Plochy stavebně-inženýrské praxe

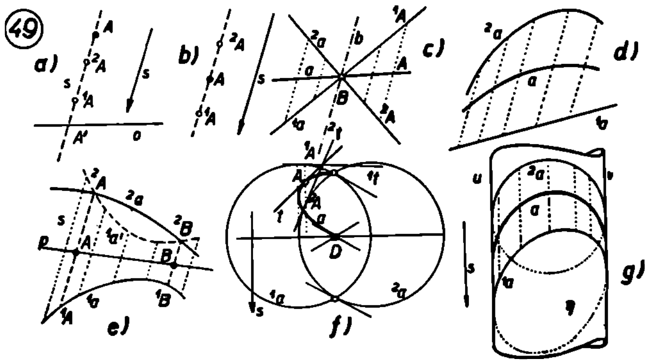
8. Plochy součtové

In: František Kadeřávek (author): Plochy stavebně-inženýrské praxe. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1950. pp. 88–94.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403322

8. SOUČTOVÉ PLOCHY

8,0. Základní pojmy. Buď v rovině (obr. 49a) dána pevná přímka o — *osa sčítání* — a pevný směr s — *směr sčítání*. V libovolné přímce $s' \parallel s$ položené dva body ${}^1A$, ${}^2A$, vzdálené od osy o směrem s o délky $\overline{{}^1AA'}$, $\overline{{}^2AA'}$ vedou k dalšímu bodu A, pro nějž $\overline{AA'} = \overline{{}^1AA'} + \overline{{}^2AA'}$. Bod A označujeme



jako součet bodů ${}^1A$, ${}^2A$ pro osu o a směr s. Součet může býti pojat *algebraicky*, to jest být součtem nebo rozdílem pořadnic čítaných bodů směrem s. Uvážíme-li místo součtu pouze *polovinu* součtu, bude bod A součet bodů ${}^1A$, ${}^2A$, středem jimi určené úsečky (obr. 49b). Z tohoto pojetí plyne, že:

Součet přímek ${}^1a$, ${}^2a$ směrem s je přímka a, která je čtvrtou harmonickou k trojině ${}^1a$, ${}^2a$ a $b \parallel s$ jdoucí bodem B (obr. 49c).

Dále je patrno z obr. 49d:

Součet algebraické křivky stupně m-tého ${}^2a$ a přímky ${}^1a$ je k ní afinní křivka a, která je též stupně m-tého.

Abychom určili stupeň součtu a dvou křivek ^1a stupně m-tého a ^2a stupně n-tého směrem s, zvolme libovolnou přímku p (obr. 49e) a hledejme počet jejích průsečíků s křivkou a! Křivka $^1a'$ směrem s souměrně sdružená s křivkou ^1a a proto též stupně *m-tého*, protíná křivku ^2a v mn bodech ^2A, ^2B, ..., které vedou, jak z obrázku patrno, k průsečíkům, A, B, ... přímky p se součtem a daných křivek.

Součet dvou křivek ^1a, ^2a stupně m-tého a n-tého je obecně algebraická křivka stupně mn-tého.

V obr. 49f stanovena část součtu směrem s dvou kružnic ^1a, ^2a, jejichž středná je k s kolmá. Je to křivka tvaru *lemniskaty s dvojným uzlovým bodem* v bodě D. Ježto součet dvou sečen základních křivek dá sečnu součtu, je z toho zřejmo, že:

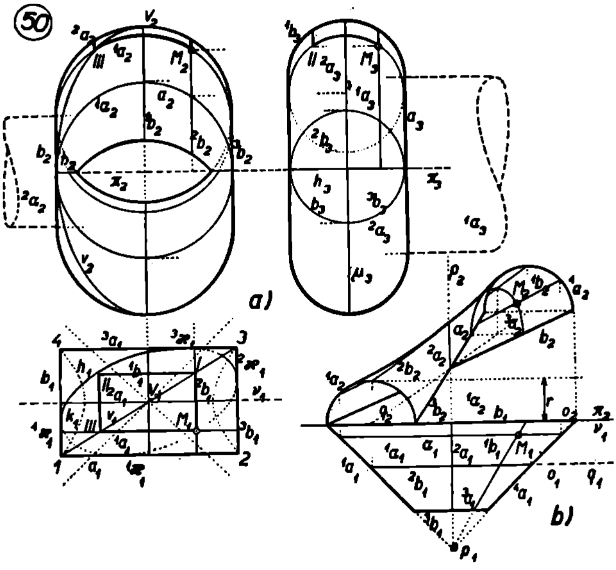
Součet tečen sčítaných křivek je tečnou jejich součtu.

