Počítání s neúplnými čísly

III. Zkrácené počítání

In: Karel Hruša (author): Počítání s neúplnými čísly. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1949. pp. 30–51.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403249

III. ZKRÁCENÉ POČÍTÁNÍ

9. Chyba primární a sekundární. V této kapitole odvodíme pravidla t. zv. zkráceného počítání. K tomuto způsobu počítání jsme vedeni zkušeností, že při vypočítávání výsledků obvyklým způsobem dostáváme značný počet míst, jež obsahují číslice nezaručené, a proto zbytečné. Ve výpočtu lze však vynechati určité elementární výkony a uspořádati jej tak, abychom nezaručených číslic dostali co nejméně. Takto uspořádané početní výkony se označují názvem *zkrácené počítání*.

Jak jsme již ukázali v předcházející kapitole (a jak ukážeme i v následující) střední aproximaci r_1 správného výsledku R dostaneme, provedeme-li výpočet tohoto výsledku ze středních aproximací daných čísel obvyklým (nezkráceným) způsobem počítání, jak jsme se mu naučili ve škole. Při tom vzniká chyba $R - r_1$, kterou jsme v odst. 2 nazvali (prostá) *chyba střední aproximace* a kterou budeme také nazývati *chyba primární*. Jestliže však početní operace upravíme tak, že místo zbytečně přesného čísla r_1 dostaneme jiným početním postupem méně přesné číslo r_2, vzniká nová chyba, jež je dána rozdílem $r_1 - r_2$ a pro niž zavedeme název *chyba výpočtu* čili *chyba sekundární*. Nám ovšem jde o to, oč se číslo r_2 liší od přesného výsledku R, čili o rozdíl

$$R - r_2 = (R - r_1) + (r_1 - r_2).$$

Tento rozdíl se jmenuje *chyba úhrnná* (*totální*). Jak je vidno, chyba úhrnná je rovna součtu chyby primární a chyby sekundární.

Je-li ϱ_1 horní hranice chyby primární, t. j. je-li $|R - r_1| \leqq \varrho_1$, a je-li ϱ_2 horní hranice chyby sekundární, t. j. je-li $|r_1 - r_2| \leqq \varrho_2$, je horní hranice chyby úhrnné

$$|R - r_2| = |(R - r_1) + (r_1 - r_2)| \leqq |R - r_1| + |r_1 - r_2| \leqq \leqq \varrho_1 + \varrho_2.$$

V předcházející kapitole jsme vyšetřili horní hranici chyby primární při některých jednoduchých početních výkonech; v této kapitole podrobíme rozboru chybu sekundární při týchž početních výkonech.

Především víme, že chyba primární závisí toliko na středních aproximacích daných čísel a na jejich chybách prostých; jsou-li daná čísla aproximována s určitými chybami, je tím již určena velikost primární chyby. Chceme-li ji zmenšit, musíme užíti přesnějších aproximací. Naproti tomu velikost chyby sekundární závisí na tom, jak uspořádáme početní výkon, t. j. kolik a jaké elementární výkony vynecháme a do jaké míry se tak přiblížíme nezkrácenému početnímu výkonu. Proto lze velikost sekundární chyby zpravidla libovolně snížiti tak, aby neměla příliš velký vliv na úhrnnou chybu výsledku.

Cvičení. 18. Nutná a dostačující podmínka pro to, aby absolutní hodnota úhrnné chyby nebyla větší než absolutní hodnota primární chyby, je, aby chyba primární a sekundární byly opačných znamének a aby absolutní hodnota sekundární chyby nebyla větší než dvojnásobek absolutní hodnoty primární chyby. Dokažte! — [Označíme-li primární chybu p, sekundární chybu s, má platit $|p + s| \leqq |p|$. Vezměte v úvahu všechny kombinace znamének, jichž mohou nabýti čísla $p + s$ a p.]

10. Zkrácené sčítání a odčítání. Ježto budeme vyšetřovati pouze sekundární chybu, můžeme předpokládati, že čísla $A, B, C, \ldots$, s nimiž provádíme výpočty, jsou dána přesně. Je-li dáno číslo A, lze vždy najít takového mocnitele r, aby

$$10^r \leqq A < 10^{r+1}.$$

Dělíme-li číslo A číslem 10^r, vyjde podíl a_r a zbytek z_r; a_r je číslo celé, pro něž platí $1 \leqq a_r \leqq 9$, a vedle toho $0 \leqq z_r < 10^r$. Dělíme-li dále číslo z_r číslem 10^{r-1}, vyjde podíl a_{r-1} a zbytek z_{r-1}; přitom a_{r-1} je číslo celé, pro něž platí $0 \leqq a_{r-1} \leqq 9$, a $0 \leqq z_{r-1} < 10^{r-1}$. Tak lze pokračovati libovolně daleko. Provedeme-li takových kroků celkem p, dostaneme nakonec čísla a_{r-p+1}, z_{r-p+1}, jež mají obdobné vlastnosti jako čísla a_{r-1}, z_{r-1}. Označme stručně $r - p + 1 = k$.

Pak lze celý postup vyjádřit řadou rovnic, jichž je $p = r - k + 1$:

$$\begin{aligned}
A &= a_r \, . \, 10^r + z_r \, , \\
z_r &= a_{r-1} \, . \, 10^{r-1} + z_{r-1}, \\
z_{r-1} &= a_{r-2} \, . \, 10^{r-2} + z_{r-2}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
z_{k+1} &= a_k \, . \, 10^k + z_k \, .
\end{aligned}$$

Sečtením všech těchto rovnic vyjde

$$A = a_r \, . \, 10^r + a_{r-1} \, . \, 10^{r-1} + a_{r-2} \, . \, 10^{r-2} + \dots + \\ + a_k \, . \, 10^k + z_k.$$

Čísla $a_r, a_{r-1}, a_{r-2}, \dots, a_k$, jichž je $p = r - k + 1$, jsou *číslice*, jimiž je A vyjádřeno v desítkové soustavě číselné. O číslici a_r říkáme, že je řádu r-tého, a_{r-1} je řádu $r - 1$ atd. Číslo z_k, pro něž platí $0 \leqq z_k < 10^k$, budeme nazývati *zbytek čísla A po číslici řádu k-tého*. Označme A_k číslo

$$A_k = a_r \, . \, 10^r + a_{r-1} \, . \, 10^{r-1} + a_{r-2} \, . \, 10^{r-2} + \dots + a_k \, . \, 10^k.$$

Je to číslo, které vznikne, zaokrouhlíme-li číslo A bez opravy na $p = r - k + 1$ míst; jeho poslední číslice je řádu k-tého. Vzhledem k vlastnostem čísla z_k platí

$$A_k \leqq A < A_k + 10^k, \text{ t. j. } A = A_k + 0{,}5 \, . \, 10^k \pm 0{,}5 \, . \, 10^k.$$

