Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu

II. Limita

In: Karel Hruša (author): Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 31–49.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403345

stupňové úhel, jehož velikost v míře obloukové je dána číslem 1? (Tento úhel se jmenuje **radián**.)

9. Vyšetřete vlastnosti následujících funkcí a vyjádřete tyto funkce graficky: a) $\sin(x + a)$, b) $\sin ax$, kde $a \neq 0$, c) $\sin x^2$, d) $\sin \frac{1}{x}$, e) $\frac{1}{\sin x}$.

10. a) Vyjádřete $\operatorname{tg}(-x)$, $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi + x)$, $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi - x)$, $\operatorname{tg}(\pi + x)$, $\operatorname{tg}(\pi - x)$ pomocí $\operatorname{tg} x$. b) Dokažte, že $\operatorname{tg}(x_1 + x_2) = \frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{1 - \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2}$, $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$. Ve všech případech udejte ta x, pro něž napsané vztahy platí.

II. LIMITA

Abychom si úvahy zbytečně nekomplikovali, budeme se většinou zabývat jen takovými funkcemi, jejichž obor se skládá vesměs z intervalů.

Mějme funkci f definovanou pro všecka x z nějakého intervalu, jehož vnitřním bodem je bod a. Blíží-li se proměnná x k číslu a a blíží-li se při tom hodnota $f(x)$ k nějakému číslu b, říkáme, že funkce f má v bodě a *limitu* b, a píšeme to krátce takto:

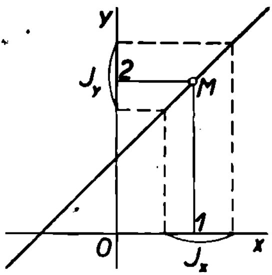
$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

(čteme: limita funkce f pro x blížící se k a je b). Pojem limity bude ústředním pojmem našich úvah, proto mu věnujeme zvýšenou pozornost. Slova „blíží-li se“, jichž jsme právě užili, je však třeba nejprve přeložit do přesné řeči, abychom si pod nimi představovali něco určitého a abychom je mohli vyjádřit matematicky. Ukážeme to nejprve na jednoduchém příkladě, a teprve potom budeme definici limity přesně formulovat.

Příklad 14. Mějme funkci

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Tato funkce je definována pro všecka x s výjimkou $x = 1$, neboť pro $x = 1$ má náš žlomek ve jmenovateli nulu. V bodě 1 hodnota funkce f definována není. Ve všech ostatních bodech je definována a její hodnota je $x + 1$, neboť pro $x \neq 1$ lze daný zlomek krátit výrazem $x - 1$. Naše funkce je tedy znázorněna přímkou $y = x + 1$, z níž je však vyloučen bod M o souřadnicích 1, 2 (obr. 25). Blíží-li se x libovolně blízko s kterékoli strany k číslu 1, blíží se y libovolně blízko k číslu 2; tento fakt vyjadřujeme slovy, že limita dané funkce v bodě 1 je rovna číslu 2, a zapisujeme



Obr. 25

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Na tom, že hodnota $f(1)$ není definována, nezáleží. Naše „blížení", o kterém jsme dosud mluvili, přesně vyjádříme takto: Na ose y zvolíme zcela libovolný otevřený interval J_y, který obsahuje bod 2 jako vnitřní. Takový interval jsme na str. 14 nazvali okolím bodu 2. Pak dovedeme na ose x nalézt takový interval J_x, který je okolím bodu 1, že pro všechna x z intervalu J_x (ovšem s výjimkou bodu 1, pro nějž není $f(1)$ definováno) příslušná hodnota $f(x)$ padne do intervalu J_y.

Vyslovíme tedy tuto definici:

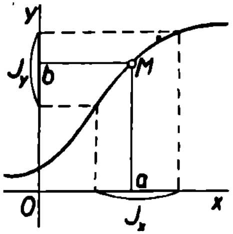
Funkce f má v bodě a limitu b, když ke každému okolí J_y bodu b dovedeme určit*) takové okolí J_x

---

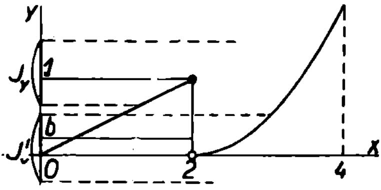
*) Slova „dovedeme určit" znamenají, že ke každému okolí J_y existuje okolí J_x bodu a, které má žádané vlastnosti.

bodu a, že pro každé $x \neq a$ z J_x hodnota $f(x)$ patří do J_y (obr. 26).

Znovu si připomeňme, že funkce f je definována ve všech bodech nějakého okolí J_x bodu a. Hodnota $f(a)$ může při tom být jakákoli nebo nemusí být vůbec definována.



