Determinanty a matice v theorii a praxi

6. Věta Sylvestrova

In: Václav Vodička (author): Determinanty a matice v theorii a praxi. Část první. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1950. pp. 26–28.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403275

6. VĚTA SYLVESTROVA.

K numerickému výpočtu hodnoty daného determinantu se přímo nabízí redukovati jej rozvedením podle elementů určité řady (přirozeně k tomu zvolíme tu, která obsahuje co nejvíce prvků nulových) nebo pomocí věty Laplaceovy na determinanty jednodušší. Tento postup bývá zpravidla dosti zdlouhavý a je nutno dávati velmi bedlivý pozor, aby se do výpočtu nevloudila chyba. Uvedeme si proto jiný způsob redukce daného determinantu, mnohem vhodnější pro praktické použití a z něhož lze činiti ještě jiné důsledky značného theoretického dosahu.

Budiž A daný determinant prvků a_{rs}($r, s = 1, 2, \ldots, n$) a násobme všechny jeho řádky mimo i-tou elementem a_{ik}. Vzniklý determinant o hodnotě $a_{ik}^{n-1}A$ bude míti obecný prvek $a_{ik}a_{rs}$, jenom prvky i-té řádky zůstaly beze změny. Odečteme nyní od r-tého řádku tohoto změněného determinantu řádek i-tý násobený a_{rk} a to učiníme pro $r = 1,$ $2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$. Hodnota determinantu zůstane stále rovna $a_{ik}^{n-1}A$, jeho tvar se však změní tak, že obecný element, dříve $a_{ik}a_{rs}$, bude nyní $a_{ik}a_{rs} - a_{is}a_{rk}$. Speciálně tedy budou v k-tém sloupci ($s = k$) státi samé nuly, pouze na jeho i-tém místě figuruje element a_{ik}, který zůstal uvedenými změnami nedotčen. Rozvedeme-li determinant podle prvků k-tého sloupce a zkrátíme prvkem a_{ik}, dostaneme výsledek

$$(-1)^{i+k}a_{ik}^{n-2}A = |b_{rs}|;\ r = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n,$$

$$s = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n;\ b_{rs} = \begin{vmatrix} a_{ik}, & a_{is} \\ a_{rk}, & a_{rs} \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Výrazy b_{rs} jsou t. zv. superdeterminanty elementu a_{ik} v determinantu A a vzorec (16) ukazuje, jak lze daný determinant

A vyjádřiti $(n-1)$-řadovým determinantem, utvořeným ze superdeterminantů jeho libovolného prvku. K praktickému výpočtu hodnoty determinantu A použil výsledku (16) F. Chiò.

Věta 13. (Sylvesterova). Determinant vytvořený ze všech $(h+1)$-řadových superdeterminantů determinantu

$$A_h = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1h} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1}, & a_{h2}, & \dots, & a_{hh} \end{vmatrix} \tag{17}$$

je roven původnímu determinantu $A = |a_{ik}|$; $i, k = 1, 2, \dots, n$ (jehož je A_h subdeterminantem) násobenému mocninou A_h^{n-h-1}.

Důkaz. Budeme postupovati užívajíce obecné indukce (v. důkaz věty 1.) tak, že předpokládáme platnost Sylvesterovy věty prokázánu pro určitý index m a dokážeme, že za tohoto předpokladu platí i pro index $m+1$.

Předpokládáme tedy správnost vztahu

$$C = A \,.\, A_m^{n-m-1}, \tag{a}$$

kde jest

$$C = |C_{\varrho\sigma}|;\ \varrho, \sigma = m+1, m+2, \dots, n, \tag{b}$$

$$C_{\varrho\sigma} = \begin{vmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{1m}, & a_{1\sigma} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & \dots, & a_{mm}, & a_{m\sigma} \\ a_{\varrho 1}, & \dots, & a_{\varrho m}, & a_{\varrho\sigma} \end{vmatrix}. \tag{c}$$

Vedle relace (a) platí však pro determinant C, který je stupně $(n-m)$-tého, podle vzorce (16) vztah

$$C_{m+1,m+1}^{n-m-2} \,.\, C = |\Gamma_{rs}|;\ r, s = m+2, m+3, \dots, n, \tag{d}$$

při čemž jest

$$\Gamma_{rs} = \begin{vmatrix} C_{m+1,m+1}, & C_{m+1,s} \\ C_{r,m+1}, & C_{rs} \end{vmatrix}. \tag{e}$$

Rovnicemi a vzorci (a), (b), (c), (d), (e) jsme si pouze vyjádřili důsledky platnosti věty Sylvesterovy, předpokládané pro index m. Nyní teprve započneme s prováděním důkazu její platnosti i pro determinant A_{m+1} a jeho $(m + 2)$-řadové superdeterminanty — označme je symboly D_{rs}; je tedy

$$D_{rs} = \begin{vmatrix} a_{11}, \ldots, & a_{1m}, & a_{1,m+1}, & a_{1s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, \ldots, & a_{mm}, & a_{m,m+1}, & a_{ms} \\ a_{m+1,1}, \ldots, & a_{m+1,m}, & a_{m+1,m+1}, & a_{m+1,s} \\ a_{r1}, \ldots, & a_{rm}, & a_{r,m+1}, & a_{rs} \end{vmatrix}; \qquad \text{(f)}$$

$$r, s = m + 2, m + 3, \ldots, n.$$

Na tento $(m + 2)$-řadový determinant aplikujme nyní vzorec (a); vyjde

$$D_{rs} \,.\, A_m = \Gamma_{rs};\ r, s = m + 2, m + 3, \ldots, n. \qquad \text{(g)}$$

Takto získaný výsledek dosadíme do vztahu (d):

$$C_{m+1,m+1}^{n-m-2} \,.\, C = |A_m D_{rs}| = A_m^{n-m-1} \,.\, |D_{rs}|,$$

čili za pomoci relace (a):

$$|D_{rs}| = A \,.\, C_{m+1,m+1}^{n-m-2}. \qquad \text{(h)}$$

Protože však jest $C_{m+1,m+1}$ právě A_{m+1} — viz vzorce (c) a (17) — , najdeme konečně

$$|D_{rs}| = A \,.\, A_{m+1}^{n-m-2}. \qquad \text{(k)}$$

To však je právě matematický výraz věty Sylvesterovy pro index $m + 1$; byl odvozen za předpokladu správnosti té věty pro index m. Pro index 1 však věta platí, jak přímo plyne ze vzorce (16), tudíž také pro index 2, pro 3 atd. Je tedy dokázána v plné obecnosti.