Plochy stavebně-inženýrské praxe

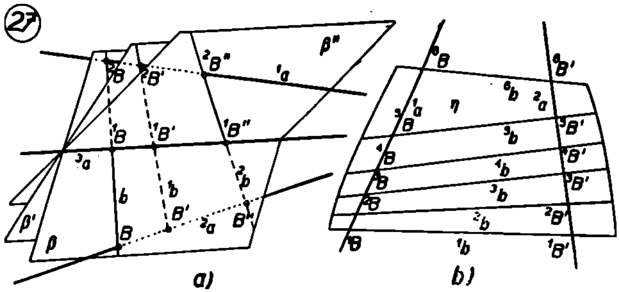
5. Plochy zborcené

In: František Kadeřávek (author): Plochy stavebně-inženýrské praxe. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1950. pp. 50–74.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403319

5. PLOCHY ZBORCENÉ

5,0. Vytvoření zborcené plochy. V odst. 4 byl sledován takový pohyb přímky v prostoru, že vždy z jedné polohy přecházela do následující blízké tak, že s ní byla různoběžná. Vznikla tak plocha přímková, sestávající ze souhrnu tečen prostorové křivky; libovolné dvě její povrchové přímky byly mezi sebou mimoběžné, ale každé dvě soumezné se

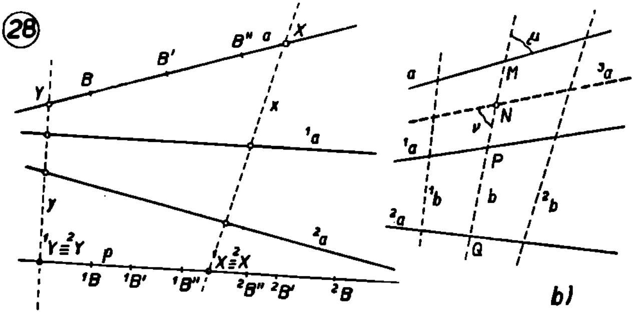


protínaly. Plochu bylo možno rozvinouti bez porušení do jedné roviny. Takto vzniklé plochy jsou obalovými plochami pohybující se roviny, nazývají se plochy rozvinutelné. Přímce v prostoru je však možno předepsati i jiný pohyb a to takový, aby přímka vyplňujíc plochu přecházela z jedné polohy do polohy soumezné tak, aby byla vždy k této další poloze mimoběžná. Vznikne tak *přímková plocha*, která nemá na svém povrchu obecně ani v limitě žádný rovinný proužek a proto ji nelze rozvinouti, rozložiti bez porušení do roviny, plocha se nazývá *plochou zborcenou*.

Pohyb přímky, která má vytvořiti zborcenou plochu, nejsnáze se stanoví tak, že se požaduje, aby pohybující se přímka stále protínala tři dané křivky v prostoru ^1a, ^2a, ^3a, lhostejno, zda jsou to křivky rovinné nebo prostorové. Označují se jako *řídicí křivky* dané zborcené plochy.

5,1. Vytvoření zborceného hyperboloidu a jeho vlastnosti. Povšimněme si nejprve případu, kdy ^1a, ^2a, ^3a jsou tři navzájem mimoběžné přímky (obr. 27a)! Proložme přímkou ^3a roviny β, β', β'', ... a vyhledejme jejich průsečíky B, B', B'', ... s přímkou ^2a a průsečíky ^2B, $^2B'$, $^2B''$, ... s přímkou ^1a. Uvedené řady bodové jsou v perspektivním vztahu k svazku rovin β, β', β'', ... o ose ^3a a proto jsou navzájem promětné.

28



a)

b)

Jejich spojnice $b \equiv B^2B$, $^1b \equiv B'^2B'$, ... jsou žádané přímky, které vyplňují zborcenou plochu $\eta \equiv (^1a, {}^2a, {}^3a)$, kde v závorce jsou uvedeny řídící útvary. Zaměníme-li úkol přímek ^3a a ^2a, shledáme, že i v přímce ^3a vzniklá řada bodová ^1B, $^1B'$, $^1B''$, ... je promětná s oběma řadami v přímkách ^1a a ^2a.

Je z toho patrno, že zborcená plocha η určená třemi mimoběžkami ^1a, ^2a, ^3a je totožná s plochou η (obr. 27b), vyplněnou přímkami ^1b, ^2b, ..., které spojují sdružené body ^1B, $^1B'$; ^2B, $^2B'$, ... promětných řad bodových, položených ve dvou mimoběžkách ^1a, ^2a.

Dokážeme, že η *je plocha druhého stupně!* Vytkněme (obr. 28a) přímky a, ^1a, ^2a a další přímku p navzájem mimoběžné! Řadu bodů B, B', B'' ... v přímce a promítněme na přímku p jednou z přímky ^1a do řady ^1B, $^1B'$, ... po druhé z přímky

^2a do p do řady ^2B, $^2B'$, ... Tyto řady jsou promětné s řadou v přímce a, proto jsou i navzájem promětné a mají obecně dva samodružné body $^1X \equiv {}^2X$, $^1Y \equiv {}^2Y$, jimiž lze vésti k mimoběžkám a, ^1a, ^2a společné příčky x, y. Je z toho patrno, že přímka p je protata dvěma přímkami x, y plochy η a protože η protíná libovolně zvolenou přímku p ve dvou bodech, je η plochou *druhého stupně.*

Rovina, vedená libovolnou přímkou, na př. x, této plochy, musí protínati η ještě v další přímce, z čehož je patrno, že η nese na svém povrchu nekonečně mnoho mezi sebou mimoběžných přímek b, ^1b, ^2b, x, y, ..., které protínají dané řídící přímky a, ^1a, ^2a, tvoříce *jednu soustavu povrchových přímek.* Na téže ploše η jsou další nekonečně mnohé, mezi sebou mimoběžné přímky, k nimž patří a, ^1a, ^2a a které protínají všechny přímky b, ^1b, ... první soustavy, tvoříce tak *druhou soustavu povrchových přímek* plochy η druhého stupně.

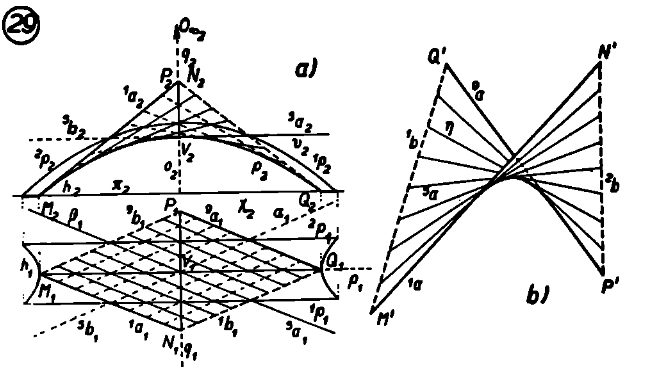
Každým bodem plochy η procházejí dvě povrchové přímky různých soustav a určují jeho tečnou rovinu. Plocha η částečně klesá pod, dílem vystupuje nad tečnou rovinu, protínajíc ji ve zmíněných dvou přímkách. Naopak v každé tečné rovině zborcené plochy η druhého stupně — obecně je to *hyperboloid* — jsou položeny dvě přímky různých soustav určující svým průsečíkem příslušný dotykový bod.