Obr. 26



Obr. 27

Není ovšem nutné, aby měla každá funkce v každém bodě svého oboru limitu. Uvedeme příklad funkce, která limitu nemá.

Příklad 15. Funkce f budiž definována takto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{pro } 0 \leqq x \leqq 2, \\ \frac{1}{2}(x-2)^2 & \text{pro } 2 < x \leqq 4. \end{cases}$$

Tato funkce je definována v intervalu $\langle 0, 4 \rangle$, její průběh znázorňuje obr. 27. Podle její definice je $f(2) = 1$, ale tato hodnota není limitou funkce f v bodě 2, neboť je možné vymezit takové okolí J_y bodu 1, že k němu neexistuje žádné okolí J_x bodu 2 tak, aby pro všecka $x \neq 2$ z J_x hodnota $f(x)$ padla do J_y. Stačí volit J_y tak, aby neobsahovalo bod 0, jak je vidět z obr. 27. Žádná jiná hodnota $b \neq 1$ není však také limitou funkce f v bodě 2, neboť pak lze vždy vymezit takové okolí J_y' bodu b, že neobsahuje bod 1. K tomuto okolí J_y' pak zase nelze nalézt žádné okolí J_x bodu 2 tak, aby pro všecka $x \neq 2$ z J_x hodnota $f(x)$ padla do J_y'.

Příklad 16. Dokážeme, že funkce

$$f(x) = kx + q,$$

definovaná pro každé x, má v bodě a limitu $b = ka + q$. Ukážeme, že ke každému okolí (y_1, y_2), kde $y_1 < b < y_2$, dovedeme nalézt takové okolí (x_1, x_2), kde $x_1 < a < x_2$, že pro všecka x z (x_1, x_2) hodnota $f(x)$ padne do (y_1, y_2).

Zvolme tedy libovolné okolí (y_1, y_2) bodu b, t. j. zvolme dvě čísla y_1, y_2 tak, aby $y_1 < b < y_2$. Protože $b = ka + q$, musí být

$$y_1 < ka + q < y_2. \tag{a}$$

(1) Je-li $k > 0$, dostáváme odtud

$$\frac{y_1 - q}{k} < a < \frac{y_2 - q}{k}.$$

Volíme-li x tak, aby $\frac{y_1 - q}{k} < x < \frac{y_2 - q}{k}$, plyne odtud $y_1 - q < kx < y_2 - q$, t. j. $y_1 < kx + q < y_2$. Je tedy interval $\left(\frac{y_1 - q}{k}, \frac{y_2 - q}{k}\right)$ hledaným okolím bodu a.

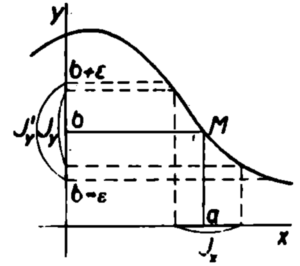
(2) Je-li $k < 0$, dostáváme z podmínky (a)

$$\frac{y_1 - q}{k} > a > \frac{y_2 - q}{k} \text{ čili } \frac{y_2 - q}{k} < a < \frac{y_1 - q}{k}.$$

Volíme-li x tak, aby $\frac{y_2 - q}{k} < x < \frac{y_1 - q}{k}$, plyne odtud $y_2 - q > kx > y_1 - q$ čili $y_1 < kx + q < y_2$. Je tedy $\left(\frac{y_2 - q}{k}, \frac{y_1 - q}{k}\right)$ hledaným okolím bodu a.

(3) Je-li $k = 0$, je $f(x) = q$ pro každé x; můžeme tedy interval (x_1, x_2) volit jakkoli a pro každé x z (x_1, x_2) je $y_1 < q < y_2$.

K definici, která byla výše vyslovena, poznamenejme ještě totó: Podaří-li se nám k nějakému okolí J_y bodu b nalézt takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x hodnota $f(x)$ padne do J_y, padnou všecky tyto hodnoty $f(x)$ také do každého širšího okolí J'_y bodu b, do něhož patří všecky body okolí J_y. Nalezneme-li tedy okolí J_x bodu a příslušné ke zvolenému okolí J_y bodu b, nalezli jsme tím zároveň také okolí J_x bodu a příslušné k širšímu okolí J'_y bodu b. Toho často užíváme ke zjednodušení počtu a okolí J'_y bodu b volíme tak, aby mělo bod b právě uprostřed (obr. 28). Zvolíme nějaké číslo $\varepsilon > 0$ a do J'_y vezmeme taková $f(x)$, pro něž $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ čili podle (3) (str. 16) $|f(x) - b| < \varepsilon$. Definici limity pak často vyslovujeme takto:



