7. FORMY KVADRATICKÉ.

Jestliže v souměrné bilineární formě položíme $y_\nu = x_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), přejde tato v útvar, kterému říkáme *kvadratická forma* proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pochopitelně na ni přenášíme všechny pojmy a úvahy, které jsme provedli v odst. 6. Zvláště je možno také pro kvadratickou formu provésti redukci, o níž mluví věta 9.; dík symetrii matice kvadratické formy stačí k této redukci jediná transformace s maticí (48) z odst. 6.

Jako příklad proveďme redukci kvadratické formy

$$\begin{aligned} f = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - \\ - 2x_1x_4 + 6x_2x_3 + 2x_2x_4. \end{aligned} \tag{59}$$

Matice dané formy

$$\boldsymbol{A} = \begin{Vmatrix} 2, & 1, & 3, & -1 \\ 1, & 2, & 3, & 1 \\ 3, & 3, & 6, & 0 \\ -1, & 1, & 0, & 2 \end{Vmatrix}$$

má, jak si čtenář snadno ověří, hodnost $h = 2$; postup věty 9. z odst. 6 se tedy pro náš případ utváří takto:

Redukovaná soustava příslušná k systému (a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

má dvě nezávislá řešení. Za ta zvolíme na příklad

$$\begin{aligned} &\xi_{13} = 1, \quad \xi_{23} = -1, \ \xi_{33} = 0, \ \xi_{43} = 1 \\ &\xi_{14} = -1, \ \xi_{24} = -1, \ \xi_{34} = 1, \ \xi_{44} = 0 \end{aligned}$$

a sestavíme matici $\boldsymbol{B}_1$ podle vzoru (48):

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 1, & -1 \\ 0, & 1, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Danou formu (59) pak transformujeme transformací $\mathbf{B}_1$; pro matici $\overline{\mathbf{B}}_1\mathbf{A}\mathbf{B}_1$ nám po krátkém počítání vyjde

$$\overline{\mathbf{B}}_1\mathbf{A}\mathbf{B}_1 = \begin{Vmatrix} 2, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Transformací (která je regulární — ověřte si to)

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 \quad + X_3 - X_4 \\ x_2 &= \quad X_2 - X_3 - X_4 \\ x_3 &= \qquad\qquad\quad X_4 \\ x_4 &= \qquad\quad X_3 \end{aligned}$$

přejde tedy kvadratická forma (59) ve tvar

$$f_1 = 2X_1^2 + 2X_2^2 + 2X_1X_2. \tag{59'}$$

Potvrďte si tuto skutečnost přímým výpočtem.

Píšeme-li kvadratickou formu ve tvaru

$$f = \sum_{i,k} a_{ik}x_ix_k, \quad a_{ik} = a_{ki}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{60}$$

nazýváme lineární formy

$$F_\nu = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_\nu} = \sum_{k=1}^{n} a_{\nu k}x_k, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n \tag{61}$$

lineárními formami k f přidruženými (adjungovanými); někdy také píšeme $F_\nu(x)$.

Protože je forma f homogenní funkcí 2. stupně svých proměnných, platí pro ni podle Eulerovy věty

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = 2f, \text{ t. j. } f = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu F_\nu; \tag{62}$$

bilineární forma

$$\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu F_\nu(x) \tag{63}$$

se jmenuje *polárou* dané formy kvadratické.

Souměrný determinant $|a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ matice $\boldsymbol{A}$ dané kvadratické formy se nazývá *diskriminantem* této formy a rozhoduje svojí hodnotou o tom, zda je forma singulární či regulární.

Kvadratickou formu (60) lze psáti také ve tvaru vroubeného determinantu. Vypočítáme-li totiž hodnotu determinantu r_1, který vznikne z determinantu R_1 (vzorec (42) dílu prvého) tím, že v něm místo každého prvku a_{ik} píšeme jeho doplněk A_{ik} v determinantu A, vypočítáme-li tuto hodnotu r_1 podle vzorce (45) dílu prvého, dostáváme (α_{ki} značí doplněk prvku A_{ki} v determinantu reciprokém k A)

$$r_1 = -\sum_{i,k} \alpha_{ki} x_i y_k = -A^{n-2} \sum_{i,k} a_{ki} x_i y_k.$$

Předpokládáme-li ještě, že je determinant A souměrný a klademe-li $y_k = x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, dostáváme svrchu zmíněné vyjádření kvadratické formy f determinantem ve tvaru

$$-A^{n-2} \cdot f = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots, & A_{1n}, & x_1 \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots, & A_{2n}, & x_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \ldots, & A_{nn}, & x_n \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, & 0 \end{vmatrix}. \qquad (64)$$