Toho použijeme k vyhledání tečné roviny plochy η (obr. 28b). Buď plocha η určena přímkami a, ^1a, ^2a! Vedeme-li bodem M přímky a příčku b mimoběžek ^1a, ^2a, je rovina μ, určená přímkami a a b již tečnou rovinou μ v bodě M. Proložíme-li přímkou a rovinu μ, je to tečná rovina plochy η. Spojnice jejích průsečných bodů P, Q s přímkami ^1a, ^2a dává přímku b druhé soustavy povrchových přímek plochy η, která protíná přímku a první soustavy v hledaném dotykovém bodě M roviny μ. Zvolíme-li bod N na přímce b, nebo proložíme-li touto přímkou tečnou rovinu ν, musíme mimo přímku b zjistiti ještě další dvě přímky téže soustavy ^1b a ^2b a pak řešíme případ pro trojinu b, ^1b, ^2b stejně jako jsme řešili při dané trojině a, ^1a, ^2a.

Vraťme se k obr. 27a! Přímkou ^3a první soustavy zborcené plochy η druhého stupně procházející roviny β, β', β'' ... obsahují přímky b, ^1b, ^2b, ... druhé soustavy, které vytyčují v ^3a dotykové body ^1B, $^1B'$, $^1B''$, ... těchto rovin. Z toho je patrno, že:

Svazek tečných rovin plochy η druhého stupně jdoucích povrchovou přímkou plochy je promětný s řadou dotykových bodů těchto rovin v téže přímce.

29



Zborcená plocha druhého stupně η určená trojinou libovolně zvolených řídících přímek ^1a, ^2a, ^3a protíná nevlastní rovinu v reálné kuželosečce a nese na svém povrchu elipsy, paraboly i hyperboly a je prostorově afinní plochou k rotační ploše, která byla probrána v odst. 2,6. Nazývá se *obecný, jednodílný* nebo *zborcený hyperboloid.*

Je tedy zborcený hyperboloid souhrnem spojnic sdružených bodů dvou promětných řad na dvou mimoběžkách.

5,2. Vytvoření hyperbolického paraboloidu a jeho vlastnosti. Povšimněme si nyní případu, kdy řady v uvažovaných mimoběžkách budou podobné nebo shodné (obr. 29a). Vytkněme body M, N, P, Q po dvou kolmo souměrně sdružené k přímce $o \perp \pi$, spojnice $MQ \perp NP$! Přímky $MN \equiv {}^1a$ a $PQ \equiv {}^9a$ buďtež spojnicemi dvou podobných řad, body M, N, ... jsou tu sdruženy s body Q, P, ... Spojnice ${}^1b$, ..., ${}^9b$ sdružených bodů obou řad vyplňují zborcenou plochu druhého stupně η, která obsahuje i úběžnou spojnici nevlastních úběžníků obou podobných řad. Plocha η obsahujíc jednu úběžnou přímku, musí míti společnou nezbytně s nevlastním útvarem v prostoru další úběžnou přímku, dotýkajíc se v jejich průsečíku O_∞ úběžné roviny; je proto *paraboloidem*.

Ježto obecné roviny sečné musí obsahovati dva různé reálné úběžné body položené v úběžných přímkách plochy, budou obecné rovinné řezy hyperboly. Jen roviny procházející bodem O_∞ protínají plochu v parabolách.

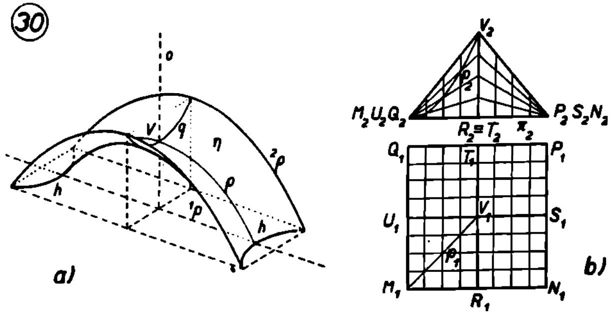
Na rozdíl od paraboloidu uvedeného v odst. 2,63 označujeme tento *zborcený paraboloid* přívlastkem *hyperbolický*.

Vytkněme osou o roviny α, β rovnoběžné s půdorysně promítacími rovinami přímek MQ, NP resp. MN, PQ! Tyto roviny obsahují úběžné přímky plochy η, která se může vytvořiti i jako souhrn přímek, které protínajíce přímky ${}^1a$ a ${}^9a$ jsou rovnoběžny s rovinou α, nebo různoběžkami k přímkám ${}^1b$, ${}^9b$ rovnoběžnými s rovinou β. Libovolná rovina σ protíná plochu η v hyperbole, která má v průsečnicích roviny σ s rovinami α, β, které se nazývají *řídícími rovinami plochy*, směry svých asymptot. Tak rovina π protíná plochu η v hyperbole h, která má v průsečnicích α_1, β_1 řídících rovin na π své asymptoty. Jsou to přímky rovnoběžné s povrchovými přímkami ${}^5a$, ${}^5b$ plochy, položenými v tečné rovině v bodu V. Roviny (M, o, P) a (N, o, Q) protínají plochu η v parabolách p a q a jmenují se *hlavní roviny plochy*. Je zřejmo, že takto zvolená plocha je kolmo souměrná k rovinám parabol p a q, které jmenujeme *hlavními řezy plochy*. Je též kolmo souměrná k přímce o, která je *osou plochy* a bod V na ní položený o tečné rovině $v \perp o$ je jediným v konečnu položeným *vrcholem plochy*. Rovnoběžné roviny protínají η v hyperbolách podobných a podobně položených, roviny rovnoběžné mezi sebou a současně rovnoběžné s osou o protínají plochu ve shodných parabolách.

Je-li $\alpha \perp \beta$, jsou křivky v rovinách kolmých k ose o rovnoosé hyperboly a paraboly p a q mají týž parametr. Tento zvláštní paraboloid je označován jako *orthogonální paraboloid*.

5,3. Použití hyperbolického paraboloidu v technické praxi. V technické praxi bývá zpravidla určen hyperbolický paraboloid t. zv. *zborceným čtyřúhelníkem*, t. j. body M', N', P', Q', které

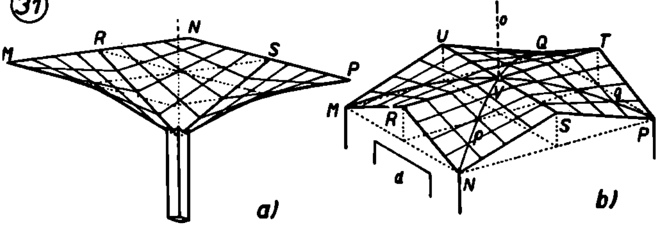
30



neleží v jedné rovině (obr. 29b). (Srov. ([4])). Spojnice $M'N'$, $P'Q'$ jsou dvě přímky ${}^1a$, ${}^9a$ jedné soustavy povrchových přímek, spojnice $M'Q' \equiv {}^1b$, $N'P' \equiv {}^2b$ povrchové přímky druhé soustavy. Rovina α' rovnoběžná s přímkami ${}^1b$, ${}^2b$ je jednou řídící rovinou, rovina β' rovnoběžná s přímkami ${}^1a$, ${}^9a$ druhou řídící rovinou, jejich průsečnice o' je směr osy. Rovina ${}^1v' \perp o'$ protne řídící roviny ve dvou přímkách, s nimiž vedeme k dvojinám ${}^1b$, ${}^2b$ a ${}^1a$, ${}^9a$ rovnoběžné příčky, které určují tečnou rovinu v' daného paraboloidu ve vrcholu. Paraboly, které jsou na něm položeny v rovinách jdoucích osou o procházející vrcholem plochy a půlí úhel sevřený přímkami, které procházejí vrcholem, jsou hlavní řezy daného paraboloidu, odpovídající parabolám p, q plochy η v obr. 29a.