Obr. 28

Funkce f má v bodě a limitu b, když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ dovedeme nalézt takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x platí $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Podobně můžeme vyšetřovat, co se děje, když x neomezeně vzrůstá nebo neomezeně klesá. Blíží-li se při tom hodnota $f(x)$ nějakému číslu, nazýváme toto číslo *limitou* funkce f *v nevlastním bodě* ∞ *nebo* $-\infty$. K tomu je ovšem třeba předpokládat, že funkce f je definována v neomezeném intervalu. Každý neomezený interval (k, ∞) můžeme nazývat *okolím nevlastního bodu* ∞ a každý interval $(-\infty, k)$ okolím nevlastního bodu $-\infty$. Znovu však podotkneme, že symboly ∞ a $-\infty$ neznačí žádné číslo a že jim neodpovídají žádné body na ose číselné. Názvů „bod ∞“ a „bod $-\infty$“ užíváme jen proto, abychom se vyjadřovali stručněji. Abychom tyto dva „body“ zřetelně odlišili od ostatních bodů číselné osy, mluvíme o nevlastních bodech. Analogicky podle předchozího vyslovíme definici:

Funkce f má v nevlastním bodě ∞ nebo $-\infty$ limitu b, když ke každému okolí J_y bodu b dovedeme stanovit takové okolí J_x tohoto nevlastního bodu, že pro každé x z J_x hodnota $f(x)$ padne do J_y.

Pro takto definované limity budeme užívat symbolů

$$\lim_{x \to \infty} f(x), \quad \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Příklad 17. Dokážeme, že funkce

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

má v nevlastním bodě ∞ i v nevlastním bodě $-\infty$ za limitu nulu. Za J_y zvolíme okolí $(-\varepsilon, \varepsilon)$ bodu 0, při čemž $\varepsilon > 0$; pak hodnoty $f(x)$ spadající do tohoto intervalu vyhovují nerovnostem

$$-\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

Odtud plyne buď $x > \frac{1}{\varepsilon}$, nebo $x < -\frac{1}{\varepsilon}$. Pro každé x z intervalu $\left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$ je hodnota $f(x) = \frac{1}{x}$ definována a padne do J_y. Je tedy $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$. Podobně pro každé x z intervalu $\left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$ hodnota $f(x) = \frac{1}{x}$ padne rovněž do J_y. Je tedy také $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ (viz obr. 19).

Obdobnou definici zavedeme i tehdy, když místo funkce definované na nějakém neomezeném intervalu máme posloupnost, t. j. funkci, jejímž oborem je množina přirozených čísel. Také tu se může stát, že se hodnota a_n blíží určitému číslu, když n roste nade všecky meze. Definujeme:

Posloupnost, jejíž n-tý člen je a_n, má limitu b, když ke každému okolí J_y bodu b dovedeme stanovit takové číslo k, aby pro všecka přirozená čísla $n > k$ patřila hodnota a_n do J_y.

To, že číslo b je limitou posloupnosti, jejíž obecný člen je a_n, zapisujeme $b = \lim_{n \to \infty} a_n$.

Příklad 18. Posloupnost, jejíž n-tý člen je

$$a_n = \frac{n}{n+1},$$

má za limitu číslo 1. Dokážeme to. Za J_y zvolíme interval $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo kladné. Je-li n přirozené číslo, je $\frac{n}{n+1} < 1$ pro každé n, a tedy také $a_n < 1 + \varepsilon$ pro každé n. Zbývá nalézt taková n, pro něž $1 - \varepsilon < a_n$ čili $1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1}$. Odtud však plyne $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Je-li tedy n libovolné přirozené číslo z intervalu $\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1, \infty\right)$, pak pro každé takové n je $1 - \varepsilon < a_n < 1 + \varepsilon$, t. j. hodnota a_n patří do J_y, takže vskutku $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$.

Někdy se stává, že hodnota $f(x)$ padne do intervalu J_y jen pro taková x, která jsou větší než a, t. j. která leží v pravém okolí tohoto bodu (viz str. 14). Pak říkáme, že funkce f má v bodě a *limitu zprava* rovnou číslu b. V obdobném smyslu mluvíme o *limitě zleva*. Definujeme:

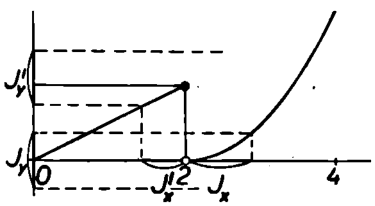
Funkce f má v bodě a limitu $\begin{matrix}\text{zprava}\\ \text{zleva}\end{matrix}$ rovnou číslu b, když ke každému okolí J_y bodu b dovedeme nalézt takové $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{pravé}}{\text{levé}}$ okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x hodnota $f(x)$ patří do J_y.

To, že číslo b je limitou zprava funkce f v bodě a, zapisujeme $b = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$ a to, že číslo b je limitou zleva funkce f v bodě a, zapisujeme $b = \lim\limits_{x \to a-} f(x)$.