Je-li dáno n čísel $A, B, C, \dots$ a máme-li utvořit součet

$$A + B + C + \dots,$$

můžeme daná čísla nahraditi čísly $A_k, B_k, C_k, \dots$, jež vzniknou zaokrouhlením bez oprav tak, aby poslední číslice byla řádu k-tého. Utvoříme-li z nich součet

$$A_k + B_k + C_k + \dots,$$

lze jej považovati za dolní aproximaci hledaného součtu. Střední aproximace je pak o $n \, . \, 0{,}5 \, . \, 10^k$ větší a horní hranice prosté chyby není podle odst. 4 větší než $n \, . \, 0{,}5 \, . \, 10^k$. Je tedy

$$A + B + C + \dots = A_k + B_k + C_k + \dots + \\ + n \, . \, 0{,}5 \, . \, 10^k \pm n \, . \, 0{,}5 \, . \, 10^k.$$

Odtud plyne pravidlo: *Sečteme-li z n daných sčítanců jen ty číslice, jež jsou řádu k-tého a vyššího, dostaneme dolní aproximaci součtu s chybou, jejíž horní hranice nepřesahuje číslo $n\,.\,0{,}5\,.\,10^k$ (zkrácené sčítání bez braní oprav).*

Příklad. Níže napsaná čísla chceme sečísti počínajíc jednotkami řádu — 1. Vynecháme tedy všecky číslice, jež jsou řádu nižšího než — 1, t. j. ty, jež jsou napravo od svislé čáry, a vzniklý součet zvětšíme o $5\,.\,0{,}5\,.\,10^{-1} = 0{,}25$. Výpočet je tento:

$$
\begin{array}{r|l}
27{,}5 & 268 \\
3{,}2 & 8973 \\
412{,}5 & 27 \\
42{,}0 & 368 \\
0{,}0 & 75 \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{485{,}2 + 0{,}25 \pm 0{,}25,}
\end{array}
$$

což lze psáti ve tvaru $485{,}4 \pm 0{,}3$ nebo také $485{,}5 \pm 0{,}3$. Přesná hodnota je 485,45533.

Poznámka. Abychom snížili horní hranici chyby, lze postupovati také tak, že sečteme ještě číslice řádu o 1 nižšího, tento součet zaokrouhlíme (s opravou) na jednotky toho řádu, na které chceme počítat, a takto vzniklé číslo, jež se nazývá *oprava*, k součtu přičteme (*zkrácené sčítání s opravou*). Tím se dolní aproximace součtu stane neúplným číslem s prostou chybou, jejíž horní hranice je $0{,}5\,.\,10^k$, řád sekundární chyby se tím sníží o 1, neboť vlastně zanedbáváme jednotky teprve řádu k — 2. Provedeme-li takto týž výpočet znovu, dostaneme

$$
\begin{array}{r|l}
27{,}5 & 268 \\
3{,}2 & 8973 \\
412{,}5 & 27 \\
42{,}0 & 368 \\
0{,}0 & 75 \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{485{,}4 \pm 0{,}05 + 0{,}025 \pm 0{,}025,}
\end{array}
$$

což zaokrouhleno dá $485{,}43 \pm 0{,}08$. Počítáme: $7 + 3 + 2 + 8 + 2 = 22$, oprava 2; $2 + 0 + 0 + 5 + 2 + 5 = 14$ atd. Je ovšem otázka, není-li výhodnější počítat při téže práci raději součet bez braní oprav o jedno místo přesněji; v našem případě vyjde $485{,}44 \pm 0{,}03$.

Jde-li o rozdíl dvou čísel $A = A_k + 0{,}5 \,.\, 10^k \pm 0{,}5 \,.\, 10^k$, $B = B_k + 0{,}5 \,.\, 10^k \pm 0{,}5 \,.\, 10^k$, dostáváme

$$A - B = (A_k + 0{,}5 \,.\, 10^k) - (B_k + 0{,}5 \,.\, 10^k) \pm$$
$$\pm\, 2 \,.\, 0{,}5 \,.\, 10^k = A_k - B_k \pm 10^k.$$

Zcela obdobně pro algebraický součet n členů kladných $A, B, \ldots$ a m členů záporných $P, Q, \ldots$ vyjde

$$A + B + \ldots - P - Q - \ldots = A_k + B_k + \ldots - P_k - Q_k - \ldots +$$
$$+ (n - m)\, 0{,}5 \,.\, 10^k \pm (m + n)\, 0{,}5 \,.\, 10^k.$$

Cvičení. **19.** Provedeme-li zkrácené sčítání nejvýše 20 sčítanců počínajíc řádem $k - 2$ a zaokrouhlíme-li (s opravou) poslední dvě místa výsledku tak, aby poslední číslice byla řádu k-tého, je vzniklé číslo rovno číslu, jež vznikne, zaokrouhlíme-li (s opravou) přesný výsledek tak, aby poslední číslice byla řádu k-tého, nejvýše snad s jedinou výjimkou, je-li první číslice vynechaná při zaokrouhlování čtyřka nebo pětka. Dokažte! — [Viz cvič. **3.**]

20. Jestliže před sčítáním zaokrouhlíme každého sčítance s opravou tak, aby jeho nejnižší číslice byla řádu k-tého, a takto zaokrouhlené sčítance sečteme, dostaneme výsledek s touž horní hranicí prosté chyby, jako kdybychom daná čísla sečtli zkráceně bez oprav počínajíc číslicemi řádu k-tého. Dokažte!

11. Zkrácené násobení. Buďte dána dvě čísla

$$A = a_r \,.\, 10^r + a_{r-1} \,.\, 10^{r-1} + a_{r-2} \,.\, 10^{r-2} + \ldots +$$
$$+ a_{r-p+1} \,.\, 10^{r-p+1},$$

$$B = b_s \,.\, 10^s + b_{s-1} \,.\, 10^{s-1} + b_{s-2} \,.\, 10^{s-2} + \ldots +$$
$$+ b_{s-q+1} \,.\, 10^{s-q+1},$$

z nichž prvé má p cifer a jeho nejvyšší číslice je řádu r-tého a druhé má q cifer a jeho nejvyšší číslice je řádu s-tého. Značky $a_r, a_{r-1}, \ldots, a_{r-p+1}, b_s, b_{s-1}, \ldots, b_{s-q+1}$ značí číslice a indexy značí řády těchto číslic. Znásobíme-li spolu daná dvě čísla, lze jejich součin $C = AB$ psát

$$
\begin{array}{l|l}
C = a_r b_s \,.\, 10^{r+s} + a_{r-1} b_s \,.\, 10^{r+s-1} + & \\
\quad + a_{r-2} b_s \,.\, 10^{r+s-2} + \quad \ldots + a_{k-s} b_s \,.\, 10^k & + \ldots + \\
\qquad\qquad + a_r b_{s-1} \,.\, 10^{r+s-1} + & \\
\quad + a_{r-1} b_{s-1} \,.\, 10^{r+s-2} + \ldots + a_{k-s+1} b_{s-1} \,.\, 10^k & + \ldots + \\
\quad + a_r \quad b_{s-2} \,.\, 10^{r+s-2} + \ldots + a_{k-s+2} b_{s-2} \,.\, 10^k & + \ldots + \\
\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + a_r \quad b_{k-r} \,.\, 10^k & + \ldots + \\
 & + \ldots ,
\end{array}
$$

kde jsou pod sebou psány součiny cifer, jež udávají počet jednotek téhož řádu. V každém řádku napsaného schematu je určitý násobek čísla A.