V obr. 29a jsou vyznačeny mimo stopy h na rovině π ještě dvě paraboly ${}^1p$, ${}^2p$ shodné s hlavním řezem p. Část plochy η, omezená parabolami ${}^1p$ a ${}^2p$ a hyperbolou h (obr. 30a), je užívána nyní ve stavebnictví; provádí se ve ztuženém betonu ve značném rozpětí a slouží jako prvek, který řaděn k sobě, dává vhodnou střechu nad leteckými hallami a továrními prostory. Příloha čís. VI předvádí vnější pohled na použité části s výztuhami ve vrcholu, příloha čís. VII ukazuje pohled na dvě osazené části zespoda.

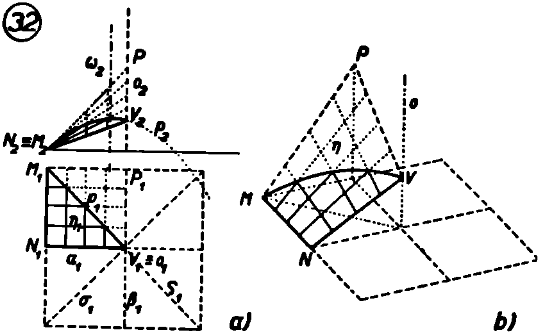
31



V obr. 30b je dán čtverec $MNPQ$ ve vodorovné rovině π. Středy jeho stran jsou spojeny s bodem V položeným nad jeho středem. Tím vznikly čtyři zborcené čtyrúhelníky $MRVU$, $NRVS$, $PSVT$, $QUVT$. Jimi určené čtyři hyperbolické paraboloidy mají v rovinách UVS a RVT řídící roviny, jsou to tedy orthogonální hyperbolické paraboloidy, body M, N, P, Q jdou jejich osy kolmo k rovině π. V rovinách MVR, NVQ jsou položeny paraboly, mající ve vrcholech daného čtverce vrcholy. V těchto bodech jsou tečné roviny ploch totožny s rovinou π. Tato skupina paraboloidů nehodí se dobře jako střecha, při malé vzdálenosti bodu V od π lze ji použít jako plochy stropní.

Obráceně použita (viz obr. 31a) slouží velmi dobře jako část střechy nad pracovišti nebo nádražními nástupišti. Dešťová voda odvádí se tu nosným sloupem. Použití této střechy nad pracovištěm podává příloha čís. VIII, v příloze čís. IX je zas vidno, jak opakované skupiny řeší velmi vhodně zakrytí nádražního nástupiště.

V obr. 31b je zobrazeno jiné seskupení hyperbolických paraboloidů, velmi často užívané nyní ve stavebnictví. Nad stranami čtverce $MNPQ$ sestrojeny jsou čtyři stejně vysoké štíty o vrcholech R, S, T, U, jimiž jdou dva hřebeny, protínající se ve vrcholu V. Zborcené čtyrúhelníky, které tu



vznikly, určují dva hyperbolické paraboloidy o společném vrcholu V, jeden má hlavní řez parabolický v parabole p, druhý v parabole q. V bodě V je jejich společná tečná rovina vodorovná. Oddělíme-li polovinu použité soustavy a to část $MRNSVUM$, můžeme tuto část použíti jako přístřešek, *markýzu* (francouzsky: la marquise) nad vchodem d ve zdi jdoucí hranou MN.

Ze statických důvodů nevolívá se bod V v téže výši jako body R, S, T, U, ale o něco výše. V tomto případě řeší střechu čtyři hyperbolické paraboloidy, tečné roviny v bodě V nejsou vodorovné. Uvedená skupina dochází hojného použití při nepatrné výšce jako konstrukce velmi vhodných stropů. V příloze čís. X je velmi pěkně zřejmý postup vypracování bednění pro skořepinovou střechu z hyperbolických paraboloidů.

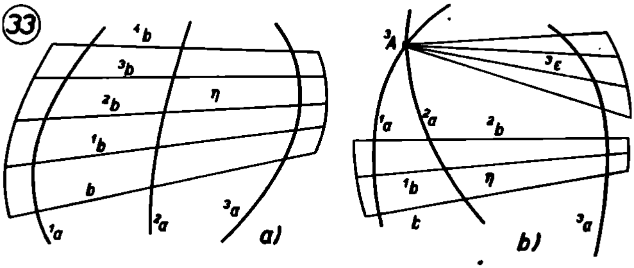
Dosud uvedené skupiny byly ze statických důvodů nahraženy skupinou, zpravidla označovanou jako *Aimondova báň* (obr. 32a). Nad čtvrtinou čtverce zvolen je zborcený čtyrúhelník $MNVP$, strana MN je vodorovná, body V a P jsou v nestejné výši, bod P je výš. Řídící roviny stanoveného hyperbolického paraboloidu jsou promítací roviny přímek NV a VP, použitá plocha je opět orthogonální hyperbolický paraboloid. Jeho řez s rovinou jdoucí přímkou MV svisle je parabola o svislé ose, mající svůj vrchol mimo bod V; její osa promítá se v náryse do přímky ω_2. Z této plochy η použije se jen část nad trojúhelníkem $M_1N_1V_1$ půdorysu a k ní se připojí dalších sedm dílů postupně k sobě kolmo souměrných podle rovin α, σ, β, ς. Tím dostáváme tvar staticky velmi výhodný, který nemá nad středem půdorysu nejvyšší části. Z půdorysu a nárysu je těžko představiti si tvar použité části hyperbolického paraboloidu, proto je použitá část plochy η vyznačena v axonometrickém pohledu v obr. 32b a připravená forma pro zhotovení Aimondovy báně je zobrazena v příloze čís. XI.

Stejně jako bylo použito hyperbolického paraboloidu určeného zborceným čtyrúhelníkem, může býti použito i plochy zborceného hyperboloidu v mezích daného zborceného čtyrúhelníka, ovšem místo řad podobných nastupují v jeho stranách řady obecné promětné. Jako příklad může sloužiti model studie na báň nad pravidelným mnohoúhelníkem pro železobetonovou skořepinu. Model byl vypracován ve stud. roce 1948-49 na vysoké škole inž. stavitelství. Příl. č. XI Hyperbolické paraboloidy používají se dále při řešení střech, ve stereotomii při spojování zdí z tesaného kamene o různých spádech [viz k tomu více v ([1]) str. 808 a násl. a ([5])], rovněž nachází použití při pracích zemních v stavitelství silničním a železničním při vyrovnávání spádů a v poslední době i ve stavbách vodních na převádění širších profilů do užších.

5,4. Obecná zborcená plocha a její stupeň. Obecná zborcená plocha určí se obdobně jako hyperboloid, který je dán třemi řídícími přímkami, třemi řídícími křivkami ^1a, ^2a, ^3a rovinnými nebo prostorovými (obr. 33a), o nichž předpokládáme, že *nemají* společných bodů. Povrchové přímky zborcené plochy stanovíme pak takto:

Na křivce ^1a vytkneme bod M, z něho promítneme obě zbývající křivky ^2a, ^3a kuželovými plochami; jejich společné přímky jsou pak již žádanými povrchovými přímkami

33



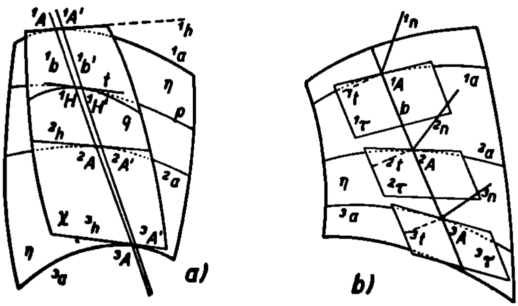
plochy η. Jsou-li křivky ^1a, ^2a, ^3a algebraické stupňů m, n, p, jde každým bodem křivky ^1a celkem np přímek, obdobně každým bodem křivek ^2a příp. ^3a jde mp příp. mn přímek. Posouváme-li bod M po křivce ^1a, tu ke každé z np jím procházejících přímek získáváme postupně soumezné mimoběžné přímky, které vytvořují np plášťů uvažované plochy, jdoucích křivkou ^1a. Z toho je samozřejmo:

Křivky ^1a, ^2a, ^2a stupňů m, n, p jsou pro vytvořovanou zborcenou plochu křivkami np, mp resp. mn násobnými. Průsečné křivky mají na nich své np, mp resp. mn násobné body.