Příklad 19. Funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{pro } 0 \leqq x \leqq 2, \\ \frac{1}{2}(x-2)^2 & \text{pro } 2 < x \leqq 4, \end{cases}$$

kterou jsme již vyšetřovali v příkladu 14, má $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = 1$, neboť ke každému okolí J_y bodu 0 dovedeme nalézt takové pravé okolí J_x bodu 2, že pro všecka $x \neq 2$ z J_x hodnota $f(x)$ padne do J_y, a ke každému okolí J'_y bodu 1 dovedeme nalézt takové levé okolí J'_x bodu 2, že pro všecka x z J'_x hodnota $f(x)$ padne do J'_y (obr. 29).



Obr. 29

Nyní si dokážeme několik důležitých vět o limitách.

Věta **3**. Funkce f má v bodě a limitu b tehdy a jen tehdy, když má v tomto bodě limitu zprava i limitu zleva a obě tyto limity jsou rovny číslu b.

Důkaz. 1. To, že funkce f má v bodě a limitu b, znamená, že ke každému okolí J_y bodu b dovedeme nalézt okolí J_x bodu a tak, že pro všecka $x \neq a$ z J_x hodnota $f(x)$ padne do J_y. Platí-li naše tvrzení pro všecka $x \neq a$ z J_x, platí zajisté i pro ta x z J_x, která leží vpravo od a, t. j. pro všecka $x \neq a$

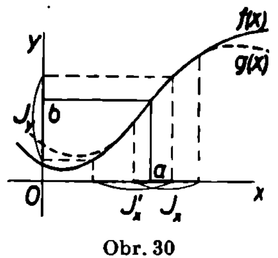
z nějakého pravého okolí bodu a. Na hodnotě $f(a)$ při tom nezáleží. Proto $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = b$. Z téhož důvodu však naše tvrzení platí i pro ta x z J_x, která leží vlevo od a, t. j. pro všecka $x \neq a$ z nějakého levého okolí bodu a. Na hodnotě $f(a)$ při tom opět nezáleží. Proto $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = b$.

2. Obráceně to, že funkce f má v bodě a limitu zprava i limitu zleva a že jsou obě rovny číslu b, znamená, že ke každému okolí J_y bodu b dovedeme nalézt takové pravé okolí J'_x bodu a a takové levé okolí J''_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z těchto dvou okolí hodnota $f(x)$ padne do J_y. Sjednocením obou okolí J'_x a J''_x dostaneme jakési okolí J_x bodu a. Platí-li naše tvrzení pro všecka $x \neq a$ z J'_x i z J''_x, platí pro všecka $x \neq a$ z okolí J_x. To však znamená, že $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Aby nemohl nastat omyl, budeme někdy pro zřetelnost přidávat ke slovu „limita" ještě slovo „oboustranná", abychom jasně naznačili, že tím nemíníme limitu zprava ani limitu zleva.

Věta **4**. Nechť dvě funkce f a g pro všecka $x \neq a$ z jistého okolí J_x bodu a splňují rovnost $f(x) = g(x)$. ~~Pak~~ platí: Má-li funkce f limitu b v bodě a, má funkce g v témž bodě touž limitu.

Důkaz. To, že $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, znamená, že ke každému okolí J_y bodu b existuje okolí J'_x bodu a tak, že hodnota $f(x)$ pro všecka $x \neq a$ z J'_x patří do J_y (viz obr. 30). Sestrojme průnik J''_x obou okolí J_x a J'_x. Pak pro každé $x \neq a$ z J''_x platí:



Obr. 30

a) $f(x) = g(x)$, neboť x patří do J_x, a

b) $f(x)$ patří do J_y, neboť x patří do J'_x.

Proto také $g(x)$ patří do J_y. Tím je ke každému okolí J_y bodu b nalezeno okolí J''_x bodu a tak, že hodnota $g(x)$ pro každé $x \neq a$ z J''_x patří do J_y. To však znamená, že $\lim_{x \to a} g(x) = b$.

Jestliže $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, říkáme, že funkce f je *nekonečně malá* v okolí bodu a. Podobně je-li $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ nebo je-li $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, říkáme, že funkce f je nekonečně malá v okolí nevlastního bodu ∞ nebo $-\infty$, a konečně je-li $\lim_{x \to a+} f(x) = 0$ nebo $\lim_{x \to a-} f(x) = 0$, říkáme, že funkce f je nekonečně malá zprava nebo zleva v okolí bodu a.

Vzhledem k poznámce uvedené na str. 35 můžeme definici funkce nekonečně malé v okolí bodu a vyslovit také takto: Funkce f je nekonečně malá v okolí bodu a, když lze ke každému $\varepsilon > 0$ nalézt takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $|f(x)| < \varepsilon$.