Tyto úvahy lze rozšířiti i do prostoru. Můžeme uvažovati buď základní rovinu ω a směr sčítání s. Dva body ^1A a ^2A v přímce $s' \parallel s$ protínající ω v bodě A' dávají součet A, pro nějž platí, že $\overline{AA'} = \overline{^1AA'} + \overline{^2AA'}$, nebo chceme-li z úvah vyloučiti rovinu ω, můžeme bráti za součet bodů ^1A, ^2A položených v přímce $s' \parallel s$ střed A úsečky jimi určené. Tedy:

Součtem α dvou rovin $^1\alpha$, $^2\alpha$ je opět rovina procházející jejich průsečnicí, součtem algebraické plochy $^1\alpha$ m-tého stupně a roviny $^2\alpha$ je plocha α stupně m-tého a součtem α dvou algebraických ploch $^1\alpha$ m-tého a $^2\alpha$ n-tého stupně je obecně algebraická plocha stupně mn-tého.

Vytkneme-li v prostoru (obr. 49g) dvě roviny $^1\alpha$ a $^2\alpha$ a protneme-li je plochou válcovou druhého stupně rovnoběžnou se směrem s sčítání, získáme tím v rovinách $^1\alpha$ a $^2\alpha$ dvě afinně sdružené kuželosečky ^1a, ^2a, jejichž součtem je kuželosečka k nim afinně sdružená. Z tohoto prostorového řešení plyne poučka, že v rovině součtem dvou elips (hyperbol nebo parabol) o společných tečnách rovnoběžných se směrem sčítání jsou dvě elipsy (hyperboly nebo paraboly), dotýkající se týchž dvou tečen.

Plyne to z toho, že křivku ^2a můžeme bráti na ploše η tak, jak je vyznačeno v obrazci, nebo zaměnit ji křivkou $^2a'$, která má v části viditelné křivky ^2a svou část neviditelnou a naopak.



8,I. Plochy kuželosečko-kuželosečkové. Proveďme příklad na sčítání dvou ploch válcových $^1\alpha$, $^2\alpha$ (obr. 50a) v prostoru! Sčítání provádějme pro rovinu π jako základní a pro směr sčítání kolmý k této rovině! Součet dvou rotačních ploch válcových $^1\alpha$, $^2\alpha$, majících v π své osy bude *plocha čtvrtého stupně*, která má tři roviny kolmé souměrnosti, tři osy kolmé souměrnosti a která je plochou středovou: označme ji α!

V rovinách rovnoběžných s ν jsou položeny na ploše válcové $^1\alpha$ kružnice, na ploše válcové $^2\alpha$ přímky, proto v těchto rovinách bude míti α soustavu shodných kružnic. Totéž platí pro roviny rovnoběžné s μ. Tu na $^2\alpha$ jsou kružnice shodné a na $^1\alpha$ přímky. Z uvedeného je patrno, že α má dvě soustavy povrchových kružnic v rovinách rovnoběžných s ν a μ.

Uvažovanou plochu možno též vytvořiti jako plochu posouvání translací kružnice b po kružnici a.

Podél těchto kružnic se dotýkají plochy α plochy válcové, které přecházejí v roviny $^1\varkappa$, $^2\varkappa$, $^3\varkappa$, $^4\varkappa$, v nichž jsou položeny kružnice, podél nichž se v celém rozsahu uvedené roviny dotýkají plochy α. Jsou to (obdobně jako u anuloidu — odst. 2,7) *kráterové kružnice* plochy α, které v rovinách $\varkappa$ vytyčují lunety, bylo-li plochy α použito jako lícní plochy klenby nad obdélníkem. Plocha α bývá označována jménem *plocha kruho-kruhová*, v němž vytčena řídící i tvořící křivka. Plocha kruho-kruhová nad obdélníkem má kruhové lunety o různých výškách, nahradíme-li větší kružnici elipsou o téže výšce, jakou má menší kružnice, řeší vytvořená *plocha kruho-eliptická* líc klenby o stejně vysokých lunetách.