Zahrneme-li do násobení pouze jednotky řádu k-tého a vyššího, t. j. ponecháme-li pouze členy stojící vlevo od svislé čáry naznačené v našem schematu, dostaneme číslo, jež je menší než součin AB, neboť při tom zanedbáváme členy řádů nižších. Takto vzniklé číslo označíme c_1 a budeme je považovati za dolní aproximaci součinu C.

Ježto dále platí pro každé m

$$10^m > a_{m-1} \,.\, 10^{m-1} + a_{m-2} \,.\, 10^{m-2} + a_{m-3} \,.\, 10^{m-3} + \ldots ,$$

kde $a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots$ jsou číslice řádu $m - 1$, $m - 2, \ldots$, lze tvrdit, že součet členů v jednotlivých řádcích výše uvedeného schematu za svislou čarou je menší než $b_s \,.\, 10^k$, $b_{s-1} \,.\, 10^k$, $b_{s-2} \,.\, 10^k, \ldots$, takže platí

$$
\begin{array}{l}
C < a_r b_s \,.\, 10^{r+s} + a_{r-1} b_s \,.\, 10^{r+s-1} + \\
\quad + a_{r-2} b_s \,.\, 10^{r+s-2} + \ldots + (a_{k-s} + 1) b_s \,.\, 10^k + \\
\qquad\qquad + a_r b_{s-1} \,.\, 10^{r+s-1} + \\
\quad + a_{r-1} b_{s-1} \,.\, 10^{r+s-2} + \ldots + (a_{k-s+1} + 1) b_{s-1} \,.\, 10^k + \\
\quad + a_r \quad b_{s-2} \,.\, 10^{r+s-2} + \ldots + (a_{k-s+2} + 1) b_{s-2} \,.\, 10^k + \\
\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + (a_r \quad + 1) b_{k-r} \,.\, 10^k + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 100 \,.\, 10^{k-1},
\end{array}
$$

při čemž poslední člen vpravo je větší než součet všech ostatních členů v dalších řádcích. Považujme tento výraz za horní aproximaci c_2 součinu C. Je tedy

$$c_2 - c_1 = (b_s + b_{s-1} + b_{s-2} + \dots + b_{k-r} + 10) \, . \, 10^k .$$

Abychom snadno nalezli číslo c_1, uspořádáme výpočet takto: *Napíšeme číslice násobitele pod číslice násobence v opačném pořádku tak, aby nejvyšší číslice násobitele* (b_s *řádu* s*-tého*) *přišla pod číslici* a_{k-s} *řádku* ($k-s$)*tého. Každou číslici násobitele násobíme tu číslici násobence, jež stojí přímo nad ní, a všecky ostatní, jež od ní stojí vlevo. Takto vzniklé součiny napíšeme tak, aby přišly pod sebe poslední číslice na pravém kraji* (*řádu* k*-tého*) *a sečteme. Vzniklé číslo je dolní aproximací součinu; přitom horní hranice prosté chyby je menší než tolik jednotek posledního řádu, kolik činí polovina součtu těch číslic násobitele, jichž jsme při násobení užili, zvětšeného o 10*, *nebo* (vzhledem ke komutativnosti násobení) *horní hranice prosté chyby je také menší, než tolik jednotek posledního řádu, kolik činí polovina součtu těch číslic násobence, jichž jsme při násobení použili, zvětšeného o 10 (zkrácené násobení bez oprav).*

Příklad. Násobme čísla $\sqrt{2} \doteq 1{,}4142136$, $\pi \doteq 3{,}1415927$ tak, aby ve výsledku vyšly číslice řádu -5 a vyššího. Tu je $r = s = 0$, $k = -5$. Napíšeme tedy nejvyšší číslici násobitele pod tu číslici násobence, jež je řádu -5. Výpočet vypadá takto:

$$\begin{array}{r}
1{,}4142136 \times 3{,}1415927 \\
729\,51413 \phantom{\times 3{,}1415927} \\
\hline
4\,24263 \phantom{\times 3{,}1415927} \\
14142 \phantom{\times 3{,}1415927} \\
5656 \phantom{\times 3{,}1415927} \\
141 \phantom{\times 3{,}1415927} \\
70 \phantom{\times 3{,}1415927} \\
9 \phantom{\times 3{,}1415927} \\
\hline
4{,}44281 + 12 \, . \, 10^{-5} \pm 12 \, . \, 10^{-5} .
\end{array}$$

Ježto součet číslic násobence, jichž jsme použili k výpočtu a jež jsou v násobenci podtrženy, je menší než součet číslic násobitele k výpočtu použitých, je horní hranice prosté chyby menší než

$$\tfrac{1}{2}(1 + 4 + 1 + 4 + 2 + 1 + 10) \,.\, 10^{-5} \doteq 12 \,.\, 10^{-5}.$$

Tuto hodnotu třeba k nalezené dolní aproximaci přičísti, takže je

$$\sqrt{2} \,.\, \pi = 4{,}44293 \pm 12 \,.\, 10^{-5}.$$

Přitom jsme zanedbali (nepatrnou) chybu primární, jež je menší než $0{,}5 \,.\, 10^{-7} \,.\, 1{,}4 + 0{,}5 \,.\, 10^{-7} \,.\, 3{,}1 \doteq 2{,}3 \,.\, 10^{-7}$.

Umístění desetinné čárky ve výsledku lze provésti buď podle pravidla, že řád součinu nejvyšších cifer činitelů je roven součtu řádů těchto nejvyšších cifer, nebo mechanicky, uvědomíme-li si, že řád nejnižší číslice výsledku je roven součtu řádů kterékoli číslice násobence a té číslice násobitele, jež je pod ní v našem schematu napsána.

