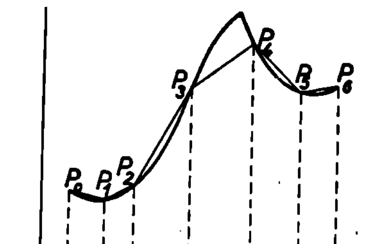
$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \geqq a_1^2a_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2.$$

Tuto nerovnost lze upravit na tvar

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geqq 0,$$

což však je splněno vždy. Tím je naše tvrzení dokázáno.

Budiž nyní dána funkce $f(x)$ spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$. Vezmeme v úvahu množinu bodů o souřadnicích x, y, které



Obr. 72

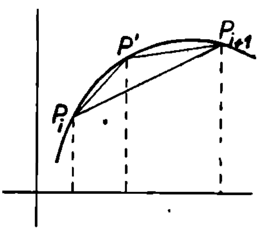
vyhovují podmínkám $a \leqq x \leqq b$, $y = f(x)$. Tuto množinu budeme nazývat *křivka.* Předpoklad o spojitosti funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ jsme učili proto, aby takto definovaná množina bodů odpovídala tomu, co se v běžném životě označuje názvem křivka. Sestrojme nyní libovolné rozdělení D

intervalu $\langle a, b\rangle$ s dělicími body $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < < x_{n-1} < x_n = b$, jako jsme to dělali v kapitole V. Dále sestrojme na naší křivce body $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$, odpovídající hodnotám proměnné $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ (viz obr. 72, který je sestrojen pro $n = 6$), a sestrojme lomenou čáru $P_0P_1P_2 \ldots P_{n-1}P_n$. Délkou této lomené čáry budeme rozumět součet délek úseček $P_0P_1, P_1P_2, \ldots, P_{n-1}P_n$, t. j. výraz

$$L(D) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + [f(x_1) - f(x_0)]^2} + \\ + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [f(x_2) - f(x_1)]^2} + \ldots + \\ + \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + [f(x_n) - f(x_{n-1})]^2}.$$

Pro různá rozdělení D dostáváme různá čísla $L(D)$.

Především je vidět toto: Je-li D' zjemněním rozdělení D, pak $L(D') \geqq L(D)$. To je zřejmé, uvědomíme-li si, že rozdělení D' vznikne z rozdělení D přidáním dalších dělicích bodů. Přidáme-li mezi dva body x_i, x_{i+1} rozdělení D další dělicí bod x' tak, že $x_i < x' < x_{i+1}$, vznikne nová lomená čára, jejíž délka se liší od délky $L(D)$ jen tím, že mezi body P_i, P_{i+1} je přidán další bod P' (obr. 73), a my jsme před chvilkou dokázali, že $P_iP' + P'P_{i+1} \geqq P_iP_{i+1}$. Totéž platí pro přidávání dalších dělicích bodů, takže je vskutku $L(D') \geqq L(D)$.



Obr. 73

To nás vede k této definici: Je-li množina všech čísel $L(D)$ omezená, nazveme její supremum *délkou oblouku* naší křivky mezi body P_0 a P_n.

Dokážeme nyní větu:

Věta **48**. Je-li $f(x)$ funkce spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, která má derivaci ve všech vnitřních bodech tohoto intervalu, a existuje-li integrál

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx, \tag{72}$$

pak křivka $y = f(x)$ mezi body o souřadnicích a, $f(a)$ a b, $f(b)$ má délku oblouku rovnou integrálu (72). Při tom $f'^2(x)$ značí totéž jako $[f'(x)]^2$.