Z plochy α bývala používána jen část — v obraze vyznačena body *M I II III* — která do podporujícího zdiva nejde tečně, jako je tomu u použité plochy α v mezích kráterových kružnic, ale seče roviny podpůrného zdiva v úhlu.

Vytkneme-li v půdoryse elipsu k_1, která se dotýká obdélníkového obrysu půdorysu plochy, můžeme tuto křivku pokládati za půdorys elipsy ^1k položené na ploše válcové $^1\alpha$ a za půdorys další elipsy ^2k ležící na válcové ploše $^2\alpha$. Jejich součtem je elipsa k plochy α. Z toho je patrno, že, *na ploše α je nekonečně mnoho elips, které se promítají do roviny π do elips vepsaných obdélníku 1 2 3 4.* Každým bodem *M* plochy jdou dvě takové elipsy. Týmž bodem jdou i dvě kružnice, na jejichž podkladě vyhledáme tečnou rovinu τ plochy. Touž rovinu mohli bychom určiti i jako součet tečných rovin válcových ploch $^1\alpha$, $^2\alpha$ v bodech odpovídajících bodu *M*.

Plochy válcové ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ protínají se v prostorové křivce čtvrtého stupně ${}^1h \equiv {}^2h$ souměrné k rovině π, kterou béřeme za základ kolmého sčítání. Vytkneme-li na křivce dva body ${}^1H \equiv {}^2H$, dají součet H ve dvojité výši nad π a tak dojdeme ke křivce prostorové stupně čtvrtého o půdorysu v rovnoosé hyperbole h_1, která náleží α. Vezmeme-li však na křivce průsečné dva body ${}^1H'$ a ${}^2H'$ souměrně položené k π, dají součet H' položený v π na křivce h_1. Z toho je patrno, že *plocha* α *má v* π *položenou rovnoosou hyperbolu* h, která jde body *1*, *2*, *3*, *4* a *která je pro plochu* α *dvojnou křivkou.* Mají-li válcové plochy ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ týž poloměr, rozpadne se tato dvojná hyperbola na dvě dvojné, navzájem kolmé přímky plochy α.

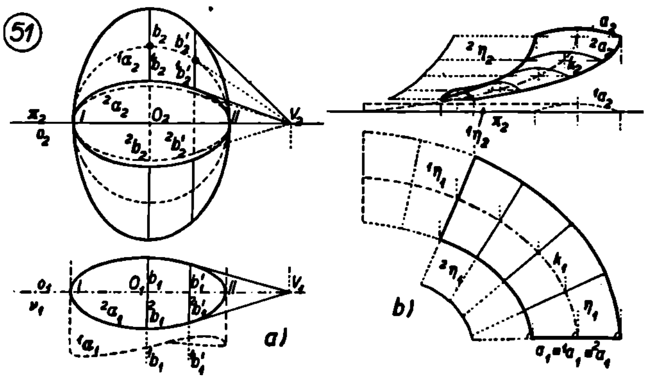
Plochy translační kuželosečko-kuželosečkové byly za prof. Tilšera na české technice ve veliké oblibě a studenti vypracovali řadu jejich kartonových modelů.

Z uvedeného příkladu je patrno, že lze každou translační plochu, jejíž křivky řídící a tvořící jsou křivky rovinné, vytvořiti též jako součtovou plochu dvou válcových ploch.