Poznámka. Horní hranici prosté chyby při zkráceném násobení lze snížiti tím, že se násobí i číslice, která stojí o jedno místo dále vpravo nad číslicí násobitele, kterou právě násobíme, a vzniklý součin těchto dvou číslic zaokrouhlíme na číslici jedinou, již přičteme k součinu číslic nad sebou stojících (*zkrácené násobení s braním oprav*). To je totéž, jako kdybychom zkráceným násobením bez oprav počítali o jedno místo více a v každém řádku poslední číslici zaokrouhlili. Tím se vypočtená dolní aproximace součinu sama stane neúplným číslem s horní hranicí chyby $n \,.\, 0{,}5 \,.\, 10^k$, kde $n = s - (k - r - 1) + 1 = r + s - k + 2$ je počet řádků,*) neboť v každém řádku může vzniknout chyba až o polovinu jednotky posledního místa; naproti tomu horní hranice (sekundární) chyby se tím sníží, ježto jde vlastně o zanedbané jednotky řádu $k - 1$. Provedeme-li podle toho výše vypočtený příklad znovu, dostaneme

---

*) Tím, že násobíme číslicí stojící o jedno místo dále vpravo, zvětší se počet řádků o 1; v posledním řádku může být po zaokrouhlení nula.

$$\begin{array}{r l}
1{,}4142136 \times 3{,}1415927 & \\
729\;51413 & \\
\hline
4\;24264 & \\
14142 & \\
5657 & \\
141 & \\
70 & \\
13 & \\
\hline
4{,}44287 & \pm\; 3{,}5 \,.\, 10^{-5} + 13 \,.\, 10^{-6} \pm 13 \,.\, 10^{-6}.
\end{array}$$

Přitom počítáme prvý řádek: $3 \,.\, 3 = 9$, oprava 1, $3 \,.\, 1 = 3$, $3 + 1 = 4$ a zapíšeme 4 atd. Ježto $n = 7$, je horní hranice chyby vzniklé zaokrouhlováním $7 \,.\, 0{,}5 \,.\, 10^{-5} = 3{,}5 \,.\, 10^{-5}$. Horní hranice chyby vzniklé zanedbáním členů nižšího řádu je $\frac{1}{2}(1 + 4 + 1 + 4 + 2 + + 1 + 3 + 10) \,.\, 10^{-6} = 13 \,.\, 10^{-6}$ a musíme ji k vypočtené dolní aproximaci přičísti. Je tedy celkem

$$\sqrt{2} \,.\, \pi = 4{,}44288 \pm 5 \,.\, 10^{-5}.$$

I tu je otázka, je-li tento způsob ekonomický a není-li výhodnější počítat raději bez oprav o jedno místo přesněji. Výpočet není o nic delší:

$$\begin{array}{r l}
1{,}4142136 \times 3{,}1415927 & \\
72\;951413 & \\
\hline
4\;242639 & \\
141421 & \\
56568 & \\
1414 & \\
705 & \\
126 & \\
2 & \\
\hline
4{,}442875 & + 13 \,.\, 10^{-6} \pm 13 \,.\, 10^{-6}.
\end{array}$$

Přesná hodnota je $\sqrt{2} \,.\, \pi \doteq 4{,}44288294$.

Cvičení. **21.** Pokud při zkráceném násobení nenásobíme více než deseti číslicemi od nuly různými, nepřekročí horní hranice sekundární chyby součinu a) 50 jednotek posledního místa, počítáme-li zkráceně bez oprav, a b) 10 jednotek posledního místa, počítáme-li s braním oprav. Dokažte!

22. Součin dvou čísel, z nichž každé má méně než 10 číslic, vypočteme zkráceným násobením bez braní oprav, ve výsledku vynecháme dvě poslední číslice a poslední zbylou číslici zvětšíme o 1. Toto číslo se liší od střední aproximace součinu o méně než o polovinu jednotky posledního ponechaného místa. Dokažte!

23. Má-li sekundární chyba součinu být menší než ε jednotek m-tého řádu, stačí počítati tento součin zkráceným násobením bez braní oprav tak, aby nejnižší číslice součinu byla k-tého řádu, kde

$$k \leqq m + \log \frac{2\varepsilon}{s + 10};$$

přitom s je součet číslic jednoho činitele. Dokažte!

12. Zkrácené dělení. Nechť jsou dána dvě čísla A, B, o nichž budeme předpokládati, že

$$1 \leqq B < 10, \qquad B \leqq A < 10B.$$

Ponecháme-li v čísle A k desetinných míst a ostatní vynecháme, dostaneme číslo, jež označíme A_k; jeho nejnižší číslice je řádu — k-tého. Podobný smysl bude mít znak B_k. Je-li na př. $B = 3{,}14159\ldots$, je $B_0 = 3$, $B_1 = 3{,}1$, $B_2 = 3{,}14$, $B_3 = 3{,}141$ atd.

Je vidno, že platí

$$B_0 \leqq B_1 \leqq B_2 \leqq \ldots \leqq B_{k-1} \leqq B_k;$$

znaménko rovnosti je přípustno jen mezi takovými dvěma čísly, z nichž druhé má na posledním místě nulu. Vedle toho je

$$B_i \leqq B \text{ pro každé } i.$$

Znaménko rovnosti platí jen tehdy, má-li číslo B na všech místech řádu nižšího než $-i$ vesměs nuly. Podobně je $A_i \leqq A$. Dále platí

$$B_0 + 1 \geqq B_1 + 10^{-1} \geqq B_2 + 10^{-2} \geqq \ldots \geqq$$
$$\geqq B_{k-1} + 10^{-(k-1)} \geqq B_k + 10^{-k};$$

znaménko rovnosti platí jen mezi takovými dvěma čísly, z nichž druhé má na posledním místě devítku. Vedle toho je pro každé i

$$B_i + 10^{-i} > B, \text{ čili } B_i > B - 10^{-i} \text{ a také } A_i > A - 10^{-i}.$$

Podle předpokladu je $B \leqq A$, pak musí také $B_i \leqq A_i$ pro každé i. A_i je totiž největší číslo mající i desetinných míst, jež není větší než A, podobně B_i je největší číslo mající i desetinných míst, jež není větší než B. Ale $B_i \leqq B \leqq A$.

Kdyby bylo $B_i > A_i$, nebylo by A_i největší číslo mající i desetinných míst, jež je menší než A, nýbrž B_i by bylo větší.

Naproti tomu z předpokladu $A < 10B$ nikterak neplyne, že by také musilo $A_i < 10B_i$; může se stát, že $A_i \geqq 10B_i$, ale vždy je $A_i < 10B_i + 10^{-i+1}$, neboť $A_i \leqq A$, $B < B_i + 10^{-i}$ pro každé i.