Stupeň zborcené plochy η určíme pak tímto způsobem: Vytkněme dvě řídící přímky ^1a, ^2a a řídící křivku ^3a stupně p-tého! Libovolná přímka q určuje s přímkami ^1a, ^2a zborcenou plochu druhého stupně χ, která protíná křivku ^3a ve $2p$ bodech. Jimi procházejí povrchové přímky hyperboloidu $(^1a\,^2a\,q)$, které jsou též povrchovými přímkami plochy $\eta \equiv$ $\equiv (^1a, {}^2a, {}^3a)$ a proto protíná q plochu η ve $2\,p$ bodech, je tedy η stupně $2\,p$. Zvolením přímky ^1a a dvou křivek ^2a, ^3a stupňů n a p a použitím přímky q obdobně přicházíme k tomu, že plocha $(^1a, {}^2a, {}^3a)$ je stupně $2\,np$. Konečně stejnou úvahou použitím přímky q ve spojení se dvěma z daných křivek ^1a, ^2a, ^3a stupňů m, n, p, docházíme k tomu, že:

Zborcená plocha určená křivkami ^1a, ^2a, ^3a stupňů m, n, p a nemajících žádné společné body, je stupně $2\,mnp$.

(34)



Je-li jen jediná z řídících křivek transcendentní, není určená plocha algebraickou, ale je rovněž transcendentní.

Protínají-li se řídící křivky ^1a, ^2a v r bodech (obr. 33b), jedním z nich buď bod $3A$, tu z těchto bodů promítá se třetí křivka řídící stupně p-tého r plochami kuželovými stupně p-tého. Jejich povrchové přímky přináleží sice k souhrnu přímek, které protínají křivky ^1a, ^2a, ^3a, ale nemůžeme je čítati k vlastní zborcené ploše určené křivkami ^1a, ^2a, ^3a.

Mají-li proto křivky ^1a, ^2a, ^3a postupně r, s, t společných bodů a jsou-li stupňů m, n, p, je jimi určená zborcená plocha η stupně rovnajícího se $2\,mnp - rp - sm - tn$.

5,5. Tečná rovina v bodě zborcené plochy. Důležitým úkolem je vyhledati v daném bodě zborcené plochy příslušnou tečnou rovinu. Je-li dána (obr. 34a) zborcená plocha η a na ní bod ${}^1H$, proložíme tímto bodem povrchovou přímku ${}^1b$ plochy a libovolnou křivku p. Přímka ${}^1b$ splývá v celém svém rozsahu se svou tečnou, křivku p, která se nesmí dotýkati ${}^1b$, nahradíme v bodě ${}^1H$ tečnou t a rovina $\tau \equiv ({}^1b, t)$ jest hledanou tečnou rovinou. Je zřejmo, že:

Tečná rovina zborcené plochy jde příslušnou povrchovou přímkou a naopak, každá rovina, která jde povrchovou přímkou zborcené plochy, je její tečnou rovinou.

Je-li plocha η dána řídícími křivkami ${}^1a$, ${}^2a$, ${}^3a$, zvolme na prvé dva soumezné body ${}^1A$, ${}^1A'$ a veďme jimi soumezné, navzájem mimoběžné přímky ${}^1b$, ${}^1b'$ plochy (obr. 34a). Je zřejmo, že tyto přímky musí protínati i křivky ${}^2a$, ${}^3a$ ve dvojinách soumezných bodů ${}^2A$, ${}^2A'$; ${}^3A$, ${}^3A'$. Uvedené tři dvojiny bodové určují tečny ${}^1h$, ${}^2h$, ${}^3h$ křivek ${}^1a$, ${}^2a$, ${}^3a$ v bodech ${}^1A$, ${}^2A$, ${}^3A$ přímky ${}^1b$ plochy. Jimi určená zborcená plocha stupně druhého má proto s plochou η dvě soumezné povrchové přímky společné a proto má ve všech bodech přímky ${}^1b$ tytéž roviny tečné jako daná plocha η.

Zborcenou plochu η lze podél povrchové přímky ${}^1b$ nahraditi zborcenou plochou druhého stupně χ, určenou tečnami ke křivkám řídícím v průsečných bodech s přímkou ${}^1b$.

Proto platí pro η věta stanovená v odst. 5,1:

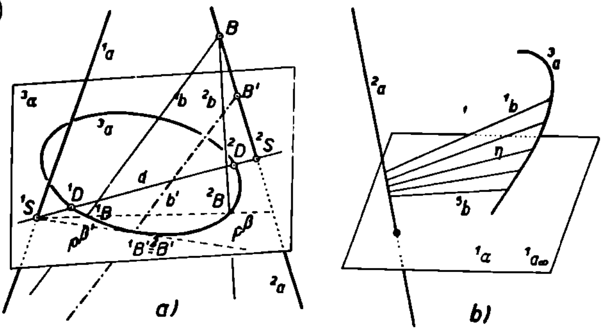
Řada bodů v přímce ${}^1b$ zborcené plochy η je promětná se svazkem jejich rovin tečných, jehož osou je táž přímka ${}^1b$ (poučka Chaslesova).

Zvolíme-li (obr. 34b) přímku b na zborcené ploše η dané křivkami ${}^1a$, ${}^2a$, ${}^3a$ a stanovíme-li jakýmkoli způsobem v jejích třech bodech ${}^1A$, ${}^2A$, ${}^3A$ tečné roviny ${}^1\tau$, ${}^2\tau$, ${}^3\tau$ a v nich dotykovými body tři libovolné přímky ${}^1t$, ${}^2t$, ${}^3t$, mohli bychom těmito přímkami vést libovolné roviny, které by protaly plochu η v křivkách ${}^1a'$, ${}^2a'$, ${}^3a'$, které určují touž plochu η a pro niž je stanovena podél b dotyková plocha druhého stupně přímkami ${}^1t$, ${}^2t$, ${}^3t$. Je zřejmé, že platí i širší věta:

Tři libovolné tečny ^1t, ^2t, ^3t zborcené plochy η v bodech ^1A, ^2A, ^3A povrchové přímky b této plochy určují zborcenou plochu stupně druhého, která má s η ve všech bodech přímky b společné roviny tečné.