8,2. Plocha cylindroidu. V obr. 50b je zobrazen součet α rotační plochy válcové ${}^1\alpha$ mající osu o v rovině π a plochy hyperbolického paraboloidu ${}^2\alpha$, daného přímkou $p \perp \pi$, přímkou q a rovinou π jako řídícími útvary. Součet α je zborcená plocha čtvrtého stupně. Povrchové přímky, rovnoběžné s rovinou ν protínají elipsy ${}^1a$ a ${}^4a$, jevící se v náryse jako kružnice, v půdoryse jako přímky svírající s ν_1 úhel 135° a 45°. Plocha je t. zv. *cylindroid* (viz odst. 5,11). V rovinách jdoucích přímkou p má elipsy, z nichž ${}^2a$ v rovině kolmé k ν je kružnicí. Tečná rovina v bodě M určí se povrchovou přímkou ${}^1b$ a tečnou k elipse ${}^3a$ bodem M jdoucí nebo za pomoci dotykové zborcené plochy druhého stupně nebo Chaslesovou větou (odst. 5,5). Přímky b a ${}^3b$ jsou torsální přímky plochy α, roviny podél nich se dotýkající jsou rovnoběžné s ν.

Plocha bývala používána jako lícní plocha klenby nad schodištěm, které vedlo z jednoho patra do patra vyššího, při čemž chodby těchto pater byly překlenuty valenými klenbami o plném oblouku, ukončenými elipsami ^1a a ^4a. (Fréziersův cylindroid).

8,3. Další příklady součtových ploch. V obr. 51a bylo zvoleno totéž sčítání jako v předešlém příkladě, základní rovinou je rovina π a směr sčítání je k ní kolmý. Plocha $^1\alpha$ je rotační



plocha válcová kolmá k rovině ν, plocha $^2\alpha$ je rotační elipsoid o ose o. Součet α má v rovinách kolmých k ose o vždy dvě kružnice, podél nichž se plochy α dotýkají dvě plochy kuželové, mající vrchol V v ose o. Jsou to součty dotykové plochy kuželové elipsoidu $^2\alpha$ a tečné roviny plochy válcové $^1\alpha$. Elipsy, které mají v půdoryse v bodech I, II své vrcholy, můžeme pokládati jak za půdorys elipsy na elipsoidu $^2\alpha$, tak elipsy na ploše válcové $^1\alpha$. Jejich součet je opět elipsa, která náleží součtu α a podél níž se α dotýká válcová plocha, vzniklá sečtením plochy válcové $^1\alpha$ a válcové plochy dotýkající se elipsoidu $^2\alpha$ podle příslušné povrchové elipsy. Podél dvou z těchto elips přejde dotyková plocha válcová do roviny, získáváme tak na α dvě *křivky kráterové*. Označme úhel sevřený jejich rovinami písmenou φ! Vidíme, že zde uvažovaná plocha α je plochou, která patří do skupiny ploch uvažovaných v odst. 3,2 a je-li úhel $\varphi = 360° : n$, kde n je číslo celé, lze $\frac{1}{2}n$ těchto ploch složiti v celek o společné ose o a podél svých kráterových elips se navzájem dotýkající a tento celek lze použíti jako ozdobný motiv.

V obr. 51b jsou zobrazeny dvě plochy, plocha římsová ${}^1\eta$ daná řídící křivkou k_1 v π a normálním řezem ${}^1a$ v rovině kolmé k π i ke křivce k_1 a dále zborcená pláň ${}^2\eta$ určená prostorovou křivkou k, jejímž půdorysem je k_1 a jejíž povrchové přímky kolmé ke křivce k jsou rovnoběžné s rovinou π. Součtová plocha η ploch ${}^1\eta$ a ${}^2\eta$ pro π jako základní rovinu sčítání a směr sčítání $s \perp \pi$, má v rovinách kolmých ke křivce k_1 a k π shodné mezi sebou křivky $a, a', \dots$ a shodně k π položené.

Je-li k silniční traçou a a příčným profilem silničního tělesa, je η plochou silniční koruny. Tato plocha vyskytuje se v stavitelství silničním a železničním v místech, kde mezi dvěma kruhovými oblouky bylo použito přechodnice nebo při použitých kruhových obloucích tam, kde není stejný spád a kde k není křivkou šroubovou. Je-li k šroubovicí, přechází plocha do plochy šroubové. Vraťme se k obr. 48b! Vytkneme-li plochy válcové ${}^1\eta$, ${}^2\eta$, pro něž jsou a a b normálními řezy, je jejich součet pro směr s plocha η.