Dělíme-li číslo A_k číslem B_k, dostaneme podíl c_0 a zbytek z_0, t. j.

$$A_k = c_0 B_k + z_0, \text{ kde } 0 \leqq z_0 < B_k.$$

Podle toho, co bylo právě řečeno, je

$$1 \leqq \frac{A_k}{B_k} = c_0 + \frac{z_0}{B_k} < 10 + \frac{10^{-k+1}}{B_k}.$$

Odečteme-li ode všech členů této nerovnosti číslo $z_0 : B_k$, které je menší než 1, vidíme, že

$$0 < 1 - \frac{z_0}{B_k} \leqq c_0 < 10 + \frac{10^{-k+1}}{B_k} - \frac{z_0}{B_k} \leqq 10 + \frac{10^{-k+1}}{B_k}.$$

Předpokládáme-li, že $k > 0$ a že c_0 je celé, je c_0 vázáno nerovností

$$1 \leqq c_0 \leqq 10.$$

Přitom nejnižší číslice zbytku z_0 je řádu $-k$.

Utvořme nyní výraz $10z_0$ a dělme jej číslem B_{k-1}. Ježto $B_{k-1} + 10^{-(k-1)} \geqq B_k + 10^{-k}$, je $0 \leqq 10z_0 < 10B_k \leqq \leqq 10B_{k-1} + 10^{-k+2} - 10^{-k+1}$. Je-li podíl c_1 a zbytek z_1, t. j. je-li

$$10z_0 = c_1 B_{k-1} + z_1, \text{ kde } 0 \leqq z_1 < B_{k-1},$$

je také

$$0 \leqq \frac{10z_0}{B_{k-1}} = c_1 + \frac{z_1}{B_{k-1}} < 10 + \frac{10^{-k+2} - 10^{-k+1}}{B_{k-1}}.$$

Odečteme-li ode všech členů této nerovnosti číslo $z_1 : B_{k-1}$, které je menší než 1 vyjde

$$-1 < -\frac{z_1}{B_{k-1}} \leqq c_1 < 10 + \frac{10^{-k+2} - 10^{-k+1}}{B_{k-1}} - \frac{z_1}{B_{k-1}} \leqq$$
$$\leqq 10 + \frac{10^{-k+2} - 10^{-k+1}}{B_{k-1}}.$$

Je-li $k > 1$ a je-li také c_1 číslo celé, je

$$0 \leqq c_1 \leqq 10.$$

Pak je nejnižší číslice zbytku z_1 řádu $-(k-1)$. Obdobně lze v dělení pokračovati dále. Nakonec dojdeme k dělení číslem B_0. Dostáváme tak $k+1$ celých čísel c_i a $k+1$ zbytků z_i, pro něž platí $k+1$ rovnic

$$\left.\begin{array}{lll} A_k & = c_0 \; B_k & + z_0 \\ 10z_0 & = c_1 \; B_{k-1} & + z_1 \\ 10z_1 & = c_2 \; B_{k-2} & + z_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 10z_{k-2} & = c_{k-1} B_1 & + z_{k-1} \\ 10z_{k-1} & = c_k \; B_0 & + z_k \end{array}\right\} \text{kde} \left\{\begin{array}{ll} 1 \leqq c_0 \leqq 10, & 0 \leqq z_0 < B_k \\ 0 \leqq c_1 \leqq 10, & 0 \leqq z_1 < B_{k-1} \\ 0 \leqq c_2 \leqq 10, & 0 \leqq z_2 < B_{k-2} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ 0 \leqq c_{k-1} \leqq 10, & 0 \leqq z_{k-1} < B_1 \\ 0 \leqq c_k \leqq 18,{}^{*)} & 0 \leqq z_k < B_0 \end{array}\right.$$

Násobíme-li tyto rovnice postupně čísly $1 = 10^0$, 10^{-1}, $10^{-2}, \ldots, 10^{-(k-1)}, 10^{-k}$ a sečteme, zruší se čísla $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}$ a vyjde rovnice

$$\left.\begin{array}{l} A_k = c_0 B_k + c_1 B_{k-1} \cdot 10^{-1} + c_2 B_{k-2} \cdot 10^{-2} + \ldots + \\ \quad + c_{k-1} B_1 \cdot 10^{-(k-1)} + c_k B_0 \cdot 10^{-k} + z_k \cdot 10^{-k}, \end{array}\right\} (*)$$

při čemž z_k je jedna číslice, pro niž platí $0 \leqq z_k < B_0$. Pak také $z_k + 1 \leqq B_0 \leqq B$. Ježto dále

$$A - 10^{-k} < A_k,\ B_k \leqq B,\ B_{k-1} \leqq B,$$
$$B_{k-2} \leqq B, \ldots, B_1 \leqq B,\ B_0 \leqq B,$$

---

*) Je totiž $B_1 + 10^{-1} \leqq B_0 + 1$, takže $z_{k-1} < B_0 + 0{,}9$; proto $c_k B_0 + z_k = 10 z_{k-1} < 10 B_0 + 9$, čili $c_k < 10 + \frac{9 - z_k}{B_0}$. Pro $B_0 = 1$ je $z_k = 0$, takže $c_k < 19$.

plyne z rovnice (*)

$$A - 10^{-k} < (c_0 + c_1 \,.\, 10^{-1} + c_2 \,.\, 10^{-2} + \ldots + \\ + c_{k-1} \,.\, 10^{-(k-1)} + c_k \,.\, 10^{-k})B + z_k \,.\, 10^{-k},$$

čili

$$\frac{A}{B} < c_0 + c_1 \,.\, 10^{-1} + c_2 \,.\, 10^{-2} + \ldots + c_{k-1} \,.\, 10^{-(k-1)} + \\ + (c_k + 1) \,.\, 10^{-k},$$

neboť $z_k + 1 \leqq B$. Naproti tomu jest

$$A \geqq A_k,\ B_k > B - 10^{-k},\ B_{k-1} > B - 10^{-(k-1)},$$
$$B_{k-2} > B - 10^{-(k-2)}, \ldots,\quad B_1 > B - 10^{-1},\quad B_0 > B - 1,$$

$z_k \geqq 0$, takže z rovnice (*) dostáváme také

$$A > (c_0 + c_1 \,.\, 10^{-1} + c_2 \,.\, 10^{-2} + \ldots + c_{k-1} \,.\, 10^{-(k-1)} + \\ + c_k \,.\, 10^{-k})\, B - (c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{k-1} + c_k) \,.\, 10^{-k},$$

čili

$$\frac{A}{B} > c_0 + c_1 \,.\, 10^{-1} + c_2 \,.\, 10^{-2} \ldots + c_{k-1} \,.\, 10^{-(k-1)} +$$
$$+ (c_k + 1) \,.\, 10^{-k} - \left(\frac{c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{k-1} + c_k}{B} + 1\right) . \, 10^{-k}.$$