Důkaz. Napřed poněkud upravíme výraz pro $L(D)$. Vezměme si k-tý dílčí interval $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ rozdělení D. Protože funkce f má podle předpokladu derivaci ve všech vnitřních bodech intervalu $\langle a, b \rangle$, a tedy také ve všech vnitřních bodech intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$, a protože je spojitá v bodech x_{k-1}, x_k, jsou splněny předpoklady věty o přírůstku funkce (věta 31), a pak v intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ existuje takový vnitřní bod ξ_k, při čemž $x_{k-1} < \xi_k < x_k$, že $f(x_k) - f(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1}) \,.\, f'(\xi_k)$. Je tedy k-tý člen součtu $L(D)$

$$\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2} = \Delta x_k \,.\, \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)},$$

při čemž jsme zavedli obvyklé označení $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Označme dále $\sqrt{1 + f'^2(x)} = g(x)$, takže můžeme psát

$$L(D) = g(\xi_1) \,.\, \Delta x_1 + g(\xi_2) \,.\, \Delta x_2 + \ldots + g(\xi_n) \,.\, \Delta x_n.$$

Z existence integrálu L plyne, že funkce $g(x)$ je omezená v intervalu $\langle a, b \rangle$, a tedy v k-tém dílčím intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ má určité supremum M_k a určité infimum m_k; při tom zcela jistě

$$m_k \leqq g(\xi_k) \leqq M_k.$$

Násobíme-li tuto nerovnost číslem Δx_k, které je kladné, a provedeme-li to pro všechny dílčí intervaly a všecky takto vzniklé nerovnosti sečteme, dostaneme

$$s(D) \leqq L(D) \leqq S(D),$$

kde $s(D) = m_1 \,.\, \Delta x_1 + m_2 \,.\, \Delta x_2 + \ldots + m_n \,.\, \Delta x_n$ je dolní součet příslušný k funkci $g(x)$ a k rozdělení D a $S(D) =$

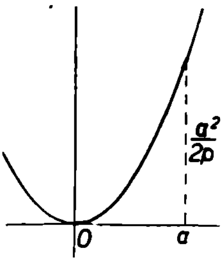
$= M_1 . \Delta x_1 + M_2 . \Delta x_2 + \ldots + M_n . \Delta x_n$ je horní součet příslušný k téžc funkci a k témuž rozdělení. Protože dále podle předpokladu funkce $g(x) = \sqrt{1 + f'^2(x)}$ má integrál L od a do b, který je podle své definice supremem dolních součtů $s(D)$ a zároveň infimem horních součtů $S(D)$ (str. 89), musí platit

$$L \geqq s(D),\ L \leqq S(D) \text{ pro každé rozdělení } D.$$

Označíme-li dále K supremum množiny čísel $L(D)$, platí

$$K \geqq L(D) \text{ pro každé rozdělení } D.$$

To však znamená, že $K \geqq s(D)$ pro každé rozdělení D, a tedy také $K \geqq L$, neboť supremum množiny dolních součtů nemůže být větší než K. Kdyby totiž bylo $K < L$, existovalo by takové rozdělení D_1, pro něž by bylo $K < s(D_1)$, neboť L je supremum množiny dolních součtů, ale to není možné. S druhé strany však není možné, aby $K > L$. Kdyby tomu tak bylo, muselo by existovat takové rozdělení D_2, že $K > S(D_2)$, vzhledem k tomu, že L je infimum množiny horních součtů $S(D)$. Pak by však také muselo existovat takové rozdělení D_3, že $L(D_3) > S(D_2)$, vzhledem k tomu, že K je supremum množiny všech $L(D)$. Utvoříme-li nyní společné zjemnění D_4 obou rozdělení D_2 a D_3, je jednak $S(D_4) \leqq S(D_2)$ (viz str. 87), jednak $L(D_4) \geqq L(D_3)$ (str. 176), takže $L(D_4) > S(D_4)$, ale to není možné. Musí tedy být $K = L$ a to jsme měli dokázat.



Obr. 74

Příklad 70. Vypočísti délku oblouku paraboly $y = \dfrac{x^2}{2p}$, kde $p > 0$, od počátku, jenž je vrcholem paraboly, do bodu o souřadnicích a, $\dfrac{a^2}{2p}$ ($a > 0$, obr. 74).