Zvolíme-li ^1t, ^2t a ^3t rovnoběžné s jednou rovinou σ, určují *dotykový hyperbolický paraboloid.* Je-li $\sigma \perp b$, jsou přímky

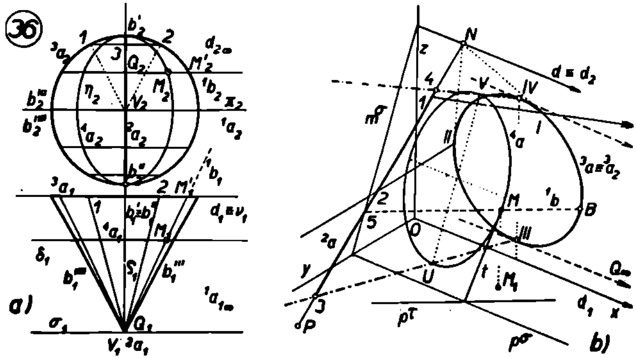
35



^1t, ^2t a ^3t a i ostatní přímky dotykového hyperbolického paraboloidu kolmé k b a po otočení kolem b o 90° přecházejí do *normál* plochy. I platí věta:

Normály vztyčené k zborcené ploše v bodech povrchové přímky vyplňují hyperbolický paraboloid.

5,6. Torsální přímky a kuspidální body. Buď dána zborcená plocha η řídícími přímkami ^1a a ^2a navzájem mimoběžnými a kuželosečkou ^3a položenou v rovině $^3\alpha$ jíž protínají přímky ^1a a ^2a v bodech ^1S a ^2S položených mimo kuželosečku ^3a (obr. 35a). Plocha η je stupně čtvrtého. Každým bodem křivky ^3a jde jediná povrchová přímka, přímky ^1a a ^2a jsou *přímky dvojné.* Proložme přímkou ^1a rovinu β, protínající $^3\alpha$ v přímce p^β a přímku ^2a v bodě B! Spojnice ^1b, ^2b bodu B s průsečíky ^1B, ^2B přímky p^β s ^3a jsou dvě přímky plochy η, náležející dvěma pláštům, které procházejí přímkou ${}^2a$. Vede-li se z bodu ${}^1S$ tečna $p^{\beta'}$ ke kuželosečce ${}^3a$ jako stopa roviny β' proložené přímkou ${}^1a$ na rovině ${}^3\alpha$, tu spojnice průsečíku B' roviny β' s ${}^2a$ s oběma splývajícími body ${}^1B' \equiv {}^2B'$ jsou dvě soumezné různoběžné povrchové přímky plochy η splývající v jediné přímce b'. V ní přechází jeden plášť plochy η



jdoucí dvojnou přímkou ${}^2a$ do druhého touž přímkou procházejícího pláště; podél b' chová se plocha jako plocha rozvinutelná (francouzsky *torse*, 5,0) a proto se nazývá tato přímka *přímkou torsální* plochy η. Její průsečík B' s řídící přímkou ${}^2a$ je *kuspidální bod* plochy, je to singulární bod, každá jím vedená rovina je pro plochu η tečnou rovinou.

Plocha čtvrtého stupně má čtyři přímky torsální a čtyři v nich položené body kuspidální.

Spojnice ${}^1S\ {}^2S$ je přímka, v níž splynuly dvě povrchové přímky plochy ${}^1S{}^1D{}^2S$ a ${}^1S{}^2D{}^2S$ v jedinou, je to *dvojná přímka* plochy η, *každá jí proložená rovina protíná plochu η ještě v kuželosečce.*

5,7. Konoidy. Zborcená plocha η, daná (obr. 35b) řídící rovinou ${}^1\alpha$, t. j. její úběžnou přímkou ${}^1a_\infty$, přímkou ${}^2a$ řídící v konečnu položenou a dalším řídícím *útvarem* ^3a, jmenuje se *konoid*.*) Je-li $^2a \perp {}^1\alpha$ je daný konoid η *přímým konoidem*, jinak je *kosý* nebo *šikmý*. Podle útvaru ^3a je pak blíže označen, je-li na př. ^3a parabolou, je konoid η *parabolickým konoidem*.

Povšimněme si (obr. 36a) *kruhového konoidu* η! Jeho řídícími útvary jsou rovina π nesoucí úběžnou řídící přímku $^1a_\infty$, řídicí přímka $^2a \perp \pi$ a kružnice ^3a v rovině ν. Jak útvary jsou dány, je zřejmo, že roviny π, σ a ς jsou rovinami kolmé souměrnosti plochy η, jejich průsečnice jsou osami kolmé souměrnosti a jejich průsečík V středem centrální souměrnosti konoidu η. Půdorys a nárys připomíná půdorys a nárys plochy kuželové; přemístíme-li povrchové přímky $1\,V$, $2\,V$ kuželové plochy o vrcholu V a základně ^3a do polohy $1\,3$, $2\,3$, přešly do dvou přímek konoidu. Můžeme tedy plochu η odvoditi z plochy kuželové (conus) a tím je zdůvodněn její název.

Podle předešlého odst. 5,6 jsou nejvyšší a nejnižší přímka b' a b'' a obě v rovině π položené přímky b''' a b'''' přímkami torsálními, podél prvých se dotýkají plochy η roviny rovnoběžné k π, podél druhých roviny kolmé k π.

Úběžná přímka d_∞ roviny ν je dvojnou přímkou plochy, proto v rovinách rovnoběžných s ν jsou na ploše položeny elipsy, jejichž osa kolmá k π je rovna průměru kružnice ^3a. Lze to dokázat i přímo: Hledejme sečnou křivku ^4a roviny $\delta \parallel \nu$! Vytkněme povrchovou přímku ^1b plochy η! Jest $M_1'Q_1 : M_1Q_1 = M_2'Q_2 : M_2Q_2 =$ konst.; i je ^4a afinní křivka ke kružnici $^3a_2$, tedy elipsa.

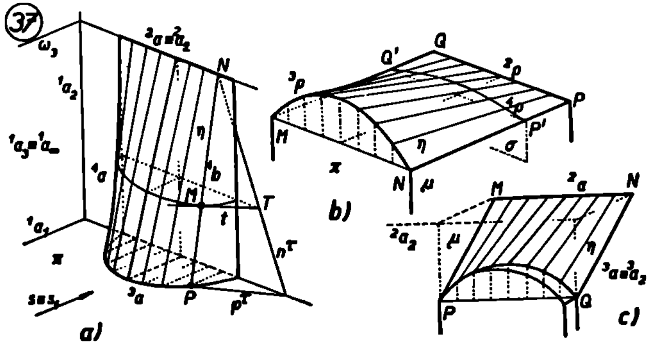
Tečnou rovinu v bodě M stanovíme tečnou k řezu ^4a a povrchovou přímkou ^1b plochy; jinak dotykovou plochou druhého stupně nebo za pomoci Chaslesovy věty.

V obr. 36b je uvažován kosý konoid kruhový v kolmé axonometrii. Řídícími útvary jsou rovina π, přímka ^2a a kružnice ^3a v rovině ν. Stopníkem N řídící přímky ^2a na ro-

---

*) Latinsky *conus*, řecky *konos*, t. j. piniová šiška tvaru kužele.

vině ν řídící kuželosečky jde dvojná přímka $d \parallel x$, proto rovina σ vedená přímkou d a bodem M na povrchové přímce ${}^1b$ plochy η protíná uvažovaný konoid v kuželosečce. Pro plochu byly stanoveny torsální přímky podle odst. 5,6, body V a U položené v σ a na torsálních přímkách $4\,IV$ a $3\,III$ dávají průměr elipsy ${}^4a$, průměr přidružený je rovnoběžný s p^δ a ${}^4a$ je úplně dána v σ omezeným průměrem UV, k němu



sdruženým a neomezeným a bodem M. Povrchová přímka ${}^1b$ a tečna t křivky ${}^4a$ v bodě M určují příslušnou tečnou rovinu.