Věta **5**. Výrok: $\lim_{x \to a} f(x) = b$ platí tehdy a jen tehdy, když funkce $f(x) - b$ je nekonečně malá v okolí bodu a.

Důkaz. To, že $\lim f(x) = b$, značí, že ke každému $\varepsilon > 0$ dovedeme nalézt takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $|f(x) - b| < \varepsilon$. To však je totéž, jako kdybychom řekli, že funkce $f(x) - b$ je nekonečně malá v okolí bodu a. Obráceně: To, že funkce $f(x) - b$ je nekonečně malá v okolí bodu a, znamená, že ke každému $\varepsilon > 0$ dovedeme nalézt takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $|f(x) - b| < \varepsilon$. To však je totéž, jako kdybychom řekli, že $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Z dokázané věty plyne, že je-li $\lim_{x \to a} f(x) = b$, je $f(x) = b + \varphi(x)$, kde $\varphi(x) = f(x) - b$ je funkce nekonečně malá v okolí bodu a.

Věta 6. Nechť funkce f a g jsou nekonečně malé v okolí bodu a. Pak i funkce $k \,.\, f(x) + h \,.\, g(x)$, kde k, h jsou daná čísla, je nekonečně malá v okolí bodu a.

Důkaz. Je-li $k = h = 0$, pak v každém okolí J_x bodu a je $k \,.\, f(x) + h \,.\, g(x) = 0$, proto $|k \,.\, f(x) + h \,.\, g(x)| < \varepsilon$, kde ε je zcela libovolné číslo kladné. Můžeme tedy v dalším předpokládat, že aspoň jedno z čísel k, h je různé od nuly.

Naše předpoklady značí, že ke každému $\varepsilon' > 0$ lze najít takové okolí J'_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J'_x je $|f(x)| < \varepsilon'$. Podobně lze ke každému $\varepsilon'' > 0$ najít takové okolí J''_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J''_x je $|g(x)| < \varepsilon''$. Máme dokázat, že také ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $|k \,.\, f(x) + h \,.\, g(x)| < \varepsilon$. Budiž tedy dáno libovolné $\varepsilon > 0$ a zvolme ε' a ε'' tak, aby

$$\varepsilon' \leqq \frac{\varepsilon}{|k| + |h|}, \quad \varepsilon'' \leqq \frac{\varepsilon}{|k| + |h|}.$$

K těmto zvoleným číslům ε' a ε'' nalezněme příslušná okolí J'_x a J''_x. Obě nerovnosti $|f(x)| < \varepsilon'$, $|g(x)| < \varepsilon''$ jsou splněny pro všecka $x \neq a$ z průniku J_x intervalů J'_x a J''_x. Pro každé takové x je podle vztahů (1) a (2)

$$|k \,.\, f(x) + h \,.\, g(x)| \leqq |k| \,.\, |f(x)| + |h| \,.\, |g(x)| < |k|\varepsilon' +$$
$$+ |h|\varepsilon'' \leqq |k| \frac{\varepsilon}{|k| + |h|} + |h| \frac{\varepsilon}{|k| + |h|} = \varepsilon.$$

Poněvadž J_x je okolí bodu a, je $\lim\limits_{x \to a}[k \,.\, f(x) + h \,.\, g(x)] = 0$, jak jsme měli dokázat.

Odtud plyne jako důsledek, že **každá funkce může mít v každém bodě svého oboru nejvýše jednu limitu.** To, že nemusí mít žádnou limitu, vyplynulo z příkladu 15. To, že nemůže mít dvě, dokážeme takto:

Dejme tomu, že by funkce f měla v bodě a dvě limity b a c a že by bylo $b \neq c$. Protože b je limita funkce f v bodě a, je funkce $f(x) - b$ nekonečně malá v okolí bodu a. Protože c je rovněž limita funkce f v bodě a, je také funkce $f(x) - c$ nekonečně malá v okolí bodu a. Podle právě dokázané věty 6 je i funkce $\varphi(x) = [f(x) - b] - [f(x) - c] = c - b$ nekonečně malá v okolí bodu a. To znamená: zvolíme-li libovolné $\varepsilon > 0$, je možno nalézt takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $|\varphi(x)| < \varepsilon$ čili $|c - b| < \varepsilon$. Zvolíme-li však $\varepsilon < |c - b|$, dostáváme $|c - b| < |c - b|$, ale to není pravda. Není tedy možné, aby funkce f měla v bodě a dvě různé limity b a c.

Je ovšem možné, aby měla funkce f v bodě a limitu zprava rovnou b a limitu zleva rovnou c a aby $b \neq c$ (viz příklad 19); limita zprava ani limita zleva však není limita.

