Počet pravděpodobnosti

4. Různé úlohy

In: Bohuslav Hostinský (author): Počet pravděpodobnosti. První část. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1950. pp. 106–124.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403261

KAPITOLA ČTVRTÁ

RŮZNÉ ÚLOHY

42. Pravděpodobnosti složitých zjevů. a) Budiž p_1 pravděpodobnost, že se vyskytne zjev E_1, p_2, pravděpodobnost, že se vyskytne E_2 a p_3, pravděpodobnost, že se vyskytne E_3. Při tom nepředpokládáme nic o tom, jsou-li zjevy E_i závislé jeden na druhém, nevylučují-li se vzájemně; současně s jedním z nich může se vyskytnouti i druhý z nich nebo oba zbývající. Budiž pak p_k' pravděpodobnost, že E_k se vyskytne sám (bez druhých dvou); $k = 1, 2, 3$. Obdobně označíme znakem $p_{ik} = p_{ki}$ pravděpodobnost, že se vyskytnou E_i a E_k (bez ohledu na to, vyskytne-li se třetí zjev) a znakem $p_{ik}' = p_{ki}'$ pravděpodobnost, že se vyskytnou jen E_i a E_k s vyloučením třetího; $i, k = 1, 2, 3, i \neq k$. Konečně budiž p_{123} pravděpodobnost, že se vyskytnou všechny tři zjevy E_1, E_2, E_3.

Poněvadž E_1 se vyskytne buď sám, nebo doprovázen zjevem E_2, nebo doprovázen zjevem E_3, nebo konečně doprovázen oběma zjevy E_2 i E_3, platí rovnice

$$p_1 = p_1' + p_{12}' + p_{13}' + p_{123}.$$

Poněvadž zjevy E_1 a E_2, vyskytnou-li se oba, buď nejsou nebo jsou doprovázeny zjevem E_3, je

$$p_{12} = p_{12}' + p_{123}, \quad p_{13} = p_{13}' + p_{123}$$

a máme, vyloučíce z první rovnice p_{12}' a p_{13}',

$$p_1' = p_1 - p_{12} - p_{13} + p_{123}$$

$$p_{12}' = p_{12} - p_{123}, \quad p_{13}' = p_{13} - p_{123}.$$

Podobné rovnice bychom odvodili záměnou indexů pro p_2', p_3' a pro p_{23}'.

Pravděpodobnost $P^{(1)}$, že se vyskytne jediný ze zjevů E_1, E_2, E_3 bez druhých dvou (není dáno, který), je

$$P^{(1)} = p_1' + p_2' + p_3' =$$

$$= p_1 + p_2 + p_3 - 2(p_{12} + p_{13} + p_{23}) + 3p_{123}.$$

Pravděpodobnost, že se vyskytnou jen dva z uvažovaných tří zjevů bez třetího (není dáno, které dva), je

$$P^{(2)} = p_{12}' + p_{13}' + p_{23}' = p_{12} + p_{13} + p_{23} - 3p_{123}.$$

Pravděpodobnost P, že se vyskytne aspoň jeden ze zjevů E_1, E_2 a E_3, je

$$P = P^{(1)} + P^{(2)} + p_{123} =$$

$$= p_1 + p_2 + p_3 - (p_{12} + p_{13} + p_{23}) + p_{123}.$$

b) Vezmeme-li v úvahu n různých zjevů $E_1, E_2, \ldots, E_n$, lze odvoditi rovnice, obdobné předešlým, které vyjadřují různé pravděpodobnosti jako funkce pravděpodobností p_i (že se vyskytne vůbec zjev E_i), p_{ik} (že se vůbec vyskytnou dva zjevy E_i a E_k), p_{ikl}, (že se vyskytnou vůbec tři zjevy E_i, E_k a E_l) atd. Budiž p_i' pravděpodobnost, že se vyskytne jen zjev E_i s vyloučením ostatních, p_{ik}' pravděpodobnost, že se vyskytnou jen E_i a E_k s vyloučením ostatních; $P^{(1)}$ budiž pravděpodobnost, že se vyskytne jen jeden ze zjevů E_i (není dáno, který), $P^{(2)}$ pravděpodobnost, že se vyskytnou jen dva z nich (není dáno, které); budiž konečně P pravděpodobnost, že se vyskytne aspoň jeden ze zjevů E_1, $E_2, \ldots, E_n$.