Podle vzorce (72) je

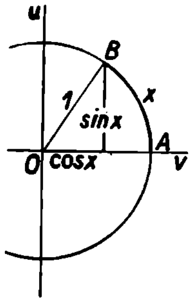
$$L = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{p} \int_0^a \sqrt{p^2 + x^2}\, \mathrm{d}x,$$

neboť $y' = \dfrac{x}{p}$. Integrujeme methodou per partes Položíme $\sqrt{p^2 + x^2} = u$, $v' = 1$; pak je $u' = \dfrac{x}{\sqrt{p^2 + x^2}}$, $v = x$, takže $L = \dfrac{1}{p}[x\sqrt{p^2 + x^2}]_0^a - \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_0^a \frac{x^2\, \mathrm{d}x}{\sqrt{p^2 + x^2}}$. Ježto $x^2 = p^2 + x^2 - p^2$, je $\displaystyle\int_0^a \frac{x^2\, \mathrm{d}x}{\sqrt{p^2 + x^2}} = \int_0^a \sqrt{p^2 + x^2}\, \mathrm{d}x - p^2 \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{p^2 + x^2}}$.

Avšak podle vzorce (58) je $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{p^2 + x^2}} = [\lg(x + \sqrt{p^2 + x^2})]_0^a = \lg \frac{a + \sqrt{p^2 + a^2}}{p}$ (absolutní hodnotu nepíšeme vzhledem k významu čísel x, a, p). Je tedy $L = \dfrac{a}{p} \cdot \sqrt{p^2 + a^2} - L + p \lg \dfrac{a + \sqrt{p^2 + a^2}}{p}$ a odtud vyplývá

$$L = \frac{a}{2p}\sqrt{p^2 + a^2} + \frac{p}{2} \lg \frac{a + \sqrt{p^2 + a^2}}{p}.$$

Nyní toho umíme již tolik, že můžeme přikročit k tomu, abychom doplnili úvahy o funkcích sinus a kosinus, které jsme před časem založili na názoru, nestarajíce se příliš o přesný význam užívaných pojmů. Provedeme tedy znovu výklad podaný v kapitole I. Tam jsme měli kružnici o poloměru 1, zvolili jsme na ní bod A a od tohoto bodu jsme nanesli oblouk dané délky x (směrem nahoru jsme jej měřili kladně, směrem dolů záporně). Tím jsme dospěli k bodu B, jehož souřadnice u, v jsme označili názvy $\sin x$, $\cos x$ (obr. 75). Aby každému u odpovídalo jen jediné x, omezíme se (prozatím) jen na pravou polokružnici, při čemž budeme považovat v za funkci souřadnice u. Jak známo, je



Obr. 75

$$v = \sqrt{1 - u^2}, \text{ kde } -1 \leqq u \leqq 1. \quad \text{(a)}$$

Vyjádříme tedy oblouk x pomocí souřadnice u. Derivováním dostáváme pro $|u| < 1$

$$v' = \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}, \quad 1 + v'^2 = 1 + \frac{u^2}{1-u^2} = \frac{1}{1-u^2},$$

takže

$$\sqrt{1 + v'^2} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Pak podle vzorce (72) je

$$x = \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \text{pokud } -1 < u < 1; \qquad \text{(b)}$$

při tom jsme integrační proměnnou označili písmenem t, aby nedošlo k nedorozumění. Integrál na pravé straně rovnice (b) existuje, neboť funkce $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ je spojitá v intervalu $(-1, 1)$ (věta 33); rovnice (b) tedy definuje jakousi funkci proměnné u, kterou označme třeba $A(u)$ (za chvíli se ovšem ukáže, že to je naše známá funkce $\arcsin u$) a která je definována v intervalu $(-1, 1)$.

Poněvadž existuje integrál (b) pro každé u z intervalu $(-1, 1)$, je funkce $A(u)$ spojitá v intervalu $(-1, 1)$ (věta 37). Poněvadž dále funkce $\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ je spojitá v intervalu $(-1, 1)$, je $A'(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ pro každé u, pro něž $-1 < u < 1$ (věta 38). Dále platí

$$A(-u) = -A(u), \tag{c}$$

neboť substitucí $t = -z$, $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}z$, dostáváme

$$A(-u) = \int_0^{-u} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = -\int_0^{u} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} = -A(u).$$

Zřejmě je $A(0) = 0$.