Funkce g, která má tu vlastnost, že pro všecka x z jistého intervalu J_x je $h < g(x) < k$, kde k a h jsou vhodná čísla, se jmenuje *omezená* v tomto intervalu. Označíme-li větší z čísel $|k|$, $|h|$ písmenem m, lze naši podmínku zapsat ve tvaru $|g(x)| < m$, kde $m > 0$.

Za interval J_x budeme často volit nějaké okolí bodu a. O funkci g budeme říkati, že je omezená v okolí J_x bodu a, i když hodnota $g(a)$ nebude definována, ale pro všecka $x \neq a$ z J_x bude platit $|g(x)| < m$, kde $m > 0$.

Věta 7. Nechť je funkce f nekonečně malá v okolí bodu a a funkce g je v jistém okolí bodu a omezená. Pak je funkce $f(x) \,.\, g(x)$ nekonečně malá v okolí bodu a.

Důkaz. Podle daných předpokladů lze ke každému $\varepsilon' > 0$ nalézt takové okolí J'_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J'_x je $|f(x)| < \varepsilon'$. Dále existuje takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $|g(x)| < m$, kde $m > 0$ je vhodné číslo. Pak pro každé $x \neq a$ z průniku J''_x intervalů J_x a J'_x je

$$|f(x) \,.\, g(x)| = |f(x)| \,.\, |g(x)| < m\varepsilon'.$$

Volíme-li tedy zcela libovolné $\varepsilon > 0$, stačí volit ε' tak, aby

$m\varepsilon' \leqq \varepsilon$, t. j. $\varepsilon' \leqq \dfrac{\varepsilon}{m}$. Pak pro každé $x \neq a$ z J''_x je $|f(x) \,.\, g(x)| < \varepsilon$. Poněvadž J''_x je okolí bodu a, proto $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \,.\, g(x)] = 0$.

Věta platí samozřejmě i tehdy, když je funkce g nekonečně malá v okolí bodu a, neboť taková funkce g je rovněž omezená v jistém okolí bodu a, jak plyne z nerovnosti $|g(x)| < \varepsilon$ platné pro každé $x \neq a$ ve vhodném okolí J_x bodu a.

Věta 8. Je-li $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c \neq 0$, je funkce $\dfrac{1}{g(x)}$ omezená v jistém okolí bodu a.

Důkaz. Poněvadž $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $|g(x) - c| < \varepsilon$. Proto

$$|c| - |g(x)| \leqq ||g(x)| - |c|| \leqq |g(x) - c| < \varepsilon$$

podle (1), takže $|g(x)| > |c| - \varepsilon$. Volíme-li $\varepsilon < |c|$, a to lze, neboť $c \neq 0$, je $|c| - \varepsilon > 0$, takže pro každé $x \neq a$ z J_x platí

$$\left|\frac{1}{g(x)}\right| < \frac{1}{|c| - \varepsilon}.$$

Věta 9. Nechť $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$. Potom

a) $\lim\limits_{x \to a}[k \,.\, f(x) + h \,.\, g(x)] = kb + hc$, kde k a h jsou daná čísla,

b) $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \,.\, g(x)] = bc$,

c) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$, pokud $c \neq 0$.

Důkaz. Je-li $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, pak podle věty 5 je $f(x) = b + \varphi(x)$, $g(x) = c + \psi(x)$, kde φ a ψ jsou funkce nekonečně malé v okolí bodu a. Potom

$$\text{a)}\ k \,.\, f(x) + h \,.\, g(x) = k[b + \varphi(x)] + h[c + \psi(x)] = \\ = kb + hc + k \,.\, \varphi(x) + h \,.\, \psi(x).$$

Avšak $k \,.\, \varphi(x) + h \,.\, \psi(x)$ je podle věty 6 funkce nekonečně malá v okolí bodu a. Proto podle věty 5 je $\lim\limits_{x \to a}[k \,.\, f(x) + h \,.\, g(x)] = kb + hc$.

$$\text{b)}\ f(x) \,.\, g(x) = [b + \varphi(x)][c + \psi(x)] = \\ = bc + c \,.\, \varphi(x) + b \,.\, \psi(x) + \varphi(x) \,.\, \psi(x).$$

Avšak $c \,.\, \varphi(x) + b \,.\, \psi(x) = \varrho(x)$ je podle věty 6 funkce nekonečně malá v okolí bodu a a $\varphi(x) \,.\, \psi(x) = \sigma(x)$ je podle věty 7 rovněž funkce nekonečně malá v okolí bodu a. Proto také $\varrho(x) + \sigma(x)$ je podle věty 6 funkce nekonečně malá v okolí bodu a, takže podle věty 5 je $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \,.\, g(x)] = bc$.

$$\text{c)}\ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} + \frac{b + \varphi(x)}{c + \psi(x)} - \frac{b}{c} = \frac{b}{c} + \\ + \frac{c \,.\, \varphi(x) - b \,.\, \psi(x)}{c[c + \psi(x)]} = \frac{b}{c} + \frac{1}{g(x)} \,.\, [\varphi(x) - \frac{b}{c} \,.\, \psi(x)].$$