Platí tyto vztahy.*)

*) *G. Castelnuovo:* Calcolo delle Probabilità, seconda ediz. I., 29, Bologna. — *H. Poincaré:* Calcul des Probabilités, 2ième édition, 60; Paris, 1912. — *M. Fréchet:* Recherches théoriques modernes sur la Théorie des probabilités, premier livre, 12, Paris, 1937. O řadě podobných úloh jedná spis *M. Fréchet:* Les probabilités associées à un système d'évenements compatibles et dépendants (Actualités scientifiques et industrielles No 859, 942, Paris, 1940—43).

$$p_1' = p_1 - \sum_i p_{1i} + \sum_{ik} p_{1ik} \cdots \qquad (1)$$

$$p_{12}' = p_{12} - \sum_i p_{12i} + \sum_{ik} p_{12ik} \cdots \qquad (2)$$

$$P^{(1)} = \sum_i p_i' = \sum_i p_i - 2\sum_{ik} p_{ik} + 3\sum_{ikl} p_{ikl} \cdots \qquad (3)$$

$$P^{(2)} = \sum_{ik} p_{ik}' = \sum_{ik} p_{ik} - (3)_2 \sum_{ikl} p_{ikl} + (4)_2 \sum_{iklm} p_{iklm} \cdots \qquad (4)$$

$$P = \sum_i P^{(i)} = \sum_i p_i - \sum_{ik} p_{ik} + \sum_{ikl} p_{ikl} \cdots \qquad (5)$$

kde součty vztahují se ke všem kombinacím indexů 1, 2, 3, ..., n bez opakování. K odůvodnění rovnic (1) a (2) připomeňme samozřejmé rovnice

$$p_1 = p_1' + \sum_i p_{1i}' + \sum_{ik} p_{1ik}' + \cdots$$

$$p_{1i} = p_{1i}' + \sum_k p_{1ik}' + \sum_{kl} p_{1ikl}' + \cdots \qquad (6)$$

$$p_{1ik} = p_{1ik}' + \sum_l p_{1ikl}' + \sum_{lm} p_{1iklm}' + \cdots; \qquad (7)$$

zde značí $p_1'_{ik}, p_1'_{ikl}, \ldots$ pravděpodobnosti, že se vyskytnou jen zjevy E_1, E_i, E_k, resp. jen E_1, E_i, E_k, E_l atd. Utvoříce sečítáním rovnic tvaru (6) a (7) součty

$$\sum_i p_{1i}, \quad \sum_{ik} p_{1ik}$$

a vyloučíce pak součty

$$\sum_i p_{1i}', \quad \sum_{ik} p_{1ik}'$$

dostaneme vztahy (1) a (2).

c) V osudí je n koulí očíslovaných čísly 1, 2, ..., n. Koule se vytahují postupně jedna po druhé, vytažené se nevkládají zpět. Jak velká je pravděpodobnost P, že aspoň v jednom z těchto n tahů se shodne jeho pořadové číslo s číslem vytažené koule?

Budiž p_i pravděpodobnost, že při i-tém tahu vyjde koule s číslem i; p_{ik}, že při i-tém vyjde i-tá a při k-tém k-tá atd. Pak je podle (5)

$$P = \sum_i p_i - \sum_{ik} p_{ik} + \sum_{ikl} p_{ikl} \dots$$

Zde je pro libovolné $i, k, \dots$

$$p_i = \frac{1}{n}, \quad p_{ik} = \frac{1}{n(n-1)}, \quad p_{ikl} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}, \dots$$

a tedy

$$P = n \cdot \frac{1}{n} - (n)_2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} + (n)_3 \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \dots$$

nebo

$$P = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

43. Vytvořující funkce. V některých úlohách je výhodné považovati hledané pravděpodobnosti $P_1, P_2, P_3, \dots$ za koeficienty určitého mnohočlenu $F(x)$ proměnné x. Dovedeme-li sestrojiti mnohočlen $F(x)$, určíme hledané pravděpodobnosti jako jeho koeficienty.