Kvadratická forma

$$F = \sum_{i,k} A_{ik} x_i x_k$$

se nazývá *formou* k f *adjungovanou.* Je-li hodnost formy f nejvýše $n - 2$, je forma k ní adjungovaná identicky nulová; je-li však f hodnosti $h = n - 1$, lze podle př. 13. psáti $A_{ik} = \lambda_i \xi_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$. Vzhledem k souměrnosti původního determinantu je ovšem $A_{ki} = A_{ik}$, tedy $\lambda_k \xi_i = \lambda_i \xi_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ a formu adjungovanou k f lze psáti také ve tvaru

$$F = \sum_{i,k} \lambda_i \xi_k x_i x_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i x_i^2 + 2 \sum_{i<k} \lambda_i \xi_k x_i x_k = \Big(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i \xi_i}\, x_i\Big)^2. \qquad (65)$$

V případě, že původní forma má hodnost $h = n - 1$, je kvadratická forma k ní adjungovaná rovna úplnému čtverci formy lineární; je-li hodnost původní formy menší, než $n - 1$, je adjungovaná forma identicky nulová.

Maticový obraz kvadratické formy (60) je $\overline{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x}$; s výhodou ho užíváme zvláště k symbolickému znázornění transformací kvadratických forem. Polára formy (60) má za maticový obraz matici $\overline{\mathbf{y}}\mathbf{A}\mathbf{x}$, odkudž téměř okamžitě vyplývá fakt, že je polára „*kovariantem*" své formy, což značí: Přejde-li jistou transformací daná kvadratická forma v jinou, pak přechází její polára — transformujeme-li obě řady jejích proměnných právě takovou transformací — v poláru kvadratické formy transformované. Stejně jednoduchým důsledkem maticového znázornění je to, že determinant formy transformované je roven determinantu formy původní, násobenému čtvercem determinantu transformace, jíž jsme danou kvadratickou formu podrobili.

Dokážeme si nyní důležitou větu pro theorii kvadratických forem, větu o redukci kvadratické formy na lineární kombinaci čtverců n proměnných.

Věta 10. *Kvadratickou formu lze vhodnou regulární lineární transformací převésti na lineární kombinaci čtverců proměnných*, t. j. na tvar

$$c_1X_1^2 + c_2X_2^2 + \ldots + c_nX_n^2. \tag{66}$$

Je-li hodnost dané formy h, je mezi koeficienty c_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) právě h nenulových.

Důkaz. Obsahuje-li daná forma (60) aspoň jeden čtverec, dosáhneme eventuelním přečíslováním proměnných toho, že bude $a_{11} \neq 0$ a píšeme formu ve tvaru

$$f = a_{11}x_1^2 + 2x_1\sum_{k=2}^{n}a_{1k}x_k + \bar{f} = \frac{1}{a_{11}}(\sum_{k=1}^{n}a_{1k}x_k)^2 +$$

$$+ \bar{f} - \frac{1}{a_{11}}(\sum_{k=2}^{n}a_{1k}x_k)^2 = \frac{1}{a_{11}}(\sum_{k=1}^{n}a_{1k}x_k)^2 + f^{(1)},$$

kde $f^{(1)}$ (a také ovšem $\bar{f}$) je kvadratická forma už jen proměnných $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Transformujeme-li danou formu (60) za předpokladu $a_{11} \neq 0$ lineární substitucí, která je inversní k regulární transformaci (rozmyslete si to)

$$X_1 = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} x_k, \quad X_\nu = x_\nu, \ \nu = 2, 3, \ldots, n, \tag{67}$$

dostaneme ji ve tvaru

$$c_1 X_1^2 + F^{(1)}(X_2, X_3, \ldots, X_n).$$

Neobsahuje-li daná forma žádného čtverce proměnné, dosáhneme vhodným označením, že bude $a_{12} \neq 0$ (vylučujeme zde případ formy identicky nulové) a píšeme pak f takto:

$$\tfrac{1}{2} f = a_{12} x_1 x_2 + x_1 \sum_{k=3}^{n} a_{1k} x_k + x_2 \sum_{k=3}^{n} a_{2k} x_k +$$

$$+ \bar{\bar{f}} = \frac{1}{a_{12}} \left(a_{12} x_1 + \sum_{k=3}^{n} a_{2k} x_k\right) \left(a_{12} x_2 + \sum_{k=3}^{n} a_{1k} x_k\right) -$$