Avšak $\dfrac{1}{g(x)}$ je podle věty 8 omezená v jistém okolí bodu a a $\varphi(x) - \dfrac{b}{c} \,.\, \psi(x)$ je pro $c \neq 0$ podle věty 6 nekonečně malá v okolí bodu a. Proto je podle věty 7 i funkce $\dfrac{1}{g(x)}\,[\varphi(x) - \dfrac{b}{c} \,.\, \psi(x)]$ nekonečně malá v okolí bodu a, takže podle věty 5 je $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$.

Věta **10.** Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b \neq 0$, existuje takové okolí J_a bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_a hodnota $f(x)$ má totéž znaménko jako číslo b.

Důkaz. Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b$, znamená to, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové okolí J_a bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_a je $|f(x) - b| < \varepsilon$, čili podle (3) platí $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Je-li $b > 0$, volme $\varepsilon = b$. Pak pro všecka $x \neq a$ z J_a je $0 < f(x)$. Je-li však $b < 0$, volme $\varepsilon = -b$. Pak rovněž pro všecka $x \neq a$ z J_a je $f(x) < 0$.

Věta **11.** Je-li $\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x)$, existuje takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $f(x) > g(x)$.

Důkaz. Vezmeme-li v úvahu funkci $f(x) - g(x)$, je $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) > 0$ (věta 9); proto podle věty 10 existuje takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $f(x) - g(x) > 0$ čili $f(x) > g(x)$.

Je-li $g(x) = k$, zní naše věta takto: Je-li $\lim_{x\to a} f(x) > k$, kde k je konstanta, existuje takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $f(x) > k$.

Věta **12.** Jestliže existují limity $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$ a pro všecka $x \neq a$ z jistého okolí J_x bodu a platí $f(x) \leqq g(x)$, pak $b \leqq c$.

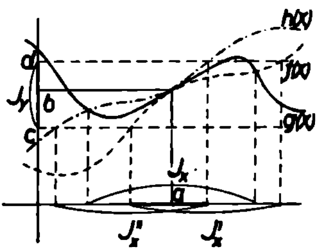
Důkaz. Kdyby bylo $b > c$, muselo by podle věty 11 existovat takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x by bylo $f(x) > g(x)$, ale to není možné, neboť naše věta žádá, aby pro všecka x z jistého okolí bodu a bylo právě naopak $f(x) \leqq g(x)$.

Je-li $g(x) = k$, zní naše věta takto: Jestliže existuje limita $\lim_{x\to a} f(x) = b$ a jestliže pro všecka $x \neq a$ z jistého okolí J_x bodu a platí $f(x) \leqq k$, kde k je konstanta, pak $b \leqq k$.

Je třeba výslovně upozornit na to, že i když je hodnota $f(x)$ menší než $g(x)$ pro všecka $x \neq a$ z jistého okolí J_x bodu a, může se stát, že si příslušné limity v bodě a mohou být rovny, jak ukazuje tento příklad: Je-li $f(x) = 1 - x^2$ a $g(x) = 1 + x^2$, je pro každé $x \neq 0$ $f(x) < g(x)$; přesto však $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} g(x) = 1$.

Věta **13**. Jestliže pro každé $x \neq a$ z jistého okolí J_x bodu a platí $f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$ a existují-li limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x)$, existuje také limita $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ a je rovna oběma limitám předcházejícím.

Důkaz. Označme b společnou hodnotu limit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x)$. Pak ke každému okolí J_y bodu b existuje okolí J'_x bodu a tak, že pro všecka $x \neq a$ z J'_x hodnota $f(x)$ padne do J_y. Volíme-li za J_y interval (c, d), kde $c < b < d$, znamená to, že pro každé $x \neq a$ z J'_x je $c < f(x) < d$. Dále k okolí J_y existuje okolí J''_x bodu a tak, že pro všecka $x \neq a$ z J''_x hodnota $h(x)$ padne do J_y, t. j. platí $c < h(x) < d$. Utvořme průnik $\bar{J}_x$ okolí J_x, J'_x a J''_x. Pak pro každé $x \neq a$ z $\bar{J}_x$ platí



Obr. 31

a) $f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$, neboť x patří do J_x,

b) $c < f(x) < d$, neboť x patří do J'_x,

c) $c < h(x) < d$, neboť x patří do J''_x.

Proto je celkem $c < f(x) \leqq g(x) \leqq h(x) < d$ čili $c < g(x) < < d$, takže $g(x)$ patří rovněž do J_y. Tím je ke každému okolí J_y bodu b nalezeno okolí J_x bodu a tak, že pro každé $x \neq a$ hodnota $g(x)$ padne do J_y. To však znamená, že $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ (viz obr. 31).