Tak pravděpodobnost P_N, že k kostkami vrhneme součet ok rovný N, je podle odst. 7e rovna koeficientu při x^N v rozvoji mnohočlenu $F(x)$, kde

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{6^k}(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^k = \\ &= P_k x^k + P_{k+1} x^{k+1} \dots + P_{6k} x^{6k}. \end{aligned} \quad (1)$$

V tomto rozvoji se nevyskytují mocniny proměnné x nižší než k-tá ani vyšší než $6k$-tá. Patrně je

$$P_k = \frac{1}{6^k}, \quad P_{6k} = \frac{1}{6^k}.$$

Jiný příklad poskytuje rozvoj dvojčlenu podle binomické věty v úloze o pravděpodobnostech při opětovaných pokusech. Budiž p pravděpodobnost, že se pokus podaří, a položme

$$F(x) = (px + 1 - p)^n = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \dots + P_n x^n; \quad (2)$$

koeficient při x^m, totiž

$$P_m = (n)_m p^m (1 - p)^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n,$$

je podle (1) odst. 13 roven pravděpodobnosti, že v řadě n pokusů se vyskytne m zdařených a $(n - m)$ nezdařených.

Funkce $F(x)$ (mnohočlen), jejíž koeficienty se rovnají hledaným pravděpodobnostem, se nazývá podle Laplacea *vytvořující funkcí*. Mnohočlen (1) je vytvořující funkcí v úloze o součtu ok na k kostkách, mnohočlen (2) je vytvořující funkcí v úloze o opakovaných pokusech.

44. Andréův princip souměrnosti. a) Vraťme se k úloze o opakovaných pokusech (odst. 13) za předpokladu, že $p = \frac{1}{2}$. Někdo hází penízem; padne-li líc, získá 1 Kčs, padne-li rub, ztrácí 1 Kčs. Budiž n počet hodů v jedné „partii",

m ... počet hodů, kdy peníz padne na líc
m' ... počet hodů, kdy peníz padne na rub $\qquad m + m' = n;$

úchylka h je definována rovnicí

$$h = m - \tfrac{1}{2}n,$$

takže

$$m = \tfrac{1}{2}n + h, \quad m' = \tfrac{1}{2}n - h. \quad (1)$$

Hráčův zisk na konci partie o n hodech je

$$m - m' = 2h. \quad (2)$$

Pravděpodobnost P_m, že v partii o n hodech bude m hodů příznivých (hodů na líc) je podle (1) odst. 13 pro $p = \frac{1}{2}$;

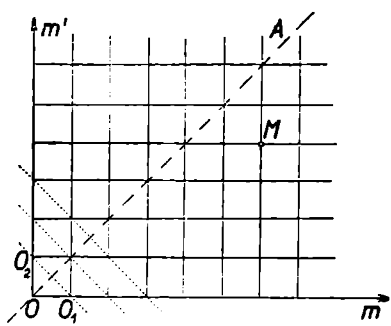
$$P_m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{(m+m')!}{m!m'!} \cdot \frac{1}{2^{m+m'}}.$$

V tomto vzorci je první činitel, totiž

$$\frac{(m + m')!}{m!m'!} \tag{3}$$

roven počtu partií o celkovém počtu $m + m'$ hodů s m hody příznivými; 2^n je počet všech možných různých partií o n hodech.

Znázorněme všechny možné partie diagramem (obr. 21). Na osy Om a Om' naneseme, počínajíce bodem O, stejně veliké díly o délce a; vedeme pak dělícími body rovnoběžky k osám, takže se celá rovina rozdělí na čtvercovou síť. První hod budiž znázorněn úsečkou OO_1, padne-li peníz na líc, a úsečkou OO_2, padne-li na rub. Každý další hod bude znázorněn úsečkou o délce a rovnoběžnou buď s Om nebo s Om' podle toho, padne-li peníz na líc nebo na rub. Obrazem partie bude lomená čára začínající v O a končící v bodě M o souřadnicích m, m'. Počet hodů v partii je $m + m' = n$ (v obrazci je bod M volen tak, že $m = 6$, $m' = 4$, $n = 10$). Podle (2) je hráčův zisk odpovídající takové partii roven $m - m'$ (pro zobrazený bod M je $m - m' = 2$). Pohybujeme-li se po lomené čáře od O směrem k M, jdeme vždy buď v kladném směru Om nebo v kladném směru Om', nikdy v záporném. Úhrnný počet všech lomených čar takto sestrojených, které začínají v O a končí v $M(m, m')$, se rovná výrazu (3). Kdybychom ke každému vrcholu sítě připsali příslušnou hodnotu výrazu (3), dostali bychom Pascalův trojúhelník (viz odst. 3c); vrchol trojúhelníka je v bodě O a jednotlivé řádky ve schematu na str. 11 odpovídající hodnotám $n = 1$, $n = 2$,



Obr. 21.