Lze tedy tvrdit, že výraz

$$c_0 + c_1 \,.\, 10^{-1} + c_2 \,.\, 10^{-2} + \ldots + c_{k-1} \,.\, 10^{-(k-1)} + (c_k + 1) \,.\, 10^{-k}$$

je horní aproximací podílu $A : B$, při čemž horní hranice chyby je menší než

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{k-1} + c_k}{B} + 1\right) . \, 10^{-k}.$$

Kdyby byla nejvyšší číslice čísla B řádu s-tého, lze psát $B = \bar{B} \,.\, 10^s$, kde $1 \leqq \bar{B} < 10$, a pak lze položit $A = \bar{A} \,.\, 10^r$ tak, aby $\bar{B} \leqq \bar{A} < 10\bar{B}$. Při tom r je řád nejvyšší číslice čísla A nebo je to řád jeho druhé číslice zleva. Pak je

$$\frac{A}{B} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}} \cdot 10^{r-s}.$$

Pro číslo $\bar{A} : \bar{B}$ platí všecky výše odvozené výsledky; platí tedy i pro číslo $A : B$ s tou změnou, že řád každé číslice třeba zvýšit o $r - s$.

Předcházející úvahy jsou podkladem zkráceného dělení. Při něm postupujeme takto: *Z dělitele B ponecháme určitý počet číslic; z dělence A jich ponecháme tolik, aby číslo, jež vzniklo z B, bylo v něm obsaženo aspoň jednou a ne více než desetkrát, při čemž nebereme zřetel na desetinnou čárku. Dělíme-li upravené číslo A upraveným číslem B, dostaneme první číslici podílu. Pak vynecháme v upraveném děliteli poslední číslici a takto upraveným dělitelem dělíme zbytek předcházejícího dělení. Tím vyjde druhá číslice podílu. Nato vynecháme v děliteli další číslici a pokračujeme v dělení tak dlouho, pokud to lze, t. j. až zbude v děliteli jen jediná číslice. Zvětšíme-li poslední číslici výsledku o 1, dostaneme horní aproximaci hledaného podílu s chybou, jejíž horní hranice je menší než polovina ciferného součtu podílu děleného dělitelem a zvětšeného o 1 (zkrácené dělení bez oprav).* Budiž ještě poznamenáno, že při zkráceném dělení se může stát, že některá „číslice" podílu vyjde rovna deseti, což není možné při dělení obyčejném. Pak napíšeme místo ní nulu a předcházející číslici zvýšíme o jednotku. Poslední „číslice" by mohla být dokonce i rovna 18.

Příklad. Počítejme podíl $\sqrt{2} : \pi$ z aproximací $\sqrt{2} \doteq 1{,}4142136$, $\pi \doteq 3{,}1415927$, při čemž se v děliteli omezíme na číslice řádu -5 a vyššího. Dostaneme

$$\begin{array}{rl}
\overset{-1}{1},414213|6 : \overset{0}{3},\underline{1\,4\,1\,5\,9}|27 = & \\
157577 & \\
502 & = \overset{-1}{0},450160 + 1 \cdot 10^{-6} - 3 \cdot 10^{-6} \pm 3 \cdot 10^{-6}. \\
188 & \\
2 &
\end{array}$$

Číslo 1414213 dělíme číslem 314159 (desetinné čárky si nevšímáme); vyjde prvá číslice podílu 4 a zbytek 157577, který dělíme číslem 31415. Dostaneme další číslici podílu 5 a zbytek 502. Ten dělíme číslem 3141 atd. až poslední zbytek 2 dělíme číslem 3. Vyjde poslední číslice podílu 0, kterou zvýšíme o 1. Vynechané číslice v děliteli označujeme zatržením. Horní hranice chyby je

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4+5+0+1+6+0}{3,14}+1\right) \doteq 3 \text{ jednotky posledního místa.}$$

Drobné číslice nadepsané nad jednotkami čísel $\bar{A}$, $\bar{B}$ udávají řády těchto cifer a slouží k určení řádu nejvyšší číslice podílu. Ježto $-1-0=-1$, je nejvyšší číslice výsledku řádu -1. Je tedy celkem

$$\sqrt{2} : \pi = 0,450158 \pm 3 \,.\, 10^{-6}.$$

Přitom jsme zanedbali (nepatrnou) chybu primární, která je menší než

$$\left(\frac{0,5 \,.\, 10^{-7}}{1,41} + \frac{0,5 \,.\, 10^{-7}}{3,14}\right) . \, 0,450 \doteq 2,3 \,.\, 10^{-8}.$$

Poznámka: Podobně jako ostatní početní výkony provádí se někdy i zkrácené dělení *s branim oprav*, t. j. do výpočtu bereme o jednu číslici více a výsledky výkonů s těmito přidanými číslicemi zaokrouhlujeme na jedno místo a přičítáme je jako opravu. To znamená, že v rovnici (*) se zvýší indexy čísel A_k, B_k, B_{k-1}, $B_{k-2}, \ldots, B_1, B_0$ o jednu a v číslech A_{k+1}, c_0B_{k+1}, $c_1B_k \,.\, 10^{-1}$, $c_2B_{k-1} \,.\, 10^{-2}, \ldots,$ $c_{k-1}B_2 \,.\, 10^{-(k-1)}$, $c_kB_1 \,.\, 10^{-k}$, jež tak vzniknou, se zaokrouhlí poslední číslice, jež je řádu $-(k-1)$. Tím se každé z těchto čísel nahradí neúplným číslem s horní hranicí chyby $0,5 \,.\, 10^{-k}$. Rovnice (*) nabude tak tvaru

$$A_{k+1} \pm 0,5 \,.\, 10^{-k} = c_0B_{k+1} + c_1B_k \,.\, 10^{-1} + c_2B_{k-1} \,.\, 10^{-2} + \\ + \ldots + c_{k-1}B_2 \,.\, 10^{-(k-1)} + c_kB_1 \,.\, 10^{-k} \pm (k+1) \,.\, 0,5 \,.\, 10^{-k} + \\ + z_k \,.\, 10^{-k},$$

z níž odvodíme jednak

$$\frac{A}{B} < c_0 + c_1 \,.\, 10^{-1} + c_2 \,.\, 10^{-2} + \ldots + c_{k-1} \,.\, 10^{-(k-1)} +$$
$$+ (c_k + 1) \,.\, 10^{-k} \pm \frac{(k+2) \,.\, 0{,}5}{B} \,.\, 10^{-k},$$

neboť $z_k < B_1$, $z_k + 10^{-1} \leqq B_1 \leqq B$, a jednak

$$\frac{A}{B} > c_0 + c_1 \,.\, 10^{-1} + c_2 \,.\, 10^{-2} + \ldots + c_{k-1} \,.\, 10^{-(k-1)} +$$
$$+ (c_k + 1) \,.\, 10^{-k} - \left(\frac{c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{k-1} + c_k}{10B} + 1\right) \,.\, 10^{-k} \pm$$
$$\pm \frac{(k+2) \,.\, 0{,}5}{B} \,.\, 10^{-k}.$$