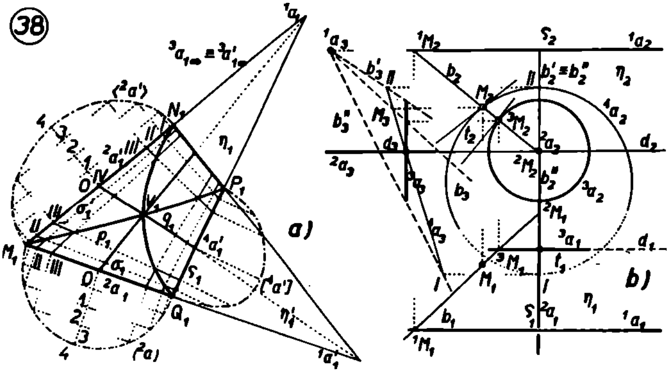
5,8. Použití konoidů v technické praxi. Kruhové a parabolické přímé konoidy jsou hojně používány nyní v technické praxi.

V obr. 37a vyznačen přímý konoid kruhový použitý jako opěrná zeď proti kapalině nebo jemným sypkým hmotám. Tu přibývá tlak do hloubky kapaliny resp. sypké hmoty a odpovídá tomu vhodně i tvar použitého konoidu η. Při hladině ω, kde není vyvozován tlak, je na η přímka ${}^2a$; postupně do hloubky vzdouvá se tato přímka do křivky, až v π dosahuje plného kruhového oblouku ${}^3a$ tam, kde tlak směrem s je největší.

V příloze čís. XII je pohled zevně na stěnu skladiště pro sypké hmoty, vytvořenou z kruhových konoidů přímých, zobrazeno údobí ve stavbě.

Obr. 37b předvádí přímý parabolický konoid, daný řídící rovinou μ, řídící přímkou ${}^2p$ a parabolou ${}^3p$. Konoid tu kryje obdélník *MNPQ* a lze tyto střechy k sobě řaditi a to buď tak, aby paraboly ${}^3p$ byly položeny v témž směru obdélníků

38



MNPQ, nebo aby vždy při dvou použitých plochách η byla společná parabola uprostřed a římsové hrany ${}^2p$ souměrně položeny k rovině π. Mnohdy bývají tyto konoidy zkracovány a vedeny jen k rovině $\sigma \parallel \pi$, aby se vymýtily z konstrukce vodorovné roviny tečné v bodech P a Q, z nichž dešťová voda neodtéká, což při zkrácení nenastává.

Přílohy čís. XIII a XIV podávají obraz na střechu pracoviště, sestavenou z parabolických konoidů a to pohled z vnějšku i z vnitřku, obé nedokončené a umožňující proto průhledy navrhovanými okny.

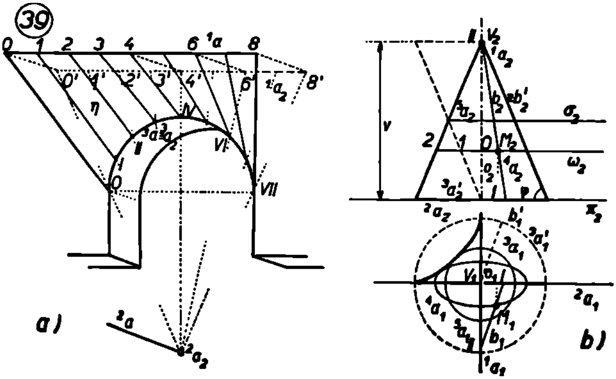
Konečně v obr. 37c je vyznačeno použití kruhového konoidu na samonosné markýze η.

V stavitelství doby románské býval kruhový konoid používán jako lícní plocha klenutého oblouku, který spojoval kružnici nebo elipsu o vodorovné ose s elipsou rovněž o vodorovné ose v téže úrovni, stejně vysokou, ale užší.

Konoidy užívaly se i při řešení *křížových kleneb* nad nepravidelným půdorysem (obr. 38a). Budiž $M_1N_1P_1Q_1$ půdorys síně, nad níž je provedena křížová klenba, která má v rovinách σ a σ' dvě lunety, kruhovou a eliptickou, ${}^2a$ a ${}^2a'$ a sice stejně vysoké. K řešení použijeme dvou konoidů η a η', které mají v přímkách ${}^1a$ a ${}^1a'$ kolmých k π své řídící přímky, řídící křivky jsou kuželosečky ${}^2a$ a ${}^2a'$ a nákresna je společnou řídící rovinou. Zvolme na svislých osách lunet body *0*, *1*, *2*, *3*, *4* rovnoměrně rozložené! Vodorovné tětivy jimi vedené vytínají v křivkách ${}^2a$ a ${}^2a'$ řady bodů, které se promítají kolmo do průměrů MQ a MN do dvou řad podobných. Jejich spojnice s body ${}^1a_1$ a ${}^1a_1'$ dávají proto dva průmětné svazky, které jsou průměty přímek konoidů η a η', položených vždy po čtyřech v téže úrovni nad průmětnou. Proto jejich průsečíky vyplňují dvě kuželosečky p_1, q_1 jdoucí v prodloužení body ${}^1a_1$ a ${}^1a_1'$. Křivky p_1 a q_1 jsou tu průměty pronikových křivek konoidů η a η', tedy hran křížové klenby. Na konoidech η a η' jsou kuželosečky položeny v rovinách rovnoběžných se σ a σ' proto luneta v ς není elipsou, ale je křivkou čtvrtého stupně a je vyznačena v oklopení [${}^4a'$].

5,9. Zborcená plocha Montpellierského oblouku. Buď dána zborcená plocha (obr. 38b) přímkou řídící ${}^1a$ kolmou k stranorysně, další přímkou ${}^2a$ kolmou k nárysně a kružnicí ${}^3a$, mající střed na ${}^2a$ a svoji rovinu kolmou k ${}^2a$! Plocha je čtvrtého stupně, má v přímce $d \parallel {}^1a$ jdoucí středem kružnice ${}^3a$ svou dvojnou přímku. K ní středem kružnice vedená rovina kolmá ς je rovinou kolmé souměrnosti plochy a obsahuje dvě reálné torsální přímky dané plochy η. Je-li na přímce b plochy dán bod M, můžeme bodem M a přímkou d proložiti rovinu — s výhodou tu použijeme stranorysu — a ta protne η v kuželosečce ${}^4a$, mající své vrcholy *I*, *II* v obou torsálních přímkách plochy η. Tečna křivky ${}^4a$ v bodě M a povrchová přímka b jdoucí bodem M určují tečnou rovinu τ plochy η

v M. Touž tečnou rovinu bychom mohli stanoviti i tak, že bychom podrželi přímky ${}^1a$ a ${}^2a$ řídící, třetí řídící útvar, kružnici ${}^3a$ bychom v průsečném bodě ${}^3M$ s povrchovou přímkou b nahradili tečnou t. Tečná rovina τ hyperboloidu daného řídícími přímkami ${}^1a$, ${}^2a$, t v bodě M je žádanou tečnou rovinou plochy v bodě M. Konečně bychom mohli



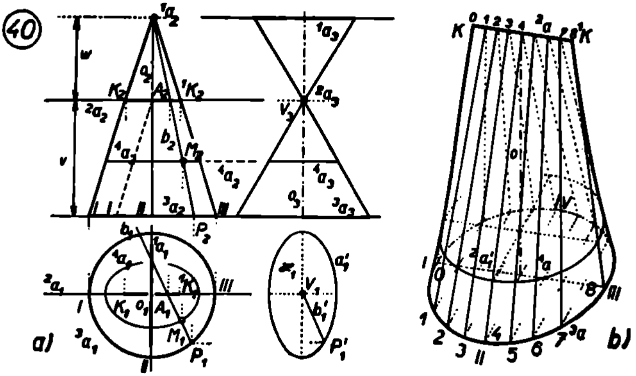
použíti věty Chaslesovy: Známe tečné roviny ${}^1\tau$, ${}^2\tau$, ${}^3\tau$ plochy η v bodech ${}^1M$, ${}^2M$, ${}^3M$ přímky b. K bodu M čtveřiny bodové ${}^1M$, ${}^2M$, ${}^3M$, M v přímce b sdružená rovina τ v promětné s ní čtveřině rovinové ${}^1\tau$, ${}^2\tau$, ${}^3\tau$, τ o ose b je žádanou rovinou tečnou.