$n = 3$, jeví se v obr. 21 jako příčky kolmé k OA (první tři jsou v obrazci vytečkovány).

b) Sledujme, jak se postupně mění hráčův zisk průběhem partie znázorněné lomenou čarou OM: jak veliký je po prvním hodu, jak po druhém atd. Zisk může býti po některých hodech roven nule (když příslušný vrchol lomené čáry leží na OA) nebo záporný (když příslušný vrchol leží nad úsečkou OA); leží-li příslušný vrchol pod OA, je zisk kladný.

Položme si otázku: Je-li bod M pod OA (jako v obr. 21), kolika lomenými čarami lze spojiti O s $M(m, m')$ tak, aby celá čára zůstala (nehledě k bodu O) pod OA? Jinými slovy: kolik partií, každá o $m + m'$ hodech, má tu vlastnost, že průběhem partie zůstává zisk stále kladný a že na konec má hodnotu $2h = m - m'$, kde m je počet příznivých hodů a m' počet nepříznivých? (m a m' jsou daná celá čísla, $m > m'$).

D. André rozřešil úlohu tím, že vzal v úvahu ke každé lomené čáře OM, která protíná úsečku OA, čáru k ní souměrnou podle OA. Budiž x hledaný počet lomených čar OM, které neprotínají OA. Nechť O_1 je bod $(a, 0)$ a O_2 bod $(0, a)$; viz obr. 21. Počet všech čar, které začínají v O_2 a končí v M, je podle (3) roven

$$\frac{(m + m' - 1)!}{m!(m' - 1)!}. \tag{4}$$

Tyto všechny čáry protínají OA. Je-li P poslední průsečík čáry s OA, nahraďme její část omezenou body O_2 a P čarou souměrně položenou podle OA. Tak dostaneme čáru O_1M, která protíná OA. Počet všech čar OM, které protínají OA a z nichž každá začíná buď úsečkou OO_1 nebo úsečkou OO_2, rovná se tedy dvojnásobně vzatému číslu (4); abychom dostali x, odečteme od (3) dvojnásobně vzaté číslo (4):

$$x = \frac{(m+m')!}{m!m'!} - 2\frac{(m+m'-1)!}{m!(m'-1)!} =$$
$$= \frac{(m+m')! - 2m'(m+m'-1)!}{m!m'!},$$

nebo po snadné úpravě

$$x = \frac{(m+m')!}{m!m'!} \cdot \frac{m-m'}{m+m'}. \tag{5}$$

Pravděpodobnost, že průběhem partie, která se skládá z m příznivých hodů a m' nepříznivých ($m > m'$), bude míti hráč stále kladný zisk, je

$$Q_m = \frac{(m+m')!}{m!m'!} \cdot \frac{1}{2^{m+m'}} \cdot \frac{m-m'}{m+m'}.$$

nebo

$$Q_m = P_m \cdot \frac{m-m'}{m+m'},$$

kde P_m značí pravděpodobnost, že partie se skládá z m příznivých hodů a m' nepříznivých bez podmínky, že zisk má býti stále kladný průběhem partie.

c) Právě řešená úloha je v jádře totožná s Andréovou *úlohou o volebním osudí*: při volbě dostane z celkového počtu hlasů kandidát A m hlasů a kandidát B m' hlasů ($m > m'$). Jak velká je pravděpodobnost P, že, když hlasovací lístky jsou jeden po druhém vybírány z osudí, je ve prospěch kandidáta A stále většina vytažených lístků?

Počet všech možných pořadí, ve kterých mohou býti lístky jeden po druhém z osudí vybrány, rovná se výrazu (3); počet příznivých pořadí, t. j. těch, při kterých má A stále většinu, je roven číslu x danému rovnicí (5). Je tedy hledaná pravděpodobnost P rovna

$$P = \frac{(m+m')!}{m!m'!} \cdot \frac{m-m'}{m+m'} : \frac{(m+m')!}{m!\,m'!},$$

nebo*)
$$P = \frac{m - m'}{m + m'}.$$

45. Gaussův zákon chyb. a) Měříme-li n. př. nějakou délku milimetrovým měřítkem, odečteme na něm celé milimetry a odhadneme desetiny milimetru. Při měřeních se dopouštíme chyb**); kdo je zběhlý v měření, nedělá velké chyby, nýbrž jen malé (v desetinách mm). Statistiky chyb (zejména v astronomii a v geodesii při měření úhlů) ukázaly, že pravděpodobnost chyby je tím menší, čím je chyba větší. Docházíme tak k pojmu „zákona chyb", který, připouštíme-li, že hustota pravděpodobnosti je spojitá funkce $f(x)$ velikosti x chyby, je vyjádřen takto: Pravděpodobnost, že chyba leží mezi x a $x + dx$, kde dx značí nekonečně malou veličinu, je vyjádřena vzorcem
$$f(x)\,dx.$$