Nyní dokážeme, že funkce $A(u)$ je rostoucí v intervalu $(-1, 1)$. Je-li předně $0 \leqq u_1 < u_2, < 1$, je

$$\int_0^{u_2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{u_1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} + \int_{u_1}^{u_2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Avšak pro každé t, které vyhovuje podmínce $0 \leqq u_1 \leqq t \leqq \leqq u_2$, je $t^2 \geqq u_1^2$, takže také $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \geqq \dfrac{1}{\sqrt{1-u_1^2}}$. Proto podle věty 34 je

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \geqq \frac{1}{\sqrt{1-u_1^2}} \int_{u_1}^{u_2} \mathrm{d}t = \frac{u_2 - u_1}{\sqrt{1-u_1^2}} > 0,$$

takže

$$\int_0^{u_2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} > \int_0^{u_1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Tím jsme dokázali:

Z nerovností $0 \leqq u_1 < u_2 < 1$ plyne $A(u_1) < A(u_2)$. (d)

Speciálně pro $u > 0$ je $A(u) > A(0)$ čili $A(u) > 0$.

Je-li za druhé $u_1 < 0$, $u_2 \geqq 0$, je podle (c) $A(u_1) = -A(-u_1)$, při čemž $-u_1 > 0$, takže podle (d) je $A(-u_1) > 0$, $-A(u_1) > 0$, $A(u_1) < 0$. Vedle toho je $A(u_2) \geqq 0$, takže zase z nerovnosti $u_1 < u_2$ plyne $A(u_1) < A(u_2)$.

Je-li za třetí $-1 < u_1 < u_2 < 0$, je $1 > -u_1 > -u_2 > 0$. Proto podle (d) je $A(-u_1) > A(-u_2)$ čili podle (c) $-A(u_1) > -A(u_2)$, t. j. $A(u_1) < A(u_2)$. Je tedy funkce $A(u)$ rostoucí v intervalu $(-1, 1)$.

Funkce $A(u)$ je v intervalu $(-1, 1)$ omezená, jak plyne z této úvahy: Je li $0 \leqq t < 1$, je $t^2 \leqq t$, takže $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$; proto podle věty 34 pro $u > 0$

$$A(u) = \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \leqq \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t}}.$$

Tento poslední integrál dovedeme však spočítat substitucí $1 - t = z$, $dt = -dz$, takže

$$\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = -\int_1^{1-u} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_{1-u}^1 \frac{dz}{\sqrt{z}} =$$

$$= [2z^{\frac{1}{2}}]_{1-u}^1 = 2(1 - \sqrt{1-u}) < 2.$$

Je tedy $0 \leqq A(u) \leqq 2(1 - \sqrt{1-u}) < 2$ pro každé u, které vyhovuje podmínkám $0 \leqq u < 1$.

Označme ω supremum funkce $A(u)$ v intervalu $\langle 0, 1)$. Pro žádné u, pro něž platí $0 \leqq u < 1$, nemůže být $A(u) = \omega$, neboť A je funkce rostoucí v intervalu $(-1, 1)$, a tedy také v intervalu $\langle 0, 1)$. Kdyby bylo $A(u) = \omega$, pak by pro každé u_1, pro které platí $u < u_1 < 1$ (a takové u_1 jistě existuje, neboť interval $\langle 0, 1)$ je zprava otevřený), muselo být $A(u_1) > > \omega$, ale to není možné, neboť ω je supremum všech hodnot $A(u)$ v intervalu $\langle 0, 1)$. Z toho plyne, že $\lim\limits_{u \to 1-} A(u) = \omega$. Můžeme tedy definici funkce $A(u)$ doplnit také pro $u = 1$ hodnotou $A(1) = \omega$. Tím se funkce A stává spojitou zleva v bodě $u = 1$. Podobně položíme také $A(-1) = -\omega$, čímž se funkce A stane spojitou zprava v bodě -1.