Uvedená plocha byla používána při stavbách z tesaného kamene a jmenována *Montpellierským obloukem* [viz (¹) str. 822 nebo (²) str. 74].

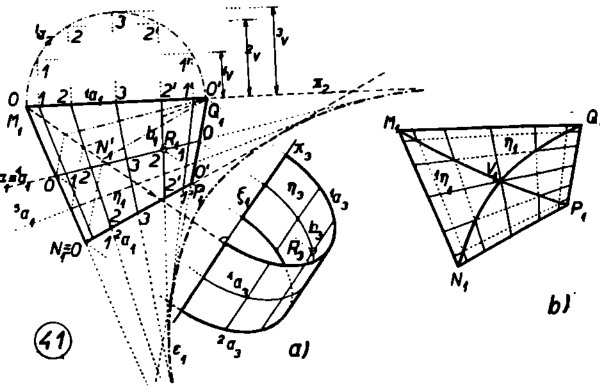
Přímka ${}^2a$ nemusí nezbytně procházeti středem kružnice ${}^3a$. Tuto plochu lze dobře použíti jako plochu markýzy (obr. 39a). Tu je dána přímkami ${}^1a$ a ${}^2a$ a kružnicí ${}^3a$. Je lhostejno, zda je tu uvažován plný oblouk nebo pouze segment. Dělení nárysu ${}^1a_2$ přeneseno směrem ${}^2a$ na přímku ${}^1a$ do bodů *0, 1, 2,* … a promítnuto z bodu ${}^2a_2$ na kružnici ${}^3a$

do bodů *0*, *I*, *II*, ... Spojnice sdružených bodů jsou povrchové přímky použité plochy η; *4 IV* je přímka torsální.

5,10. Plocha eliptického pohybu v prostoru (obr. 39b). Vytkněme dvě k sobě kolmé mimoběžky ${}^1a \perp {}^2a$, jejich osou buď přímka $o \perp \pi$! Zvolme průsečík V přímek ${}^1a$ a o za vrchol rotační plochy kuželové ${}^3\alpha$ o ose o, která protíná π v kružnici ${}^3a'$! Dále uvažujme zborcenou plochu η, určenou přím-



kami ${}^1a$, ${}^2a$ a podmínkou, že veškeré přímky plochy η musí býti rovnoběžny s přímkami plochy kuželové ${}^3\alpha$. Kuželovou plochu, která nese na svém povrchu přímky rovnoběžné k povrchovým přímkám dané zborcené plochy η, t. j. má s η společnou nevlastní, úběžnou křivku, jmenujeme *řídící plochou kuželovou* dané zborcené plochy. Plochy ${}^3\alpha$ a η se podél úběžné křivky zpravidla nedotýkají. Povrchové přímky uvažované plochy svírají všechny týž úhel φ s rovinou π; úsečky vytčené na nich přímkami ${}^1a$ a ${}^2a$ mají stejnou aequidistanci v vzhledem k π, proto jejich půdorysy musí míti stálou délku a obalují pravidelnou hvězdici — *asteroidu* — o čtyřech úvratech [srov. (1) str. 100]. Dvojnou přímkou plochy η je úběžná přímka roviny π a proto všechny roviny rovnoběžné s π protínají η v elipsách. Libovolný bod M povrchové přímky b plochy budiž zvolen a pohybujeme přímkou b tak, že její dva pevné body I, II neopouštějí přímky ${}^1a$, ${}^2a$. Potom M probíhá elipsu ${}^4a$ v rovině ω. Plocha má v rovinách určených osou o a přímkami řídícími ${}^1a$, ${}^2a$ roviny kolmé souměrnosti a přímky v nich položené jsou torsálními přímkami plochy η. Křivku ${}^4a$ stanovíme pohodlně: Vzdálenost $\overline{2\,0}$



je délkou poloosy v jedné rovině souměrnosti. Kolem osy o byla otočena torsální přímka položená v rovině $(o, {}^1a)$ do polohy rovnoběžné s nárysnou a úsečka $\overline{1\,0}$ dává již délku druhé poloosy elipsy ${}^4a$.

Povrchová přímka b a tečna elipsy ${}^4a$ v bodě M určují tečnou rovinu τ v bodě M. V obr. 40a uvažována je plocha η z téže skupiny ploch, t. j. je dána řídícími přímkami ${}^1a \perp {}^2a$ a místo úběžné kružnice, určené řídící plochou kuželovou, byla tu zvolena jako další řídící útvar v konečnu položená kružnice ${}^3a$. I tu roviny určené osou o a řídícími přímkami jsou roviny kolmé souměrnosti plochy a přímky v nich položené jsou přímky torsální. Úběžná přímka d_∞ roviny π, v níž leží kružnice řídící ${}^3a$, je dvojnou přímkou plochy. Roviny rovnoběžné s π protínají tedy η v elipsách. Tečná rovina bodu M je opět snadno stanovitelná: povrchovou přímkou b plochy η a tečnou k elipse ${}^4a$ v bodě M. V obraze byl zvolen bod V ve výšce v nad π a stanovena stopa a' řídící plochy kuželové $\varkappa$ plochy η. Její přímka b' je rovnoběžná k přímce b plochy η. Tečná rovina řídící plochy kuželové $\varkappa$ podél b' je rovnoběžná s tečnou rovinou plochy η v úběžném bodě přímky b. Tuto tečnou rovinu plochy η v úběžném bodě nazýváme *asymptotickou rovinou* zborcené plochy a je zřejmo, že ji snadno stanovíme u jakékoli zborcené plochy za pomoci řídící plochy kuželové.

Uvedenou zborcenou plochu lze použíti (obr. 40b) jako plochu střechy, která spojuje kruhovou nebo eliptickou hranu římsovou ${}^3a$ s hřebenem, který je kratší než rovnoběžná s ním osa hrany římsové. Hřeben ${}^2a$ a rovnoběžnou s ním osu ${}^2a'$ rozdělíme na stejný počet mezi sebou rovných dílů, v dělících bodech osy ${}^2a'$ vztyčené kolmice vytýčí na ${}^3a$ řadu bodů *0*, *1*, *2*, ..., které spojeny s dělícími body *0*, *1*, *2*, ... hřebene dají krokve použité střechy. Latě probíhají ve vodorovných elipsách plochy, na př. ${}^4a$.

Dříve bývala tato plocha často používána na věžích opevnění a hradů. Velmi známá je helmice této podoby ve Štramberku na Moravě (*Štramberská trúba*).