Gauss volil funkci $f(x)$ zvláštním způsobem, který lze pochopiti, připustíme-li tento předpoklad: Každá chyba x rovná se algebraickému součtu malých „elementárních" chyb, které mají všechny stejnou prostou velikost ε; připouštíme, že pravděpodobnost, že chyba je kladná rovná

---

*) O Andréově úloze psali v pařížských Comptes Rendus de l'Académie des Sciences t. 105 (1887) *J. Bertrand* (p. 369, 437), *E. Barbier* (407), *D. André* (436). Mimo to: *G. Dumas* (Nouvelles Annales de math. 4e série, 7, 1907, p. 546, *Bertrand* (Calcul des probabilités, Paris, 1889, p. 17), *H. Poincaré* (Calcul des probabilités, Paris, 1912, 2e édition, p. 44), *Czuber* (Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung, 3 Aufl., Leipzig, 1914—21, Bd. I, p. 37). Andréův princip souměrnosti má význam pro řešení rozmanitých úloh; viz o tom *P. Lévy:* Sur les processus stochastiques homogènes (Compositio mathematica vol. 7, 1939, p. 283—339).

**) Chybou nazýváme rozdíl pravé hodnoty z hodnoty nalezené měřením. Předpokládáme ovšem, že lze pravou hodnotu zjistiti. Tak n. př. stanovíme-li součet úhlů v trojúhelníku tak, že změříme jeho tři úhly a pak tato tři měrná čísla sečteme, je chyba v součtu rovna tomu, kolik chybí do „pravé hodnoty", t. j. do 180°. V jiných případech musíme vhodnými kombinacemi měření odvoditi „pravé hodnoty".

se pravděpodobnosti, že je záporná ($= \frac{1}{2}$). Přirovnáváme zde vznik elementární chyby k tahu z osudí, ve kterém je tolik bílých koulí kolik černých. Tah bílé koule znamená elementární chybu ε kladnou, tah černé zápornou $-\varepsilon$. Pravděpodobnost chyby bude tedy totéž co pravděpodobnost úchylky (viz. odst. 15), která se vyskytuje v serii obsahující n tahů; po každém tahu klademe vytaženou kouli zpět do osudí. Úchylka h souvisí s chybou x podle rovnice

$$x = 2h\varepsilon.$$

neboť celkem $\frac{1}{2}n + h$ tahů vede k elementární chybě $+ \varepsilon$, a $\frac{1}{2}n - h$ tahů k chybě $- \varepsilon$. Je-li n velmi veliké číslo a není-li h řádově větší než $\sqrt{n}$, platí podle rovnice (3) odst. 20, (klademe $p = \frac{1}{2}$)

$$P(h_1 < h < h_2) = \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \,.\, e^{-\frac{2u^2}{n}} \, du;$$

položíme-li

$$h = \frac{x}{2\varepsilon}, \quad h_1 = \frac{x_1}{2\varepsilon}, \quad h_2 = \frac{x_2}{2\varepsilon}, \quad u = \frac{y}{2\varepsilon}, \quad du = \frac{dy}{2\varepsilon},$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2n\varepsilon}},$$

obdržíme

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2y^2} \, dy,$$

což je *Gaussův zákon chyb*. Pravděpodobnost, že chyba leží v mezích x až $x + dx$, je

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2} \, dx. \tag{1}$$

Veličina k se nazývá *přesností* měření. Křivka udávající „hustotu pravděpodobnosti“

$$f(x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\,e^{-k^2x^2},$$

jako funkci velikosti chyby x má tvar „zvonu“ (viz odst. 20b, obr. 1). Pravděpodobnost, že chyba má absolutní hodnotu nejvýše rovnou x, je rovna integrálu

$$\int_{-x}^{+x} \frac{k}{\sqrt{\pi}}\,e^{-k^2y^2}\,dy = 2\int_0^{kx} \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}}\,dz = \Theta(kx); \tag{2}$$

$\Theta(t)$ značí funkci dříve zavedenou (odst. 21a).