Věty obdobné větám 4—13 dostaneme, když místo oboustranných limit vezmeme pouze limitu zprava (po případě limitu zleva). Ačkoli těchto vět pro jednostrannou limitu několikrát ještě použijeme, nebudeme je pro úsporu místa dokazovat. Ostatně tyto důkazy by byly jen opakováním důkazů právě uvedených.

Jestliže v definicích limity uvedených na počátku této kapitoly nahradíme bod b nevlastním bodem ∞ nebo $-\infty$, dostaneme definici t. zv. *nevlastní limity*. To, že funkce f má v bodě a nevlastní limitu ∞, píšeme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Znamená to, že ke každému okolí (k, ∞) nevlastního bodu ∞ existuje takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x padne hodnota $f(x)$ do intervalu (k, ∞). Podobný význam mají i ostatní případy.

Funkce může mít nevlastní limitu i v nevlastním bodě. Má-li na příklad funkce f v nevlastním bodě ∞ nevlastní limitu ∞, píšeme to $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ a znamená to: Ke každému okolí (k, ∞) nevlastního bodu ∞ existuje okolí (h, ∞) nevlastního bodu ∞ tak, že pro všecka x z intervalu (h, ∞) hodnota $f(x)$ padne do intervalu (k, ∞).

Příklad 20. Dokážeme, že $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, t. j. že funkce $\frac{1}{x}$ má v bodě 0 nevlastní limitu zprava ∞ a nevlastní limitu zleva $-\infty$. Volíme-li libovolné okolí (k, ∞) nevlastního bodu ∞, dovedeme udat takové pravé okolí J_x bodu 0, že pro všecka $x \neq 0$ z J_x hodnota $f(x)$ padne do intervalu (k, ∞). Stačí se omezit jen na kladná k. Ptáme se tedy, pro která x je $f(x) > k$ čili $\frac{1}{x} > k$. Dostáváme $0 < x < \frac{1}{k}$, t. j. daná nerovnost je splněna pro každé x z intervalu $\left(0, \frac{1}{k}\right)$. Je tedy vskutku $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$. Podobně do okolí $(-\infty, k')$, kde $k' < 0$, nevlastního bodu $-\infty$ padnou ty hodnoty $f(x)$, pro něž je $\frac{1}{x} < k'$. Odtud plyne $\frac{1}{k'} < x < 0$, t. j. daná nerovnost je splněna pro každé x z intervalu $\left(\frac{1}{k'}, 0\right)$, který tvoří levé okolí bodu 0. Je tedy $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Cvičení.

11. Dokažte, že $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{|x| - 1} = 2$, $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{|x| - 1} = 2$.

12. Dokažte, že a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

13. Dokažte, že a) $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = \infty$, b) $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

14. Dokažte, že a) při $c \neq 0$ je $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c}$, b) při $c \neq 0$ a $bc > ad$ je $\lim\limits_{x \to -\frac{d}{c}+} \frac{ax + b}{cx + d} = \infty$ $\lim\limits_{x \to -\frac{d}{c}-} \frac{ax + b}{cx + d} = -\infty$.

15. Dokažte, že a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x + a)$ znamená totéž jako $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x + a)$ znamená totéž jako $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, c) $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \infty$ znamená totéž jako $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

16. Jsou-li funkce f a g omezené v intervalu J_x, pak i funkce $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ jsou omezené v intervalu J_x. Dokažte.

17. Je-li $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, je $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |b|$. Dokažte. Platí věta také obráceně?

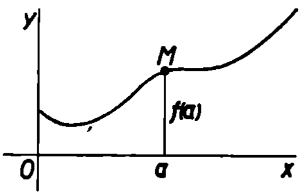
18. Je-li $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ a jestliže pro každé $x \neq a$ z nějakého okolí J_x bodu a platí $|g(x)| \leqq |f(x)|$, pak také $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Dokažte.

19. Je-li funkce f omezená v nějakém okolí bodu a, není $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$. Dokažte.

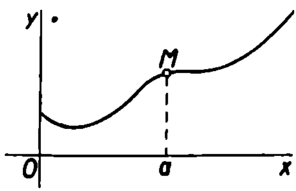
20. Věty 4—13 dokažte pro limitu zprava a pro limitu zleva.

III. SPOJITOST

Je dána funkce f definovaná ve všech bodech nějakého okolí J_x bodu a nejvýše s výjimkou tohoto bodu a. Znázor-



Obr. 32



Obr. 33

níme-li si tuto funkci graficky, bude v obvyklých případech tímto znázorněním jakási křivka. Mysleme si, že tuto křivku probíháme bod po bodu tak, že se blížíme k bodu M, jehož vzdálenost od osy y je a.