$$- \frac{1}{a_{12}} \sum_{k=3}^{n} a_{1k} x_k \sum_{k=3}^{n} a_{2k} x_k + \bar{\bar{f}} = \frac{1}{a_{12}} \left(a_{12} x_1 + \sum_{k=3}^{n} a_{2k} x_k\right) .$$

$$. \left(a_{12} x_2 + \sum_{k=3}^{n} a_{1k} x_k\right) + f^{(2)};$$

$f^{(2)}$ a $\bar{\bar{f}}$ jsou kvadratické formy v proměnných $x_3, x_4, \ldots, x_n$.

Regulární transformací, která je inversní k substituci

$$\begin{aligned} X_1 &= \tfrac{1}{2}\left[a_{12}(x_1 + x_2) + \sum_{k=3}^{n} (a_{1k} + a_{2k})\, x_k\right], \\ X_2 &= \tfrac{1}{2}\left[a_{12}(x_2 - x_1) + \sum_{k=3}^{n} (a_{1k} - a_{2k})\, x_k\right], \end{aligned} \tag{68}$$

$$X_\nu = x_\nu, \ \nu = 3, \ldots, n,$$

dostaneme pak původní formu ve tvaru

$$\gamma_1 X_1^2 + \gamma_2 X_2^2 + F^{(2)}\,(X_3, X_4, \ldots, X_n).$$

Dalším odštěpováním násobků čtverců proměnných od forem $F^{(1)}$ resp. $F^{(2)}$ dospějeme posléze k tvaru (66). Transformace, jichž při tom užíváme (jsou ovšem obdobné právě provedeným) se sice týkají jen některých proměnných (vždy těch, které zbyly ve formách vzniklých tím kterým odštěpením jednoho nebo dvou čtverců), lze je však interpretovati zřejmě po každé jako transformace všech proměnných. Tyto všechny transformace jsou — právě tak jako (67) a (68) — regulární a jejich postupnou aplikaci lze nahraditi jedinou regulární transformací všech proměnných, která je z nich složena. Byla-li hodnost původní formy h, je tedy i hodnost formy transformované na tvar (66) rovna h a počet nenulových koeficientů c_ν nemůže býti menší než h (pak by hodnost transformované formy byla totiž menší než h), ani větší než h (pak by ona hodnost byla také větší než h). Tím je věta 10. dokázána.

Užitečné je pro kvadratické (a také bilineární) formy zavésti pojem *ekvivalence*.

Dvě formy kvadratické (nebo bilineární) nazýváme ekvivalentní, je-li možno jednu z nich převésti regulární transformací (u bilineárních forem dvěma takovými transformacemi) ve druhou. Tento pojem ekvivalence je zřejmě vzájemný a platí o něm:

Dvě formy kvadratické nebo bilineární jsou navzájem ekvivalentní tehdy a jen tehdy, mají-li stejnou hodnost.

Důkaz. Provedeme jen pro dvě kvadratické formy f_1, f_2. Jsou-li ekvivalentní, existuje regulární transformace lineární, která převádí formu f_1 v f_2. Protože pak při takovéto transformaci zůstává hodnost h_1 formy f_1 stále stejná, je nutně $h_1 = h_2$.

Mají-li naopak obě formy stejnou hodnost $h_1 = h_2 = h$, převedeme prvou z nich (podle věty 10. a ještě další maličkou úpravou) regulární lineární transformací $\mathbf{C}_1$ na tvar

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_h^2,$$

druhou pak transformací $\mathbf{C}_2$ (opět regulární) na tentýž tvar. Je tedy zřejmo, že složená regulární transformace $\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2^{-1}$ převádí formu prvou přímo v f_2.

Pro případ dvou forem bilineárních probíhá důkaz úplně analogicky — proveďte jej.

Poznámky. K formám kvadratickým se ještě později (až probereme užití determinantů v theorii rovnic) vrátíme a seznámíme se s jejich dalšími vlastnostmi, ještě zajímavějšími, než jsou ty, které jsme právě poznali.

Redukce kvadratické formy, jak jsme ji tu naznačili, se dá provést u každé formy nikoli identicky nulové. Pochází v podstatě od *Lagrange* a bývá také občas uváděna pod jeho jménem (Oeuvres, Recherches sur la méthode de maximis et minimis, 1759). Jiná methoda, velice elegantní, nikoli však tak všeobecná, pochází od Jacobiho (Journ. f. Math. 53, 1857).