b) Střední hodnota chyby je (viz. odst. 32a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kx}{\sqrt{\pi}}\,e^{-k^2x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,e^{-k^2x^2}\right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 0.$$

Střední hodnota čtverce chyby je (viz rovnici (2) odst. 19 pro $m = 1$).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kx^2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-k^2x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{k^2\sqrt{\pi}}\,e^{-y^2}\,dy =$$

$$= \frac{2}{k^2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} y^2\,e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{2k^2}.$$

je tedy tím větší, čím je k menší. Odmocnina z této hodnoty se nazývá *střední kvadratická chyba* μ. Je tedy

$$\mu = \frac{1}{k\sqrt{2}},\quad k = \frac{1}{\mu\sqrt{2}}. \tag{3}$$

Pravděpodobnost, že chyba je nejvýše rovna μ, je podle (2)

$$\Theta(k\mu) = \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \Theta(0{,}707\ldots) = 0{,}683\ldots.$$

Pravděpodobnost, že chyba je rovna nejvýše 3μ, je

$$\Theta(3k\mu) = \Theta\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \Theta(2{,}121\ldots) = 0{,}997\ldots.$$

Pravděpodobnost, že chyba je rovna nejvýše 4μ, je

$$\Theta(4k\mu) = \Theta\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right) = \Theta(2{,}82\ldots) = 0{,}9999\ldots.$$

c) Buďte X a Y dvě veličiny závislé na náhodě. První nechť se řídí Gaussovým zákonem chyb s přesností k, druhá pak Gaussovým zákonem s přesností l; je tedy

$$P(x < X < x + \mathrm{d}x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\, \mathrm{e}^{-k^2x^2}\, \mathrm{d}x,$$

$$P(y < Y < y + \mathrm{d}y) = \frac{l}{\sqrt{\pi}}\, \mathrm{e}^{-l^2y^2}\, \mathrm{d}y.$$

Hledáme pravděpodobnost $P = P\ (z < X + Y < z + \mathrm{d}z)$, že součet $X + Y$ jest obsažen v mezích z a $(z + \mathrm{d}z)$ předpokládajíce, že X a Y jsou dvě vzájemně nezávislé veličiny. Pak je podle věty o násobení pravděpodobností

$$P = \iint\limits_{A} \frac{kl}{\pi}\, \mathrm{e}^{-k^2x^2-l^2y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

kde integrační obor A v rovině Oxy je dán nerovnostmi

$$z < x + y < z + \mathrm{d}z.$$

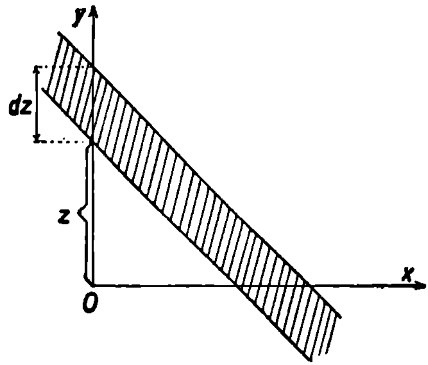
Je to pruh omezený dvěma rovnoběžkami o směrnici $= -1$, jejichž průsečíky s osou Oy mají pořadnice z a $z + \mathrm{d}z$ (viz obr. 22; obor A je vyčárkován).

Zaveďme na místo y novou integrační proměnnou u rovnicí

$$y = u - x,$$

takže v transformovaném integrálu budou integračními proměnnými x a u. Poněvadž

$$\frac{D(x,y)}{D(x,u)} = \begin{vmatrix} 1, & 0 \\ -1, & 1 \end{vmatrix} = 1,$$



Obr. 22.

je

$$P = \frac{kl}{\pi} \int\limits_{u=z}^{z+dz} \int\limits_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k^2x^2-l^2(u-x)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}u.$$

Zaveďme dále místo x proměnnou ξ rovnicí

$$x \sqrt{k^2 + l^2} - \frac{l^2 u}{\sqrt{k^2 + l^2}} = \xi.$$

Vychází

$$P = \frac{kl}{\pi\sqrt{k^2 + l^2}} \int\limits_{z}^{z+dz} \mathrm{e}^{-\frac{k^2l^2u}{k^2+l^2}} \, \mathrm{d}u \, . \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi^2} \, \mathrm{d}\xi;$$

poněvadž pak (viz odst. 19a)

$$\int_z^{z+dz} f(u)\,\mathrm{d}u = f(z)\,\mathrm{d}z, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \sqrt{\pi},$$

je

$$P = \frac{H}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-H^2z^2}\,\mathrm{d}z, \tag{4}$$

kde

$$\frac{1}{H^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{l^2}. \tag{5}$$

Smysl rovnice (4) vyjádříme takto:

Součet $X + Y$ dvou veličin, které se řídí Gaussovým zákonem s přesnostmi k resp. l, řídí se týmž zákonem s přesností H, která je dána rovnicí (5).