V posledním členu číslo $k + 2$ značí počet číslic podílu různých od nuly zvětšený o 1. Je tedy podíl $A : B$ vyjádřen střední aproximací

$$c_0 + c_1 \,.\, 10^{-1} + c_2 \,.\, 10^{-2} + \ldots + c_{k-1} \,.\, 10^{-(k-1)} +$$
$$+ (c_k + 1) \,.\, 10^{-k} -$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{k-1} + c_k}{10B} + 1\right) \,.\, 10^{-k},$$

při čemž horní hranice chyby je menší než

$$\frac{1}{2}\left(\frac{c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{k-1} + c_k}{10B} + 1 + \frac{k+2}{B}\right) \,.\, 10^{-k}.$$

Zvýšení přesnosti, jehož tím dosáhneme, je celkem nepatrné, proto je výhodnější raději počítat bez oprav o jedno místo přesněji. Pro srovnání uvádíme oba způsoby výpočtu:

```
1,414213|6 : 3,14159|27 ≈ 0,450158*)
  157576
     496
     182
      25
       0
```

*) Znaménka ≈ budeme užívati pro přibližnou rovnost, nestarajíce se o chybu, jež touto aproximací vzniká.

$$
\begin{array}{l}
1{,}4142136 : 3{,}141592|7 \approx 0{,}4501584 \\
\phantom{1{,}}1575768 \\
\phantom{1{,}414}4973 \\
\phantom{1{,}414}1832 \\
\phantom{1{,}4142}262 \\
\phantom{1{,}41421}14 \\
\phantom{1{,}414213}2
\end{array}
$$

V prvém případě je

$$\sqrt{2} : \pi = 0{,}450159 - 0{,}9 \,.\, 10^{-6} \pm (0{,}9 + 1{,}0) \,.\, 10^{-6} = \\ = 0{,}450158 \pm 2 \,.\, 10^{-6},$$

kdežto ve druhém po téměř stejné námaze

$$\sqrt{2} : \pi = 0{,}4501585 - 5 \,.\, 10^{-7} \pm 5 \,.\, 10^{-7} = 0{,}4501580 \pm 5 \,.\, 10^{-7}$$

s přesností daleko větší.

Cvičení. **24**. Jestliže při zkráceném dělení bez oprav vyjde některá „číslice“ podílu rovna 10, následují za ní vesměs nuly nejvýše s výjimkou poslední číslice podílu. Dokažte! — [Uvědomte si, jaký zbytek může vyjíti, je-li některá číslice podílu rovna 10.]

25. Je-li dělitel větší než 4,5 a určíme-li zkráceným dělením bez oprav podíl na n míst, je horní hranice sekundární chyby menší než $n + 1$ jednotek posledního místa. Dokažte!

26. Jestliže při dělení stanovíme několik prvních číslic podílu dělením obyčejným a teprve další číslice dělením zkráceným, lze ve výrazu pro odhad horní hranice chyby vynechat ty číslice, jež byly stanoveny obyčejným dělením. Dokažte! — [Je-li obyčejným dělením stanoveno i číslic, je $B_k = B_{k-1} = B_{k-2} = \ldots = B_{k-i+1} = B$.]

13. Zkrácené odmocňování. Máme-li vypočítat $\sqrt[m]{A}$, předpokládejme, že jsme nějak již stanovili několik prvních číslic této odmocniny, při čemž poslední stanovená číslice buď řádu k-tého. Označme takto nalezené číslo písmenem B. To značí

$$\sqrt[m]{A} > B, \quad \text{ale} \quad \sqrt[m]{A} < B + 10^k,$$

čili

$$\sqrt[m]{A} = B + c, \quad \text{kde} \quad 0 < c < 10^k.$$

Kdyby bylo $c = 0$, bylo by přesně $\sqrt[m]{A} = B$. Umocněním a použitím binomické věty dostaneme z nalezené rovnice

$$A = B^m + m \,.\, B^{m-1}c + \binom{m}{2} B^{m-2}c^2 + \binom{m}{3} B^{m-3}c^3 + \ldots + c^m. \qquad (*)$$

Na pravé straně ponechme pouze prvé dva členy a ostatní, jichž je $m - 1$, vynechme. Tím se zmenší hodnota pravé strany, takže je

$$A > B^m + m \,.\, B^{m-1}c.$$

Odtud plyne

$$c < \frac{A - B^m}{m \,.\, B^{m-1}}.$$

Zavedeme-li označení

$$\frac{A - B^m}{m \,.\, B^{m-1}} = c_2,$$

dostáváme

$$c < c_2.$$

Jestliže za druhé na pravé straně rovnice (*) necháme prvé dva členy beze změny a píšeme-li v ostatních $m - 1$ členech c_2 místo c, zvětší se pravá strana rovnice, takže je

$$A < B^m + m \,.\, B^{m-1}c + \binom{m}{2} B^{m-2}c_2^2 + \binom{m}{3} B^{m-3}c_2^3 + \ldots + c_2^m.$$

Odtud dostáváme

$$c > c_2 - \frac{c_2}{m}\left[\binom{m}{2}\frac{c_2}{B} + \binom{m}{3}\left(\frac{c_2}{B}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{c_2}{B}\right)^{m-1}\right].$$

Tím jsme sevřeli číslo c mezi dvě meze, z nichž jednu můžeme považovati za horní a druhou za dolní aproximaci čísla c. Horní aproximace c_2 vyjde, dělíme-li zbytek při odmocňování $A - B^m$ číslem $m \,.\, B^{m-1}$.

Pro druhou odmocninu je $m = 2$. Podle toho máme

$$c < c_2 = \frac{A - B^2}{2B}, \; c > c_2 - \frac{c_2{}^2}{2B},$$

takže

$$c = c_2 - \frac{c_2{}^2}{4B} \pm \frac{c_2{}^2}{4B}.$$

Stanovíme tedy u druhé odmocniny určitý počet míst (třebas podle tabulek nebo odmocňováním) a pak lze další místa přibližně určiti tak, že zbytek při odmocňování $A - B^2$ dělíme dvojnásobným dosud známým částečným výsledkem. Tím dostaneme horní aproximaci druhé odmocniny. Horní hranice sekundární chyby je menší než druhá mocnina nalezeného podílu dělená čtyrnásobným částečným výsledkem.