Redukce kvadratických forem má důležitou úlohu v geometrii, mechanice, astronomii i v mnohých jiných oborech (použili jí Gauss, Lagrange, Jacobi a j.).

Příklady.

17. K objasnění theoretických výkladů tohoto paragrafu zopakujeme všechny pojmy a poučky, které jsme tu zavedli resp. odvodili, na příkladě formy (59). Protože má tato forma hodnost $h = 2$, lze ji redukovati na kvadratickou formu pouze dvou proměnných. To jsme provedli výše; v. vztah (59'). Ježto má naše forma $n = 4$ proměnné, bude míti také čtyři přidružené formy lineární. Podle vzorce (61) pro ně dostáváme (lze je ovšem psáti též ihned — jak?)

$$\begin{aligned} F_1 &= 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \\ F_2 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ F_3 &= 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ F_4 &= -x_1 + x_2 + 2x_4 \end{aligned}$$

a ověříme pro ně snadno platnost vzorce (62).

Polára dané formy vychází podle předpisu (63) ve tvaru (všimněte si součtu indexů v jednotlivých členech)

$$2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_1y_3 + 2x_2y_2 + 3x_3y_1 - x_1y_4 +$$
$$+ 3x_2y_3 + 3x_3y_2 - x_4y_1 + x_2y_4 +$$
$$+ 6x_3y_3 + x_4y_2 + 2x_4y_4.$$

Daná forma je singulární a má hodnost $h = 2$; jsou tedy všechny doplňky A_{ik} ze vztahu (64) rovny nule a rovnice (64) tedy vskutku splněna (neboť také $A = 0$). Forma adjungovaná k (59) je ovšem identicky nulová.

Nakonec ještě provedeme redukci naší formy ve smyslu věty 10. Budeme zde používati přímo transformace (67) — je totiž $a_{11} = 2$ —, doporučuji však čtenáři provésti podrobně celý postup, jenž zavedení této transformace předcházel. Transformace (67) zde jest

$$X_1 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4,\ X_2 = x_2,\ X_3 = x_3,\ X_4 = x_4;$$

reciproká k ní pak bude

$$2x_1 = X_1 - X_2 - 3X_3 + X_4,\ x_2 = X_2,\ x_3 = X_3,\ x_4 = X_4,$$

což dosazeno do dané formy vede k prvnímu částečnému výsledku:

$$f_1 = \tfrac{1}{2}X_1^2 + \tfrac{3}{2}X_2^2 + \tfrac{9}{2}X_3^2 + \tfrac{3}{2}X_4^2 + 3X_2X_3 + 3X_2X_4 +$$
$$+ 3X_3X_4 = \tfrac{1}{2}X_1^2 + F^{(1)}.$$

Na formu $F^{(1)}$ aplikujeme opět transformaci inversní k regulární substituci obdobné (67):

$$Y_2 = \tfrac{3}{2}X_2 + \tfrac{3}{2}X_3 + \tfrac{3}{2}X_4,\ Y_3 = X_3,\ Y_4 = X_4;\ Y_1 = X_1,$$

tedy transformaci

$$X_2 = \tfrac{2}{3}Y_2 - Y_3 - Y_4,\ X_3 = Y_3,\ X_4 = Y_4;\ X_1 = Y_1.$$

Dostaneme tak konečně tvar, o němž mluví věta 10.; zde je velmi jednoduchý:

$$f_2 = \tfrac{1}{2}Y_1^2 + \tfrac{2}{3}Y_2^2.$$

Transformací

$$Y_1 = \sqrt{2}z_1, \quad Y_2 = \sqrt{\tfrac{3}{2}}z_2, \quad Y_3 = z_3, \quad Y_4 = z_4$$

pak bude forma (59) nejjednoduššího možného tvaru

$$f_3 = z_1^2 + z_2^2.$$

Je zcela snadné najíti transformaci, která přímo převádí danou formu (59) ve tvar právě napsaný. Tato regulární transformace vznikne složením těch, jichž jsme postupně užili, takže její matice $\boldsymbol{R}$ bude

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{C}_3,$$

kde jest

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & -\frac{3}{2}, & \frac{1}{2} \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_2 = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{2}{3}, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_3 = \begin{Vmatrix} \sqrt{2}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \sqrt{\frac{3}{2}}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix}.$$

Výpočet jest vhodným cvičením pro násobení matic a vede k výsledku

$$\boldsymbol{R} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}, & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, & -1, & 1 \\ 0, & \sqrt{\frac{2}{3}}, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix}.$$

Transformací

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}X_1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{3}}X_2 - X_3 + X_4 \\ x_2 &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}X_2 - X_3 - X_4 \\ x_3 &= X_3 \\ x_4 &= X_4 \end{aligned}$$

musí tedy forma (59) přejíti ve tvar

$$f = X_1^2 + X_2^2.$$

Přesvědčte se o tom přímým dosazením a také pomocí maticového obrazu dané formy.