Kdybychom nazvali μ a μ' střední kvadratické chyby pro X resp Y a μ'' střední kvadratickou chybu pro $(X + Y)$, dostali bychom — viz (3) — rovnici (5) ve tvaru

$$\mu''^2 = \mu^2 + \mu'^2.$$

Ve zvláštním případě, že X i Y řídí se Gaussovým zákonem s toutéž přesností k, je $h = k$ a tedy

$$\frac{1}{H^2} = \frac{2}{k^2}, \quad H = \frac{k}{\sqrt{2}};$$

místo (4) máme pak

$$P(z < X + Y < z + \mathrm{d}z) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{k^2z^2}{2}}\,\mathrm{d}z. \tag{6}$$

46. Dvě věty o střední hodnotě chyby. a) Rozdělme měřenou délku na n částí (přibližně stejných) o délkách $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a hledejme střední hodnotu čtverce chyby, které se dopustíme, vezmeme-li součet nalezených hodnot (x_i značí hodnotu nalezenou měřením délky a_i) za hledanou délku. Předpokládáme, že s. h. chyby při měření každé jednotlivé délky a_i je rovna nule a že s. h. čtverce chyby při měření délky a_i je rovna konstantě μ^2 a že jednotlivá měření délek a_i nezávisí jedno na druhém. Z rovnic

$$\text{s. h. } (a_i - x_i) = 0, \quad \text{s. h. } (a_i - x_i)^2 = \mu^2, \tag{1}$$

plyne výpočtem obdobným tomu, který jsme provedli v odst. 15b, že hledaná s. h. čtverce chyby je

$$\text{s. h. } [(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)]^2 =$$
$$= \text{s. h. } [(a_1 - x_1) + (a_2 - x_2) + \ldots + (a_n - x_n)]^2 = n\mu^2.$$

Tedy: *Střední hodnota čtverce chyby, která vznikne, rozdělíme-li danou délku na n části, měříme-li každou část zvlášť a výsledky sečteme, je n-krát větší než střední hodnota čtverce chyby vzniklé při měření jednotlivé části.*

b) Měříme-li nějakou délku a n-krát a je-li při každém jednotlivém měření (x_i značí hodnotu nalezenou při i-tém měření)

$$\text{s. h. } (a - x_i) = 0, \quad \text{s. h. } (a - x_i)^2 = \mu^2, \tag{2}$$

jak veliká je s. h. čtverce chyby, které se dopustíme, vezmeme-li aritmetický střed měření

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

za pravou délku?

Hledaná s. h. čtverce chyby je

$$\text{s. h. } \left[a - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right]^2 =$$
$$= \text{s. h. } \frac{[(a - x_1) + (a - x_2) + \ldots + (a - x_n)]^2}{n^2}.$$

Výpočet obdobný výpočtu v odst. 15 b vede k výsledku, že hledaná s. h. je rovna

$$\frac{\mu^2}{n}.$$

Tedy: *Měříme-li nějakou délku n-krát a vezmeme-li za hledanou hodnotu aritmetický střed všech měření, je střední hodnota čtverce chyby, které se tak dopustíme, n-krát menší než střední hodnota čtverce chyby vzniklé při jediném měření.*

Poznamenejme, že obě věty dokázané v tomto odstavci byly dokázány jen na základě nezávislosti chyb vznikajících při jednotlivých měřeních a na základě rovností (1) resp. (2); platí obecně, i když rozdělení chyb se neřídí Gaussovým zákonem uvedeným v odst. 45.*)

47. Borelova věta o spočetných pravděpodobnostech. a) V neomezené posloupnosti navzájem nezávislých pokusů budiž pravděpodobnost, že se pokus zdaří, rovna $\frac{1}{2}$. Pak je podle (1) odst. 13 ($p = \frac{1}{2}$)

$$P_m = (n)_m \cdot \frac{1}{2^n}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

pravděpodobnost, že mezi prvními n pokusy bude m zdařených.