Příklad 1. Určeme $\sqrt{10}$. Odmocněním nalezneme čtyři číslice výsledku:

$$\sqrt{10} > 3{,}162, \; \sqrt{10} < 3{,}163, \text{ při čemž } 10 - 3{,}162^2 = 0{,}001756.$$

Další místa dostaneme dělením

$$c_2 = 0{,}001756 : 6{,}324 \doteq 0{,}000277672.$$

Pro horní hranici chyby dostaneme odhad

$$\frac{c_2{}^2}{4B} < \frac{(28 \,.\, 10^{-5})^2}{4 \,.\, 3{,}16} \doteq 62 \,.\, 10^{-10}.$$

Je tedy celkem

$$\sqrt{10} = 3{,}162277672 - 62 \,.\, 10^{-10} \pm 5 \,.\, 10^{-10} \pm 62 \,.\, 10^{-10} = \\ = 3{,}162277666 \pm 7 \,.\, 10^{-9},$$

neboť výše vypočtený podíl je určen s chybou $5 \,.\, 10^{-10}$. Jestliže místo dělení obyčejného užijeme dělení zkráceného zvětší se chyba výsledku o chybu tohoto zkráceného dělení.

Příklad 2. Počítejme ještě $\sqrt{e}$, kde $e \doteq 2{,}71828$ je základ přirozených logaritmů. Odmocněním dostaneme čtyři místa výsledku 1,648 se zbytkem 0,002376. Primární chyba je podle odst. 8 menší než

$$\frac{0{,}5 \,.\, 10^{-5}}{2 \,.\, 2{,}7} \,.\, 1{,}65 \doteq 0{,}15 \,.\, 10^{-5}.$$

Další místa výsledku dostaneme zkráceným dělením bez oprav

$$\begin{array}{rcr} 0{,}002\overset{\cdot 4}{3}76 : \overset{0}{3}{,}296 & \approx & \left.\begin{array}{r} 0{,}000\overset{\cdot 4}{7}20 \\ 10 \end{array}\right\} \\ 688 & & \\ 30 & & \\ 0 & & \end{array}$$

s chybou, jež je menší než

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2+10}{3{,}3}+1\right) . \, 10^{-7} \doteq 2{,}3 \,.\, 10^{-7},^{*})$$

takže jest

$$c_2 = 0{,}0007211 - 2{,}3 \,.\, 10^{-7} \pm 2{,}3 \,.\, 10^{-7}.$$

Chyba vzniklá tím, že jsme odmocňování nahradili dělením, je menší než $c_2^2 : 4B = 52 \,.\, 10^{-8} : 6{,}6 \doteq 8 \,.\, 10^{-8}$. Je tedy celkem

$$\sqrt{e} = 1{,}6487211 - 2{,}3 \,.\, 10^{-7} - 0{,}8 \,.\, 10^{-7} \pm 15 \,.\, 10^{-7} \pm$$
$$\pm\, 2{,}3 \,.\, 10^{-7} \pm 0{,}8 \,.\, 10^{-7} = 1{,}648721 \pm 2 \,.\, 10^{-6}.$$

Podobně pro třetí odmocninu je $m = 3$, takže

$$c < c_2 = \frac{A - B^3}{3B^2}, \; c > c_2 - \frac{c_2^2}{B}\left(1 + \frac{c_2}{3B}\right).$$

Předpokládáme-li, že B má aspoň 3 číslice, z nichž poslední je řádu k-tého, je $B \geqq 100 \,.\, 10^k$, $c < 10^k$, takže

$$\frac{c_2}{3B} = \frac{(B+c)^3 - B^3}{9B^3} = \frac{c}{3B}\left(1 + \frac{c}{B} + \frac{c^2}{3B^2}\right) < 0{,}0034.$$

---

*) Ježto zkrácené dělení začíná teprve stanovením druhé číslice podílu, není třeba při odhadování horní hranice chyby brát zřetel na první číslici (viz cvič. **26**).

Ježto chybu neudáváme nikdy přesněji než na dvě místa, lze v dolní aproximaci čísla c člen $c_2 : 3B$ vynechat, takže je s dostatečnou přesností

$$c = c_2 - \frac{c_2^2}{2B} \pm \frac{c_2^2}{2B}.$$

Příklad 3. Podle toho dostáváme pro $\sqrt[3]{\pi}$, kde $\pi \doteq 3{,}14159$, z tabulky třetích mocnin přibližnou hodnotu $1{,}46 < \sqrt[3]{3{,}14159}$ se zbytkem 0,029454. Primární chyba je menší než $\frac{0{,}5 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 3{,}1} \cdot 1{,}5 \doteq 8 \cdot 10^{-7}$. Vedle toho je $1{,}46^2 = 2{,}1316$, takže zkráceným dělením dostaneme další místa výsledku

$$\begin{array}{l} c_2 = \overset{-3}{0{,}029454} : \overset{0}{6{,}3948} \approx \overset{-3}{0{,}0046061} \\ \qquad\quad 38748 \\ \qquad\qquad 384 \\ \qquad\qquad\quad 6 \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

s chybou menší než $\frac{1}{2}\left(\frac{6+6+1}{6{,}4} + 1\right) . 10^{-7} \doteq 1{,}5 . 10^{-7}$.

Tím, že jsme odmocňování nahradili dělením, vzniká chyba menší než $c_2^2 : 2B = 21 . 10^{-6} : 2{,}92 \doteq 7{,}2 . 10^{-6}$, takže je celkem

$$\sqrt[3]{\pi} = 1{,}4646062 - 1{,}5 . 10^{-7} - 72 . 10^{-7} \pm 8 . 10^{-7} \pm$$
$$\pm 1{,}5 . 10^{-7} \pm 72 . 10^{-7} = 1{,}464599 \pm 9 . 10^{-6}.$$

Poznámka. I tu by bylo lze při zkráceném dělení bráti opravy, ale zvýšení přesnosti by bylo většinou bezvýznamné.

Cvičení. **27.** První „číslice", která vznikne, jestliže počítáme další místa v odmocnině (nezkráceným) dělením, může být rovna 10. Dokažte! — [Vyjádřete c_2 s pomocí B a c a uvědomte si, jakých hodnot může B a c nabýti.]

28. Jestliže při hledání druhé odmocniny stanovíme odmocňováním n míst výsledku (při čemž $n \geqq 2$) a určíme-li další místa (nezkráceným) dělením, načež vzniklý podíl zaokrouhlíme na $n - 1$ místo (takže obdržíme celkem $2n - 1$ míst ve výsledku), je chyba výsledku menší než 0,8 jednotky stojící na posledním místě. Dokažte!

29. Počítáme-li týmž způsobem třetí odmocninu, mohlo by se v krajním případě státi, že horní hranice chyby překročí zcela nepatrně jednu jednotku posledního místa. Dokažte!