18. „Přednostní" očíslování proměnných kvadratické formy.

Má-li kvadratická forma s koeficienty $a_{ik} = a_{ki}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ hodnost h, lze očíslovat proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tak, že bude hlavní minor $A_h = |a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, h$ různý od nuly. Tento souměrný determinant A_h má buď aspoň jeden hlavní minor $(h - 1)$-řadový různý od nuly — pak očíslujeme proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_h$ tak, aby právě minor $A_{h-1} = |a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, h - 1$ byl nenulový — nebo jsou všechny hlavní minory $(h - 1)$-řadové determinantu A_h nulové. V tomto druhém případě však musí A_h obsahovati alespoň jeden hlavní nenulový minor $(h - 2)$-řadový, ježto by jinak byly rovny nule vůbec všechny $(h - 1)$-řadové minory (tedy ne pouze hlavní) determinantu A_h a tento by nemohl býti různý od nuly (toto tvrzení je zcela triviálním důsledkem věty o minorech determinantu reciprokého k danému; v našem případě vezměte v počet determinant reciproký k A_h a uvažujte o jeho libovolném hlavním minoru dvouřadovém). V případě, že jsou všechny hlavní $(h - 1)$-řadové minory determinantu A_h rovny nule, existuje tedy alespoň jeden nenulový hlavní minor $(h - 2)$-řadový a tu označíme proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_h$ tak, aby byl nenulový právě minor $A_{h-2} = |a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, h - 2$. S nenulovými determinantem A_{h-1}, event. A_{h-2} naložíme stejně jako dříve s A_h a tak pokračujeme; položíme-li $A_0 = 1$, dospíváme tak k jistému očíslování proměnných původní kvadratické formy, jež nazveme „přednostním" (takových očíslování může ovšem býti mnoho) a zároveň k řadě minorů

$$1 = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_h. \tag{69}$$

Ukážeme si, že v této řadě nemohou vedle sebe státi dva nulové členy a že členy sousedící zleva a zprava s nulovým, mají vždy navzájem různá znaménka. Budiž na př. $A_s = 0$, kde $0 < s < h$; podle konstrukce řady (69) to značí, že jsme v A_{s+1} nenašli žádný hlavní nenulový minor s-řadový, takže tam rozhodně existuje alespoň jeden $(s - 1)$-řadový nenulový. Jeden pak z těchto byl vzat za A_{s-1} a proto je $A_{s-1} \neq 0$. Také A_{s+1} musí však býti různé od nuly, ježto by jinak musil v A_{s+2} existovati aspoň jeden nenulový hlavní minor s-řadový, který bychom vzali za A_s, takže by proti předpokladu bylo $A_s \neq 0$. Je tedy $A_{s-1} \neq 0$ a také $A_{s+1} \neq 0$ a dokážeme ještě, že je $A_{s-1} \cdot A_{s+1} < 0$. Také tato skutečnost je sice zcela elementárním důsledkem věty o minorech determinantů reciprokých, přece snad by však mohla způsobiti určité potíže a proto zde naznačíme její důkaz: Nenulový hlavní minor A_{s-1} byl získán z A_{s+1} vynecháním jistých dvou řádků (budiž to řádek ϱ-tý a σ-tý) a stejně číslovaných dvou sloupců. Sestrojíme si determinant k A_{s+1} reciproký, označíme jeho elementy znaky α_{ik}, $i, k = 1, 2, \ldots, s + 1$ a vezmeme v úvahu jeho hlavní minor, tvořený elementy, v nichž se kříží řádky s pořadovými čísly ϱ, σ a sloupce téhož pořadí. Podle věty o minorech determinantu reciprokého je tento dvouřadý subdeterminant roven právě součinu $A_{s-1} \cdot A_{s+1}$ a protože jsou všechny s-řadové hlavní minory determinantu A_{s+1} podle předpokladu nulové (tedy i $\alpha_{\varrho\varrho} = \alpha_{\sigma\sigma} = 0$), máme konečně (pamatujme, že všechny determinanty zde vystupující jsou souměrné)

$$A_{s-1} \cdot A_{s+1} = \begin{vmatrix} \alpha_{\varrho\varrho}, & \alpha_{\varrho\sigma} \\ \alpha_{\sigma\varrho}, & \alpha_{\sigma\sigma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & \alpha_{\varrho\sigma} \\ \alpha_{\varrho\sigma}, & 0 \end{vmatrix} = -\alpha_{\varrho\sigma}^2 < 0.$$