$$A_0 = \lim_{n\to\infty} P_0 = 0$$

je pravděpodobnost, že se nezdaří ani jeden pokus.

$$A_1 = \lim_{n\to\infty} P_1 = 0$$

je pravděpodobnost, že se zdaří jen jeden pokus atd. Obecně je pro $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$A_k = \lim_{n\to\infty} P_k = \lim_{n\to\infty} \left[(n)_k \cdot \frac{1}{2^n}\right] = 0 \tag{1}$$

pravděpodobnost, že se zdaří právě k pokusů. Pravděpodobnost, že bude více než m zdařených mezi prvními n pokusy,

---

*) Čtenář najde podrobnější výklad o theorii chyb v knize: *B. Kladivo:* Měřické chyby a jejich vyrovnávání (Cesta k vědění, sv. 24, 1943); viz též *Zd. Horák:* Praktická fysika, 1947.

je $$1-(P_0+P_1+P_2+\dots+P_m).$$

Roste-li n do nekonečna, je vzhledem k (1)

$$1-(A_0+A_1+A_2+\dots)=1 \tag{2}$$

pravděpodobnost, že v neomezené řadě bude nekonečně mnoho zdařených pokusů.

b) Budiž v neomezené řadě nezávislých pokusů $\frac{1}{2}$ pravděpodobnost, že se první zdaří, $(\frac{1}{2})^2$ pravděpodobnost, že se druhý zdaří, $(\frac{1}{2})^3$ pravděpodobnost, že se třetí zdaří atd. Pravděpodobnost, že se nezdaří ani jeden pokus je

$$A_0=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\dots; \tag{3}$$

nekonečný součin je konvergentní, má určitou kladnou hodnotu. Pravděpodobnost A_1, že se jen jeden pokus zdaří, dostaneme, nahradíce v součinu A_0 jeden činitel $\left(1-\frac{1}{2^m}\right)$ činitelem $\frac{1}{2^m}$, a sečtouce pak všechny tak vzniklé součiny.

Tedy

$$A_1=A_0\cdot\sum_{m=1}\frac{\frac{1}{2^m}}{1-\frac{1}{2^m}}=A_0\cdot\sum_{m=1}\frac{1}{2^m-1}.$$

Pravděpodobnost, že se zdaří jen dva pokusy, je

$$A_2=A_0\cdot\sum_{m,n}\frac{\frac{1}{2^m\,.\,2^n}}{\left(1-\frac{1}{2^m}\right)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}=$$

$$=A_0\cdot\sum_{m,n}\frac{1}{(2^m-1)(2^n-1)},$$

kde součet se vztahuje ke všem kombinacím dvou různých kladných celých čísel m, n. Podobně se určí pravděpodobnosti A_3, A_4, ... , že se zdaří jen tři nebo jen čtyři pokusy atd.

Máme tedy

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots = A_0 \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m - 1} + \right.$$

$$+ \sum_{m,n} \frac{1}{(2^m - 1)(2^n - 1)} + \sum_{m,n,p} \frac{1}{(2^m - 1)(2^n - 1)(2^p - 1)} +$$

$$\left. + \ldots) \right] = A_0 \left(1 + \frac{1}{2 - 1}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2 - 1}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3 - 1}\right) \ldots . \tag{4}$$

Poněvadž pak

$$\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 + \frac{1}{2^n - 1)}\right) = \frac{(2^n - 1)2^n}{2^n(2^n - 1)} = 1,$$

je vzhledem k (3) a (4)

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots = 1,$$

a tedy pravděpodobnost, že v neomezené řadě bude nekonečně mnoho zdařených pokusů, je

$$1 - (A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots) = 0. \tag{5}$$

c) Příklady právě uvedené objasňují obecnou větu, podle níž levá strana rovnice (4) nebo (5) nemůže míti jinou hodnotu než nulu nebo jednu: *V neomezené posloupnosti nezávislých pokusů budiž p_k pravděpodobnost, že k-tý pokus se podaří;* $0 < p_k < 1$, $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. *Je-li řada*

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots ,$$

divergentní, je pravděpodobnost P, že se vyskytne nekonečně mnoho zdařených pokusů, rovna 1; je-li ona řada konvergentní, je $P = 0$.*)

*) *E. Borel:* Sur les probabilités dénombrables (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo t. 27, 1909; viz též *E. Borel:* Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications, T. I. Fascicule 1. (Paris, 1924), p. 24.