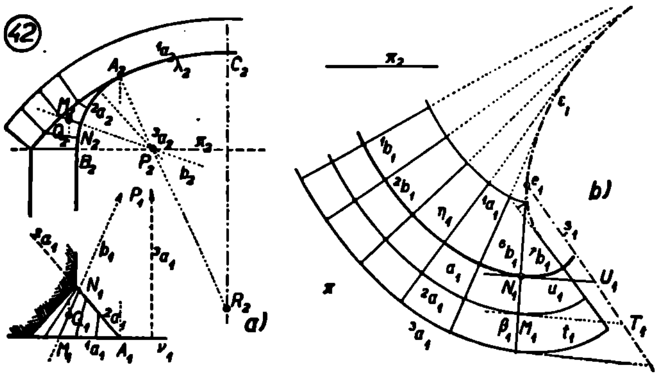
5,11. Cylindroidy. Buď dán půdorys M, N, P, Q místnosti, která má být překlenuta klenbou o vodorovných povrchových přímkách tak, aby jak nad MQ, tak nad NP vznikly lunety o stejné výši. Obr. 41a. Lunetu nad MQ zvolme kruhovou, omezenou kružnicí ${}^1a$! Zvolme výšky ${}^1v$, ${}^2v$, ${}^3v$, ... a veďme v nich jak v kružnici ${}^1a$ tak i v afinní elipse ${}^2a$ (osa NP) tětivy rovnoběžné s π! Tyto tětivy vytnou v křivkách ${}^1a$, ${}^2a$ řady bodů a řady jejich půdorysů budou řady mezi sebou podobné, každá z nich podle svého středu nad to souměrná. V půdoryse spojnice sdružených bodů obalí parabolu ε_1, v prostoru získáme zborcenou plochu η, která je vyplněna přímkami, které protínajíce křivky ^1a, ^2a druhého stupně jsou rovnoběžné s rovinou π a dotýkají se parabolické plochy válcové ε. Kdybychom spojovali body *0, 1, 2,* ... na $^1a_1$ s body *0′, 1′, 2′,* ... na $^2a_1$ získali bychom jinou parabolu ε_1'. Je zřejmo, že přímky, které protínají ^1a, ^2a a mají v π svou řídící rovinu, tvoří soubor osmého stupně; ten se však rozpadá na dva mezi sebou rovnocenné soubory, jeden se řídícími útvary ^1a, ^2a, π a ε a druhý, který místo ε má ε'. I musíme z toho usuzovati, že zborcená plocha $\eta \equiv (^1a, {}^2a, \pi, \varepsilon)$ je stupně čtvrtého. Učiňme $N_1'Q_1 \# N_1P_1$ a veďme tečny ^5a, ^4a, ... k parabole ε_1 : V M_1N_1 a P_1Q_1 vytyčují tečny paraboly dvě řady podobné, promítneme-li řadu M_1N_1 do M_1N_1' směrem N_1N_1' a spojíme-li tuto řadu s bodem Q svazkem paprskovým, budou jeho paprsky rovnoběžny s tečnami paraboly ε_1 a budou míti mezi M_1N_1' a bodem Q_1 touž délku, kterou mají příslušné tečny paraboly ε_1 mezi tečnami M_1N_1 a P_1Q_1.

Povšimněme si řezu uvažované plochy η s rovinou $^4\alpha$! Řada *0, 1, 2, 3,* ... v $^4\alpha_1$ je podobná s řadou *0, 1, 2, 3,* ... v $^1a_1$ nad těmito body ve výškách *0*, ^1v, ^2v, ^3v, ... leží body křivky ^4a. Je z toho patrno, že je to elipsa afinní k elipse ^1a. Máme tedy výsledek:

Na uvažované ploše v tečných rovinách válcové plochy ε jsou položeny elipsy téže výšky jako elipsy ^1a, ^2a.

Úsečky ve svazku Q_1 mezi bodem Q_1 a přímkou M_1N_1' se promítají směrem $s \equiv M_1N_1'$ do stejných délek a proto se budou směrem s promítati do stejných délek i s nimi rovnoběžné a stejně dlouhé úsečky na tečnách paraboly ε_1, tvořící půdorysy povrchových elips plochy η. Je z toho patrno, že na rovinu $\zeta \perp s$ se promítají všechny povrchové elipsy plochy η do elips shodných. Zvolíme-li ζ za pomocnou stranorysnu, vidíme, že stranorys η_3 plochy η připomíná kolmý průmět plochy válcové a proto *jmenujeme zborcené plochy, které jsou určeny dvěma řídícími křivkami a rovinou* *řídící* a které se jeví v náryse a stranoryse obdobně jako zde uvažovaná plocha η *cylindroidy.**)

V obr. 41b jsou určeny dva cylindroidy η a ${}^1\eta$ nad půdorysem M, N, P, Q. Řeší křížovou klenbu nad nepravidelným půdorysem, jejich vrcholové přímky, které jsou pro ně torsálními přímkami, se protínají ve vrcholu V klenby. Přímky, položené na elipsovitých lunetách ve stejných výškách



v, ${}^1v$, ${}^2v$, ${}^3v$, stanovují v průmětech lunet podobné, podle středu souměrné řady bodové. Průsečné body stejně vysoko položených přímek dávají pronikové křivky p a q ploch η a ${}^1\eta$. Díváme-li se na obr. 41b jako na kosoúhlý průmět hyperbolického paraboloidu určeného zborceným čtvercem $MNPQ$ ($MN = NP = PQ = QM$), jsou křivky p_1, q_1 průměty jeho hlavních řezů, tedy parabol a p_1, q_1 jsou tedy paraboly. O křivkách p, q lze dokázat, že se směrem $s \equiv \equiv M_1N_1{}'$ (obr. 41a) promítají do elips [viz ([1]) str. 747]. Jsou proto křivky p, q v prostoru křivky čtvrtého stupně.

5,12. Plocha corne de vache. V obr. 42a je podáno nejjedno-

*) Od řeckého *kylindros* = válec, *kylindo* = válím.

dušší řešení úpravy mostních kleneb, nazývané *corne de vache* nebo *la strombatura*. Valená mostní klenba je omezena lícní plochou λ, jejímž normálním řezem je ovál složený z kružnice o středu P mezi body B, A a kružnice o středu R, první se v bodě A dotýkající. Bodem A vedená rovina ${}^2\alpha \perp \pi$ protíná λ v elipse ${}^2a$ a tato křivka s kružnicí ${}^1a$ a přímkou ${}^3a \perp \nu$ určuje zborcenou plochu η, která je sedmého stupně a jíž jsme otupili část mostní klenby.

K řešení tečné roviny není tu možno použíti vhodného dalšího řezu. Na přímce b zvolme obecný bod Q a vytkněme průsečné body M, N, P s řídícími útvary; tečny t, u vedené k ${}^1a$ a ${}^2a$ v bodech M a N určují s přímkou ${}^3a$ hyperboloid, jehož tečná rovina v bodě Q je tečnou rovinou uvažované plochy η.

Plocha v použité části je zobrazena v příloze čís. XV, kde je ukázána uvedená úprava na mostě Legií v Praze [viz k tomu (1) str. 747 a 820 a (5), str. 98].

5,13. Zborcená plocha vyrovnávací, pláň, planýrovací plocha nebo zkrátka planýrka je cylindroid, který je dán prostorovou křivkou a vodorovnou rovinou π (obr. 42b). Přímky této zborcené plochy jsou rovnoběžné s π a protínají křivku a kolmo. Dotýkají se proto plochy válcové ε, která jde kolmo k π evolutou křivky a_1. Na ploše známe dvě soustavy povrchových křivek: předně je to soustava povrchových přímek ${}^1b$, ${}^2b$, ..., dále je to soustava křivek ${}^2a$, ${}^3a$, ... rovnoběžných s křivkou a, jejichž půdorysy jsou evolventy křivky ε_1. Podél libovolné přímky, na př. ${}^6b$, se dotýká plochy hyperbolický paraboloid, který určují: tečna u v průsečném bodě N přímky ${}^6b$ s řídící křivkou a, dále dotyková povrchová přímka e první promítací roviny přímky ${}^6b$ s plochou válcovou ε a rovina π.