Abychom uvedený postup předvedli na číselném příkladě, budeme se zabývati regulární kvadratickou formou

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_1x_4 - \\ - 6x_2x_3 + 4x_3x_4. \qquad (70)$$

Matice

$$\mathbf{A}' = \left\|\begin{matrix} 1, & -1, & 2, & -2 \\ -1, & 1, & -3, & 0 \\ 2, & -3, & 9, & 2 \\ -2, & 0, & 2, & 1 \end{matrix}\right\|$$

má hodnost $h = 4$ a pro její determinant najdeme hodnotu $A_4 = 7$. Jeho minor A_{44} má hodnotu -1 a proto můžeme bez jakéhokoli přeměňování označení proměnných klásti $A_3 = -1$. Protože však je první hlavní dvouřadový minor determinantu A_3 — doplněk to jeho prvku 9 — roven nule, zato však má druhý hlavní minor (doplněk prvku a_{22}) hodnotu 5, provedeme přeznačení proměnných x_1, x_2, x_3 (a také x_4) na nové t_1, t_2, t_3, t_4 podle schematu

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ t_1, & t_3, & t_2, & t_4 \end{matrix} \,. \tag{70'}$$

V těchto nových proměnných bude míti forma tvar

$$f_1 = t_1^2 + 9t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 + 4t_1t_2 - 2t_1t_3 - 4t_1t_4 - \\ - 6t_2t_3 + 4t_2t_4 \tag{70''}$$

a lze položiti $A_2 = 5$. Pak už máme beze všeho přeřaďování $A_1 = 1$, $A_0 = 1$.

Přečíslování proměnných v původní formě podle schematu (70') je tedy přednostní (taková jsou zde možná dvě) a vede k formě (70″) s maticí

$$\mathbf{A} = \left\|\begin{matrix} 1, & 2, & -1, & -2 \\ 2, & 9, & -3, & 2 \\ -1, & -3, & 1, & 0 \\ -2, & 2, & 0, & 1 \end{matrix}\right\|;$$

v této matici už má řada hlavních minorů vzniklých postupným vroubením

$$A_0 = 1,\ A_1 = 1,\ A_2 = \begin{vmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 9 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 2, & 9, & -3 \\ -1, & -3, & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1, & 2, & -1, & -2 \\ 2, & 9, & -3, & 2 \\ -1, & -3, & 1, & 0 \\ -2, & 2, & 0, & 1 \end{vmatrix} = 7$$

vlastnosti řady (69).

Jestliže jsme provedli pro danou kvadratickou formu

$$f' = \sum_{i,k} b_{ik} y_i y_k$$

přednostní očíslování, vede nás vzniklá forma

$$f = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k$$

k řadě hlavních minorů (69). Tuto řadu lze doplniti na úplnou

$$1 = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_h, A_{h+1} = A_{h+2} = \ldots = A_n = 0. \quad (71)$$

Výraz

$$\sigma = \sum_{s=1}^{n} \operatorname{sgn}(A_{s-1} A_s), \qquad (72)$$

kde klademe $\operatorname{sgn} a = 1, 0, -1$ pro $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$, má veliký význam pro theorii kvadratických forem a jmenuje se signaturou dané formy f'. Tak má forma (70) signaturu rovnou nule, protože je

$$\sigma = \operatorname{sgn}(A_0 A_1) + \operatorname{sgn}(A_1 A_2) + \operatorname{sgn}(A_2 A_3) + \operatorname{sgn}(A_3 A_4) = \\ = 1 + 1 - 1 - 1 = 0.$$

Tento výsledek ukazuje (jak později podrobně poznáme), že je naše forma indefinitní, což značí, že může nabývati hodnot kladných i záporných, klademe-li za její proměnné číselné hodnoty (přesvědčte se o tom). Různé pochybnosti, které by se zde mohly vyskytnouti, tak na příklad, zda hodnota signatury nezávisí na tom, které z možných přednostních očistování (je-li jich více) pro formu zvolíme, vyvrátíme později, ač se budeme zabývati kvadratickými (a ještě jinými) formami s jiného hlediska.