Podle svého významu značí číslo ω délku oblouku čtvrtiny kružnice o poloměru 1. Toto číslo budeme označovat, jak je všeobecným zvykem, znakem $\frac{1}{2}\pi$ místo ω. Je tedy

$$\tfrac{1}{2}\pi = A(1) = \lim_{u \to 1-} \int_0^u \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t^2}}$$

a je možno vypočítat, že $\pi = 3{,}14159265358979\ldots$

Máme tedy dokázáno: Funkce $x = A(u)$ je spojitá a rostoucí v intervalu $\langle -1, 1\rangle$, při čemž $A(1) = \frac{1}{2}\pi$, $A(-1) = -\frac{1}{2}\pi$. Proto existuje k funkci $A(u)$ funkce inversní, která je rovněž spojitá a rostoucí v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ (věta 44). Tuto inversní funkce nazýváme, jak jsme již řekli, $\sin x$.

Rovnice $u = \sin x$, kde $-\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$, říká tedy přesně totéž jako rovnice $x = A(u)$, kde $-1 \leqq u \leqq 1$. Pro každé takové u je $A(-u) = -A(u)$ podle (c), při čemž také $-1 \leqq -u \leqq 1$. Je-li tedy $x = A(u)$ čili $u = \sin x$, je $-x = = A(-u)$ čili $-u = \sin(-x)$. Proto

$$\sin(-x) = -\sin x.$$

Poněvadž dále $A(0) = 0$, $A(1) = \frac{1}{2}\pi$, $A(-1) = -\frac{1}{2}\pi$, proto

$$\sin 0 = 0, \quad \sin\tfrac{1}{2}\pi = 1, \quad \sin(-\tfrac{1}{2}\pi) = -1.$$

Počítejme derivaci funkce $\sin x$ v bodě x. Podle věty 45 je

$$(\sin x)' = \frac{1}{A'(u)} = \sqrt{1 - u^2} = \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

Funkci $\sqrt{1 - \sin^2 x}$ proměnné x, kde x je z intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$, označme $\cos x$; je tedy

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Poněvadž funkce $\sin x$ je spojitá v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$, je v tomto intervalu spojitá i funkce $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Dále je podle pravidla o derivování složených funkcí

$$(\cos x)' = (\sqrt{1 - \sin^2 x})' = \frac{-\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \cdot \cos x = -\sin x.$$

Vedle toho $\cos(-x) = \sqrt{1 - \sin^2(-x)} = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$ a dále $\cos 0 = \sqrt{1 - \sin^2 0} = 1$, $\cos\frac{1}{2}\pi = \cos(-\frac{1}{2}\pi) = \sqrt{1 - 1} = 0$. Podle rovnice (a) je zřejmé, že $\cos x = v$ čili že $\cos x$ je druhá souřadnice bodu B, jehož jedna souřadnice je $\sin x$.

Prozatím máme definovány hodnoty funkcí $\sin x$ a $\cos x$ pouze v oboru $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$. Nyní rozšíříme definici těchto funkcí na každé x takto:

Pro každé x nechť platí

$$\sin x = -\sin(x + \pi), \quad \cos x = -\cos(x + \pi). \qquad \text{(e)}$$

Tím jsou naše funkce definovány pro každé x. Je-li totiž x libovolné číslo, můžeme vždy z něho dostat přičtením nebo odečtením vhodného celistvého násobku čísla π takové číslo z, které padne do intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$, při čemž $x + k\pi = z$, kde k je celé číslo. Pak platí

$$\sin x = \sin z, \quad \cos x = \cos z, \quad \text{je-li } k \text{ sudé},$$
$$\sin x = -\sin z, \quad \cos x = -\cos z, \quad \text{je-li } k \text{ liché}.$$

Ve zvláštním případě pro $k = 2$ je

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

a to znamená, že funkce $\sin x$ i $\cos x$ jsou periodické s periodou 2π.

Odvodíme dále: Platí-li

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x \tag{f}$$

pro nějaké x, platí tytéž vztahy i pro $x + \pi$. Vskutku je

$$[\sin(x + \pi)]' = (-\sin x)' = -(\sin x)' = -\cos x = \\ = \cos(x + \pi),$$

$$[\cos(x + \pi)]' = (-\cos x)' = -(\cos x)' = -(-\sin x) = \\ = -\sin(x + \pi).$$

Protože vzorce (f) platily pro každé x z intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, platí vůbec pro každé x s výjimkou hodnot $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, kde k je celé. Nalezené vzorce však platí i pro tyto vyloučené hodnoty, neboť pro jednostranné derivace v bodě $x = \frac{1}{2}\pi$ máme

$$(\sin x)'_{x=\frac{1}{2}\pi-} = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi-} (\sin x)' = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi-} \cos x = \cos\tfrac{1}{2}\pi,\text{*)}$$

$$(\sin x)'_{x=\frac{1}{2}\pi+} = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi+} (\sin x)' = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi+} \cos x = -\lim_{x\to-\frac{1}{2}\pi+} \cos x = \\ = -\cos(-\tfrac{1}{2}\pi) = \cos\tfrac{1}{2}\pi;$$

$$(\cos x)'_{x=\frac{1}{2}\pi-} = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi-} (\cos x)' = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi-} (-\sin x) = -\sin\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$(\cos x)'_{x=\frac{1}{2}\pi+} = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi+} (\cos x)' = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi+} (-\sin x) = \lim_{x\to-\frac{1}{2}\pi+} \sin x = \\ = \sin(-\tfrac{1}{2}\pi) = -\sin\tfrac{1}{2}\pi.$$

Protože derivace zleva v bodě $\frac{1}{2}\pi$ je rovna derivaci zprava, existuje derivace v bodě $\frac{1}{2}\pi$, při čemž je

$$(\sin x)'_{x=\frac{1}{2}\pi} = \cos\tfrac{1}{2}\pi, \quad (\cos x)'_{x=\frac{1}{2}\pi} = -\sin\tfrac{1}{2}\pi.$$

---

*) $(\sin x)'_{x=\frac{1}{2}\pi-}$ značí derivaci zleva funkce $\sin x$ v bodě $\frac{1}{2}\pi$ atd.; podobně dále $(\sin x)'_{x=\frac{1}{2}\pi}$ značí derivaci funkce $\sin x$ v bodě $\frac{1}{2}\pi$.

Platí tedy vzorce (f) bez jakékoli výjimky.

Utvořme nyní funkci proměnné x

$$F(x) = [\sin(x + y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y]^2 + \\ + [\cos(x + y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y]^2,$$

kde y je libovolná konstanta. Derivace této funkce podle proměnné x je

$$F'(x) = 2[\sin(x + y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y][\cos(x + y) - \\ - \cos x \cos y + \sin x \sin y] + 2[\cos(x + y) - \cos x \cos y + \\ + \sin x \sin y][- \sin(x + y) + \sin x \cos y + \cos x \sin y] = 0.$$

To však znamená, že $F(x) = c$ pro každé x, kde c je konstanta (důsledek věty 31). Abychom spočetli toto c, dosadíme za x kteroukoli hodnotu, třeba $x = 0$. Pak je $F(0) = (\sin y - \sin y)^2 + (\cos y - \cos y)^2 = 0$. Je tedy $F(x) = 0$ pro každé x. Avšak $F(x)$ je součet dvou druhých mocnin. Ten se může rovnat nule jen tehdy, když se rovnají nule oba základy, t. j. když

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Odtud již můžeme odvodit všecky další výsledky z kapitoly I.

Ještě nám zbývá dokázat vzorec (20) z kapitoly III. Ten však již dokážeme snadno. Je-li $x > 0$, označme J interval $\langle 0, x\rangle$; je-li $x < 0$, označme J interval $\langle x, 0\rangle$. V intervalu J jsou splněny předpoklady věty 31 o přírůstku funkce, proto v něm existuje takový vnitřní bod ξ, že

$$\sin x - \sin 0 = (x - 0) \, . \, (\sin x)'_{x=\xi},$$

neboli

$$\frac{\sin x}{x} = \cos \xi.$$

Jestliže se x blíží k nule, blíží se k nule také ξ, proto

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\xi \to 0} \cos \xi = 1,$$

neboť pravá strana naší rovnice má limitu; musí ji mít tedy také levá strana a obě tyto limity se musí navzájem rovnat.

Nalezené funkce $\sin x$ a $\cos x$ mají všecky vlastnosti, které mají funkce zavedené v kapitole I. Jsou to tedy tytéž funkce. Proto i pomocná funkce $A(u)$ je inversní funkce k funkci $\sin x$, t. j. $A(u) = \arcsin u$, jak jsme již na počátku napověděli. Tím jsou odstraněny všecky pochybnosti, které jsme vyslovili v kapitole I a III.

Také zde jsme dokázali pouze existenci funkcí $\sin x$ a $\cos x$ a nezabývali jsme se otázkou, jak se vypočtou hodnoty těchto funkcí. K tomu se nejlépe hodí opět nekonečné řady, jejichž výklad však nespadá do rámce této knížky.

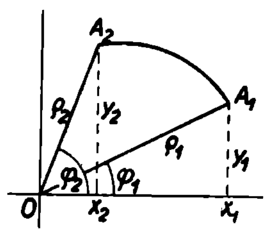
Cvičení.

91. Stanovte obsah plochy omezené a) jednou polovlnou křivky $y = \sin x$ a osou x, b) obloukem křivky $y = x^n$, osou x a přímkou $x = 1$ $(n > 0)$, c) elipsou o poloosách a, b, jež má rovnici $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, d) obloukem hyperboly $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, osou x a přímkami $x = x_1$, $x = x_2$; při tom $a \leqq x_1 < x_2$ a celá plocha leží nad osou x.

92. Vypočtěte obsah plochy společné dvěma shodným soustředným elipsám o poloosách a, b, z nichž jedna vznikne z druhé otočením o pravý úhel.

93. Vypočtěte obsah plochy omezené křivkou $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ zvanou astroida, při čemž $a > 0$ je konstanta.

94. a) Jestliže polohu bodu A v rovině udáváme délkou průvodiče $OA = \varrho$ a úhlem $\sphericalangle xOA = \varphi$ sevřeným kladně orientő-



Obr. 76

vanou osou x a průvodičem OA, je rovnice křivky dána vztahem $\varrho = f(\varphi)$. Pak velikost plochy $P = OA_1A_2$ (obr. 76) je $P = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_1} f^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$. Dokažte. b) Podle toho vypočtěte plochu omezenou křivkou $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, zvanou lemniskata $(a > 0)$.

95. Stanovte délku oblouku křivky a) $y = \lg x$ mezi dvěma body, jejichž souřadnice x jsou $0 < x_1 < x_2$, b) $y = \mathrm{e}^x$ mezi dvěma body, jejichž souřadnice x jsou $x_1 < x_2$.

96. Odůvodněte, že objem rotačního tělesa, které vznikne, otáčí-li se plocha omezená obloukem křivky $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, kolem osy x, je vyjádřen vzorcem

$$V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

při čemž $f(x) \geqq 0$ v intervalu $\langle a, b\rangle$.

97. Vypočtěte a) objem koule o poloměru r, b) objem rotačního elipsoidu, který vznikne, otáčí-li se elipsa o poloosách a, b kolem některé své osy.

98. Vypočtěte objem rotačního jednodílného hyperboloidu, jehož podstavy mají poloměr r, jehož hrdlová kružnice má poloměr ϱ a výška je v. (Hrdlová kružnice je nejmenší kružnice na povrchu hyperboloidu.)

99. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne, otáčí-li se kružnice o poloměru r kolem přímky, jejíž vzdálenost od středu kružnice je a $(a > r)$.

100. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne, otáčí-li se lemniskata z cvič. 94 a) kolem osy x, b) kolem osy y.